

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIV VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
MEKANIKA – MATEMATIKA FAKULTETI
EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA
KAFEDRASI TALABASI
MARDANOV ASLIDDIN XASANIDDIN O'G'LI
„LEBEG INTEGRALI VA UNING TADBIQLARI“

mavzusida

BITIRUV MALAKAVTY ISHI

(5130100-matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr-akademik
darajasini olish uchun)

Ilmiy rahbar : prof. J.I. Abdullayev

Bitiruv malakavy ishi "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika" kafedrasida bajarildi. Kafedramiz 2015 - yil 10 - majlisida muhokama qilindi va himoyaga tavsiya etildi.

Fakultet dekani: dot. H.X. Ruzimuradov

Kafedra mudiri: prof. J.I. Abdullayev

Bitiruv malakavy ishi YaDAKning 2015 - yil 12 - oyundagi majlisida himoya qilindi va <<__>> ball bilan baholandi (__ bayonoma).

YaDAK raisi: _____

A'zolar: _____

Samarqand - 2015

KIRISH

Masalaning qo'yilishi. Ushbu bitiruv malakaviy ishi Lebeg integrali, Riman integrali, Stiltjes integrali va integrallarning xossalari va ehtimollar nazariyasiga tadbirlari hamda ular yordamida masalalar yechishga bag'ishlangan.

Mavzuning dolzarbligi. Respublikamiz prezidenti I.A. Karimov o'zining "Barkamol avlod - O'zbekiston taraqqiyotining poydevori" deb nomlangan asarida ta'kidlaganidek "Bugungi kunda oldimizga qo'yilgan buyuk maqsadlarimizga, ezgu niyatlarimizga erishishimiz, jamiyatimizning yangilanishi, hayotimizning taraqqiyoti va istiqboli amalga oshirilayotgan islohotlarimiz, rejalarimizning samarasi, taqdiri - bularning barchasi, avvalambor, zamon talablariga javob beradigan yuqori malakali, ongli mutaxassis kadrlar tayyorlash muammosi bilan chamabarchas bog'liqligini barchamiz anglab yetmoqdamiz. Shu bilan birga, hammamiz yana bir haqiqatni anglab yetmoqdamizki, faqatgina chinakam ma'rifatli kishi, inson qadrini, millat qadriyatlarini, bir so'z bilan aytganda, o'zligini anglash, erkin va ozod jamiyatda yashash, mustaqil davlatimizning jahon hamjamiyatida o'ziga mos obro'li o'rin egallashi uchun fidoyilik bilan hissa qo'shishi mumkin".

Matematika fani yoshlarning mantiqiy fikrlash qobiliyatini o'stiruvchi vosita sifatida maktablarda qadimgi Yunonistonda o'qita boshlangan. Yangi era boshlarida Xitoyda sonlar nazariyasi, Hindistonda o'nli sanoq sistemasi, O'rta Yer dengiz sohillarida trigonometriya yaratila boshlagan. VII –VIII asrlardan boshlab ilm-fan taraqqiyotining markazi O'rta Osiyoga ko'chdi. O'z ilmiy ishlari bilan butun dunyoga tanilgan Muhammad Muso al-Xorazmiy, Ahmad Farg'oniy, Abu Rayhon Beruniy, Abu Ali ibn Sino, Abu Nasr Forobiy, Ismoil Buxoriy, Umar Hayyom, Ulug'bek va boshqalar shu O'rta Osiyoda yashab ijod qilganlar.

Sharq mamlakatlari olimlarining qilgan ishlari XIV – XVI asrlar Yevropadagi ilm-fan rivojiga asos bo'ldi desak, hech ham mubolag'a bo'lmaydi. Keyingi

yillarda bu olimlarning davomchilari sifatida Respublikamizdan ko'plab matematiklar yetishib chiqdi. Ular matematika fanining asosiy yo'nalishlari bo'yicha maktablar yaratdilar. Masalan, ehtimollar nazariyasi maktabi – S.X.Sirojiddinov, T.A.Sarim-soqov, T.A.Azlarov, matematik fizika va differensial tenglamalar maktabi – Sh.A.Alimov, M.S. Salohiddinov, T.J.Jo'rayev, N.Yu.Satimov, algebra va analiz maktabi – T.A.Sarimsoqov, J. Xojiyev, Sh. Ayupov, A. Sa'dullayev, matematika tarixi – G.P.Matviyevskaya, S.A.Ahmedov maktablariga asos solindi.

Ishning maqsadi va vazifalari. O'quvchilar yoki talabalarda Riman integrali, Lebeg integrali va Stiltjes integrallari ular orasidagi bog'lanishlar hamda ular bilan ishlash mahoratini paydo qilishga yordamlashishdan iborat. Shu maqsadda har xil tipdagi integrallarni keltirish va ularni yechish (hisoblash) namunalarini berishdan iborat.

Ilmiy tadqiqot metodlari. Bitiruv malakaviy ishini bajarishda cheksiz kichik miqdorlar, ularning xossalari, limitlar va qatorlar nazariyasi elementlari va hisoblash usullaridan foydalanildi.

Ishning ilmiy ahamiyati. Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega. Ishni bajarish jarayonida cheksiz kichik miqdorlar, ketma-ketliklar, qatorlar ular ustida amallar, limitlarning xossalariidan foydalanilgan. Keltirilgan ma'lumotlardan ilmiy maqolalarni bayon qilishda hamda ularning isbot usullaridan foydalanish mumkin.

Ishning amaliy ahamiyati. Bitiruv malakaviy ishida to'plangan materiallardan qiziqarli matematika fanini o'qitish jarayonida, tugaraklarda,

matematik kechalarda va vektorinalarda foydalanish mumkin. Lebegning jamlash usulidan esa bir qator hisob-kitoblarda foydalanish mumkin.

Ishning tuzilishi. Bitiruv malakaviy ishi kirish qismi, II bob, 8 paragraf, xulosa hamda foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. I bobda o'lchovlar nazariyasi, o'lchovli funksiyalar, Lebeg integrali va uning xossalari hamda ular bilan bog'liq masalalar keltirilgan. II bobda cheksiz o'lchovli to'plamlarda Lebeg integrali, integral belgisi ostida limitga o'tish, Lebeg va Riman integrallarini taqqoslash haqidagi masalalar qaralgan. Bu bobda integralning tadbiqlariga ham keng o'rin berilgan. Belgilashlar ikki sonli bo'lib, ular orasi nuqta bilan ajratilgan. Birinchi raqam paragraf nomerini bildiradi, ikkinchi son esa tartib nomerini bildiradi. Masalan, 1.2-teorema yozuvi - birinchi paragrafning 2-teoremasi ekanligini bildiradi, yoki (2.3) belgilash 2-paragrafdagi 3-formula ekanligini anglatadi.

Olingan natijalarning qisqacha bayoni. Bitiruv malakaviy ishida Lebeg, Riman va Stiltes integrallari va ularning xossalaridan foydalanib masalalar yechish namunalari berilgan. Lebeg integrali va Riman integrallari xossalari solishtirilgan. Har qanday o'lchovli funksiy biror tasodifiy miqdorni aniqlashi, sodda funksiya esa diskret tasodifiy miqdorga mos kelishi ko'rsatilgan. Agar qaralayotgan A to'plamning o'lchovi $\mu(A) = 1$ bo'lgan holda

$$\int_A f(x) d\mu \quad (1)$$

Lebeg integrali f ga mos tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi bilan ustma-ust tushishi ko'rsatilgan. Xususan f sodda integrallanuvchi funksiya bo'lgan holda (1) integral diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi bo'ladi. Turli tipdagi integrallarni hisoblashga oid 25 dan ortiq misollar keltirilgan va ulardan 6 tasi yechib ko'rsatilgan.

I.bob. O'lchovli to'plamlar va o'lchovli funksiyalar

1-§. Sonlar o'qidagi to'plamning Lebeg o'lchovi

1.1-ta'rif. Aniqlanish sohasi $\mathfrak{S}_\mu$ yarim halqa bo'lgan $\mu: \mathfrak{S}_\mu \rightarrow \mathbb{R}_+$ to'plam funksiyasi additiv bo'lsa, ya'ni o'zaro kesishmaydigan ixtiyoriy $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{S}_\mu$ to'plamlar uchun $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathfrak{S}_\mu$ bo'lganda

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\mu: \mathfrak{S}_\mu \rightarrow \mathbb{R}_+$ ga o'lchov deyiladi.

Boshqacha aytganda, μ to'plam funksiyasi quyidagi

- 1) aniqlanish sohasi yarim halqa, 2) qiymatlari haqiqiy va manfiymas,
- 3) additivlik shartlarini qanoatlantirsa, unga o'lchov deyiladi.

1.2-ta'rif. Agar m o'lchovning aniqlanish sohasi $\mathfrak{S}_m$ ikkinchi μ o'lchovning aniqlanish sohasi $\mathfrak{S}_\mu$ da saqlansa ($\mathfrak{S}_m \subset \mathfrak{S}_\mu$) va ixtiyoriy $A \in \mathfrak{S}_m$ to'plam uchun

$$\mu(A) = m(A)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda μ o'lchov m o'lchovning davomi deyiladi.

1.3-ta'rif. Agar $\mathfrak{S}_m$ sistemada aniqlangan m o'lchov va ixtiyoriy o'zaro kesishmaydigan sanoqlita $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathfrak{S}_m$ bo'lganda

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda m o'lchov sanoqli additiv yoki σ –additiv o'lchov deyiladi.

Sodda to'plam o'lchovi. Aytaylik a va b lar ixtiyoriy sonlar bo'lsin. Sonlar o'qida $a \leq x \leq b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$, $a < x < b$ tengsizliklarning istalgan biri bilan aniqlangan to'plamlar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu to'plamlarni oraliqlar deb ataymiz. Xususan, agar yuqoridagi

shartlardan birini qanoatlantiruvchi nuqtalar mavjud bo'lmasa (masalan $a > b$), ya'ni $\emptyset$ to'plamni ham oraliq deb ataymiz. $\mathfrak{S}$ bilan sonlar o'qidagi barcha oraliqlar sistemasini belgilaymiz.

Lebeg o'lchovi. Dastlab $E = [0,1]$ birlik kesmada saqlanuvchi to'plamlar bilan chegaralanamiz.

1.4-ta'rif. Ixtiyoriy $A \subset E$ to'plam uchun

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_k P_k} \sum_k m(P_k) \quad (1.3)$$

son A to'plamning tashqi o'lchovi deyiladi.

Bu yerda aniq quyi chegara A to'plamni qoplovchi oraliqlarning barcha chekli yoki sanoqli sistemalari bo'yicha olinadi. Shuni ta'kidlaymizki, ixtiyoriy $A \subset E$ to'plamning tashqi o'lchovi mavjud. Chunki infimum belgisi ostidagi ifoda $\sum m(P_k)$ manfiy emas, shuning uchun u quyidan nol bilan chegaralangan. Quyidan chegaralangan to'plam esa aniq quyi chegaraga ega. Endi $A \subset E$ to'plam o'lchovi ta'rifini beramiz.

1.5-ta'rif. Bizga $A \subset E$ to'plam berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $B \subset E$ elementar to'plam mavjud bo'lib, $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda A Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plam deyiladi.

Agar A Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plam bo'lsa, uning o'lchovi deb tashqi o'lchovini qabul qilamiz. Faqat o'lchovli to'plamlar sistemasida aniqlangan μ^* to'plam funksiyasi Lebeg o'lchovi deyiladi va u μ bilan belgilanadi.

2-§. O'lchovli funksiyalar va ularning xossalari

O'lchovli funksiyalar va ular ustida amallar. Bu bo'limda uzluksiz funksiyaga «qaysidir» ma'noda yaqin bo'lgan (Luzin teoremasiga qarang) o'lchovli funksiya tushunchasini kiritamiz. O'lchovli funksiyalar Lebeg integrali tushunchasini kiritishda asosiy manba hisoblanadi.

Bizga $E \subset \mathbb{R}$ Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plam va unda aniqlangan haqiqiy qiymatli f funksiya berilgan bo'lsin.

2.1-ta'rif. Agar ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun $\{x \in E: f(x) < c\} := E(f < c)$ to'plam o'lchovli bo'lsa, f funksiya E to'plamda o'lchovli deyiladi.

2.1-teorema. Agar f va g funksiyalar E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda ularning yig'indisi $f + g$ ayirmasi $f - g$ va ko'paytmasi $f \cdot g$ o'lchovli bo'ladi. Agar barcha $x \in E$ lar uchun $g(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda f/g funksiya ham E da o'lchovli bo'ladi.

2.1-lemma. Agar f funksiya E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda ixtiyoriy $a, b \in \mathbb{R}$ lar uchun quyidagi to'plamlarning har biri o'lchovli bo'ladi:

1) $E(f \geq a)$; 2) $E(a \leq f < b)$; 3) $E(f = a)$; 4) $E(f \leq a)$; 5) $E(f > a)$.

2.2-lemma. Agar ixtiyoriy $a, b \in \mathbb{R}$ lar uchun 2.1-lemmadagi 1), 2), 4), 5) ko'rinishdagi to'plamlarning birortasi o'lchovli bo'lsa, u holda f funksiya E to'plamda o'lchovli bo'ladi.

2.3-lemma. Agar f va g lar E da o'lchovli funksiyalar bo'lsa, u holda $\{x \in E: f(x) > g(x)\} = E(f > g)$ to'plam o'lchovli bo'ladi.

2.2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 > 0$ mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$ va $x \in E$ larda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ bo'lsa, u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi E to'plamda f funksiyaga tekis yaqinlashadi deyiladi.

2.3-ta'rif. Agar har bir $x \in E$ da $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ bo'lsa, u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f ga nuqtali yaqinlashadi deyiladi.

2.2-teorema. Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi har bir $x \in E$ da $f(x)$ ga yaqinlashsa, u holda limitik funksiya f o'lchovli bo'ladi.

3-§. O'lchovli funksiyalar ketma-ketliklarining yaqinlashishlari

Bu paragrafda biz ekvivalent funksiyalar, ularning ayrim xossalari va o'lchovli funksiyalar ketma-ketliklarining turli yaqinlashishlari orasidagi bog'lanishlarni o'rganamiz.

3.1-ta'rif. E o'lchovli to'plamda aniqlangan f va g funksiyalar uchun $\mu(\{x \in E: f(x) \neq g(x)\}) = 0$ bo'lsa, f va g lar ekvivalent funksiyalar deyiladi va $f \sim g$ shaklda belgilanadi.

3.2-ta'rif. Agar biror xossa E to'plamning nol o'lchovli qism to'plamidan boshqa barcha nuqtalarida bajarilsa, bu xossa E to'plamda deyarli bajariladi deyiladi.

Agar ikkita funksiya deyarli teng bo'lsa, ular ekvivalentdir.

3.1-teorema. Agar f funksiya E o'lchovli to'plamda aniqlangan bo'lib, o'lchovli $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyaga ekvivalent bo'lsa, u holda f ham E da o'lchovli funksiya bo'ladi.

Deyarli yaqinlashish.

3.3-ta'rif. Agar E to'plamda aniqlangan $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligining f funksiyaga yaqinlashmaydigan nuqtalari to'plamining o'lchovi nol bo'lsa, u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi E to'plamda f funksiyaga deyarli yaqinlashadi deyiladi, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

tenglik E dagi deyarli barcha x lar uchun o'rinli, yoki

$$A = \left\{x: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)\right\}, \quad \mu(E \setminus A) = 0.$$

3.2-teorema. Agar E to'plamda $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi f ga deyarli yaqinlashsa, u holda limitik funksiya f ham o'lchovlidir.

3.3-teorema (Egorov). E chekli o'lchovli to'plamda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f ga deyarli yaqinlashsin. U holda ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun shunday $E_\delta \subset E$ to'plam mavjudki, uning uchun quyidagilar o'rinli:

$$1) \mu(E \setminus E_\delta) < \delta,$$

2) E_δ to'plamda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f ga tekis yaqinlashadi.

O'lchov bo'yicha yaqinlashish. Bizga E to'plamda aniqlangan $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi va f o'lchovli funksiya berilgan bo'lsin.

3.4-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in E: |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}) = 0$$

tenglik bajarilsa, u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi E to'plamda f funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashadi deyiladi.

Deyarli yaqinlashishdan o'lchov bo'yicha yaqinlashish kelib chiqadi. Quyidagi teorema shu haqda.

3.4-teorema. Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi E ($\mu(E) < \infty$) to'plamda f funksiyaga deyarli yaqinlashsa, u holda $\{f_n\}$ ketma-ketlik E to'plamda f ga o'lchov bo'yicha ham yaqinlashadi.

3.5-teorema (Luzin). $[a, b]$ kesmada aniqlangan f funksiya o'lchovli bo'lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $[a, b]$ da uzluksiz bo'lgan shunday φ funksiya mavjud bo'lib, $\mu(\{x \in [a, b]: f(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.

II.bob. Lebeg integrali

4-§. Sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali

Biz dastlab sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali tushunchasini kiritishda o'lchovli E yoki A to'plamda aniqlangan, o'lchovli f funksiyaning qaraymiz va $\mu(E) < +\infty$ deb faraz qilamiz.

4.1-ta'rif. Agar $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ o'lchovli bo'lib, uning qiymatlari to'plami ko'pi bilan sanoqli bo'lsa, u holda f sodda funksiya deyiladi.

4.1-teorema. Ko'pi bilan sanoqlita har xil $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ qiymatlarni qabul qiluvchi f funksiya o'lchovli bo'lishi uchun

$$A_n = \{x \in E: f(x) = y_n\}$$

to'plamlarning o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* f funksiya E to'plamda o'lchovli bo'lsa, A_n to'plamlarning o'lchovli ekanligini ko'rsatamiz. Bunda $E(f = y)$ to'plamlarning har birini o'lchovli ekanligini ko'rsatishda quyidagi tenglikdan foydalanamiz.

$$E(f = y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(y \leq f < y + \frac{1}{n}\right).$$

Bu yerda har bir to'plam o'lchovli bo'lganligidan bu to'plamlarning kesishmasi ham o'lchovli bo'ladi. Demak A_n to'plamlar o'lchovli bo'lar ekan.

Yetarliligi. A_n to'plamlarning har biri o'lchovli ekanligidan f funksiyaning o'lchovli ekanligini keltirib chiqaramiz.

$$E(f < c) = \bigcup_{y_n < c} A_n$$

tenglikdan va o'lchovli to'plamlarning birlashmasi o'lchovli ekanligidan f ning E da o'lchovli funksiya ekanligi kelib chiqadi.

4.2-teorema (*O'lchovlilik mezoni*). $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya o'lchovli bo'lishi uchun unga tekis yaqinlashuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligining mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. *Yetarliligi.* $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligining har bir $x \in E$ da $f(x)$ ga yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda limitik funksiya f o'lchovli bo'lishini ko'rsatamiz. Shartga ko'ra, ixtiyoriy $x \in E$ uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ o'rinli

$$E(f < c) = \{x: f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m>n}^{\infty} \left\{x: f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\} \quad (4.1)$$

bo'ladi. Teorema isboti (4.1) tenglikdan kelib chiqadi, chunki, sanoqli sondagi o'lchovli to'plamlarning birlashmasi va kesishmasi yana o'lchovli to'plamlardir.

Zaruriyligi. f – o‘lchovli funksiya bo‘lsin. Unga tekis yaqinlashuvchi $\{f_n\}$ sodda funksiyalar ketma-ketligining mavjudligini ko‘rsatamiz. Ko‘rishimiz mumkinki har bir $n \in N$ uchun

$$f_n^{but}(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (4.2)$$

sodda funksiya bo‘ladi. Bundan tashqari

$$|f(x) - f_n^{but}(x)| = \left| f(x) - \frac{[nf(x)]}{n} \right| = \left| \frac{nf(x) - [nf(x)]}{n} \right| = \frac{\{nf(x)\}}{n} \leq \frac{1}{n}$$

tengsizlik o‘rinli. Demak, f_n ketma-ketlik f ga tekis yaqinlashadi.

Dastlab biz cheklita $y_1, y_2, \dots, y_n$ qiymatlarni qabul qiluvchi f sodda funksiya uchun Lebeg integrali tushunchasini kiritamiz. Ixtiyoriy $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ uchun

$$A_k = \{x \in A : f(x) = y_k\} \quad (4.3)$$

belgilash olamiz.

4.2-ta’rif. Bizga $y_1, y_2, \dots, y_n$ qiymatlarni qabul qiluvchi f sodda funksiya berilgan bo‘lsin. U holda

$$\sum_{k=1}^n y_k \mu(A_k)$$

yig‘indi f sodda funksiyaning A to‘plam bo‘yicha olingan Lebeg integrali deyiladi va

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{k=1}^n y_k \mu(A_k)$$

kabi belgilanadi.

Endi bizga sanoqlita $y_1, y_2, \dots, y_n$ qiymatlarni qabul qiluvchi $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ sodda funksiya berilgan bo‘lsin. f funksiya uchun quyidagi formal qator

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k) \quad (4.4)$$

ni qaraymiz, bu yerda A_k lar (4.3) tenglik bilan aniqlanadi.

4.3-ta'rif. Agar (4.4) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda f sodda funksiya A to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deyiladi. (4.4) qatorning yig'indisi f funksiyaning A to'plam bo'yicha olingan Lebeg integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n)$$

Bu ta'rifda y_n larning har xilligi talab qilingan. Lekin y_n larning har xilligini talab qilmasdan ham sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali ta'rifini keltirish mumkin. Bu quyidagi lemma yordamida amalga oshiriladi.

4.1-lemma.

$$A = \bigcup_k B_k, \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

va har bir B_k to'plamda f funksiya faqat bitta c_k qiymat qabul qilsin. f sodda funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lishi uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(B_k) \quad (4.5)$$

qatorning absolyut yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Osongina ko'rish mumkinki, har bir

$$A_n = \{x \in A : f(x) = y_n\}$$

to'plam $c_k = y_k$ bo'ladigan B_k to'plamlarning birlashmasidan iborat, ya'ni

$$A_n = \bigcup_{c_k=y_k} B_k$$

Shuning uchun

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{c_k=y_k} \mu(B_k) = \sum_k c_k \mu(B_k).$$

O'lchovning manfiy masligidan

$$\sum_n |y_n| \mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{c_k=y_n} \mu(B_k) = \sum_k |c_k| \mu(B_k).$$

ya'ni

$$\sum_n y_n \mu(A_n) \quad \text{va} \quad \sum_k c_k \mu(B_k)$$

qatorlar bir vaqtda absolyut yaqinlashadi yoki uzoqlashadi.

Sodda funksiyalar uchun Lebeg integralining ba'zi xossalarini isbotlaymiz.

A) *Additivlik xossasi.* Agar f va g sodda funksiyalar A to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f + g$ sodda funksiya ham A to'plamda integrallanuvchi va

$$\int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Integrallanuvchi f sodda funksiya f_i qiymatni $A_i \subset A$ to'plamda, g sodda funksiya esa g_j qiymatni $B_j \subset A$ to'plamda qabul qilsin. U holda

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_i f_i \mu(A_i), \quad \int_A g(x) d\mu = \sum_j g_j \mu(B_j)$$

qatorlar absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi. O'lchovning σ – additivlik xossasiga ko'ra, quyidagi tengliklar o'rinli

$$\mu(A_i) = \sum_j \mu(A_i \cap B_j), \quad \mu(B_j) = \sum_i \mu(A_i \cap B_j).$$

U holda quyidagi musbat hadli qatorlar

$$\sum_i \sum_j |f_i| \cdot \mu(A_i \cap B_j), \quad \sum_i \sum_j |g_j| \cdot \mu(A_i \cap B_j)$$

yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak,

$$\sum_i \sum_j (f_i + g_j) \mu(A_i \cap B_j)$$

qator absolyut yaqinlashuvchi. Bundan $f + g$ sodda funksiyaning integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi. 4.1-lemmaga ko'ra,

$$\begin{aligned} \int_A [f(x) + g(x)] d\mu &= \sum_i \sum_j (f_i + g_j) \mu(A_i \cap B_j) = \sum_i f_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) + \\ &+ \sum_j g_j \sum_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_i f_i \cdot \mu(A_i) + \sum_j g_j \mu(B_j) = \\ &= \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu. \end{aligned}$$

B) Agar f sodda funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $k \in R$ o'zgarmas uchun $k \cdot f$ funksiya ham A to'plamda integrallanuvchi va quyidagi tenglik o'rinli

$$\int_A k \cdot f(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu.$$

Isbot. Sodda funksiya integrali ta'rifiga ko'ra

$$\int_A k \cdot f(x) d\mu = \sum_i k \cdot f_i \mu(A_i) = k \sum_i f_i \mu(A_i) = k \int_A f(x) d\mu$$

C) A to'plamda chegaralangan f sodda funksiya integrallanuvchidir. Agar A da $|f(x)| \leq M$ bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlik o'rinli

$$\left| \int_A f(x) d\mu \right| \leq M \cdot \mu(A).$$

Isbot. Sodda funksiya integrali ta'rifidan

$$\left| \int_A f(x) d\mu \right| = \left| \sum_i f_i \mu(A_i) \right| \leq \sum_i |f_i| \mu(A_i) \leq M \sum_i \mu(A_i) = M \mu(A).$$

5 -§. Ixtiyoriy funksiyalar uchun Lebeg integrali

va uning xossalari

Bu paragrafda Lebeg integralining asosiy xossalari o'rganiladi. Biz doim chekli o'lchovli $A(\mu(A) < +\infty)$ to'plam va unda aniqlangan f o'lchovli funksiyani qaraymiz.

5.1-ta'rif. Agar A to'plamda f funksiyaga tekis yaqinlashuvchi integrallanuvchi sodda funksiyalarning $\{f_n\}$ ketma-ketligi mavjud bo'lsa, u holda f funksiya A to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deyiladi va uning integrali

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu \quad (5.1)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Bu ta'rif korrekt, ya'ni kamchiliklardan holi bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

- 1).Har qanday tekis yaqinlashuvchi va A to'plamda integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi uchun (5.1) limit mavjud bo'lishi kerak.
- 2).Berilgan f funksiya uchun (5.1) limit $\{f_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga bog'liq emas.
- 3).Agar f funksiya sodda funksiya bo'lsa, bu ta'rif sodda funksiyalar uchun berilgan 4.1-ta'rif bilan usma-ust tushishi kerak.

1)-3) shartlarning bajarilishini ko'rsatamiz.

1) Sodda funksiyalar uchun integralning A,B va C xossalaridan

$$\left| \int_A f_n(x) d\mu - \int_A f_m(x) d\mu \right| \leq \int_A |f_n(x) - f_m(x)| d\mu \leq \mu(A) \cdot \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)|$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa (5.1) limitning mavjudligini isbotlaydi.

2) (5.1) limitning $\{f_n\}$ ga bog'liq emasligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, f ga tekis yaqinlashuvchi ikkita $\{f_n\}$ va $\{f'_n\}$ ketma-ketliklar uchun (5.1) limit har xil qiymatlar qabul qilsin. U holda $f_1, f'_1, f_2, f'_2, \dots, f_n, f'_n \dots$ ketma-ketlik f ga tekis

yaqinlashadi, lekin bu ketma-ketlik uchun (5.1) limit mavjud emas. Bu esa hozirgina isbotlangan 1) shartga zid.

3) shartni isbotlash uchun ixtiyoriy n da $f_n(x) = f(x)$ deb olish yetarli.

Endi 5.1-ta'rifga teng kuchli bo'lgan quyidagi ta'rifni keltiramiz.

5.2-ta'rif. Agar har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun (4.2) tenglik bilan aniqlanuvchi f_n^{but} sodda funksiya integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiya A to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deyiladi va uning integrali

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n^{but}(x) d\mu.$$

Lebeg integralining asosiy xossalarini keltiramiz.

I. $f(x) = 1, x \in A$ sodda funksiya integrallanuvchi va

$$\int_A 1 \cdot d\mu = \mu(A).$$

II. *Bir jinslilik xossasi.* Agar f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $k \in \mathbb{R}$ o'zgarmas uchun kf funksiya ham A to'plamda integrallanuvchi va

$$\int_A k \cdot f(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu.$$

tenglik o'rinli.

Bu xossaning isboti sodda funksiyalar uchun Lebeg integralining B) xossasidan limitga o'tish natijasida va o'zgarmasni limit belgisi ostidan chiqarish mumkin degan qoidadan kelib chiqadi. Ya'ni, agar $\{f_n\}$ integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi f funksiya tekis yaqinlashsa, u holda $\{k \cdot f_n\}$ integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi $k \cdot f$ funksiya tekis yaqinlashadi. Demak, $k \cdot f$ funksiya integrallanuvchi va

$$\int_A k \cdot f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A k \cdot f_n(x) d\mu = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu$$

tenglik o‘rinli.

III. *Additivlik xossasi.* Agar f va g funksiyalar A to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $f + g$ funksiya ham A to‘plamda integrallanuvchi va

$$\int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu$$

tenglik o‘rinli.

Isbot. Agar $\{f_n\}$ integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi f funksiya, $\{g_n\}$ integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi g funksiya A to‘plamda tekis yaqinlashsa, u holda $\{f_n + g_n\}$ integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi $f + g$ funksiya A to‘plamda tekis yaqinlashadi. Demak, $f + g$ funksiya integrallanuvchi va sodda funksiyalar uchun integralning A) xossasiga ko‘ra

$$\begin{aligned} \int_A [f(x) + g(x)] d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A [f_n(x) + g_n(x)] d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu \end{aligned}$$

tenglik o‘rinli.

Shuningdek quyidagi tenglik o‘rinli

$$\int_A f(x) d\mu = \int_{A_1} f(x) d\mu + \int_{A_2} f(x) d\mu, \quad A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset. \quad (5.2)$$

IV. A to‘plamda chegaralangan va o‘lchovli f funksiya integrallanuvchidir.

Isbot. Agar f funksiya A to‘plamda chegaralangan bo‘lsa, u holda (4.2) tenglik bilan aniqlanuvchi f_n^{but} sodda funksiya ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ da cheklita qiymat qabul qiladi. Demak, $f_n(x)$ integrallanuvchi. 5.2-ta’rifga ko‘ra f ham integrallanuvchi.

V. Agar $f(x) \geq 0$ funksiya integrallanuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_A f(x) d\mu \geq 0.$$

Isbot. Bu xossa Lebeg integralining monotonlik xossasi deyiladi. Uning isboti sodda funksiyalar uchun to'g'ridan-to'g'ri ta'rifdan kelib chiqadi. Agar f manfiymas funksiya bo'lsa, u holda unga tekis yaqinlashuvchi f_n^{but} sodda funksiyalar ketma-ketligi ham manfiymas. Shunday ekan

$$\int_A f_n^{but}(x) d\mu = \frac{1}{n} \int_A [nf(x)] d\mu \geq 0.$$

Bu yerdan $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tib, V-xossaning isbotiga ega bo'lamiz.

Integralning monotonlik xossasidan quyidagi tasdiq kelib chiqadi. Agar $f(x) \geq g(x)$ bo'lsa, u holda

$$\int_A f(x) d\mu \geq \int_A g(x) d\mu$$

tengsizlik o'rinli. Shuningdek, agar $m \leq f(x) \leq M, x \in A$ bo'lsa, u holda

$$m\mu(A) \leq \int_A f(x) d\mu \leq M\mu(A)$$

tengsizliklar o'rinni.

VI Agar $\mu(A) = 0$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ uchun

$$\int_A f(x) d\mu = 0.$$

VI. Agar deyarli barcha $x \in A$ uchun $f(x) = g(x)$ bo'lsa, u holda

$$\int_A f(x) d\mu = \int_A g(x) d\mu.$$

Bu integrallardan birining mavjudligidan ikkinchisining mavjudligi kelib chiqadi va aksincha.

Bu tasdiqlar Lebeg integralining ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

VII. Agar φ funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lib, deyarli barcha $x \in A$ lar uchun $|f(x)| \leq \varphi(x)$ bo'lsa, u holda f funksiya ham A to'plamda integrallanuvchi bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, agar f va φ sodda funksiyalar bo'lsa, u holda A to'plamdan o'lchovi nol bo'lgan $A_1 = \{x \in A: |f(x)| > \varphi(x)\}$ to'plamni chiqarib tashlab, qolgan A' to'plamda $|f(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlikni hosil qilamiz. A' to'plamni chekli yoki sanoqli sondagi A'_n to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida shunday tasvirlaymizki, har bir A'_n to'plamda f va φ funksiyalar o'zgarmas bo'lsin, ya'ni

$$f(x) = a_n, \quad \varphi(x) = b_n, \quad x \in A'_n.$$

Shartga ko'ra $|a_n| \leq b_n$ tengsizlik bajariladi. φ funksiya integrallanuvchi bo'lganligi uchun (5.2) va VI xossadan foydalanib

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \mu(A'_n) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu(A'_n) = \int_{A'} \varphi(x) d\mu = \\ &= \int_{A'} \varphi(x) d\mu + \int_{A_1} \varphi(x) d\mu = \int_A \varphi(x) d\mu \end{aligned}$$

ni olamiz. Shuning uchun f ham integrallanuvchi va

$$\begin{aligned} \left| \int_A f(x) d\mu \right| &= \left| \int_{A'} f(x) d\mu \right| = \left| \sum_n a_n \mu(A'_n) \right| \leq \sum_n |a_n| \mu(A'_n) = \\ &= \int_{A'} |f(x)| d\mu \leq \int_A \varphi(x) d\mu. \end{aligned}$$

Endi umumiy holni qaraymiz.

$$f_n^{but}(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$$

sodda funksiya ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ da

$$|f_n^{but}(x)| \leq \varphi(x) + 1, \quad x \in A'$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Demak, $f_n^{but}(x)$ sodda funksiya integrallanuvchi. 5.2-ta'rifga ko'ra f funksiya ham integrallanuvchi.

VIII. Quyidagi integrallar bir vaqtda mavjud yoki mavjud emas

$$I_1 = \int_A f(x) d\mu, \quad I_2 = \int_A |f(x)| d\mu.$$

Isbot. VII xossadan foydalanib, ko'rsatish mumkinki, I_2 ning mavjudligidan I_1 ning mavjudligi kelib chiqadi. Teskari tasdiq f sodda funksiya bo'lganda bevosita ta'rifdan kelib chiqadi. Umumiy holni qaraymiz. f funksiya A da integrallanuvchi bo'lgani uchun, unga tekis yaqinlashuvchi $\{f_n\}$ integrallanuvchi, sodda funksiyalar ketma-ketligi mavjud. U holda

$$||f(x)| - |f_n(x)|| \leq |f(x) - f_n(x)|$$

tengsizlikka ko'ra, $\{|f_n|\}$ - integrallanuvchi, sodda funksiyalar ketma-ketligi $|f|$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. Shunday ekan, ta'rifga ko'ra I_2 integral mavjud.

Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiya Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lishi shart emas.

5.1-misol. Dirixle funksiyasini $[0, 2]$ kesmada Lebeg va Riman ma'nolarida integrallanuvchanlikka tekshiring.

Yechish. $\mathfrak{D}$ sodda funksiya bo'lib uning Lebeg integrali

$$\int_{[0,2]} \mathfrak{D}(x) d\mu = 1 \cdot \mu([0,2] \cap \mathbb{Q}) + \mu([0,2] \setminus \mathbb{Q}) = 0$$

Dirixle funksiyasani $[0, 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi emas. Buni ko'rsatish uchun $[0, 2]$ kesmani $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 2$ nuqtalar yordamida teng n bo'lakka bo'lamiz. Ma'lumki, Dirixle funksiyasining $[x_{k-1}, x_k]$ bo'lakchadagi aniq yuqori chegarasi M_k barcha $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ uchun 1 ga teng, Dirixle funksiyasining bu bo'lakchadagi aniq quyi chegarasi m_k esa 0 ga teng. Bu bo'linishga mos Darbu yig'indilarini qaraymiz:

$$\Omega_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n M_k = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n 1 = 2, \quad \omega_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n m_k = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n 0 = 0.$$

Bu yerdan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$$

tengliklarga kelamiz. Demak, Dirixle funksiyasani $[0, 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi emas.

VI, VII va VIII xossalar Lebeg integrali uchun xos. Bu xossalar Riman integrali uchun o'rinli emas. Hozir bularga misollar keltiramiz.

2.2-masala. VI-xossa Riman integrali uchun o'rinli emasligiga misol keltiring.

Yechish. $[0, 2]$ kesmada Dirixle $\mathfrak{D}(x)$ va nol $\theta(x) = 0$ funksiyalarni qaraymiz. Ular $[0, 2]$ kesmada deyarli teng, shuning uchun

$$\int_{[0, 2]} \mathfrak{D}(x) d\mu = \int_{[0, 2]} \theta(x) d\mu = 0.$$

Lekin nol funksiya Riman ma'nosida integrallanuvchi, Dirixle funksiyasi $\mathfrak{D}$ esa Riman ma'nosida integrallanuvchi emas

Lebeg integralining VII va VIII xossalari ham Riman integrali uchun o'rinli emas. Bunga quyidagi misollarda ishonch hosil qilish mumkin.

$$\varphi(x) = 2, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{agar } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Barcha $[0, 2]$ lar uchun $|f(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlik o'rinli. Lekin f funksiya $[0, 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi emas. Bu tasdiq $\mathfrak{D}$ ning Riman ma'nosida integrallanuvchi emasligiga o'xshash ko'rsatiladi.

f funksiya $[0, 2]$ to'plamda integrallanuvchi emas, ammo $|f(x)| = 1$ funksiya esa Riman ma'nosida integrallanuvchi. Demak, VIII-xossa Riman integrali uchun o'rinli emas.

Lebeg integralining σ - additivlik va absolyut uzluksizlik xossalari

Yuqorida biz Lebeg integralining xossalarini tayinlangan A to'plam bo'yicha keltirdik. Endi

$$F(A) = \int_A f(x) d\mu$$

ifodani o'lchovli to'plamlar sistemasida aniqlangan, A to'plamning funksiyasi sifatida qarab, Lebeg integralining ayrim xossalarini isbotlaymiz.

5.1-teorema (*Lebeg integralining σ – additivlik xossasi*). O'lchovli A to'plam o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ o'lchovli to'plamlarning birlashmasidan iborat bo'lsin, ya'ni

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

va f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsin. U holda har bir A_n to'plam bo'yicha f funksiyaning integrali mavjud,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu$$

qator absolyut yaqinlashadi va

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu. \quad (5.3)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Avvalo teoremani $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ qiymatlarni qabul qiluvchi sodda f funksiya uchun isbotlaymiz. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$B_k = \{x \in A: f(x) = y_k\},$$

$$B_{nk} = \{x \in A_n: f(x) = y_k\} = B_k \cap A_n, \quad B_k = \bigcup_n B_{nk}.$$

f funksiya integrallanuvchi bo'lgani uchun $\sum_k y_k \mu(B_k)$ qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi. U holda quyidagilar o'rinli:

$$\begin{aligned} \int_A f(x) d\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_{nk}) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_k \mu(B_{nk}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(B_{nk}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu. \end{aligned} \quad (5.4)$$

To'plam o'lchovi manfiymas bo'lgani uchun (5.4) tengliklar zanjiridagi barcha qatorlar absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Endi f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lgan ixtiyoriy funksiya bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun A da integrallanuvchi shunday sodda g funksiya mavjudki, barcha $x \in A$ larda $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ yoki $|f(x)| < |g(x)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Yuqorida isbotlanganiga ko'ra g uchun

$$\int_A g(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} g(x) d\mu \quad (5.5)$$

tenglik o'rinli va g har bir A_n da integrallanuvchi hamda (5.5) qator absolyut yaqinlashuvchi. g ning A_n to'plamlarda integrallanuvchi ekanligidan va $|f(x)| < |g(x)| + \varepsilon$ tengsizlikdan f ning ham har bir A_n to'plamda integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi hamda

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{A_n} f(x) d\mu - \int_{A_n} g(x) d\mu \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x) - g(x)| d\mu < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon \mu(A_n) = \varepsilon \mu(A). \end{aligned}$$

Bu esa (5.5) bilan birgalikda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu$$

qatorning absolyut yaqinlashuvchi ekanligiga va quyidagi bahoga olib keladi:

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu - \int_{A_n} g(x) d\mu \right| \\
 &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} g(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu - \int_A f(x) d\mu \right| \leq \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{A_n} f(x) d\mu - \int_{A_n} g(x) d\mu \right| + \left| \int_A f(x) d\mu - \int_A g(x) d\mu \right| \leq 2\varepsilon\mu(A).
 \end{aligned}$$

Bu yerda $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy bo'lgani uchun (5.3) tenglik o'rinli.

5.1-natija. Agar f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiya A to'plamning ixtiyoriy o'lchovli A' qismida ham integrallanuvchi bo'ladi.

Endi ma'lum ma'noda 5.1-teorema teskari hisoblanuvchi quyidagi teoremani keltiramiz.

5.2-teorema. O'lchovli A to'plam o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, o'lchovli to'plamlarning birlashmasidan iborat bo'lsin, ya'ni

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Har bir A_n to'plamda f funksiya integrallanuvchi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| d\mu \quad (5.6)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda f funksiya A to'plamda integrallanuvchi va (5.3) tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun f funksiyaning A to'plamda integrallanuvchi ekanligini ko'rsatish yetarli. U holda (5.3) tenglik esa 5.1-

teoremadan kelib chiqadi. Avvalo isbotni B_i to'plamlarda f_i qiymatlarni qabul qiluvchi f sodda funksiya uchun kiritamiz :

$$B_i = \{x \in A: f(x) = f_i\}, \quad A_{ni} = A_n \cap B_i.$$

U holda quyidagilar o'rinli

$$\bigcup_n A_{ni} = B_i \quad va \quad \int_{A_n} |f(x)| d\mu = \sum_i |f_i| \mu(A_{ni}).$$

(5.6) qatorning yaqinlashuvchiligidan

$$\sum_n \sum_i |f_i| \mu(A_{ni})$$

qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Yaqinlashuvchi musbat hadli qator hadlarining o'rinlarini ixtiyoriy tartibda almashtirish mumkin. Shuning uchun

$$\sum_n \sum_i |f_i| \mu(A_{ni}) = \sum_i |f_i| \sum_n \mu(A_{ni}) = \sum_i |f_i| \mu(B_i)$$

Oxirgi qatorning yaqinlashuvchiligi

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_i f_i \mu(B_i)$$

integralning mavjudligini bildiradi.

Umumiy holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son va f funksiya uchun shunday g sodda funksiya mavjudki, barcha $x \in A$ uchun

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad (5.7)$$

tengsizlik o'rinli. U holda VII-xossaga ko'ra har bir A_n to'plamda g funksiyaning integrali mavjud va

$$\int_{A_n} |g(x)| d\mu \leq \int_{A_n} |f(x)| d\mu + \varepsilon \mu(A_n)$$

tengsizlik o'rinli. (5.6) qatorning yaqinlashuvchi ekanligidan, hamda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

tenglikdan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |g(x)| d\mu$$

qatorning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. Bundan g sodda funksiyaning A da integrallanuvchi ekanligi, (5.7) tengsizlikdan esa f funksiyaning A to'plamda integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi.

5.3-teorema (*Chebyshev tengsizligi*). A o'lchovli to'plamda manfiy φ funksiya va $c > 0$ son berilgan bo'lsin. U holda quyidagi tengsizlik o'rinli

$$\mu(\{x \in A: \varphi(x) \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int_A \varphi(x) d\mu.$$

Isbot. Aytaylik, $A_c = \{x \in A: \varphi(x) \geq c\}$ bo'lsin. U holda

$$\int_A \varphi(x) d\mu = \int_{A_c} \varphi(x) d\mu + \int_{A \setminus A_c} \varphi(x) d\mu \geq \int_{A_c} \varphi(x) d\mu \geq c \cdot \mu(A_c)$$

Bundan

$$\mu(A_c) \leq \frac{1}{c} \int_A \varphi(x) d\mu$$

tengsizlik kelib chiqadi.

5.2-natija. Agar

$$\int_A |f(x)| d\mu = 0$$

bo'lsa, u holda deyarli barcha $x \in A$ uchun $f(x) = 0$ bo'ladi.

Isbot. Chebishev tengsizligiga ko'ra ixtiyoriy n uchun

$$\mu\left(\left\{x \in A: \left|f(x)\right| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int_A |f(x)| d\mu = 0$$

munosabatga egamiz. Bundan tashqari

$$\{x \in A: f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in A: |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

tenglik o‘rinli. O‘lchovning yarim additivlik xossasiga ko‘ra,

$$\mu(\{x \in A: f(x) \neq 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in A: |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

ga ega bo‘lamiz. Bu esa natijani isbotlaydi.

5.4-teorema (*Lebeg integralining absolyut uzluksizlik xossasi*). Agar f funksiya A ($\mu(A) < \infty$) to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjudki, $\mu(D) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday $D \subset A$ to‘plam uchun

$$\left| \int_D f(x) d\mu \right| < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli.

Isbot. Agar f funksiya A to‘plamda M soni bilan chegaralangan bo‘lsa, teoremani isbotlash uchun $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ deb olish yetarli, chunki

$$\left| \int_D f(x) d\mu \right| < M \cdot \mu(D) < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Endi f ixtiyoriy o‘lchovli va integrallanuvchi funksiya bo‘lsin. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$A_n = \{x \in A: n \leq |f(x)| < n+1\}, \quad B_n = \bigcup_{n=0}^N A_n, \quad C_N = A \setminus B_N$$

U holda 5.1-teoremaga ko‘ra,

$$\int_A |f(x)| d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| d\mu$$

tenglik o‘rinli. Berilgan $\varepsilon > 0$ son uchun N ni shunday tanlaymizki,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| d\mu = \int_{C_N} |f(x)| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik bajarilsin va

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$$

bo'lsin. Agar $\mu(D) < \delta$ bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} \left| \int_D f(x) d\mu \right| &\leq \int_D |f(x)| d\mu = \int_{D \cap B_N} |f(x)| d\mu + \int_{D \cap C_N} |f(x)| d\mu \leq \\ &\leq (N+1)\mu(D) + \int_{C_N} |f(x)| d\mu < (N+1)\frac{\varepsilon}{2(N+1)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

6 -§. Lebeg integrali belgisi ostida limitga o'tish

Integral belgisi ostida limitga o'tish yoki qatorlarni hadma-had integrallash masalasi ko'plab muammolarni yechishda uchraydi. Integral belgisi ostida limitga o'tishning yetarli shartlaridan biri berilgan ketma-ketlikning tekis yaqinlashish shartidir.

6.1-teorema (*Lebeg*). Agar $\{f_n\}$ ketma-ketlik A to'plamning har bir nuqtasida f funksiyaga yaqinlashsa va barcha $n \in N$ lar uchun $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlik bajarilib, φ funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda limitik funksiya f ham A da integrallanuvchi bo'ladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

Isbot. Teorema shartidan limitik funksiya f uchun $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Lebeg integralining VII-xossasiga ko'ra f integrallanuvchi funksiya bo'ladi. Endi $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo'lsin. Lebeg integralining absolyut uzluksizlik xossasiga (5.4-teoremaga qarang) ko'ra shunday $\delta > 0$ son mavjudki, agar $\mu(B) < \delta$ bo'lsa, u holda

$$\int_B \varphi(x) d\mu < \frac{\varepsilon}{4} \quad (6.1)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Egorov teoremasiga ko'ra, B to'plamni shunday tanlash mumkinki, $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C = A \setminus B$ to'plamda f funksiyaga tekis yaqinlashadi. Demak, shunday N mavjudki, ixtiyoriy $n > N$ lar va ixtiyoriy $x \in C$ uchun

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(C)} \quad (6.2)$$

tengsizlik bajariladi. U holda

$$\int_A f(x) d\mu - \int_A f_n(x) d\mu = \int_C [f(x) - f_n(x)] d\mu + \int_B f(x) d\mu - \int_B f_n(x) d\mu$$

bo'ladi. Endi

$$|f(x)| \leq \varphi(x), \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

ekanligidan hamda (6.1) va (6.2) lardan

$$\begin{aligned} \left| \int_A f(x) d\mu - \int_A f_n(x) d\mu \right| &\leq \int_C |f(x) - f_n(x)| d\mu + \int_B |f(x)| d\mu + \\ &+ \int_B |f_n(x)| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(C)} \cdot \mu(C) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

6.1-natija. Agar $|f_n(x)| \leq M = \text{const}$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ bo'lsa, u holda integral belgisi ostida limitga o'tish mumkin, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

6.1-eslatma. Nol o'lchovli to'plamda funksiyaning qiymatini o'zgartirish integral qiymatiga (VI-xossaga qarang) ta'sir qilmaydi, shuning uchun 6.1-teoremada $\{f_n\}$ ketma-ketlikning f funksiyaga deyarli yaqinlashishini va $|f(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlikning ham deyarli barcha x lar uchun bajarilishini talab qilish yetarli.

6.2-teorema (Levi). A to'plamda monoton

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots,$$

Integrallanuvchi $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lib, barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun

$$\int_A f_n(x) d\mu \leq K$$

tengsizlik bajarilsin. U holda A to'plamning deyarli hamma yerida $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ chekli limit mavjud hamda f funksiya A da integrallanuvchi va integral belgisi ostida limitga o'tish mumkin, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

Isbot. Faraz qilaylik, $f_1(x) \geq 0$ bo'lsin. Umumiy hol $\bar{f}_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$ almashtirish yordamida $\bar{f}_1(x) \geq 0$ holga keltiriladi.

$$\Omega = \left\{ x \in A: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty \right\}$$

to'plamni qaraymiz. Agar biz $\Omega_n^{(r)} = \{x \in A: f_n(x) > r\}$ to'plamni kiritsak, u holda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\Omega = \bigcap_{r=1}^{\infty} \Omega_n^{(r)}, \quad \Omega^{(r)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^{(r)}.$$

Chebichev tengsizligiga (5.3-teoremaga qarang) ko'ra,

$$\mu(\Omega_n^{(r)}) \leq \frac{1}{r} \int_A f_n(x) d\mu \leq \frac{K}{r}.$$

Har bir tayinlangan r da $\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \dots \subset \Omega_n^{(r)} \subset \dots$ munosabat o'rinli. O'lchovning uzluksizlik xossasiga ko'ra

$$\mu(\Omega^{(r)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_n^{(r)}) \leq \frac{K}{r}$$

Har bir r uchun $\Omega \subset \Omega^{(r)}$ ekanligidan $\mu(\Omega) \leq \frac{K}{r}$ ekanligi kelib chiqadi va r ixtiyoriy bo'lgani uchun $\mu(\Omega) = 0$ bo'ladi.

Shu bilan monoton $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlik deyarli barcha $x \in A$ larda chekli $f(x)$ limitga ega ekanligi kelib chiqadi.

Endi $f^{but}(x) = [f(x)]$, $A_r = \{x \in A: f^{but}(x) = r\} = \{x \in A: r \leq f(x) < r + 1\}$, $r = 0, 1, \dots$ deb olamiz. Agar f^{but} funksiyaning A to'plamda integrallanuvchi ekanligini ko'rsatsak, u holda $\varphi(x) = f^{but}(x) + 1$ funksiya ham A to'plamda integrallanuvchi bo'ladi va 6.1-teoremadan 6.2-teoremanint tasdig'i kelib chiqadi.

Endi f^{but} funksiyaning A to'plamda integrallanuvchi ekanligini ko'rsatamiz.

$$B_s = \bigcup_{r=0}^s A_r$$

deymiz. B_s da f_n va f funksiyalar chegaralangan va har doim $f^{but}(x) \leq f(x)$ bo'lgani uchun 6.1-natijaga ko'ra

$$\int_{B_s} f^{but}(x) d\mu \leq \int_{B_s} f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_s} f_n(x) d\mu \leq K.$$

Ikkinchi tomondan,

$$\int_{B_s} f^{but}(x) d\mu = \sum_{r=0}^s r \mu(A_r) \leq K.$$

Bu yig'indining chegaralanganligi

$$\sum_{r=0}^{\infty} r \mu(A_r)$$

qatorning yaqinlashuvchiligini bildiradi. Demak,

$$\int_A f^{but}(x) d\mu = \sum_{r=0}^{\infty} r \mu(A_r).$$

Shunday qilib, f^{but} ning A da integrallanuvchi ekanligi isbotlandi.

Teoremani monoton o'smaydigan ketma-ketliklar uchun ham isbotlash mumkin.

6.2-natija. Agar $\psi_n(x) \geq 0$ bo'lib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x) d\mu < +\infty$$

bo'lsa, u holda A to'plamning deyarli barcha nuqtalarida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$$

qator yaqinlashadi va qatorni hadlab integrallash mumkin, ya'ni

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x) d\mu$$

tenglik o'rinli.

6.3-teorema (Fatou). Agar manfiymas, o'lchovli $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi A to'plamning deyarli barcha nuqtalarida f funksiyaga yaqinlashsa va

$$\int_A f_n(x) d\mu \leq K$$

bo'lsa, u holda f funksiya A to'plamda integrallanuvchi va

$$\int_A f(x) d\mu \leq K$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. $\varphi_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$ deb belgilaymiz. φ_n o'lchovli, chunki

$$\{x: \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k \geq n} \{x: f_k(x) < c\}.$$

Bundan tashqari $0 \leq \varphi_n(x) \leq f_n(x)$ bo'lgani uchun φ_n integrallanuvchi va

$$\int_A \varphi_n(x) d\mu \leq \int_A f_n(x) d\mu \leq K.$$

Nihoyat, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots \leq \varphi_n(x) \leq \dots$ va deyarli barcha x lar uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

Shuning uchun 6.2-teoremani $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlikka qo'llab, 3.3-teoremaning isbotiga ega bo'lamiz.

7 -§.Cheksiz o'lchovli to'plam bo'yicha olingan Lebeg integrali. Lebeg va Riman integrallarini taqqoslash

Shu paytgacha biz faqat chekli o'lchovli ($\mu(A) < +\infty$) to'plamlarda Lebeg integrali va uning xossalarini ko'rib chiqdik. Lekin ko'plab masalalarni yechishda cheksiz o'lchovli to'plamda berilgan funksiyaning integralini qarashga to'g'ri keladi. Masalan, to'g'ri chiziqda berilgan funksiyaning Lebeg integrali bilan ishlashga to'g'ri keladi. Biz sanoqli sondagi chekli o'lchovli X_n to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida tasvirlanishi mumkin bo'lgan hol bilan chegaralanamiz.

7.1-ta'rif. Agar X to'plamda μ o'lchov berilgan bo'lib, X to'plamni sanoqli sondagi chekli o'lchovli to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lsa, u holda X da μ o'lchov σ – chekli o'lchov deyiladi.

σ – chekli o'lchovlarga sonlar o'qidagi va tekislikdagi Lebeg o'lchovlari misol bo'la oladi.

σ – chekli bo'lmagan o'lchovga misol sifatida sonlar o'qidagi μ o'lchovni quyidagicha aniqlaymiz. Har bir nuqtaning o'lchoviga birni mos qo'yamiz, ya'ni $\mu\{x\} = 1$. U holda $\mathbb{R}$ ning barcha qism to'plamlari o'lchovli bo'ladi va agar $A \subset \mathbb{R}$ to'plam chekli bo'lsa, uning o'lchovi chekli, qolgan hammasi cheksiz o'lchovli to'plamlar bo'ladi.

7.2-ta'rif. X to'plamni qoplovchi ketma-ketlik deb, har qanday monoton o'suvchi $(X_n \subset X_{n+1}) \{X_n\}$ ketma-ketlikka aytiladiki, u quyidagi ikkita shartni qanoatlantiradi:

$$1) \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X, \quad 2) \mu(X_n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

7.3-ta'rif. X to'plamda σ – chekli μ o'lchov va X da aniqlangan f o'lchovli funksiya berilgan bo'lsin. Agar f funksiya ixtiyoriy chekli o'lchovli $A \subset X$ to'plamda integrallanuvchi bo'lib, har qanday qoplovchi $\{X_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_n} f(x) d\mu$$

limit mavjud bo'lsa, hamda bu limit ketma-ketlikning tanlanishiga bog'liq bo'lmasa, u holda f funksiya X to'plamda integrallanuvchi deyiladi va bu limit

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_n} f(x) d\mu$$

uning X to'plam bo'yicha olingan Lebeg integrali deyiladi.

Lebeg va Riman integrallari orasidagi quyidagi bog'lanishni isbotlaymiz.

7.1-teorema. Agar $[a, b]$ kesmada

$$I = (R) \int_a^b f(x) d\mu$$

Riman integrali mavjud bo'lsa, u holda f funksiya $[a, b]$ kesmada Lebeg ma'nosida ham integrallanuvchi bo'ladi va

$$(L) \int_{[a,b]} f(x) d\mu = (R) \int_a^b f(x) d\mu$$

tenglik o'rinli.

Isbot. $[a, b]$ kesmani

$$x_k = a + \frac{k}{2^n} (b - a), \quad k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$$

nuqtalar yordamida 2^n ta bo'lakka bo'lamiz. Bu bo'linishga mos

$$\Omega_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} M_{nk}, \quad \omega_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} m_{nk},$$

Darbu yig'indilarini qaraymiz, bu yerda $M_{nk} - f$ funksiyaning $[x_{k-1}, x_k]$ kesmadagi aniq yuqori chegarasi, m_{nk} esa shu kesmadagi aniq quyi chegarasi.

Riman integralining ta'rifiga ko'ra,

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n$$

chekli limit mavjud. Har bir $n \in N$ da $\bar{f}_n$ va $\underline{f}_n$ sodda funksiyalarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\bar{f}_n(x) = M_{nk}, \text{ agar } x \in [x_{k-1}, x_k), k \in \{1, 2, \dots, 2^n\}, \bar{f}_n(b) = f(b),$$

$$\underline{f}_n(x) = m_{nk}, \text{ agar } x \in [x_{k-1}, x_k), k \in \{1, 2, \dots, 2^n\}, \underline{f}_n(b) = f(b).$$

Sodda funksiya integrali ta'rifiga ko'ra,

$$\int_{[a,b]} \bar{f}_n(x) d\mu = \Omega_n, \quad \int_{[a,b]} \underline{f}_n(x) d\mu = \omega_n$$

tengliklar o'rinli. $\{\bar{f}_n\}$ ketma-ketlik o'smaydigan ketma-ketlik, ya'ni

$$\bar{f}_1(x) \geq \bar{f}_2(x) \geq \dots \geq \bar{f}_n(x) \geq \dots$$

$\{\underline{f}_n\}$ esa kamaymaydigan ketma-ketlik, ya'ni

$$\underline{f}_1(x) \leq \underline{f}_2(x) \leq \dots \leq \underline{f}_n(x) \leq \dots$$

bo'lgani uchun, deyarli hamma yerda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n(x) = \bar{f}(x) \geq f(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{f}_n(x) = \underline{f}(x) \leq f(x)$$

chekli limitlar mavjud. 6.2-Levi teoremasiga ko'ra

$$\int_{[a,b]} \bar{f}_n(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = I = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \int_{[a,b]} \underline{f}_n(x) d\mu.$$

Shuning uchun

$$\int_{[a,b]} |\bar{f}(x) - \underline{f}(x)| d\mu = \int_{[a,b]} (\bar{f}(x) - \underline{f}(x)) d\mu = 0.$$

Bundan, deyarli hamma yerda $\bar{f}(x) - \underline{f}(x) = 0$ ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x). \text{ Demak,}$$

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = I.$$

Bu xossadan foydalanib, Lebeg integralini hisoblash qulaydir.

III.bob. Lebeg integralining tadbiqlari

8 -§. Lebegning aniqmas integrali va uni differensiallash

Bu bo‘limda biz sonlar o‘qida aniqlangan funksiyalarning Lebeg integralini qaraymiz, va bu integralni tayinlangan f da to‘plam funksiyasi sifatida o‘rganamiz.

Agar f funksiya $X \subset \mathbb{R}$ o‘lchovli to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda integral

$$\int_A f(x) d\mu$$

barcha o‘lchovli $A \subset X$ lar uchun mavjud va u tayinlangan f da o‘lchovli to‘plam funksiyasi bo‘ladi. Bu integral Lebegning aniqmas integrali deyiladi. X sonlar o‘qidagi oraliq bo‘lishi ham mumkin. Bu holda A to‘plam X dagi kesmadan iborat bo‘lsa, yuqoridagi integral kesma chetki nuqtalarining funksiyasi bo‘ladi. Bu holda A kesma chap chetini tayinlab,

$$\int_{[a,x]} f(t) d\mu$$

integralning xossalarini o‘rganamiz. Bu masala bizni sonlar o‘qida aniqlangan funksiyalarning ba’zi muhim sinflarini qarashga olib keladi. Matematik analiz kursidan ma’lumki, differensiallash va integrallash amallari orasida quyidagi bog‘lanish mavjud. Agar f – uzluksiz funksiya, F – uzluksiz hosilaga ega funksiya bo‘lsa, quyidagi tengliklar o‘rinli.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad (8.1)$$

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a), \quad (8.2)$$

Quyidagicha savollar tugʻiladi:

1. Lebeg maʼnosidagi integrallanuvchi funksiyalar uchun (8.1) tenglik oʻrinlimi?
2. Qanday funksiyalar sinfi uchun (8.2) tenglik oʻrinli?

Bu savollarga quyidagi teoremlar orqali javob olishimiz mumkin

Lebegning aniqmas integralidan hosila. 7-paragrafda koʻrsatdikki,

$$\int_{[a,x]} f(t) d\mu = \int_a^x f(t) dt$$

Lebeg integrali x ning funksiyasi sifatida deyarli hamma yerda chekli hosilaga ega. Lekin bu hosilani integral ostidagi funksiya bilan bogʻlanishini tekshirmadik. Quyidagi tasdiq oʻrinli.

8.1-teorema. $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi har qanday f funksiya uchun deyarli barcha $x \in [a, b]$ larda

$$\frac{d}{dx} \int_{[a,x]} f(t) d\mu = f(x)$$

tenglik oʻrinli.

Bobning boshida qoʻyilgan ikkita savoldan birinchisiga biz javob berdik. Endi ikkinchi savolga oʻtamiz, yaʼni uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar uchun oʻrinli boʻlgan Nyuton-Leybnits formulasini

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt \quad (8.3)$$

Lebeg integrali uchun qanday umumlashtirish mumkin? Yaʼni (8.3) tenglik qanday funksiyalar sinfi uchun oʻrinli? Biz deyarli barcha nuqtalarda chekli hosilasi mavjud boʻlgan funksiyalar sinfi bilan chegaralanamiz. Bizga maʼlumki, oʻzgarishi chegaralangan funksiya deyarli hamma yerda chekli hosilaga ega. Ikkinchi tomondan, (8.3) tenglikning oʻng tomoni oʻzgarishi chegaralangan funksiya. Shuning uchun (8.3) tenglik oʻzgarishi chegaralangan funksiyalar sinfidan kattaroq

to'plamda o'rinli bo'lishi mumkin emas. Har qanday o'zgarishi chegaralangan funksiya ikkita monoton kamayuvchi funksiyalar ayirmasi ko'rinishida tasvirlanadi. Shuning uchun monoton funksiyalar uchun (8.3) tenglik o'rinlimi degan savolni qo'yamiz.

8.2-teorema. Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda

$$F(x) = \int_{[a, x]} f(t) d\mu$$

funksiya $[a, b]$ da absolyut uzluksiz bo'ladi.

Isbot. $\{(a_k, b_k)\}_1^n \subset [a, b]$ o'zaro kesishmaydigan va uzunliklarining yig'indisi $\delta > 0$ oshmaydigan ixtiyoriy intervallar sistemasi bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{[a_k, b_k]} f(t) d\mu \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{[a_k, b_k]} |f(t)| d\mu = \int_{\bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k]} |f(t)| d\mu < \varepsilon \end{aligned}$$

Oxirgi tenglik Lebeg integralining absolyut uzluksizlik xossasi (5.4-teoremaga qarang) dan kelib chiqadi.

8.3-teorema (Lebeg). $F - [a, b]$ da absolyut uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda $F'(x) = f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi va ixtiyoriy $x \in [a, b]$ da quyidagi tenglik o'rinli

$$\int_{[a, x]} f(t) d\mu = F(x) - F(a).$$

8.3-teorema isbotida quyidagi lemmadan foydalaniladi.

8.1-lemma. Agar f — kamaymaydigan absolyut uzluksiz funksiya bo'lib, $f'(x) = 0$ tenglik deyarli barcha x lar uchun o'rinli bo'lsa, u holda $f(x) = \text{const.}$

8.3-teoremaning isboti. Teoremani $f(t) \geq 0$ bo'lgan holda isbotlash yetarli. Bu holda $F(x)$ kamaymaydigan funksiya bo'ladi.

$$\Phi(x) = F(x) - \int_{[a,x]} f(t) d\mu$$

funksiyani qaraymiz. Φ ham kamaymaydigan funksiya. Haqiqatan ham, $x' < x''$ bo'lsin, u holda

$$\Phi(x'') - \Phi(x') = F(x'') - F(x') - \int_{[x',x'']} f(t) d\mu \geq 0.$$

$F(x)$ va $\int_{[a,x]} f(t) d\mu$ lar absolyut uzluksiz funksiyalar bo'lganligi uchun Φ ham absolyut uzluksiz funksiya bo'ladi. Bundan tashqari, deyarli barcha x lar uchun $\Phi'(x) = 0$. Bobning boshida qo'yilgan 1-savolga javob berganda

$$\frac{d}{dt} \int_{[a,x]} f(t) d\mu = f(x), \quad \Phi'(x) = f(x) - \frac{d}{dx} \int_{[a,x]} f(t) d\mu = 0$$

tengliklarni ko'rsatgan edik. 8.1-lemmaga ko'ra, $\Phi(x) = \text{const}$. Ikkinchi tomondan

$$\Phi(a) = F(a) - \int_{[a,a]} f(t) dt = F(a)$$

tenglik o'rinli. Demak, (6.16) ko'ra,

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f(t) d\mu$$

tenglik o'rinli.

9-§. LEBEG INTEGRALINING TADBIQLARI

Lebeg-Stiltes integrali. $[a, b]$ kesmada aniqlangan va kamaymaydigan, o'ngdan uzluksiz F funksiya yordamida hosil qilingan μ_F Lebeg-Stiltes o'lchovi berilgan bo'lsin. Bu o'lchov bo'yicha $[a, b]$ kesmada Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar sinfini qaraymiz va har bir funksiya uning

$$\int_a^b f(x) d\mu_F$$

Lebeg integrali mos qo'yamiz. μ_F o'lchov bo'yicha aniqlangan bu integral Lebeg-Stiltes integrali deb ataladi va uning uchun

$$\int_a^b f(x) dF(x) \quad (9.1)$$

belgilashdan foydalaniladi.

Lebeg-Stiltes integralining ba'zi xususiy hollarini qaraymiz.

I. Bizga $[a, b]$ kesmada aniqlangan, o'ngdan uzluksiz, kamaymaydigan sakrashlar funksiyasi F berilgan bo'lsin. U holda μ_F diskret o'lchov bo'ladi. Agar $x_i \in [a, b]$ nuqtalar F ning uzilish nuqtalari va h_i sonlar F funksiyaning x_i nuqtadagi sakrash bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x) dF(x)$$

integral $\sum f(x_i)h_i$ yig'indi teng bo'ladi.

II. Agar F funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan kamaymaydigan absolyut uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x) dF(x)$$

Lebeg-Stiltes integrali $f(x)F'(x)$ funksiyaning odatdagi

$$\int_a^b f(x)F'(x)dx$$

Lebeg integraliga teng bo'ladi, ya'ni

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)dx. \quad (9.2)$$

Integralning σ –additivlik xossasiga ko'ra, (9.2) tenglikni μ_F o'lchov bo'yicha integrallanuvchi sodda funksiyalar uchun ham umumlashtirish mumkin. Bizga f

funksiyaga tekis yaqinlashuvchi, integrallanuvchi $\{f_n\}$ sodda funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Umumiylikni chegaralamasdan $\{f_n\}$ ketma-ketlikni kamaymaydigan deb hisoblashimiz mumkin. U holda $\{f_n(x)F'(x)\}$ – kamaymaydigan ketma-ketlikni deyarli hamma yerda $f(x)F'(x)$ funksiyaga yaqinlashadi. Demak, $\{f_n \cdot F'\}$ ketma-ketlik 5.2-teorema (Levi teoremasi) shartlarini qanoatlantiradi.

$$\int_a^b f_n(x) dF(x) = \int_a^b f_n(x) F'(x) dx \quad (9.3)$$

tenglikda $n \rightarrow \infty$ limitga o'tib,

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x) F'(x) dx \quad (9.4)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Agar F kamaymaydigan funksiya sakrashlar funksiyasi va absolyut uzluksiz funksiyalar yig'indisidan iborat bo'lsa, u holda ixtiyoriy f integrallanuvchi (μ_F o'lchov bo'yicha) funksiya uchun uning Lebeg-Stiltes integrali qator (yoki chekli yig'indi) va odatdagi Lebeg integralini hisoblashga keltiriladi. Agar F kamaymaydigan funksiya singulyar komponentani ham saqlasa, yuqoridagi tasdiqni aytish mumkin emas.

Lebeg-Stiltes integrali tushunchasini F kamaymaydigan funksiya bo'lgan holdan Φ o'zgarishi chegaralangan funksiya bo'lgan holga umumlashtirish mumkin. Aytaylik, $[a, b]$ kesmada o'zgarishi chegaralangan Φ funksiya berilgan bo'lib, v esa uning $[a, x]$ kesmadadagi to'la o'zgarishi bo'lsin. $v(x)$, $[a, b]$ da kamaymaydigan, o'ngdan uzluksiz funksiya bo'ladi. Bundan tashqari $g = v - \Phi$ funksiya ham kamaymaydigan, o'ngdan uzluksiz funksiya bo'ladi. Ya'ni Φ funksiya ikkita monoton kamaymaydigan funksiyalar ayirmasi $\Phi = v - g$ ko'rinishda tasvirlanadi.

Agar f funksiya uchun

$$\int_a^b f(x)dv(x) \quad \text{va} \quad \int_a^b f(x)dg(x)$$

Lebeg-Stiltes integrallari mavjud bo'lsa, u holda f funksiyaning Φ funksiya bo'yicha Lebeg-Stiltes integrali

$$\int_a^b f(x)d\Phi(x) = \int_a^b f(x)dv(x) - \int_a^b f(x)dg(x)$$

tenglik yordamida aniqlanadi.

Aytaylik, Φ o'zgarishi chegaralangan funksiya yana boshqa usulda W va h kamaymaydigan funksiyalarning $\Phi = W - h$ ayirmasi ko'rinishida tasvirlansin.

Agar $\int_a^b f(x)d\Phi(x)$ Lebeg-Stiltes integrali mavjud bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dv(x) - \int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dW(x) - \int_a^b f(x)dh(x)$$

tenglik o'rinli.

Shunday qilib, f funksiyaning Φ o'zgarishi chegaralangan funksiya bo'yicha Lebeg-Stiltes integralini hisoblash uchun Φ funksiyaning ikki kamaymaydigan funksiyalar ayirmasi ko'rinishidagi istalgan tasviridan foydalanish mumkin.

Shuningdek, $f(x)$ funksiya uzluksiz va chegaralangan bo'lsa, (9.1) integral integrallash oralig'i chekli bo'lganda ham, cheksiz bo'lganda ham mavjudligini isbotlash qiyin emas. Ba'zi hollarda $f(x)$ funksiya chegaralanmagan bo'lganda ham Lebeg-Stiltes mavjud bo'ladi. Bunday integrallarni qarash nafaqat, funksional analizning balki, ehtimollar nazariyasi uchun matematik kutilma, dispersiya, momentlar va boshqalarni o'rganishda muhim ahamiyatga egadir. Bundan keyin hamma yerda $|f(x)|$ funksiyaning $F(x)$ funksiya bo'yicha olingan integrali mavjud bo'lgandagina $f(x)$ funksiyaning $F(x)$ funksiya bo'yicha olingan integrali mavjud deb qaraymiz.

10-§. Lebeg integrali va uning tadbirlariga doir misollar.

1.1. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ ning K_n to'plam bo'yicha olingan Lebeg integralini hisoblang.

Yechish. Malumki, $K_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} K_{nk}$ to'plamning k -qo'shni intervali K_{nk} da $\mathfrak{K}$ funksiya $y_k = (2k-1) \cdot 2^{-n}$, ($k = 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}$) qiymatini qabul qiladi, ya'ni

$$A_k = \{x \in K_n: \mathfrak{K}(x) = y_k\} = K_{nk}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}.$$

Bundan tashqari barcha $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}\}$ lar uchun $\mu(K_{nk}) = 3^{-n}$ ekanligini hisobga olsak, sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali ta'rifidan

$$\begin{aligned} \int_{K_n} \mathfrak{K}(x) d\mu &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{2k-1}{2^n} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2^n \cdot 3^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (2k-1) = \\ &= \frac{1}{2^n \cdot 3^n} \cdot \frac{1 + 2^n - 1}{2} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^n}{3^n} \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yig'indini hisoblashda arifmetik progressiyaning dastlabki n ta hadi yig'indisi uchun $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ formuladan foydalandik.

1.2. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ dan $[0,1] \setminus K$ to'plam bo'yicha olingan integralni hisoblang. Bu yerda K –Kantor to'plami.

1.3. Quyidagi sodda funksiyalarning $[0,1]$ to'plam bo'yicha olingan Lebeg integralini hisoblang.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \in K \\ n, & \text{agar } x \in K_n, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in K \\ 2^{-n}, & x \in K_n, \end{cases}$$

1.4. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ ga $[0,1]$ da tekis yaqinlashuvchi va cheklita qiymat qabul qiluvchi sodda funksiyalar ketma-ketligini quring.

2. 2.1-2.7-misollarda berilgan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyani sodda ekanligini ko'rsatib, uning Lebeg integralini hisoblang.

2.1. $A = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 5\}$ da berilgan sodda $f(x) = (-1)^{[x^2+y^2]}$ funksiyaning integralini toping.

Yechish. $f(x)$ funksiyaning ko'rinishini yozib olamiz:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & A_1 = (x, y): \{0 \leq x^2 + y^2 < 1\}, \{2 \leq x^2 + y^2 < 3\}, \{4 \leq x^2 + y^2 < 5\} \\ -1 & A_{-1} = (x, y): \{1 \leq x^2 + y^2 < 2\}, \{3 \leq x^2 + y^2 < 4\}, \{x^2 + y^2 = 5\} \end{cases}$$

bunda har bir holat uchun A_1 va A_{-1} to'plamlarning o'lchovlarini topamiz.

$$\mu(A_1) = \pi + 3\pi - 2\pi + 5\pi - 4\pi = 3\pi, \mu(A_{-1}) = 2\pi - \pi + 4\pi - 3\pi = 2\pi.$$

Lebeg integrali ta'rifiga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{k=1}^2 y_k \mu(A_k) = 1 \cdot 3\pi - 1 \cdot 2\pi = \pi.$$

$$2.2. f(x) = [x], \quad A = [0, 2).$$

$$2.3. f(x) = \operatorname{sign} x, \quad A = [-1, 3].$$

$$2.4. f(x) = \chi_{[0,1] \setminus Q}(x), \quad A = [-1, 3].$$

$$2.5. f(x) = [x] + \operatorname{sign} x, \quad A = [-1, 2].$$

$$2.6. f(x) = \operatorname{sign} x + \chi_{[0,1]}(x), \quad A = [1, 4].$$

2.7.

$$f(x) = n, \quad x \in A_n = \left(\frac{1}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}} \right], \quad n \in \mathbb{N}, \quad A = (0, 1].$$

3. 3.1-3.-misollarni Lebeg integrali ta'rifi va xossaligidan foydalanib hisoblang. Bu yerda $\mathfrak{D}$ –Dirixle, $\mathfrak{R}$ –Riman, $\mathfrak{K}$ –Kantor funksiyasi.

3.1. $\int_{[0,1]} x \chi_{(R \setminus Q)}(x) d\mu$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi $\chi_{(R \setminus Q)}(x)$ funksiya harakteristik funksiya hisoblanadi.

$$\chi_{(R \setminus Q)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in R \setminus Q \\ 0 & x \in Q. \end{cases}$$

$$f(x) = x \chi_{(R \setminus Q)}(x) = \begin{cases} x & x \in (R \setminus Q) \cap [0, 1] = A_1 \\ 0 & x \in Q \setminus [0, 1] = A_2 \end{cases}$$

Bundan ekvivalent funksiyalar ta'rifiga ko'ra $\mu(A_1) = 0$, $f(x) \neq g(x)$, $g(x)$ funksiyaning quyidagi ko'rinishda tanlab olsak bo'ladi $g(x) = x$. Bundan kelib chiqadiki

$$\int_{[0,1]} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$3.2. \int_{[0,2]} (1 + 2x) d\mu.$$

$$3.5. \int_{[0,1]} x(1 - \mathfrak{D}(x)) d\mu.$$

$$3.3. \int_{[0,2]} (3x^2 + 1) d\mu.$$

$$3.6. \int_{[0,1]} (2^x + 2) d\mu.$$

$$3.7. \int_{[0,1]} x(1 - \mathfrak{R}(x)) d\mu.$$

$$3.8. \int_{[0,1]} (x + \mathfrak{A}(x)) d\mu.$$

4. Quyidagi limitlarni integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi teoremlardan foydalanib yeching.

4.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \exp(-nx^2) d\mu$$

Yechish. Bunda $f_n(x) = \exp(-nx^2)$ ga teng. Ketma-ketlikni $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tamiz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad \{x \neq 0\}, \quad |f_n(x)| = \left| \frac{1}{\exp(-nx^2)} \right| \leq 1 = \varphi(x)$$

demak 3.1-Lebeg teoremasiga ko'ra 1) deyarli yaqinlashadi, 2) to'lamda integrallanuvchi $\varphi(x)$ funksiya topildi, u holda quyidagicha bo'ladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \exp(-nx^2) d\mu = \int_{[0,1]} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-nx^2) d\mu = \int_{[0,1]} 0 d\mu = 0.$$

$$4.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^n x}{1+x^2} d\mu$$

5.1. Integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi teoremlardan foydalanib quyidagi limitlarni hisoblang.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{1+x^4} \cdot \sin \frac{|x|}{n} d\mu$$

Yechish. Bunda $f_n(x) = \frac{n}{1+x^4} \cdot \sin \frac{|x|}{n}$ ga teng. Ketma-ketlikni $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tamiz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^4} \cdot \frac{\sin \frac{|x|}{n}}{\frac{|x|}{n}} \cdot |x| = \frac{|x|}{1+x^4} \quad \{x \neq 0\}$$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{n}{1+x^4} \cdot \sin \frac{|x|}{n} \right| \leq \frac{n}{1+x^4} \cdot \frac{|x|}{n} = \frac{|x|}{1+x^4}$$

Demak, Lebeg integrali belgisi ostida limitga o'tish haqidagi 3.1-(Lebeg) teoremaning shartlari bajariladi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^4} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx^2}{1+x^4} = \operatorname{arctg} x^2 \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

5.2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2 + y^2)) \cos\left(\frac{1}{n}x \cdot y\right) dx dy.$$

6.1-6.5 misollarni quyida $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalar berilgan. Lebeg-Stiltes integrali

$$\int_{[a,b]} f(x) dF(x)$$

ni hisoblang.

6.1. $f(x) = x$, $F(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ Lebeg-Stiltes integrali uchun ham bo'laklab integrallash formulasi o'rinli. Bu misolda bo'laklab integrallash formulasidan foydalanamiz.

$$\int_{[0,\pi]} x d \cos x = x \cos x \Big|_0^\pi - \int_{[0,\pi]} \cos x dx = -\pi - \sin x \Big|_0^\pi = -\pi.$$

6.2. $f(x) = \sin x$, $F(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

6.3. $f(x) = x$, $F(x) = [x]$, $x \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}$.

6.4. $f(x) = x - 1$, $F(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$.

6.5. $f(x) = \mathfrak{K}(x)$, $F(x) = \mathfrak{K}(x)$, $x \in [0, 1]$.

Xulosa

Ushbu bitiruv malakaviy ishida Lebeg integrali va tadbiqlari, ya'ni ehtimollar nazariyasi faniga tadbiqlari qaralgan. Masalan funksional analizdagi quyidagi tushunchalar ehtimollar nazariyasida quyidagi tushuniladi: a) A – to'plamning o'lchovi $\mu(A)$, A – hodisaning ehtimoli $P(A)$ bilan, b) E –dagi barcha o'lchovli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{A}(E)$, σ –algebra, elementar hodisalar Ω ning barcha qism to'plamlari sistemasi F – σ –algebra,

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука. 1989.
2. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. Toshkent: Fan. 1994.
3. Sarimsoqov T.A. Funksional analiz kursi. Toshkent: O'qituvchi. 1986.
4. Sh.O. Alimov, R.R.Ashurov. Matematik tahlil. 1-qism. Toshkent. Kamalak. 2012.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. Москва: Наука. 1965.
6. Треногин В.А. Функциональный анализ. Москва: Наука. 1980.
7. Ф.Рисс, Б.Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. Москва: Мир. 1979.
8. Sh.A. Ayupov, M.A. Berdiqulov, R.M. Turg'unboyev. Funksiyalar nazariyasi. Toshkent. 2004.
9. Ю.М. Березанский, Г.Ф.Ус, З.Г. Шефтель. Функциональный анализ. Киев: Высшая школа. 1990.
10. J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev, M.H. Shermatov, O.I. Egamberdiyev. Funksional analiz va integral tenglamalar. Toshkent: Yangi asr avlodi. 2013.
11. J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev, I.A. Ikromov, Funksional analizdan masalalar to'plami. I qism Lebeg integrali. Toshkent: Turon-Iqbol. 2013.