

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ
УЗБЕКИСТАН**

**ТАШКЕНТСКИЙ ФИНАНСОВЫЙ ИНСТИТУТ
КАФЕДРА «ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9
ПО КУРСУ
«ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И
МОДЕЛИ»**

Тузувчи: и.ф.д., проф. О.Кенжабоев

ТАШКЕНТ-2010

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №9

"ПЛАНИРОВАНИЕ ОБЪЕМОВ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ФИРМЫ"

9.1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков использования инструмента регрессионного анализа для аппроксимации статистических зависимостей экономических параметров и прогнозирования.

9.2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи и постройте ее модель.

2. Используя общие рекомендации по решению задачи (см. ниже подразд.1.6), определите наиболее выгодный режим работы предприятия.

3. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист (рис.1.1);
- исходные данные варианта;
- описание каждого этапа решения задачи в виде математических моделей, расчетов, численных результатов с указанием всех единиц измерения;
- рекомендации по организации работы предприятия.

Рис.9.1. Пример оформления титульного листа отчета по лабораторной работе

9.3. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

9.3.1. Функция производственных возможностей

Функция производственных возможностей (ФПВ) показывает различные комбинации товаров 1 и 2, которые могут быть произведены при фиксированном значении труда и капитала. Каждая точка на границе производственных возможностей отражает уровень эффективного производства как товара 1, так и товара 2 (см. рис.9.2).

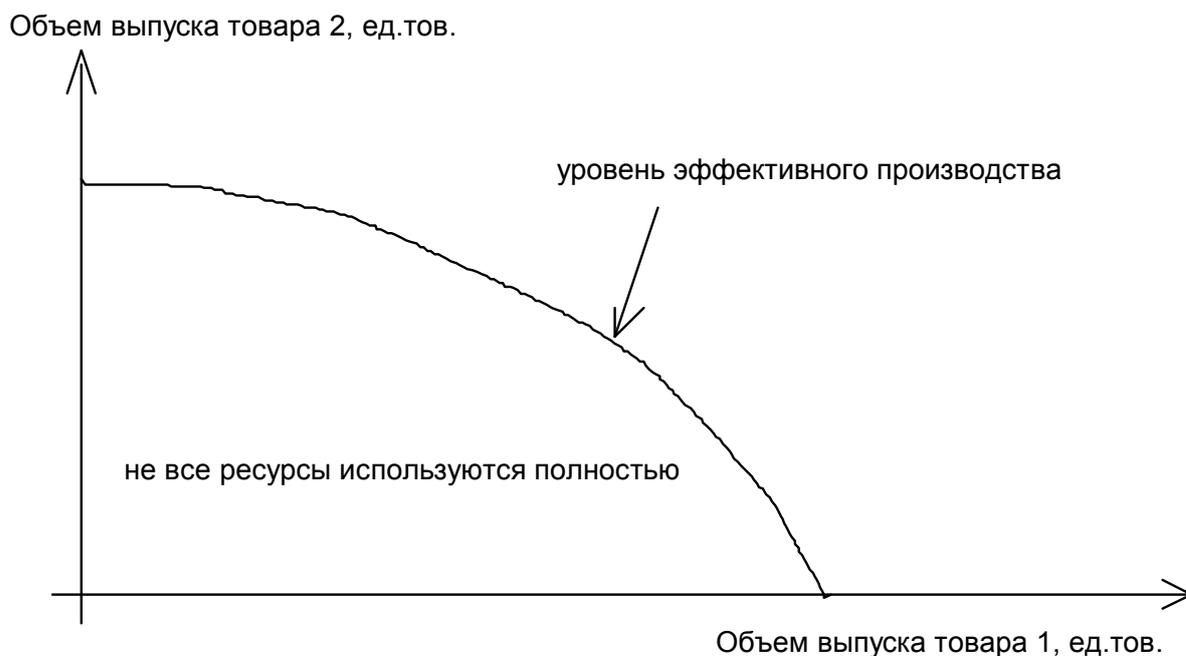


Рис.9.2. Функция производственных возможностей фирмы

Конкретное распределение вложений в производство является технически эффективным, если выпуск одного товара не может быть увеличен без уменьшения выпуска другого. ФПВ наклонена вниз, т.к. при эффективном производстве увеличение выпуска товара 1 требует переключения затрат факторов с производства товара 2, что в свою очередь снижает уровень выпуска товара 2. Все точки внутри границы неэффективны. Во внутренней области не все ресурсы используются полностью. Чтобы иметь возможность увеличить производство одного товара, приходится снижать производство другого. Постепенное увеличение отрицательного угла наклона иллюстрирует убывающую эффективность. Т.е. необходимо вкладывать все больше ресурсов для получения одного и того же количества продукта. Т.е. за каждый шаг вправо по горизонтальной оси мы должны делать все более крупные шаги по вертикальной оси.

9.3.2. Основы регрессионного и корреляционного анализа

9.3.2.1. Основные понятия и определения

Во многих технических, экономических, организационных задачах требуется установить и оценить зависимость изучаемой *случайной* величины (СВ) Y от одной или нескольких других величин X . Например, в ситуациях, когда необходимо оценить как влияет:

- 1) количество внесенных удобрений на снимаемый урожай;

- 2) величина затрат компании на рекламу своего товара на объемы продаж этого товара;
- 3) изменение цены товара на объем его продаж;
- 4) величина доходов населения на величину их сбережений.

Зависимость между значениями параметров X и Y может быть:

- функциональной;
- статистической;
- корреляционной.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Параметр Y связан с параметром X **функциональной** зависимостью в том случае, когда конкретному значению соответствует одно и только одно значение . Например, если принять, что X - это градусы по шкале Цельсия, а Y - градусы по шкале Фаренгейта, то между этими параметрами существует функциональная зависимость

и наоборот .

Функциональность связи определяется тем, что для конкретной температуры по Цельсию существует одна и только одна температура по Фаренгейту.

В экономических процессах строгая функциональная зависимость реализуется редко, т.к. часто оба параметра или один из них подвержены еще действию разнообразных случайных факторов, например, объем продаж товара не определяется жестко его ценой. На него могут влиять такие случайные факторы, как погода, сезон, эффект ажиотажного спроса, массовая невыплата или выплата зарплаты. **Статистической** называют зависимость, при которой изменение одной из величин X влечет изменение **распределения** (т.е. множества возможных значений) Y другой. Например, пусть при цене на лимоны в 15 руб. семья со средним достатком покупает в месяц от 10 до 15 лимонов, при цене в 25 руб. - от 7 до 10 шт., а при цене в 40 руб. - 3-5 шт. Т.е. изменение цены X изменяет возможное количество покупаемых цитрусовых Y .

Статистическую зависимость называют **корреляционной**, если при изменении одной из величин X изменяется *среднее* значение \bar{Y} другой. Например, с одинаковых по площади участков земли при равных

количества внесенных удобрений X снимают различный урожай Y , т.е. Y не является функцией от X . Это объясняется влиянием случайных факторов (осадки, температура воздуха, плодородие почвы и др.). Но как показывает опыт, **средний** урожай \bar{Y} является функцией от количества удобрений, т.е. Y связан с X корреляционной зависимостью.

Рассмотрим графическое представление данных о расходах на рекламу товара и (см. рис.1.3).

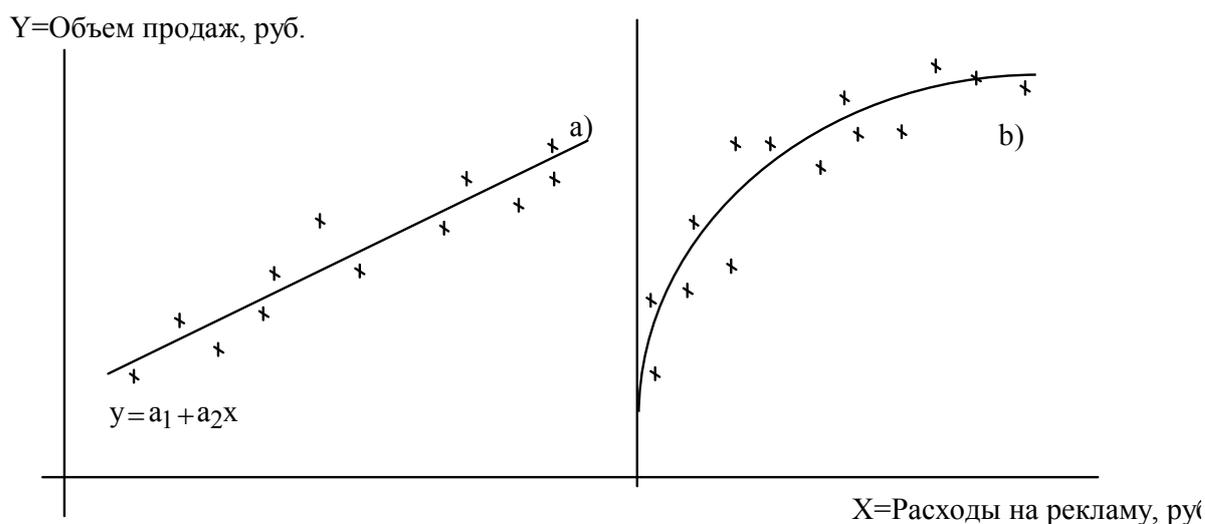


Рис.9.3. Зависимость объема продаж товара от расходов на рекламу

Из графика а) видно, что связь между параметрами близка к линейной. В случае данных, представленных на графике б) можно предположить, что линейная модель неприменима для описания связи между расходами на рекламу и объемами продаж.

Уравнение прямой $y = a_0 + a_1x$ из рис.1.3.а) является моделью связи, существующей между параметрами X и Y . Эту модель можно использовать для объяснения конкретной ситуации и для прогнозов.

Первым шагом в анализе связи между параметрами является изучение переменных. Параметр Y , значение которого нужно предсказывать, является **зависимым**. Параметр X , значения которого нам известны заранее, и который влияет на значения Y называется **независимым**. В описанной ситуации Y - это объем продаж товара, X - затраты на рекламу. В действительности не существует теоретической основы, исходя из которой можно было бы написать уравнение, которое

бы точно показало связь продаж с расходами на рекламу. Имеется ряд факторов, неразрывно связанных между собой, такие как цена товара, цена товара-конкурента, сезон, погодные условия. Тем не менее, если предположить, что в конкретном случае, расходы на рекламу являются **главным** фактором, определяющим продажу, то знание этой связи было очень полезным для оценки объема продаж и соответствующего планирования финансовой политики компании.

Важным моментом является то, что для любого конкретного объема рекламы x существует **распределение** возможного объема продаж, т.е. не одно, а несколько значений y_x . Т.е. если два месяца подряд фирма будет выделять на рекламу одну и ту же сумму средств, например, $x=5$ тыс.руб., то объемы продаж в каждом месяце будут отличаться, будучи близкими по значению, например, в первом месяце $y_5^1 = 4500$ штук, во втором – $y_5^2 = 4590$ штук.

Эта идея очень важна для дальнейшего анализа. Для усреднения всех возможных значений параметра Y , которые соответствуют значению , используют понятие **условного среднего** , т.е. среднего арифметического всех значений Y , которые наблюдались при значении . Если каждому значению x соответствует одно значение условной средней , то условная средняя есть функция от x ; в этом случае говорят, что СВ Y зависит от X **корреляционно**.

Корреляционная зависимость Y от X - это функциональная зависимость условной средней от x :

$$\text{} = \text{} \quad (1)$$

Уравнение (1) называется **уравнением регрессии Y на X** . Функция наз. **регрессией Y на X** , а ее график - **линией регрессии Y на X** .

Две основные задачи регрессионного и корреляционного анализа:

- 1) **Установить форму корреляционной связи**, т.е. вид функции регрессии (линейная, квадратичная, показательная и т.д.).
- 2) **Оценить тесноту (силу) корреляционной связи**. Теснота корреляционной зависимости Y от X оценивается по величине рассеяния

значений Y вокруг условного среднего \bar{Y} . Большое рассеяние говорит о слабой зависимости Y от X , либо об ее отсутствии. И наоборот, Малое рассеяние указывает наличие достаточно сильной зависимости.

9.3.2.2. Метод наименьших квадратов

Первая задача регрессионного и корреляционного анализа решается с помощью **метода наименьших квадратов**. Рассмотрим его суть на примере линейной зависимости, представленной на рис.1.4.

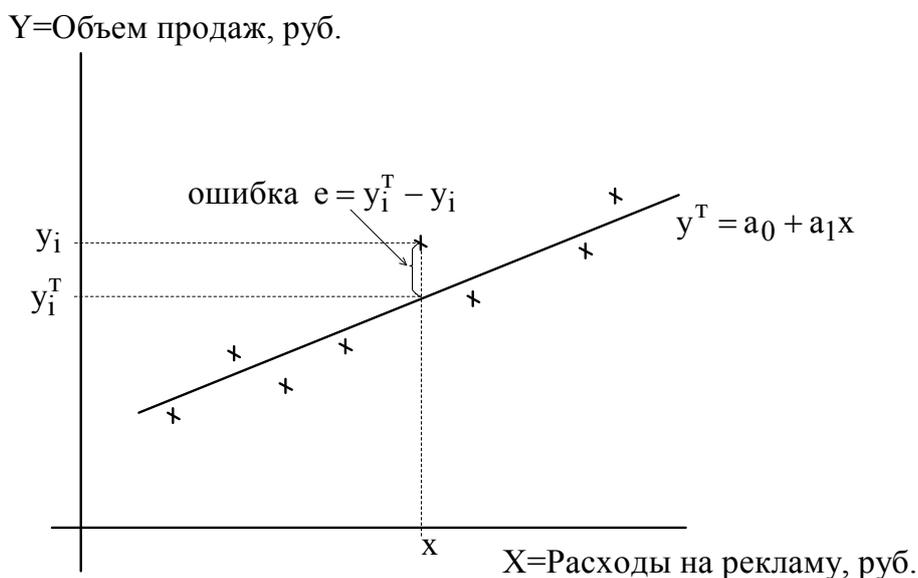


Рис.9.4. Зависимость объема продаж товара от расходов на рекламу

Применение метода наименьших квадратов в этом случае позволяет из бесконечного множества прямых линий, существующих на плоскости, найти уравнение прямой $\bar{y} = a_0 + a_1x$, которая **ближе всего** расположена к точкам, построенным по исходным данным \bar{y} . Критерием того, насколько близко исходные точки лежат к линии $y^T = a_0 + a_1x$ является сумма квадратов ошибок (отклонений) значений

$$\sum_{i=1}^n (y_i - y_i^T)^2$$

где y_1^T – значения, предсказанные искомой теоретической функцией y^T ; y_1^T – исходные значения y ; n - количество пар исходных данных. Для поиска параметров a_0 и a_1 , в которых функция принимает минимальное значение ее частные производные приравняются к нулю.

Таким образом, сумма квадратов отклонений S для прямой $y^T = a_0 + a_1x$, найденной методом наименьших квадратов, является минимальной по сравнению во всеми остальными возможными линейными функциями.

На практике часто встречаются случаи криволинейных связей между параметрами. Для многих из них, в частности для параболы $\bar{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2$, гиперболы , экспоненты , также применим метод наименьших квадратов.

9.3.2.3. Оценка тесноты корреляционной связи

После установления вида корреляционной связи, необходимо оценить ее силу (тесноту), т.е. решить вторую задачу регрессионного и корреляционного анализа. Подбор вида функции регрессии на основе графика (как в рассмотренном примере о рекламе) может быть обманчивым, поскольку распределение исходных точек на графике, а значит и общий вид графика, зависит от выбора масштаба. Поэтому необходимо объективное измерение тесноты линейной связи.

Мат. ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений СВ .

Дисперсия - это числовая характеристика СВ, которая показывает, как рассеяны возможные значения СВ вокруг ее математического ожидания. Дисперсия - это мат. ожидание квадрата отклонения СВ у от ее математического ожидания \bar{y} , (см. рис.9.5).

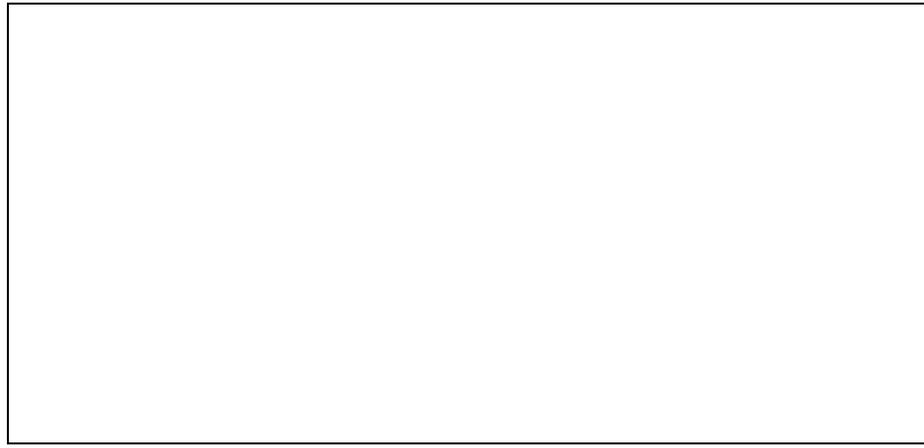


Рис.9.5. Иллюстрация мат.ожидания и дисперсии случайной величины

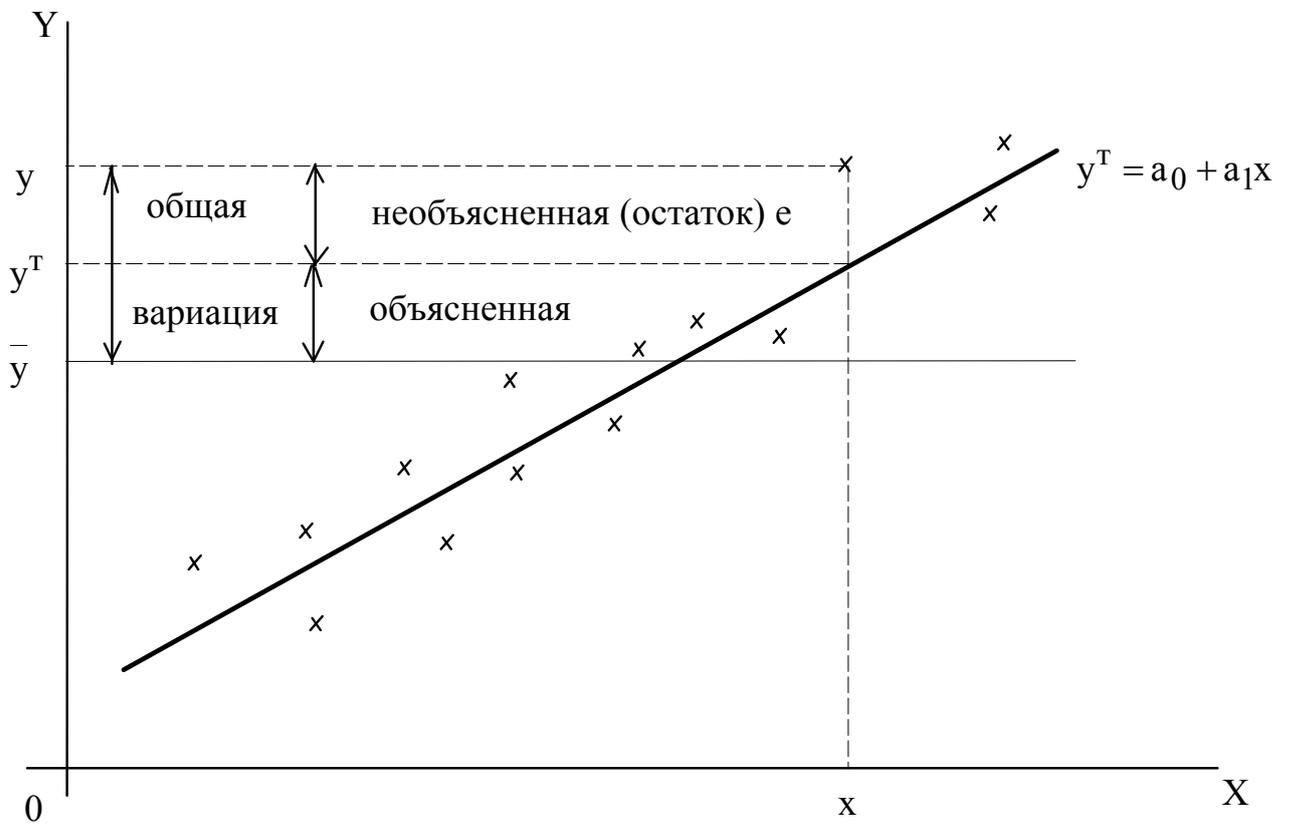


Рис.9.6. Структура дисперсии зависимой переменной Y

Рассмотрим на графике структуру дисперсии зависимой переменной Y (см. рис.9.6). Линейная связь только частично объясняет разброс значений y. Необъясненная часть является остатком e. Если бы связь между x и y была абсолютно линейной, то все e были бы равны нулю. По мере того, как сила линейной связи уменьшается, остаток увеличивается. Общая вариация значений y равна

$$\sum_{i=1}^n (y - \bar{y})^2 .$$

Общее изменение y с учетом линейной связи, т.е. объясненная вариация равна

$$\sum_{i=1}^n (y^T - \bar{y})^2 .$$

Тогда вариация, которая не объясняется линейной связью, поскольку возникает из-за других факторов, не включенных в линейную модель равна

$$\sum_{i=1}^n (y - y^T)^2 = e^2 .$$

Чем теснее линейная связь, тем ближе величина объясненной вариации к величине общей вариации. Поэтому используется отношение этих вариаций, называемое **коэффициентом детерминации**



Коэффициент детерминации показывает величину дисперсии Y , которая объясняется независимой переменной X . Он часто выражается в процентах и в случае наличия функциональной зависимости между параметрами равен или 100%. Если же корреляционная связь отсутствует, то .

9.4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Фирма производит изделия двух наименований И1 и И2. Используя отчетную информацию за прошедший год была составлена таблица (см табл.1), характеризующая **производственные возможности** фирмы по выпуску изделий.

Табл.1

Производственные возможности фирмы

№ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	23	65	81	124	47	81	29	72	53	101	1276	97
Производство И2, тыс. шт.	73	62	57	25	73	59	74	64	72	46	26	47

Согласно прогнозам на цены в следующем году **прибыль** от продажи И1 составит **Пр1** руб./шт., а для И2 - **Пр2** руб./шт.

I) Определите оптимальные объемы выпуска продукции в следующем году.

II) Менеджер предлагает в следующем году специализировать производство на одном виде изделий. Выяснить при какой специализации фирме будет выгодней работать.

9.5. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ

- 1) Постройте график точек объемов выпуска товаров.
- 2) Определите вид регрессионной функции, которая могла бы описать зависимость между объемами выпуска товаров.
- 3) Аппроксимируйте функцию производственных возможностей, оцените тесноту регрессионной связи средствами MS Excel и удостоверьтесь в том, что полученная регрессионная функция действительно описывает связь между объемами выпуска товаров.
- 4) Определите оптимальные объемы производства товаров. Для этого
 - а) определите переменные (объемы выпуска);
 - б) постройте целевую функцию (прибыль);
 - с) задайте ограничения (функция производственных возможностей, неотрицательность выпуска).

На основе построенной модели решите задачу в MS Excel.

5) Используя найденную функцию производственных возможностей, определите объемы производства товаров при специализации на 1) первом виде товара; 2) втором виде товара.

6) Решите, какая из специализаций выгодней для предприятия.

9.6. ПРОВЕДЕНИЕ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА В EXCEL

1. Постройте в Excel график исходных точек $(x_i; y_i)$, где x_i и y_i – объем выпуска соответственно изделий И1 и И2 в i -м месяце. Для этого

- 1) введите значения выпуска в экранную форму;
- 2) из меню **Вставка/Диаграмма** вызовите **Мастер диаграмм** (см.рис.1.7);

3) в окне **Мастер диаграмм (шаг 1 из 4):** тип диаграммы на закладке **Стандартные** выберите **Точечная** и нажмите кнопку **Далее**;

4) в окне **Мастер диаграмм (шаг 2 из 4):** источник данных диаграммы установите селекторный переключатель **Ряды в** в положение **в строках**, затем поставьте курсор в поле **Диапазон** и выделите мышью в экранной форме ячейки с исходными данными. В результате адреса исходных ячеек будут введены в поле **Диапазон** и в окне появится график исходных точек. Нажмите кнопку **Далее**.

5) в окне **Мастер диаграмм (шаг 3 из 4):** параметры диаграммы по желанию можно задать подписи данных, название диаграммы и т.д. Нажмите кнопку **Далее**.

6) в окне **Мастер диаграмм (шаг 4 из 4):** размещение диаграммы выберите способ размещения диаграммы, например, на имеющемся листе, и нажмите кнопку **Готово**.

2. Определите уравнение регрессии и коэффициент детерминации для построенных точек. Для этого:

1) поставьте курсор на любую из построенных точек диаграммы и нажатием правой клавиши мыши вызовите из контекстного меню пункт **Добавить линию тренда**;

2) в окне закладки **Тип** выберите **Полиномиальная** и установите степень 2 (это соответствует параболе $\bar{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2$);

3) в окне закладки **Параметры** нажатием левой клавиши мыши включите режимы **показывать уравнение на диаграмме** и **поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)**.

4) нажмите кнопку **ОК**, после этого на диаграмме появится уравнение параболы и значение коэффициента детерминации r^2 .

9.7. ВАРИАНТЫ

ВАРИАНТ 1. $Pr_1=50$ руб./шт.; $Pr_2=80$ руб./шт.

№ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	14	54	72	115	36	70	20	60	41	92	117	86
Производство И2, тыс. шт.	64	53	46	14	62	48	63	53	60	35	15	38

ВАРИАНТ 2. Пр1=120 руб./шт.; Пр2=200 руб./шт.

№ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	16	43	74	95	21	53	29	84	82	63	40	98
Производство И2, тыс. шт.	51	57	40	16	52	55	57	31	34	51	59	14

ВАРИАНТ 3. Пр1=300 руб./шт.; Пр2=90 руб./шт.

№ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	62	98	36	81	123	106	88	40	58	117	95	114
Производство И2, тыс. шт.	83	66	79	78	36	60	75	81	84	46	70	51

ВАРИАНТ 4. Пр1=180 руб./шт.; Пр2=90 руб./шт.

№ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	71	37	97	51	81	111	25	67	52	90	104	46
Производство И2, тыс. шт.	61	76	37	70	55	20	78	65	72	46	30	75

ВАРИАНТ 5. Пр1=300 руб./шт.; Пр2=140 руб./шт.

№ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	36	72	9	90	48	50	16	112	22	81	127	120
Производство И2, тыс. шт.	60	54	56	42	60	59	59	30	60	49	10	20

ВАРИАНТ 6. Пр1=170 руб./шт.; Пр2=60 руб./шт.

№ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	67	45	84	111	129	123	52	96	80	64	106	116
Производство И2, тыс. шт.	105	95	106	96	78	84	98	102	106	104	97	91

ВАРИАНТ 7. Пр1=310 руб./шт.; Пр2=190 руб./шт.

№ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	16	56	74	117	38	72	22	63	42	94	119	87
Производство И2, тыс. шт.	67	51	45	13	62	45	66	51	60	33	14	38

ВАРИАНТ 8. Пр1=200 руб./шт.; Пр2=340 руб./шт.

№ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	13	40	71	92	18	50	26	81	79	60	37	95
Производство И2, тыс. шт.	47	55	40	13	49	52	54	28	31	49	56	11

ВАРИАНТ 9. Пр1=105 руб./шт.; Пр2=180 руб./шт.

№ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	67	105	41	88	130	115	95	47	65	124	103	121
Производство И2, тыс. шт.	92	75	86	86	43	66	83	88	93	53	76	57

ВАРИАНТ 10. $Pr_1=98$ руб./шт.; $Pr_2=160$ руб./шт.

№ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	61	27	67	41	71	101	15	57	42	80	94	36
Производство И2, тыс. шт.	53	66	48	60	45	12	68	55	62	36	20	65

ВАРИАНТ 11. $Pr_1=210$ руб./шт.; $Pr_2=220$ руб./шт.

№ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	35	71	11	14	46	52	17	109	26	79	122	116
Производство И2, тыс. шт.	58	56	48	53	59	60	54	33	56	51	16	24

ВАРИАНТ 12. $Pr_1=60$ руб./шт.; $Pr_2=90$ руб./шт.

№ месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производство И1, тыс. шт.	86	51	84	119	139	143	59	106	90	74	116	141
Производство И2, тыс. шт.	95	85	96	86	68	69	89	92	95	93	88	71

9.8. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Экономический и математический смысл функции производственных возможностей?
2. Виды зависимостей между экономическими параметрами и их примеры.
3. Понятие функции регрессии.
4. Задачи регрессионного и корреляционного анализа.
5. В чем суть метода наименьших квадратов?
6. Как оценивается теснота корреляционной связи?

7. Как спрогнозировать объемы производства при специализации на одном виде товара?

8. Постройте модель определения оптимального объема производства на основе функции производственных возможностей.