

**O'ZBEKSTAN RESPUBLIKASI JOQARI HA'M ORTA ARNAWLI
BILIMLENDIRIW MINISTRILIGI**

**BERDAQ ATINDAG'I QARAQALPAQ MA'MLEKETLIK
UNIVERSITETI**

Matematikalıq analiz kafedrası

Fizika-matematika fakulteti «Matematika» ta'lim bag'darının'
4-kurs studentı

Saparova Ayzada

« C^{m^2} – ken'isligindegi bigologmorf sawlelendiriwler»

atamasındag'ı

PITKERIW QA'NIGELİK JUMISI

Kafedra baslıg'ı:

dots. Tleumuratov S.J.

İlimiy basshısı:

dots. Tleumuratov S.J.

No'kis - 2012

Mazmuni

Kirisiw	3
§1. Tiykarg'ı tu'sinikler	7
§2. C^{m^2} – ken'isligindegi oblastlar	19
§3. Bigologmorf sawlelendiriwler.....	24
Juwmaqlaw	32
A'debiyatlar	33

K I R I S I W

Ayırım shegaralang'an ha'm shegaralanbag'an matritsaliq oblastlar arasında bigolomorf ekvivalenlik ornatiw ma'seleleri, son'g'i waqitlari kompleks analizde ju'da' a'hmiyetli bolip esaplanadi. Bul taraw boyinsha V.S.Vladimirov ha'm A.G.Sergeevtin' bir qansha ilimiy miynetleri bag'ishlang'an.

Pitkriw qa'nigelik jumisi kirisiw, u'sh paragraf, juwmaqlaw ham a'debiyatlar diziminen ibarat.

Birinshi paragraf tiykarg'i tu'sinikler dep ataladi. Bul paragrafta ja'rdemshi tu'sinikler, ayırım belgilewler ha'm aniqklamalar keltirilgen.

D oblastta golomorf bolg'an funktsiyalar klassin $\mathcal{G}(D)$ arqali belgileymiz.

Lorents skalyar ko'beymesi [1] $z, \xi \in C^{n+1}$

$$z - \xi = z_0 \cdot \xi_0 - z_1 \cdot \xi_1 - \dots - z_n \cdot \xi_n$$

tu'rinde boladi.

Meyli A -kvadrat matritsasi berilgen bolsin. Sonda SpA - matritsa izi dep to'mendegi ten'likke aytamiz. [3]

$$S_p A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Aniqlama 1.2. Eger $A' = A$ bolsa, onda A simmetriyalı matritsa dep ataladi.

Aniqlama 1.3. Eger $A = A^*$ bolsa, onda A ermit matritsa dep ataladi.

Аниqlаmа 1.4. Eger $AA^* = I$ sha’rti orinli bolsa, onda A unitar matritsa dep ataladi.

Al pitkeriw qa’nigelik jumisinin’ ekinshi paragrafi ayırım matritsalıq oblastlar haqqında dep ataladi. Bul jerde Kartan tarepinen kiritilgen klassikalıq oblasttın’ to’rt tipi keltirilgen [4].

D_I – birinshi tip klassikalıq oblast dep

$$I^{(m)} - ZZ^* > 0$$

sha’rtin qanaatlandıratug’ın m qatar ha’m k bag’analı Z – matritsalarǵa ayıladi.

Bul keltirilgen klassikalıq oblastlar tolıq shegaralang’an, do’n’es do’n’gelek oblastlar boladi. Usı oblastlardın’ sa’ykes tu’rde o’lshemli ha’m ostovları keltirilgen.

C^4 - ken’islikte “truba buduchego” oblastı [1]

$$\tau^+ = \{z \in \mathbf{C}^4 : y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 > 0, y_0 > 0\}$$

tu’rge iye bolıp, bul oblasttın’ shegarası

$$\partial\tau^+ = \{\varphi = \xi + i\eta \in \mathbf{C}^4 : \eta^2 = 0 \quad \eta_0 > 0\}$$

sıypaq bo’leginen ibarat bolıp ha’m ostovı

$$M = \{\xi + i\eta \in \mathbf{C}^4 : \eta = 0\} = \mathbf{R}^4$$

ko’rinistegi ko’plik boladi.

Ulıwmalasqan joqarı yarım tegislik dep, mına

$$H = \{z \in \mathbf{C}^{m^2} : \text{Im } Z > 0\} \quad (2.2)$$

oblastqa aytamız. Bul jerde

$$\operatorname{Im} Z = \frac{1}{2i} (Z - Z^*) \quad (2.1)$$

ermit matritsa. [7]

Dara jag'dayda, yag'nıy $n = 2$ bolsa H oblasti

$$y_{11} > 0, \quad y_{11}y_{22} - \frac{1}{4}|z_{12} - \bar{z}_{21}|^2 > 0$$

ten'sizligi menen anıqlanadı.

Pitkeriw qa'nigelik jumısının' son'g'ı paragrafinde, usı ekinshi paragrafta kiritilgen oblastlar arasında bigolomorf ekvivalentlik ornatıladı.

Tastiyqlaw 3.1. [2], [7]

$$Z = (W + iI)^{-1}(W - iI) \quad (3.1)$$

(3.1) sa'wlelendiriwi H oblastın

$$D = \{Z \in C^{m^2} : I - ZZ^* > 0\} \quad (3.2)$$

(3.2) oblastına bigolomorf sa'wlelendiredi.

Keyninde dallileniwi keltirilip, bul (3.6) keri sa'wlelendiriwi

$$z = \left(\frac{1}{2}(w_0 + w_3), \frac{1}{2}(w_1 + w_2), -\frac{1}{2i}(w_1 - w_2), \frac{1}{2}(w_0 - w_3) \right)$$

(3.8) ko'rinske iye boladı. Joqrıda keltirilgen (3.1) ha'm (3.6) sa'wlelendiriwdin' superpozitsiyasınan

$$Z = \frac{1}{\Delta(z)} \begin{pmatrix} 1 + z^2 + 2iz_3 & 2(iz_1 - z_3) \\ 2(iz_1 - z_3) & 1 + z^2 - 2iz_3 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

iyə bolamız, bul jerde $\Delta(z) = -(z+i)^2 \quad i = (i, 0, 0, 0)$

Tastıyqlaw 3.3. (3.9) sa'wlelendiriwi τ oblastın D oblastına bigolomorf sa'wlelendiredi.

Juwmaqlastırıp aytqanda biz shegaralang'an ha'm shegaralanbag'an matritsalıq oblastlar arasında bigolomorf ekvivalentlik ornattıq.

§1. Tiykarg'ı tu'sinikler

Meyli $[m \times m]$ o'lsheqli kompleks matritsalar ken'isligin $\mathbb{C}^{m^2}$ orqali belgileyik. Usi ken'isliktin' elementi $Z = (z_{kj})^m$ kvadrat matritsasi boladi.

Aniqlama 1.1. K sanlar maydanında tuwri mu'yeshli sanlar kestesi matritsa dep ataladi. Ol mına tu'rge iye.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

A matritsasi transponirlengen matritsa dep ataladi, eger matritsanın' qatarı bag'anasi menen orın almassa ha'm onı

$$A' = (a_{jk}) \quad j, k = 1, \dots, m$$

dep belgileymiz. Al $A^* = (\bar{a}_{jk})^m$ transponirlengen ha'm kompleks tu'yinles matritsanı an'latadi.

Meyli A, B -kvadrat matritsa bolsın, sonda mına qa'siyetler orınlı [2], [3]

$$1^\circ (A+B)' = A' + B' \quad (A+B)^* = A^* + B^*$$

$$2^\circ (\mu A)' = \mu A' \quad (\mu A)^* = \bar{\mu} A^*$$

$$3^\circ (AB)' = B' A' \quad (AB)^* = B^* A^*$$

$$4^{\circ} \left(A^{-1} \right)' = \left(A^1 \right)' \quad \left(A^{-1} \right)^* = \left(A^* \right)^{-1}$$

$$5^{\circ} \left(A^1 \right)' = A \quad \left(A^* \right)^* = A$$

Anıqlama 1.2. Eger $A' = A$ bolsa, onda A simmetriyalı matritsa dep ataladı.

Anıqlama 1.3. Eger $A = A^*$ bolsa, onda A ermit matritsası dep ataladı.

Anıqlama 1.4. Eger $AA^* = I$ sha'rti orınlı bolsa, onda A unitar matritsa dep ataladı.

Meyli A ha'm B matritsaları berilgen bolsın, sonda olardıń kroneker ko'beymesi dep

$$A \times B = C \quad C = \left(a_{kj} B \right)'^m$$

C matritsasına ayıladı.

Anıqlama 1.5. Eger $f : D \rightarrow G$, D oblastında golomorf ha'm $g = f^{-1}$ keri sa'wlelendiriwi bar bolıp ol $G = f(D)$ oblastında golomorf bolsa, onda f, D oblastında bigolomorf sa'wlelendiriw boladı.

Eger $A = \left(a_{kj} \right)_1^m$ matritsası $A > 0$ on' anıqlang'an bolsa, onda Silbestr kriteriyası boyınsha

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

Kompleks tegislikte iymeklikler ha'm oblastlar

Qozg'alistag'ı noqattın' koordinataları x ha'm y delinse, ular bazı bir t o'zgeriwshinin' u'zliksiz funktsiyaları boladı.

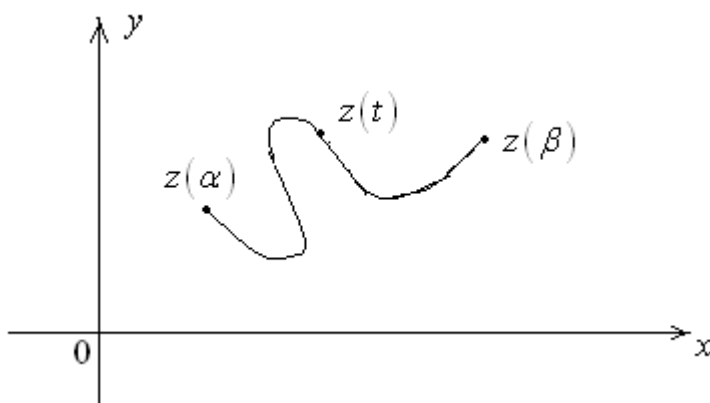
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

onı $z = x + iy$ ko'riniste jazıw mu'mkin. Na'tiyjede

$$z = x + iy = x(t) + iy(t) = z(t)$$

boladı.

Demek $z = z(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) funktsiyası $[\alpha, \beta]$ segmentti kompleks tegislik noqatlarına sa'wlelendiredi ha'm bul noqatlar ko'pligi kompleks tegislikte iymeklikti payda etedi. Bunda $z_0 = z(\alpha)$ iymekliktin' da'slepki noqatı, $z_1 = z(\beta)$ iymekliktin' aqırg'ı noqatı



Eger $z(\alpha) = z(\beta)$ bolsa, yag'nıy iymekliktin' da'slepki ha'm aqırg'ı noqatları u'stpe-u'st tu'sse, bunday iymeklik tuyıq delinedi. Eger $z = z(t)$ iymeklik t o'zgeriwshinin' eki tu'rli t_1 ha'm t_2 ($t_1 \neq t_2$) ma'nislerine sa'ykes

keletug'ın $z(t_1)$ ha'm $z(t_2)$ noqatlari ha'r tu'rli bolsa, onda iymeklik jordan iymekligi delinedi.

Meyli $z_0 \in \mathbf{C}$ noqat ha'm qa'legen $\varepsilon > 0$ sanı berilgen bolsın.

Anıqlama 1.6. $|z - z_0| < \varepsilon$ ten'sizligin qanaatlandırırwshı z noqatlardan ibarat bog'an ko'plik z_0 noqattın' do'geregi delinedi ha'm $\nu(z_0, \varepsilon)$ arqalı belgilenedi. Demek

$$\nu(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbf{C}, |z - z_0| < \varepsilon\}$$

Al $\{z \in \mathbf{C}: 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ ko'pligi $z_0 \in \mathbf{C}$ noqattın' oyılğ'an do'geregi dep ataladı.

Meyli $D \subset \mathbf{C}$ ko'pligi berilgen bolsın.

Anıqlama 1.7. Eger $z_0 \in D$ noqatı o'zinin' do'geregi menen D ko'plikke tiyisli bolsa, onda z_0 noqat D ko'pliktin' ishki noqatı dep ataladı.

Anıqlama 1.8. Eger barlıq noqatlari ishki noqatlardan ibarat bolğ'an ko'plik ashıq ko'plik dep ataladı.

Anıqlama 1.9. Eger $z_0 \in \mathbf{C}$ noqattın' qa'legen oyılğ'an do'geresinde $D \subset \mathbf{C}$ ko'pliktin' keminde bir noqatı tiyisli bolsa, onda z_0 noqat D ko'pliktin' limit noqatı dep ataladı.

Anıqlama 1.10. Eger D ko'pliginin' barlıq limit noqatlari sol ko'plikke tiyisli bolsa, onda D tuyıq ko'plik dep ataladı.

Aniqlama 1.11. Eger $z_1 z_2 \in D$ ha'm z_1, z_2 noqatlardi tutastirishni iymeklik usi D ko'plikke tiyisli bolsa, onda D baylamli ko'plik dep ataladi.

Aniqlama 1.12. Eger D ashik ha'm baylamli ko'plik bolsa, onda D oblast dep ataladi.

Oblasttin' o'zine tiyisli bolmag'an limit noqati onin' shegaraliq noqati dep ataladi.

Aniqlama 1.13. D oblasttin' barliq shegaraliq noqatlardan ibarat bolg'an ko'plik D oblasttin' shegarasi dep ataladi ha'm ∂D dep belgilenedi.

Eger ∂D baylamli ko'plik bolsa, onda D bir baylamli oblast dep ataladi.

Golomorf funksiya haqqida

Meyli kompleks sanlar tegisliginde $\mathbf{C}$ da bazı bir E ko'pligi berilgen boslin $E \subset \mathbf{C}$.

Aniqlama 1.14. Eger E ko'pliginde ha'r bir z kompleks sanına bazı bir f nizamına qarata bir w kompleks sanı sa'ykes qoyilg'an bolsa, onda E ko'pliginde funksiya berilgen dep ataladi ha'm $f: z \rightarrow w$ yamasa $w = f(z)$ dep belgileymiz. Bul funktsiyanı

$$w = f(z) = u(x, y) + i\vartheta(x, y)$$

ko'riniste jazilip, bunda $u(x, y)$ funktsiyasi $f(z)$ funktsiyasının' haqiqiy bo'legi, al $\vartheta(x, y)$ bolsa, $f(z)$ funktsiyasının' jormal bo'legi delinedi.

Meyli $w = f(z)$ funksiyasi E ko'pligida berilgan bolsin. Bul E ko'plikdan z_0 nuqtani olib o'g'an sonday Δz o'sim berayik yag'niy $z_0 + \Delta z \in E$ bolsin, shunda $w = f(z)$ funksiyasi z_0 nuqtada

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

o'simiga iye boladi.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

bar bolip ha'm shekli bolsa, onda bul limit $w = f(z)$ funksiyasining z_0 nuqtadagi tuvindisi dep ataladi, ha'm $f'(z_0)$ orqali belgilenedi

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Amiqlama 1.15. Eger $w = f(z)$ funksiyasi $z_0 \in E$ nuqtada $f'(z_0)$ tuvindig'a iye bolsa, onda funksiya z_0 nuqtada differentsiallaniwshi delinedi.

Eger $w = f(z)$ funksiyasi E ko'pliktin' ha'r bir nuqtada differentsiallaniwshi bolsa, onda E ko'plikte funksiya differentsiallaniwshi dep ataladi.

Meyli $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ funksiyasi D oblastinda berilgan bolsin.

Anıqlama 1.16. Eger $u(x, y)$ ha'm $\vartheta(x, y)$ funktsiyaları (x_0, y_0) noqatda differentsiallanıwshı bolsa, onda $f(z_0)$ funktsiyası z_0 noqatda haqıyqıy analiz ma'nisinde differentsiallanıwshı delinedi.

Teorema 1.1. [6]. $w = f(z)$ funktsiyası z_0 noqatda $f'(z_0)$ funktsiyag'a iye bolıwı ushın

1) $f(z)$ funktsiyanın' z_0 noqatda haqıyqıy analiz ma'nisinde differentsiallanıwshı ha'm

2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (1.1)$$

ten'liklerinin' orınlanıwı za'ru'rli ha'm jetkilikli.

Da'lilleniwi. Za'ru'rliqi.

Meyli $w = f(z)$ funktsiyası z_0 noqatda $f'(z_0)$ tuwındıg'a iye bolsın.

Tuwındının' anıqlaması boyınsha

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

yamasa

$$\Delta f(z) = f'(z_0)\Delta z + \alpha\Delta z \quad (1.2)$$

boladı. Bul jerde $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ al $\Delta f(z_0) = \Delta u + i\Delta \mathcal{G}$ bolıp $\alpha \Delta x$ ha'm

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha = 0$$

$f'(z_0)$ ha'm α nı $f'(z_0) = a + ib$ $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ (1.2) aparıp qoysaq, sonda

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1\Delta x - \alpha_2\Delta y \quad (1.3)$$

$$\Delta \mathcal{G} = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2\Delta x + \alpha_1\Delta y$$

Demek $u(x, y)$ ha'm $\mathcal{G}(x, y)$ funktsiyaları (x_0, y_0) noqatda differentsiallanıwshı, onda $f(z)$ funktsiyası z_0 noqatda haqıyqıy analiz ma'nisinde differentsiallanıwshı boladı. Solay etip $f(z)$ funktsiyası z_0 noqatda $f'(z_0)$ funktsiyag'a iye bolg'anlıqtan $\Delta z \rightarrow 0$ yag'nıy

$$\Delta z = \Delta x \rightarrow 0 \quad (\Delta y = 0),$$

$$\Delta z = \Delta y \rightarrow 0 \quad (\Delta x = 0)$$

bolg'anda

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$$

qatnasının' limiti ha'mme waqıt $f'(z_0)$ de ten' boladı. (1.3) ten'likten $\Delta z = \Delta x$ $(\Delta y = 0)$

$$\begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x + \alpha_1\Delta x \\ \Delta \mathcal{G} &= b\Delta x + \alpha_2\Delta x \end{aligned} \quad (1.4)$$

$\Delta z = \Delta y$ ($\Delta x = 0$) bolg'anda

$$\begin{aligned}\Delta u &= -b\Delta y - \alpha_2\Delta y \\ \Delta \mathcal{G} &= a\Delta y + \alpha_1\Delta y\end{aligned}\tag{1.5}$$

ten'liklarga iye bolamiz.

(1.4) qatnasinan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = b$$

al (1.5) qatnasinan

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -b, \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} = a$$

iye boalmiz. Al na'tiyjede

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}$$

ekenligi kelip shig'adi.

Jetkilikligi.

Meyli $f(z)$ funksiya z_0 noqatda haqiqiy analiz ma'nisinde differentsiallaniwshi bolip, teoremada keltirilgen ekinshi sha'rt orinli bolsin $u(x, y)$ ha'm $\mathcal{G}(x, y)$ funktsiyalari (x_0, y_0) noqatda differentsiallaniwshi bolg'anliqtan

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

$$\Delta \mathcal{G} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y$$

boladı, bul jerde $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ da $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ lerdin' ha'r biri nolge umtıladı. Bul jag'dayda

$$\begin{aligned} \Delta f(z_0) = \Delta u + i\Delta g = & \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \\ & + \alpha_2 \Delta y + i \left[\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y \right] \end{aligned}$$

ha'm

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

sha'rtten paydalansaq

$$\begin{aligned} \Delta f(z_0) = & \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) - i \frac{\partial u}{\partial y} (\Delta x + i\Delta y) + \\ & + (\alpha_1 + i\beta_1) \Delta x + (\alpha_2 + i\beta_2) \Delta y = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta z + \\ & + \left[(\alpha_1 + i\beta_1) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2) \frac{\Delta y}{\Delta z} \right] \cdot \Delta z \end{aligned}$$

Bul ten'likten

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha_1 + i\beta_1) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2) \frac{\Delta y}{\Delta z} \quad (1.6)$$

ıye bolıp $\Delta z \rightarrow 0$ da (1.6) limitke o'tsek

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

boladı. Teorema da'lllendi.

Kompleks analiz ma'nisinde tuwindıg'a iye funksiylardı $\mathbb{C}$ differentsiallanıwshı funksiylar delinedi.

Meyli $f(z)$ funksiya bazı bir D oblastında berilgen bolsın.

Anıqlama 1.17. Eger $f(z)$ funksiya $z \in D$ noqattın' bazı bir do'geresinde $U(z_0, \alpha)$ $\mathbb{C}$ differentsiallanıwshı bolsa, onda $f(z)$, z_0 noqatda golomorf funksiya dep ataladı.

Anıqlama 1.18. Eger $f(z)$ funksiya D oblasttın' ha'r bir noqatında golomorf bolsa, onda funksiya D oblastta golomorf delinedi.

Anıqlama 1.19. Eger $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ funksiya $z = 0$ noqatda golomorf bolsa, onda $f(z)$ funksiya " ∞ " noqatda golomorf delinedi.

D oblastta golomorf bolg'an funksiylar klasın $\mathcal{G}(D)$ arqalı belgileymiz.

Lorents skalyar ko'beyme [1] $z, \xi \in \mathbb{C}^{n+1}$

$$z \cdot \xi = z_0 \cdot \xi_0 - z_1 \cdot \xi_1 - \dots - z_n \xi_n$$

tu'rinde boladı. Egerde $z = \xi$ bolsa, onda

$$z^2 = z_0^2 - z_1^2 - \dots - z_n^2$$

ten'ligi orınlı boladı.

Meyli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ - & - & \dots & - \\ - & - & \dots & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

berilgen bolsın. Sonda SpA -matritsa izi dep to'mendegi ten'likke aytamız [2], [3]

$$SpA = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

§2. C^{m^2} - ken'isligindagi oblastlar

Bul jerde Kartan ta'repinen kiritilgen klassikalıq oblasttın' to'rt tipin keltiremiz. [4]

1 D_I -birinshi tip klassikalıq oblast dep

$$I^{(m)} - ZZ^* > 0$$

sha'rtin qanaatlandıratug'in, m qatar ha'm k bag'analı Z -matritsalaridan ibarat boladı. Z^* matritsa Z matritsasına tu'yinles ha'm transponirlengen matritsa

2 D_{II} -ekinshi tip klassikalıq oblast bolıp, bunda

$$I^{(k)} - Z\bar{Z} > 0$$

sha'rtin qanaatlandıratug'in ta'rtibi k g'a ten' bolg'an simmetriyalıq matritsalaridan ibarat 3 D_{III} -u'shinshi tip klassikalıq oblast bolıp, bunda

$$I^{(k)} + Z\bar{Z} > 0$$

sha'rtin qanaatlandıratug'in ta'rtibi k g'a ten' bolg'an kososimmetriyalıq matritsalaridan ibarat.

4 D_{IV} -to'rtinshi tip klassikalıq oblast bolıp, bunda

$$(zz')^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0, \quad |zz'| < 1$$

sha'rtin qanaatlandıratug'in, n -o'lsheмли vektorlardan ibarat.

Bul keltirilgen klassikalıq oblastlar tolıq shegaralang'an do'n'es do'n'gelek oblastlar boladı. Usı oblastlardın' sa'ykes tu'rde o'lsheми

$$mk, \frac{k(k+1)}{2}, \frac{k(k-1)}{2}, n$$

ge ten' boladı.

Endi klassikalıq oblastlardın' ha'r qaysısının' ostovın to'mendegishe keltiremiz.

1 $S_I D_I$ oblasttın' ostovı bolıp, bunda

$$UU^* = I^{(m)}$$

sha'rtin qanaatlandıratug'ın m qatar ha'm k -bag'analı matritsalarından ibarat.

Dara jag'dayda $m = k$ bolsa, onda S_I barlıq unitar matritsalar dın' ko'pligi menen sa'ykes keledi.

2 $S_{II} D_{II}$ oblasttın' ostovı bolıp, ta'rtibi k g'a ten' bolg'an barlıq simmetriyalıq unitar matritsalar dın ibarat.

3 $S_{III} D_{III}$ oblasttın' ostovı bolıp, bunda k g'a baylanıslı ha'r qıylı anıqlanadı.

Eger k jup bolg'anda S_{III} k -ta'rtipli barlıq kososimmetriyalıq unitar matritsalar dın turadı.

Eger k taq bolg'anda $S_{III} UFU'$ tu'rindegi matritsalar ko'pligine sa'ykes keledi. Bul jerde U qa'legen unitar matritsa, al

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0$$

4 S_{IV} D_{IV} oblasttın' ostovı bolıp, bunda $e^{i\varphi}x$ tu'rdegi vektorlardan ibarat.

Bul jerde $x \in R^n$ ha'm $xx' = 1$, al $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

“Truba budushego” oblast haqqında

$\mathbf{C}^4$ ken'islikte “truba budushego” oblastı [1]

$$\tau^+ = \{z \in \mathbf{C}^4 : y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 > 0, \quad y_0 > 0\}$$

tu'rge iye bolıp, bul jerde

$$z = (z_0, z_1, z_2, z_3), \quad z_j = x_j + iy_j.$$

Bul oblasttın' shegarası

$$\partial\tau^+ = \{\varphi = \xi + i\eta \in \mathbf{C}^4 : \eta^2 = 0, \quad \eta_0 > 0\}$$

sıypaq bo'leginen ibarat bolıp, ha'm ostovı

$$M = \{\varphi = \xi + i\eta \in \mathbf{C}^4 : \eta = 0\} = R^4$$

ko'rinstegi ko'plik boladı.

Ulıwmalasqan joqarı yarım tegislik

Meyli $z \in \mathbf{C}^{m^2}$, $Z = \left(z_{kj}\right)_1^m$ kvadrat matritsa bolsın.

Sonda mına [7]

$$\operatorname{Im} Z = \frac{1}{2i}(Z - Z^*) \quad (2.1)$$

ermit matritsası bolıp, onın' elementleri

$$w_{jj} = \frac{1}{2i}(z_{kj} - \bar{z}_{jk})$$

mına sha'rtlerdi $w_{kj} = \bar{w}_{jk}$ ha'm $w_{jj} = \text{Im } z_{jj}$ qanaatlandıradi. Eger ermit matritsası on' anıqlang'an bolsa, onda bunı $w > 0$ ko'riniste jazamız.

Ulıwmalasqan joqarı yarım tegislik dep mına

$$H = \left\{ z \in \mathbf{C}^{m^2} : \text{Im } Z_1 > 0 \right\} \quad (2.2)$$

oblastqa aytamız. Bul oblastın' shegarası ∂H sonday Z -matritsasınan turadı, yag'nıy $\text{Im } Z$ Ermit matritsası tegis emes, biraq on' anıqlang'an. Al menshikli ma'nisleri teris emes ha'm tek g'ana birewi nolge ten' boladı.

Usı ∂H shegarada

$$\Gamma = \{ \text{Im } Z = 0 \}$$

ko'pligi bar bolıp, bunı H oblastının' ostovı dep ataladı. Bul ostov Z matritsalarınan quralg'an ermit matritsası bolıp tabıladı. Usı ermitlik sha'rtti m^2 baylanıslı emes ten'lemelerdi payda etedi, ha'm Γ ostovının' haqıyqıy o'lsheimi m^2 qa ten' boladı.

Meyli (2.2) oblastının' dara jag'dayı $n = 2$ bolg'anın qarastırayıq.

Sonda

$$H = \left\{ Z \in \mathbf{C}^4 : \begin{pmatrix} y_{11} & \frac{z_{12} - \bar{z}_{21}}{2i} \\ \frac{z_{21} - \bar{z}_{12}}{2i} & y_{22} \end{pmatrix} > 0 \right\}$$

$\mathbf{C}^4$ te ulıwmalasqan joqarı yarım tegislik

$$y_{11} > 0, \quad y_{11}y_{22} - \frac{1}{4}|z_{12} - \bar{z}_{21}|^2 > 0$$

ten'sizligi menen aniqlanadi, al shegarasi

$$y_{11}y_{22} = \frac{1}{4}|z_{12} - \bar{z}_{21}|^2$$

ten'ligi menen aniqlanip, onin' ostovi

$$y_{11} = y_{22} = 0, \quad z_{12} = \bar{z}_{21}$$

to'rt o'lshemli haqiqiy tegislik boladi.

§3. Bigologmorf sawlelendiriwler

Bul paragrafta biz da'slep matritsalıq oblastlardı bigolomorf sa'wlelendiriwshi Keli tu'rlendiriwin qaraştıramız.

Meyli $\mathbf{C}^{m^2}$ – ken'isligindegi sa'wlelendiriwlerdin' biri bolg'an Keli tu'rlendiriwin qaraştıramız. Bul

$$Z = (W + iI)^{-1} (W - iI) \quad (3.1)$$

ko'riniste bolıp, bunda Z qa'legen, al I birlik matritsa.

Tastıyıqlaw 3.1. (3.1) sa'wlelendiriwi H oblastın

$$D = \left\{ Z \in \mathbf{C}^{m^2} : I - ZZ^* > 0 \right\} \quad (3.2)$$

ulıwmalasqan birlik do'n'gelek oblastına bigolomorf sa'wlelendiredi.

Da'lilleniwi. Eger $W \in H$ bolsa, onda $W + iI$ matritsası aynımalı emes boladı.

Haqıyn'atında da eger w vektorın alıp ha'm $(W + iI)w = 0$ qaraştırayıq, onda $Ww = -iw$ al bunnan

$$w^* W^* = iw^*, \quad w^* W^* w = -iw^*$$

$$w^* W^* w^* = iw w^* \text{ ha'm } w^* \operatorname{Im} W w = w^* w$$

iye bolamız. Sha'rt boyınsha

$$\operatorname{Im} W > 0$$

bolg'anlıqtan, shep ta'repi on' boladı, eger $w \neq 0$ bolsa, al on' ta'repi $-|w|^2$ ten', onda ten'lik $w = 0$ bolg'anda orınlı boladı.

Bul $W = iI$ matritsasının' aynımalı emes ekenligi kelip shıg'adı ha'm $(W + iI)^{-1}$ bar bolıp ha'm (3.1) sa'wlelendiriwi H oblastta golomorf boladı.

Bunnan keyin (3.1) den mına qatnas kelip shıg'adı

$$\begin{aligned} I - ZZ^* &= I - (W + iI)^{-1} (W - iI) (W^* + iI) (W^* - iI)^{-1} = \\ &= (W + iI)^{-1} ((W + iI)(W^* - iI) + (W - iI) \cdot \\ &\cdot (W^* + iI)) (W^* - iI)^{-1} = (W + iI)^{-1} 4 \operatorname{Im} W (W^* - iI)^{-1} \end{aligned}$$

(3.3) Ko'rinip turg'anınday eger $(W + iI)$ aynımalı emes matritsa bolsa, onda $I - ZZ^*$ ha'm $\operatorname{Im} W$ ermit matritsaları bir waqıtta on' anıqlang'an boladı.

Biz (3.1) tu'rdegi sa'wlelendiriwi H oblastın D oblastına sa'wlelendiretug'ınlıg'ın ko'rdik.

Eger D oblasttın' ostovı

$$S = \{ZZ^* = I\} \quad (3.4)$$

ko'pligi bolsa, onda (3.2) Keli tu'rlendiriwi Γ ostovın S ostovına o'tkizedi. Bul jerde S ostovı unitarı unitar matritsalaradan turadı. (3.1) ge uqsas Keli tu'rlendiriwi

$$Z = (I + iW)^{-1} (I - iW) \quad (3.5)$$

ko'rinistede jazıw mu'mkin.

Meyli H oblastı $n = 2$ dara jag'dayda berilgen bolsın ha'm

$$w = \begin{pmatrix} z_0 + z_3 & z_1 - iz_2 \\ z_1 + iz_2 & z_0 - z_3 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

funktsiyasın qarastırayıq.

Tastıyqlaw 3.2. [1] (3.6) sa'wlelendiriwi τ oblastın H oblastına bigolomorf sa'wlelendiredi.

Da'lilleniwi. Meyli $w \in H$ bolsın. Sonda (3.6) nan

$$w^* = \begin{pmatrix} \bar{z}_0 + \bar{z}_3 & \bar{z}_1 - i\bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 + i\bar{z}_2 & \bar{z}_0 - \bar{z}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w &= \frac{1}{2i}(w - w^*) = \frac{1}{2i} \left[\begin{pmatrix} z_0 + z_3 & z_1 - iz_2 \\ z_1 + iz_2 & z_0 - z_3 \end{pmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \begin{pmatrix} \bar{z}_0 + \bar{z}_3 & \bar{z}_1 - i\bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 + i\bar{z}_2 & \bar{z}_0 - \bar{z}_3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} y_0 + y_3 & y_1 - iy_2 \\ y_1 + iy_2 & y_0 - y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\operatorname{Im} w > 0$ Silvestr kriteriyasına tiykarlanıp

$$\det \begin{pmatrix} y_0 + y_3 & y_1 - iy_2 \\ y_1 + iy_2 & y_0 - y_3 \end{pmatrix} > 0$$

onda $y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 > 0$ al bunnan $z \in \tau^+$. Bul jerde (3.6) funktsiyası H oblastın τ^+ oblastqa sa'wlelendiretug'ının ko'rdik. Al endi (3.6) funktsiyasının' kerisi τ^+ oblastı H oblastqa sa'wlelendiretug'ının ko'rsetemiz.

Bunda funksiya ulıwma $f^{-1} : w \rightarrow z$,

$$z = \left(\frac{1}{2} Sp w, \frac{1}{2} Sp(w\delta_1), \frac{1}{2} Sp(w\delta_2), \frac{1}{2} Sp(w\delta_3) \right) \quad (3.7)$$

ko'rinske iye boladı, bul jerde

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli matritsası.

Endi (3.7) funksiyanın' koordinataların anıqlayıq, yag'nıy

$$\frac{1}{2} Sp w, \quad \frac{1}{2} Sp(w\delta_1), \quad \frac{1}{2} Sp(w\delta_2), \quad \frac{1}{2} Sp(w\delta_3)$$

tabamız.

$$\frac{1}{2} Sp w = \frac{1}{2} Sp \begin{pmatrix} z_0 + z_3 & z_1 - i z_2 \\ z_1 + i z_2 & z_0 - z_3 \end{pmatrix} = z_0$$

$$\frac{1}{2} Sp(w\delta_1) = \frac{1}{2} Sp \begin{pmatrix} z_1 - i z_2 & z_0 + z_3 \\ z_0 - z_3 & z_1 + i z_2 \end{pmatrix} = z_1$$

$$\frac{1}{2} Sp(w\delta_2) = \frac{1}{2} Sp \begin{pmatrix} i z_1 + z_2 & -i(z_0 + z_3) \\ i(z_0 - z_3) & -i z_1 + z_2 \end{pmatrix} = z_2$$

$$\frac{1}{2} Sp(w\delta_3) = \frac{1}{2} Sp \begin{pmatrix} z_0 + z_3 & -z_1 + i z_2 \\ z_1 + i z_2 & -z_0 + z_3 \end{pmatrix} = z_3$$

usi z_0, z_1, z_2, z_3 lerdı to'mendegishe tabamız.

$$z = (w_0, w_1, w_2, w_3)$$

$$z_0 + z_3 = w_0 \quad z_0 = \frac{1}{2}(w_0 + w_3)$$

$$z_1 - i z_2 = w_1 \quad z_1 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$$

$$z_1 + i z_2 = w_2 \quad z_2 = \frac{1}{2}(w_1 - w_2)$$

$$z_0 - z_3 = w_3 \quad z_3 = \frac{1}{2}(w_0 - w_3)$$

Solay etip (3.7) funksiyaşının' anıq ko'rinisi

$$z = \left(\frac{1}{2}(w_0 + w_3), \frac{1}{2}(w_1 + w_2), -\frac{1}{2i}(w_1 - w_2), \frac{1}{2}(w_0 - w_3) \right) \quad (3.8)$$

Meyli $z \in \tau^+$ bolsın. Sonda (3.8) tiykarlanıp

$$\begin{aligned} (\operatorname{Im} z)^2 &= \frac{1}{4}(\vartheta_0 + \vartheta_3)^2 - \frac{1}{4}(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{4}(u_1 - u_2)^2 - \frac{1}{4}(\vartheta_0 - \vartheta_3)^2 > 0 \\ \vartheta_0 \vartheta_3 - \frac{1}{4}((u_1 - u_2)^2 + (\vartheta_1 + \vartheta_2)^2) &> 0 \end{aligned}$$

al bunnan $w = u + i\vartheta \in H$ ekeni kelip shıg'adı.

Haqıyqatında da

$$w_i = u_i + i\vartheta_i \quad (i = \overline{0, 3})$$

$$w = \begin{pmatrix} w_0 & w_1 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}, \quad w^* = \begin{pmatrix} \bar{w}_0 & \bar{w}_2 \\ \bar{w}_1 & \bar{w}_3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} w = \frac{1}{2i}(w - w^*) = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} w_0 - \bar{w}_0 & w_1 - \bar{w}_2 \\ w_2 - \bar{w}_1 & w_3 - \bar{w}_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathfrak{g}_0 & \frac{w_1 - \bar{w}_2}{2i} \\ \frac{w_2 - \bar{w}_1}{2i} & \mathfrak{g}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w > 0, \quad \det(\operatorname{Im} w) &= \mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_3 - \frac{1}{4} |w_1 - \bar{w}_2|^2 = \\ &= \mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_3 - \frac{1}{4} \left((u_1 - u_2)^2 + (\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2)^2 \right) > 0 \end{aligned}$$

$w \in H$ ekeni kelip shıg'adı.

Biz joqarıda keltirip o'tkenimizdey (3.5) Keli tu'rlendiriwi ulıwmalasqan joqarı yarım tegislikti ulıwmalasqan birlik do'n'gelekke bigolomorf sa'wlelendiredi. Al (3.6) funktsiyası τ oblastın H oblastına bigolomorf sa'wlelendiretug'ının ko'rdik. (3.5) ha'm (3.6) funktsiyalardıń superpozitsiyası $z \rightarrow w \rightarrow Z$ τ^+ oblastın D oblastına bigolomorf sa'wlelendiredi. Endi maqsetimiz usı funktsiyanı tabamız. Sol ushın (3.5) on' ta'repine w ornına (3.6) on' ta'repin aparıp qoyamız, yag'nıy $(I = iw)^{-1}$ ha'm $(I + iw)$ tabamız ha'm ko'beytemiz.

$$\begin{aligned}
a) \quad I - iw &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} z_0 + z_3 & z_1 - i z_2 \\ z_1 + i z_2 & z_0 - z_3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 - i(z_0 + z_3) & -i(z_1 - i z_2) \\ -i(z_1 + i z_2) & 1 - i(z_0 - z_3) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(z) &= \det(I - iw) = 1 - (z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2) - 2i z_0 = \\
&= 1 - z^2 - 2i z_0 = -(z + i)^2, \quad i = (i, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

$$(I - iw)^{-1} = \frac{1}{\Delta(z)} \begin{pmatrix} 1 - i(z_0 - z_3) & i(z_1 - i z_2) \\ i(z_1 + i z_2) & 1 - i(z_0 + z_3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
b) \quad I + iw &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} z_0 + z_3 & z_1 - i z_2 \\ z_1 + i z_2 & z_0 - z_3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 + i(z_0 + z_3) & i(z_1 - i z_2) \\ i(z_1 + i z_2) & 1 + i(z_0 - z_3) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$v) \quad (I - iw)^{-1} (I + iw) = \frac{1}{\Delta(z)} \begin{pmatrix} 1 - i(z_0 - z_3) & i(z_1 - i z_2) \\ i(z_1 + i z_2) & 1 - i(z_0 + z_3) \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 + i(z_0 + z_3) & i(z_1 - i z_2) \\ i(z_1 + i z_2) & 1 + i(z_0 - z_3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &: (1 - i(z_0 - z_3))(1 + i(z_0 + z_3)) - (z_1 - i z_2)(z_1 + i z_2) = \\
&= 1 + z_0^2 - z_3^2 + 2i z_3 - z_1^2 - z_2^2 = 1 + z^2 + 2i z_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{12} : & \left(1 - i(z_0 - z_3)\right) i(z_1 - i z_2) + i(z_1 - i z_2) \left(1 + i(z_0 - z_3)\right) = \\
& = 2i(z_1 - i z_2) = 2(i z_1 + z_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{21} : & i(z_1 + i z_2) \left(1 + i(z_0 + z_3)\right) + \left(1 - i(z_0 + z_3)\right) i(z_1 + i z_2) = \\
& = 2i(z_1 + i z_2) = 2(i z_1 - z_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} : & i(z_1 - i z_2) i(z_1 - i z_2) + \left(1 - i(z_0 + z_3)\right) \cdot \\
& \cdot \left(1 + i(z_0 - z_3)\right) = 1 + z^2 - 2i z_3
\end{aligned}$$

Solay etip,

$$Z = \frac{1}{\Delta(z)} \begin{pmatrix} 1 + z^2 + 2i z_3 & 2(i z_1 + z_2) \\ 2(i z_1 - z_2) & 1 + z^2 - 2i z_3 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Tastıyqlaw 3.3. (3.9) sa'wlelendiriwi τ oblastın D oblastına bigolomorf sa'wlelendiredi.

Juwmaqlastırıp aytqanda shegaralang'an ha'm shegaralanbag'an matritsalıq oblastlar arasında bigolomorf ekvivalentlik ornattıq.

Juwmaqlaw

Pitkeriw qa'nigelik jumısı C^4 ken'isliginde shegaralang'an ha'm shegaralanbag'an oblastlar arasında bigolomorf ekvivalentlikti ornatiw ma'selesı qaraladı.

Bul ekvivalentlik oblastlardı bigolomorf sa'wlelendiriw na'tiyjesinde ornatıladı.

Ulıwmalasqan birlik do'n'gelek ha'm ulıwmalasqan joqarı yarım tegislik arasında bigolomorf ekvivalent ornatılıp, keyin ulıwmalasqan joqarı yarım tegislik penen “truba budushego” oblastlar arasında bigolomorf ekvivalentlik ornatıladı. Usı bigolomorf sa'wlelendiriwlerdin' superpozitsiyası na'tiyjesinde ulıwmalasqan birlik do'n'gelek penen “truba budushego” oblastlar arasında bigolomorf ekvivalentlik ornatılatusı da'lillep ko'rsetilgen.

A'debiyatlar

1. V.S. Vladimirov, A.G. Sergeev

Kompleks analiz v trube budushego "Itogi nauki i texniki" Moskva 1985 g.

2. F. R. Gantmaxer "Teoriya matrits" Moskva 1988.

3. R. Xorn, Ch. Djansin "Matrichniy analiz" Moskva Mir 1989 g.

4. L. A. Ayzenberg "Formulı Karsemana v kompleksnom analize" Novosibirsk Nauka 1990 g.

5. Sh. Maqsudov, M. Salohiddinov, S. Sirojiddinov "Kompleks uzgaruvchinin' funktsiyalari nazariyasi" Tashkent 1976 y.

6. G. Xudaybergenov "Kompleks analiz" Tashkent "Universitet" 1998 y.

7. Shabat V.V. II-chast. "Vvedenie v kompleksniy analiz" M. Nauka 1985 g.