

O'ZBEKISON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI

MATEMATIK ANALIZ VA ALGEBRA KAFEDRASI

DONIYOROVA SARVINOZ BOBOQULOVNAning

“5460100 – matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha

bakalavr darajasini olish uchun

Cheksiz ko'paytmalar va ularning analitik funksiyalarga qo'llanilishi
mavzusida yozgan

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:

Z. Sh. Yangiboyev

“Himoyaga tavsiya etilsin”

Fizika – matematika fakulteti

dekani:_____prof. B. Xayriddinov

“ _____ ” 2011 yil

Qarshi - 2011

Mundarija

Kirish -----	6
I bob. Cheksiz ko'paytmalarning yaqinlashish kriteriylari.-----	12
1-§. Cheksiz ko'paytmalar haqida umumiy tushunchalar.-----	12
2-§. Yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi cheksiz ko'paytmalar.----	19
II bob. Cheksiz ko'paytmalarning analitik funksiyalarga tadbiqlari.----- -----	28
3-§. Golomorf funksiyalarning cheksiz ko'paytmalar ko'rinishda ifodalanishi.----- -----	28
4-§. Butun va meromorf funksiyalarni cheksiz ko'paytmalar orqali ifodalash.----- -----	35
Xulosa.-----	44
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.-----	45

KIRISH

Matematik ahalizning eng muhim nazariyalaridan biri cheksiz ko'paytmalar nazariyasi bo'lib, funksiyalarni o'rganishda shuningdek kompleks analizning ba'zi bir masalalarini hal etishda keng qo'llash mumkin.

Kompleks analizda golomorf funksiyalarni, butun funksiyalarni hamda meromorf funksiyalarni cheksiz ko'paytmalarga yoyish hamda bu funksiyalar yordamida ba'zi bir masalalarni hal etish hozirgi zamon matematikasining muhim nazariyalaridan biri hisoblanmoqda. Shuning uchun cheksiz ko'paytmalar nazariyasini o'rganish muhim nazariy va amaliy ahamiyaga egadir.

Mazkur bitiruv malakaviy ishda cheksiz ko'paytmalar va ularni analitik funksiyalarga tadbiqlari o'rganiladi. Bu yo'nalish bo'yicha kerakli natijalarni [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10] adabiyotlardan topish mumkin.

Bitiruv malakaviy ishning mavzusining dolzarbligi shundaki, cheksiz ko'paytmalar haqiqiy va kompleks analizda qatorlar nazariyasi bilan birga cheksiz ko'paytmalar nazariyasi ham funksiyalarni tasvirlashda, ularni o'rganishda maxsuslikdan qutilishda keng qo'llaniladigan muhim matematik apparat hisoblanadi. Bunday mavzuni o'rganish matematika yo'nalishi talabalari uchun dolzarb hisoblanadi.

Bitiruv malakaviy ishning maqsadi esa analitik funksiyalarni cheksiz ko'paytmalar orqali ifodalanishini, butun va meromorf funksiyalarni ko'paytmalarga yoyilishini o'rganish. Shunindek cheksiz ko'paytmalarning yaqinlashish va uzoqlashishini, cheksiz ko'paytmalar yordamida hal etiladigan ba'zi bir masalalarni o'rganishdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishning ilmiyligi va ahamiyati. Mavzuga oid barcha adabiyotlar to'plandi. Shu adabiyotlardan foydalanib, chersiz ko'paytmalar nazariyasi va uning tadbiqlari chuqur o'rganildi hamda shu o'rganishlar asosida BMI yozildi. Ushbu BMI mavzu juda amaliy ahamiyatga egadir.

Bitiruv malakaviy ish kirish qism, ikki bob, xulosa va adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

Kirish qismda o'rganilayotgan mavzu haqida umumiy ma'lumotlar beriladi.

I bobda cheksiz ko'paytmalar haqida umumiy tushunchalar va ularning yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchiligi o'rganilgan. Bu bob 2 ta paragrifdan. Cheksiz ko'paytmalarni ikki holda o'rganilgan, ya'ni haqiqiy qiymatlarda va kompleks qiymatlarda yaqinlashishini o'rganildi. 1,2-§ larda quyidagilar keltirildi.

Faraz qilaylik, biror $\{c_n\}: c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ haqiqiy sonlar ketma – ketligi berilgan bo'lsin. Ular yordamida ushbu

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n \cdot \dots \quad (0.1)$$

ifodani tuzamiz.

(0.1) ifoda cheksiz ko'paytma deyiladi va u $\prod_{n=1}^{\infty} c_n$ kabi belgilanadi:

$$\prod_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n \cdot \dots$$

bunda $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sonlar cheksiz ko'paytmaning hadlari, c_n esa ko'paytmaning umumiy yoki n - hadi deyiladi.

Ushbu

$$P_n = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ko'paytma (0.1) cheksiz ko'paytmaning n - qisman ko'paytmasi deyiladi.

0.1-ta'rif. Agar $n \rightarrow \infty$ da $\{P_n\}$ ketma-ketlik noldan farqli chekli P songa intilsa (yaqinlashsa), (0.1) cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi deyiladi, P esa uning qiymati deyiladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P, \quad P = \prod_{n=1}^{\infty} c_n$$

Agar $\{P_n\}$ ketma-ketlik limiti mavjud bo'lmasa (yoki uning limiti 0 bo'lsa) (0.1) cheksiz ko'paytma uzoqlashuvchi deyiladi.

0.1–teorema. (0.1) cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lishi uchun n - hadi $n \rightarrow \infty$ da 1 ga intilishi yetarli.

Cheksiz ko'paytma hadlarining logarifmlaridan ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln c_n = \ln c_1 + \ln c_2 + \dots + \ln c_n + \dots \quad (0.2)$$

qatorni hosil qilamiz.

0.2–teorema. (0.1) cheksiz ko'paytmaning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun (0.2) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarli.

Ixtiyoriy n ta sonning ko'paytmasidan tuzilgan P_n ko'paytmani qaraylik. Bu ko'paytmani mos ravishda

$$(1 + u_1), (1 + u_2), \dots, (1 + u_n)$$

ko'paytuvchilardan tuzilgan bo'lsin. Bu erda $u_1, u_2, \dots, u_n$ - kompleks sonlar ma'nosida qaraymiz.

$$P_n = (1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) \quad (0.3)$$

n ga $1, 2, 3, \dots$ qiymatlarni berib, noldan farqli $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ kompleks sonlar ketma – ketligini hosil qilamiz. Bunda uchta hol bo'lishi mumkin.

1) $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ sonlar ketma – ketligi noldan farqli chekli P songa intiladi, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \quad (P \neq 0).$$

2) $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ sonlar ketma – ketligi nolga intiladi, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0.$$

3) $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ sonlar ketma – ketligi uzoqlashuvchi, ya'ni hech qanday chekli songa intilmaydi.

0.2–ta'rif. Agar ixtiyoriy yetarlicha kichik $\epsilon > 0$ son uchun, shunday $N = N(\epsilon)$ son topiladiki, barcha $n > N$ lar uchun

$$\left| \frac{P}{P_n} - 1 \right| < \epsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, (0.4) cheksiz ko'paytma P soniga yaqinlashadi deyiladi.

0.3–ta'rif. Ushbu

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) \dots \quad (0.4)$$

cheksiz ko'paytma absolyut yaqinlashuvchi deymiz, agar

$$(1 + |u_1|)(1 + |u_2|) \dots (1 + |u_n|) \dots \quad (0.4')$$

cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lsa.

II bobda cheksiz ko'paytmalarning analitik funksiyalarga qo'llanishi o'rganildi. Bunda golomorf funksiyalarni cheksiz ko'paytmalar orqali ifodalanishi hamda butun va meromorf funksiyalarni cheksiz ko'pyatmalarga yoyilmasi o'rganildi.

Ushbu

$$[1 + u_1(z)] \cdot [1 + u_2(z)] \cdot \dots \cdot [1 + u_n(z)] \cdot \dots \quad (0.5)$$

cheksiz ko'paytmani qaraylik. Bunda barcha $u_n(z)$ lar Z kompleks o'zgaruvchining funksiyasi va ular biror G ($G \subset \mathbb{C}$) sohada golomorf bo'lsin. Faraz qilaylik, barcha n lar va G sohaning qandaydir Z nuqtalari uchun

$$|u_n(z)| < a_n \quad (0.6)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. Hamda ushbu

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (0.7)$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'sin. Bu holda (0.5) ko'paytma G sohaning ixtiyoriy Z nuqtasida yaqinlashuvchi va Z kompleks o'zgaruvchining biror $f(z)$ funksiyasini ifodalaydi.

G sohning hech bir nuqtasida nolga teng bo'lmagan ushbu $f(z)$ funksiyaning G sohada golomorf funksiya bo'lishini isbotlaymiz.

0.4- ta'rif. Ushbu cheksiz

$$\prod_{k=1}^{\infty} \{1 + f_n(z)\}$$

ko'paytma D sohada yaqinlashuvchi bo'ladi, agar bu sohaning har bir

z_0 nuqtasida $\prod_{k=1}^{\infty} \{1 + f_n(z_0)\}$ sonli cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lsa.

0.3-teorema. $f(z)$ butun funsiyaning logarifmik hosilasi z^{p-1} ga nisbatan tez o'smasin, bunda $p \in \mathbb{N}$ - butun son. U holda $f(z)$ funksiya uchun

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} + \dots + \frac{1}{p} \frac{z^p}{a_n^p}} \quad (0.8)$$

ko'rinishdagi yoyilma o'rinli. Bu erda $m \in \mathbb{N}$ - $f(z)$ funksiya $z = 0$ dagi nolining tartibi, $g(z)$ p tartibli biror ko'phad va $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - ketma-ketlik $f(z)$ funksiyaning nollari.

Bu formula Veyershtrass formulasi deyiladi.

0.4-teorema (K. Veyershtrass). Shunday $g(z)$ butun funksiya va butun sonlar $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ ketma-ketligi mavjudki, buning uchun

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} + \dots + \frac{1}{p_n} \frac{z^{p_n}}{a_n^{p_n}}} \quad (0.9)$$

formula o'rinli va aksincha.

0.5-teorema (K. Veyershtrass). Cheksizlikka yaqinlashuvchi $\{a_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligi uchun, $\{p_n\}$ sonlar ketma-ketligi topiladiki, (9) cheksiz ko'paytma $f(z)$ butun funksiyaga yaqinlashadi va a_n sonlar shu funksiyaning nollari bo'ladi.

0.6-teorema (K. Veyershtrass). Shunday $g(z)$ butun funksiya va butun sonlar $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ ketma-ketligi mavjudki, buning uchun

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} - \dots + \frac{1}{p_n} \frac{z^{p_n}}{a_n^{p_n}} \right) \quad (0.10)$$

formula o'rinli va aksincha.

0.7-teorema (K. Veyershtrass). Cheksizlikka yaqinlashuvchi $\{a_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligi uchun, $\{p_n\}$ sonlar ketma-ketligi topiladiki, (9) cheksiz ko'paytma $f(z)$ butun funksiyaga yaqinlashadi va a_n sonlar shu funksiyaning nollari bo'ladi.

(0.9) va (0.10) formulalar Veyershtrass formulasining umumlashmasi deyiladi.

I BOB.

Cheksiz ko'paytmalarning yaqinlashish kriteriylari

1 - §. Cheksiz ko'paytmalar haqida umumiy tushunchalar.

Faraz qilaylik, biror $\{c_n\}: c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ haqiqiy sonlar ketma – ketligi berilgan bo'lsin. Ular yordamida ushbu

$$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad c_n \quad \dots \quad (1.1)$$

ifodani tuzamiz.

(1.1) ifoda cheksiz ko'paytma deyiladi va u $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ kabi belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad c_n \quad \dots$$

bunda $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sonlar cheksiz ko'paytmaning hadlari, c_n esa ko'paytmaning umumiy yoki n – hadi deyiladi.

Quyidagi

$$P_n = c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ko'paytma (1.1) cheksiz ko'paytmaning n – qismaniy ko'paytmasi deyiladi.

Demak, (1.1) cheksiz ko'paytma berilganda har doim uning qismaniy ko'paytmalaridan iborat ushbu $\{P_n\}$:

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$$

ketma-ketlikni hosil qilish mumkin.

Masalan,

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} - \dots \quad (n = 2, 3, \dots)$$

cheksiz ko'paytmaning n – qismaniy ko'paytmasi

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} - \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} - \dots \right) \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

bo'lib, ulardan tuzilgan $\{P_n\}$: ketma-ketlik

$$\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}, \dots, \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}, \dots$$

bo'ladi.

1-ta'rif. Agar $n \rightarrow \infty$ da $\{P_n\}$ ketma-ketlik noldan farqli chekli P songa intilsa (yaqinlashsa), (1.1) cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi deyiladi, P esa uning qiymati deyiladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P, \quad P = \prod_{n=1}^{\infty} c_n$$

Agar $\{P_n\}$ ketma-ketlik limiti mavjud bo'lmasa (yoki uning limiti 0 bo'lsa) (1.1) cheksiz ko'paytma uzoqlashuvchi deyiladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Cheksiz ko'paytma uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}$$

bo'ladi. Demak, $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$ cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi va uning qiymati $\frac{1}{2}$.

Endi yaqinlashuvchi cheksiz ko'paytmalarning bir qator xossalari keltiramiz.

Aytaylik biror

$$\prod_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n \cdot \dots \quad (1.1)$$

cheksiz ko'paytma berilgan bo'lsin.

Ushbu

$$\prod_{n=m+1}^{\infty} c_n = c_{m+1} \cdot c_{m+2} \cdot \dots \quad (1.2)$$

cheksiz ko'paytma (bunda m — tayinlangan natural son) (1.1) cheksiz ko'paytmaning qoldig'i deyiladi.

¹⁰. Agar (1.1) cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lsa, (1.2) cheksiz ko'paytma ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha.

Isboti. Cheksiz ko'paytmaning qismaniy ko'paytmasi

$$P_n = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n,$$

(1.1) cheksiz ko'paytmaning qismaniy ko'paytmasi

$$Q_k^{(m)} = C_{m+1} \cdot C_{m+2} \cdot \dots \cdot C_{m+k}$$

lar uchun

$$P_n = P_m \cdot Q_k^{(m)},$$

bunda, $n = m + k$ bo'ladi. Bu munosabatlardan $n \rightarrow \infty$ da P_n ning chekli limitga ega bo'lishidan $k \rightarrow \infty$ da $Q_k^{(m)}$ ning ham chekli limitga ega bo'lishi, shuningdek, $k \rightarrow \infty$ da $Q_k^{(m)}$ ning chekli limitga ega bo'lishidan, $n \rightarrow \infty$ da P_n ning chekli limitga ega bo'lishi kelib chiqadi. Xossa isbotlandi.

2⁰. Agar (1.1) cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (C_{m+1} \cdot C_{m+2} \cdot \dots \cdot C_{m+k} \dots) = 1$$

bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, (1.1) cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lib, uning qiymati P bo'lsin. Unda

$$P_m \cdot C_{m+1} \cdot C_{m+2} \cdot \dots \cdot C_{m+k} \dots = P$$

bo'lib, undan $m \rightarrow \infty$ da

$$C_{m+1} \cdot C_{m+2} \cdot \dots \cdot C_{m+k} \dots = \frac{P}{P_m} \rightarrow \frac{P}{P} = 1$$

bo'lishi kelib chiqadi. Xossa isbotlandi.

3⁰. Agar (1.1) cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 1$$

bo'ladi.

Aytaylik, (1.1) cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lib, uning qiymati P bo'lsin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (C_1 \cdot C_2 \cdot \dots \cdot C_n) = P.$$

Unda $P_n = P_{n-1} \cdot C_n$, ya'ni $C_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$ bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1$$

bo'ladi. Xossa isbotlandi.

Yuqorida keltirilgan xossalardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin:

Cheksiz ko'paytmaning yaqinlashishida, ularning dastlabki chekli sondagi hadlarining ta'siri bo'lmaydi.

Agar cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lsa, unda $n \rightarrow \infty$ da $C_n \rightarrow 1$ bo'lgani sababli, uning biror hadidan boshlab keyingi hadlarini musbat deb olish mumkin bo'ladi.

Bu xossalr yaqinlashuvchi cheksiz ko'paytmalarda ularning hadlarini musbat olish imkonini beradi.

1-teorema. (1.1) cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $n \rightarrow \infty$ da $C_n \rightarrow 1$ ga intilishi yetarli.

Isboti. (1.1) cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi va P qiymatga ega va noldan farqli bo'lsin. U holda $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = P \neq 0$. Modomiki $C_k = \frac{c_k}{C_{k-1}}$ bo'lsa,

$\lim_{n \rightarrow \infty} C_k$ mavjud va 1 ga teng.

Cheksiz ko'paytmalar bilan qatorlar orasida bog'lanish bor.

Faraz qilaylik,

$$\prod_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n \cdot \dots \quad (c_n > 0, n = 1, 2, \dots)$$

cheksiz ko'paytma berilgan bo'lsin. Bu cheksiz ko'paytma hadlarining logarifmlaridan ushbu

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} c_n = \ln c_1 + \ln c_2 + \dots + \ln c_n + \dots \quad (1.3)$$

qatorni hosil qilamiz.

2-teorema. (1.1) cheksiz ko'paytmaning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun (1.3) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. Zarurligi. Aytaylik, (1.1) cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lsin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n) = P \quad (P - \text{chekli son})$$

Unda (3) qatorning qisman yig'indisi uchun

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln c_k = \ln c_1 + \ln c_2 + \dots + \ln c_n = \ln (c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n)$$

bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln c_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln (c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n) = \ln P$$

bo'ladi. Demak, (1.3) qator yaqinlashuvchi.

Yetarliligi. Aytaylik, (1.3) qator yaqinlashuvchi bo'lsin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln c_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln (c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n) = S$$

Unda (1) cheksiz ko'paytmaning qismaniy ko'paytmasi uchun

$$P_n = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n = e^{\ln(c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n)}$$

bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln(c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n)} = e^S$$

bo'ladi. Demak, (1.1) cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi. Teorema isbotlandi.

Ko'pincha, $\prod_{n=1}^{\infty} c_n$ cheksiz ko'paytmani o'rganishda uning umumiy hadi c_n ni quyidagi

$$c_n = 1 + a_n$$

ifodalash qulay bo'ladi. U holda (1.1) cheksiz ko'paytma

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n),$$

cheksiz qator esa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$$

ko'rinishlarga ega bo'ladi.

Faraz qilaylik, n ning $(n \in N)$ yetarlicha katta qiymatlarida $a_n > 0$ (yoki $a_n < 0$) bo'lsin.

3-teorema. Ushbu

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

cheksiz ko'paytmaning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. Ravshanki, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ cheksiz ko'paytma va $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorni yaqinlashuvchi bo'lishi uchun avvalo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

bo'lishi kerak. Shu munosabat bajarilsin.

Keltirilgan teoremaning isboti uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1$$

munosabat hamda 1-teoremaning qo'llanishidan kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Masalan, bu teoremadan foydalanib ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = (1 + \frac{1}{2^a}) + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} + \dots$$

cheksiz ko'paytmaning $\alpha > 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi bo'lishini (chunki,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ ($\alpha > 1$) qator yaqinlashuvchi), $\alpha = 1$ bo'lganda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = (1 + \frac{1}{2^a}) + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} + \dots$$

cheksiz ko'paytmaning uzoqlashuvchi bo'lishini (chunki, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ uzoqlashuvchi) topamiz.

2-§. Yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi cheksiz qatorlar.

Uzoqlashuvchi va yaqinlashuvchi cheksiz ko'paytmalarning ba'zi bir xossalarini o'rganamiz.

Cheksiz qatorlar hamda cheksiz ko'paytmalar funksiyalarni tasvirlashda eng muhim analitik apparat hisoblanadi. Bu apparatdan golomorf funksiyalarni tasvirlashda foydalanish uchun cheksiz ko'paytmalar nazariyasi haqida ba'zi bir tushunchalar keltirib o'tamiz.

Ixtiyoriy n ta sonning ko'paytmasidan tuzilgan P_n ko'paytmani qaraylik. Bu ko'paytmani mos ravishda

$$(1 + u_1)(1 + u_2)\dots(1 + u_n)$$

ko'paytuvchilardan tuzilgan bo'lsin. Bu erda $u_1, u_2, \dots, u_n$ – kompleks sonlar ma'nosida qaraymiz.

$$P_n = (1 + u_1)(1 + u_2)\dots(1 + u_n) \quad (2.1)$$

n ga $1, 2, 3, \dots$ qiymatlarni berib, noldan farqli $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ kompleks sonlar ketma – ketligini hosil qilamiz. Bunda uchta hol bo'lishi mumkin.

1) $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ sonlar ketma – ketligi noldan farqli chekli P songa intiladi, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \quad (P \neq 0).$$

2) $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ sonlar ketma – ketligi nolga intiladi, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0.$$

3) $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ sonlar ketma – ketligi uzoqlashuvchi, ya'ni hech qanday chekli songa intilmaydi.

Birinchi holda

$$(1 + u_1)(1 + u_2)\dots(1 + u_n)\dots \quad (2.2)$$

cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi deyiladi, P son esa (2.2) ko'paytmani qiymati deb qabul qilinadi, qolgan ikki holda ham (2.2) qator uzoqlashuvchi deyiladi. Masalan,

$$1 \cdot \frac{2^2}{2^2 - 1} \cdot \frac{3^2}{3^2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^2}{n^2 - 1} \cdot \dots$$

cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi, shuningdek

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} \cdot \dots$$

Bu holda

$$P_n = 1 \cdot \frac{2^2}{(2+1)(2-1)} \cdot \frac{3^2}{(3+1)(3-1)} \cdot \frac{4^2}{(4+1)(4-1)} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)^2}{n(n-2)} \cdot \frac{n^2}{(n+1)(n-1)} = \frac{2n}{n+1}$$

egamiz va $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 2$ bo'lishi kelib chiqadi.

Ushbu

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} \cdot \dots$$

va

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \dots$$

cheksiz ko'paytmalarning ikkalasi ham uzoqlashuvchi. Birinchisida

$$P_n = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n!},$$

va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0 \quad (2\text{-holga ko'ra}).$$

Ikkinchisida, agar n – juft bo'lsa, $P_n = 1$ yoki n – toq bo'lsa, $P_n = \frac{n+3}{2}$. 3 -holga ko'ra P_n sonlar ketma – ketligi uzoqlashuvchi.

Cheksiz ko'paytmalarning yaqinlashish tushunchasini tengsizliklar yordamida ham ifodalash mumkin. Haqiqatan ham, (2.2) cheksiz ko'paytma P songa yaqinlashsin:

$$P = (1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) \dots \quad (2.3)$$

Bu holda $\frac{P}{P_n}$ munosabat chegaralanmagan n da 1 ga intiladi, shuning uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P}{P_n} = \frac{P}{\lim_{n \rightarrow \infty} P_n} = \frac{P}{P} = 1 \quad (P \neq 0)$$

egamiz. Teskarisi o'rinli, ya'ni $\frac{P}{P_n}$ munosabat chegaralanmagan n da 1 ga intilsa (2.2)

ko'paytma P songa yaqinlashadi. Boshqacha qilib aytganda:

1-ta'rif. Agar ixtiyoriy yetarlicha kichik $\epsilon > 0$ son uchun, shunday $N = N(\epsilon)$ son topiladiki, barcha $n > N$ lar uchun

$$\left| \frac{P}{P_n} - 1 \right| < \epsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, (2.2) cheksiz ko'paytma P soniga yaqinlashadi deyiladi.

Cheksiz ko'paytmalarning yaqinlashuvchiligini asosiy kreteriysini keltiramiz. Cheksiz ko'paytmalar nazariyasining asosiy masalasi uning ko'paytuvchilarini bilgan holda uni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchiligini bilishdir.

Cheksiz ko'paytmalarni yaqinlashuvchiligini tekshiradigan bitta umumiy teoremani keltiramiz.

1–teorema. Agar

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (2.4)$$

qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa va

$$(1 + u_1) \cdot (1 + u_2) \cdot \dots \cdot (1 + u_n) \cdot \dots \quad (2.2)$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (2.4')$$

qator yaqinlashuvchi. Teoremani isbotlashda barcha u_n lar moduli bo'yicha 1 dan kichik, deb faraz qilamiz. Chunki, (2.4') qatorning yaqinlashuvchigidan $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, u_n sonlar ichida cheklita u_n 1 dan katta bo'lishi mumkin. Ko'paytmaning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchiligini buzmasdan chekli sondagi ko'paytmalarni tashlab yuboramiz.

u_n sonlarning barchasi haqiqiy sonlar bo'lsin deb faraz qilamiz. Ularni a_n orqali belgilaylik.

Shunday qilib,

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots \quad (2.5)$$

qator yaqinlashuvchi deb faraz qilamiz va

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \cdot \dots \quad (2.6)$$

cheksiz ko'paytmaning yaqinlashuvchiligini isbotlaymiz.

a_n sonlar orasida musbat va manfiy sonlar ham bo'lishi mumkin. Musbat sonlarni

$$b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$$

manfiy sonlarni esa

$$-c_1, -c_2, \dots, -c_l, \dots$$

orqali belgilaymiz.

Endi quyidagi ikkita

$$(1 + b_1) \cdot (1 + b_2) \cdot \dots \cdot (1 + b_n) \cdot \dots \quad (2.7)$$

$$(1 - c_1) \cdot (1 - c_2) \cdot \dots \cdot (1 - c_n) \cdot \dots \quad (2.8)$$

ko'paytmalarni alohida-alohida qaraymiz. Agar biz bu ko'paytmalarni yaqinlashuvchigini ko'rsatsak, (2.6) ko'paytmani yaqinlashuvchiligini ko'rsatgan bo'lamiz.

$$b_1 + b_2 + \dots + b_k + \dots \quad (2.7')$$

va

$$c_1 + c_2 + \dots + c_k + \dots \quad (2.8')$$

qatorlarning shartiga ko'ra ular yaqinlashuvchi. Buning uchun

$$\ln(1 + b_n) < b_n \quad (b_n < 1)$$

egamiz. Shartga ko'ra

$$\ln(1 + b_1) + \ln(1 + b_2) + \dots$$

qatorning yaqinlashuvchiligidan

$$\begin{aligned} \ln(1 + b_1) + \ln(1 + b_2) + \dots + \ln(1 + b_n) &= \\ &= \ln[(1 + b_1)(1 + b_2) \dots (1 + b_n)] \end{aligned}$$

ifodani $n \rightarrow \infty$ da chekli limitga ega bo'lishi kelib chiqadi.

Demak,

$$(1 + b_1)(1 + b_2) \dots (1 + b_n)$$

ko'paytma $n \rightarrow \infty$ da noldan farqli chekli songa intilar ekan va (2.7) ko'paytmani yaqinlashuvchiligi isbotlandi. Xuddi shunday (2.8) ko'paytmaning ham yaqinlashuvchiligi isbotlanadi. Bunda ham umumiy hadi $\ln(1 - c_n)$ bo'lgan qatorni yaqinlashuvchiligidan foydalanamiz.

Haqiqatdan ham,

$$\ln(1 - c_n) = -\frac{c_n}{1 - qc_n} \quad (0 \leq q < 1)$$

bo'lishidan umumiy hadi C_n bo'lgan qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

Endi teoremmizning u_n kompleks son bo'lgan holi uchun isbotlaymiz.

$$P_n = (1 + u_1) \cdot (1 + u_2) \cdot \dots \cdot (1 + u_n)$$

kompleks sonning $n \rightarrow \infty$ da noldan farqli chekli limitga ega bo'lishini isbotlashimiz kerak. Agar $|P_n|$ noldan farqli chekli limitga ega bo'lsa, $\arg P_n$ ham chekli limitga ega bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda, birinchidan

$$|1 + u_1| \cdot |1 + u_2| \cdot \dots \cdot |1 + u_n| \cdot \dots \quad (2.9)$$

ko'paytmani, ikkinchidan

$$\arg(1 + u_1) + \arg(1 + u_2) + \dots + \arg(1 + u_n) + \dots \quad (2.10)$$

Qatorni yaqinlashuvchi bo'lishini isbotlashimiz kerak bo'ladi. Shuningdek

$$|P_n| = |1 + u_1| \cdot |1 + u_2| \cdot \dots \cdot |1 + u_n|$$

va

$$\arg P_n = \arg(1 + u_1) + \arg(1 + u_2) + \dots + \arg(1 + u_n)$$

egamiz.

Umumiy hadlari $|1 + u_n|$ va $|1 + u_n|^2$ bo'lgan cheksiz ko'paytmalar bir vaqtda yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi. Shuning uchun (9) ko'paytmani yaqinlashuvchi bo'lishi uchun

$$|1 + u_1|^2 \cdot |1 + u_2|^2 \cdot \dots \cdot |1 + u_n|^2 \cdot \dots \quad (2.9')$$

ko'paytmaning yaqinlashuvchi bo'lishi yetarli. Bu ko'paytmaning yaqinlashuvchi bo'lishi teoremaning birinchi qismida ko'rinib turibdi.

Shunga ko'ra

$$\begin{aligned} |1 + u_n|^2 &= |1 + a_n + i b_n|^2 = (1 + a_n)^2 + b_n^2 = \\ &= 1 + (a_n^2 + b_n^2 + 2a_n) \end{aligned}$$

egamiz va umumiy hadi $|a_n^2 + b_n^2 + 2a_n|$ bo'lgan qator shartga ko'ra yaqinlashuvchi va

$$|a_n^2 + b_n^2 + 2a_n| \leq |u_n|^2 + 2|u_n|$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Nihoyat, umumiy hadi

$$\arg(1 + u_n) = \arcsin \frac{b_n}{\sqrt{(1 + a_n^2) + b_n^2}}$$

bo'lgan (2.10) qatorning yaqinlashuvchiligi umumiy hadi $|b_n|$ ($|b_n| \leq |u_n|$) bo'lgan qatorning yaqinlashuvchiligidan va

$$\left| \arcsin \frac{b_n}{\sqrt{(1 + a_n^2) + b_n^2}} \right| < \frac{p}{2} \frac{|b_n|}{\sqrt{(1 + a_n^2) + b_n^2}} < p |b_n|$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

$$(1 + u_1) \cdot (1 + u_2) \cdot \dots \cdot (1 + u_n) \cdot \dots$$

cheksiz ko'paytmada barcha u_n lar bir xil ishorali haqiqiy son bo'lsin.

Bunda

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi cheksiz ko'paytmaning yaqinlashuvchi bo'lishi zarur bo'lib qolmay balki yetarli hamdir.

Agar u_n sonlar musbat va cheksiz ko'paytmamiz yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$P_n = (1 + u_1) \cdot (1 + u_2) \cdot \dots \cdot (1 + u_n)$$

sonlar ketma-ketligi o'sadi va biror M musbat sondan kichik bo'lib qolishi kerak. P_n ifodada qavslarni ochib chiqamiz;

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

qator va berilgan qandaydir n ga ko'ra, M dan kichik bo'ladi. Bu esa $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ qatorning yaqinlashuvchiligini bildiradi.

Agar $u_n = -c_n$ son manfiy bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ qatorni uzoqlashuvchi deb faraz qilib,

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - c_n)$ ko'paytmaning uzoqlashuvchiligini isbotlaymiz.

Haqiqatdan ham,

$$\ln P_n = \ln(1 - c_1) + \ln(1 - c_2) + \dots + \ln(1 - c_n)$$

Yig'indi $n \rightarrow \infty$ da $-\infty$ ga intiladi. Shuningdek $\ln(1 - c_n) = -\frac{c_n}{1 - qc_n}$ hadli qator

uzoqlashuvchi. (Bunda biror n dan boshlab $c_n < 1$ deb hisoblaymiz: teskari holda ko'paytmaning uzoqlashuvchiligi ko'rinib turibdi, chunki P_n sonlar orasida cheksiz ko'p musbat va manfiy sonlar to'plami bo'lgani uchun.) Bundan kelib chiqadiki, $n \rightarrow \infty$ da P_n nolga intiladi. Demak, cheksiz ko'paytma uzoqlashuvchi

2-ta'rif. Ushbu

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) \dots \quad (2.2)$$

cheksiz ko'paytma absolyut yaqinlashuvchi deymiz, agar

$$(1 + |u_1|)(1 + |u_2|) \dots (1 + |u_n|) \dots \quad (2.2')$$

cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lsa.

(2.2') cheksiz ko'paytmani yaqinlashuvchiligi

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (2.4')$$

qator yaqinlashuvchiligiga ekvivalentdir.

Bundan kelib chiqadiki, (2.2) cheksiz ko'paytmaning absolyut yaqinlashuvchiligi ta'rifida (2.2') ko'paytmaning yaqinlashuvchiligi o'rniga (2.4') qatorning yaqinlashishi bilan almashtirish mumkin.

Yuqorida isbotlangan teoremdan ko'rinadiki, har qanday absolyut yaqinlashuvchi ko'paytma yaqinlashuvchi bo'ladi. Agar teskari hol bo'lsa, ya'ni ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lib, absolyut yaqinlashuvchi bo'lmasa, bunday ko'paytmalar shartli yaqinlashuvchi deyiladi. Shartli yaqinlashuvchi qatorlarga misol sifatida

$$(1+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\dots$$

ko'paytmani qarash mumkin. Haqiqatdan ham, bu qator yaqinlashuvchi, chunki, buning

uchun n — juft bo'lsa, $P_n = \frac{n+1}{n}$, n — toq bo'lsa, $P_n = 1$ ga egamiz. Demak,

$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 1$. ikkinchi tomondan,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

qator uzoqlashuvchi.

II Bob.

Cheksiz ko'paytmalarning analitik funksiyalarga tadbiqlari

3-§. Golomorf funksiyalarning cheksiz ko'paytmalar ko'rinishida ifodalanishi

Ushbu

$$[1 + u_1(z)] \cdot [1 + u_2(z)] \cdot \dots \cdot [1 + u_n(z)] \cdot \dots \quad (3.1)$$

cheksiz ko'paytmani qaraylik. Bunda barcha $u_n(z)$ lar z kompleks o'zgaruvchining funksiyasi va ular biror G ($G \subset \mathbb{C}$) sohada golomorf bo'lsin. Faraz qilaylik, barcha n lar va G sohaning qandaydir z nuqtalari uchun

$$|u_n(z)| < a_n \quad (3.2)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. Hamda ushbu

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (3.3)$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Bu holda (3.1) ko'paytma G sohaning ixtiyoriy z nuqtasida yaqinlashuvchi va z kompleks o'zgaruvchining biror $f(z)$ funksiyasini ifodalaydi.

G sohning hech bir nuqtasida nolga teng bo'lmagan ushbu $f(z)$ funksiyaning G sohada golomorf funksiya bo'lishini isbotlaymiz.

Haqiqatdan ham, qatorlarning yaqinlashishi haqidagi Veyershtrassnig birinchi teoremasiga asoslanib

$$f_n(z) = [1 + u_1(z)] \cdot [1 + u_2(z)] \cdot \dots \cdot [1 + u_n(z)]$$

funksiyalar ketma-ketligini G sohada golomorf hamda shu sohada biror $f(z)$ funksiyaga tekis yaqinlashishini isbotlashimiz yetarlidir. Ushbu

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) = P_n, \quad (1 + a_1)(1 + a_2) \dots = P$$

belgilshlarni kiritramiz.

$f(z) - f_n(z)$ ayirmaning modulini baholaymiz:

$$|f(z) - f_n(z)| = |f_n(z)| \left| \frac{f(z)}{f_n(z)} - 1 \right| < P_n \left| \frac{f(z)}{f_n(z)} - 1 \right|, \quad (3.4)$$

bunda

$$|f_n(z)| \leq [1 + u_1(z)] \cdot [1 + u_2(z)] \cdot \dots \cdot [1 + u_n(z)] < (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) = P_n$$

Boshqa tomondan, $\forall n$ lar uchun hamda $\forall z \in G$ uchun

$$\left| \frac{f(z)}{f_n(z)} - 1 \right| \leq \frac{P}{P_n} - 1 \quad (3.5)$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatdan ham,

$$\begin{aligned}\frac{f_{n+k}(z)}{f_n(z)} - 1 &= [1 + u_{n+1}(z)] \cdot [1 + u_{n+2}(z)] \cdot \dots \cdot [1 + u_{n+k}(z)] - 1 = \\ &= u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \dots + u_{n+k}(z) + u_{n+1}(z)u_{n+2}(z) + \\ &\quad + \dots + u_{n+1}(z)u_{n+2}(z)\dots u_{n+k}(z).\end{aligned}$$

Bundan esa

$$\begin{aligned}\left| \frac{f(z)}{f_n(z)} - 1 \right| &< a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \\ &+ a_{n+1}a_{n+2} + \dots + a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots a_{n+k} = \frac{P_{n+k}}{P_n} - 1\end{aligned}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu oxirgi tengsizlik barcha k lar uchun o'rinli. $k \rightarrow \infty$ da limitga o'tib (3.5) tengsizlikni hosil qilamiz. (3.5) tengsizlikka ko'ra (3.4) tengsizlikdan $\forall n \geq N(e), \forall z \in G$ lar uchun

$$|f(z) - f_n(z)| < P_n \left(\frac{P}{P_n} - 1 \right) = P - P_n < e \quad (3.6)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu oxirgi tengsizlik esa $f_n(z)$ golomorf funksiyalar ketma-ketligi G da $f(z)$ funksiyaga tekis yaqinlashishini isbotlaydi.

Cheksiz ko'paytmalarni butun funksiyalar nazariyasiga ham tadbiqlarini o'rganimiz.

Algebraning asosiy fundamental masalalaridan biri butun ratsional funksiyalarni chiziqli ko'paytuvchilarning ko'paytmasiga yoyish haqida savoldan iborat.

Ixtiyoriy butun funksiyani qaraylik. Bu funksiyani ko'paytuvchilar ko'paytmasi ko'rinishda ifodalash haqida masala qo'yamiz. Bu funksiyaning barcha nollari ma'lum bo'lsin. Bu masala bilan Koshi ham shug'ullangan, lekin Veyershtrass algebraning asosiy teoremasini ixtiyoriy butun funksiyalar uchun ham har doim o'rinli bo'lishini isbotlab bergan.

Moduli bo'yisha o'sish tartibiga ega bo'lgan

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (3.7)$$

kompleks sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Uning hadlari

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|} = 0 \quad (3.8)$$

munosabat o'rinli bo'lsin.

Agar (3.7) dagi sonlarning ba'zilar bir xil modulga ega bo'lsa, biz bu sonlarni ixtiyoriy tartibda joylashtiramiz. Limitni ta'rifi va (3.8) ga ko'ra, yetarlicha katta R lar uchun

chekli sondagi a_n sonlarning moduli R dan kichik bo'ladi, ya'ni $|a_n| < R, n = 1, 2, \dots, k, k < n$. bundan ko'rinadiki biz quyidagini isbotladik.

1-teorema. $G(z)$ butun funksiyasi faqat va faqat a_n nollariga ega bo'ladi.

Agar a_n sonlarning ba'zilar bir-biriga teng, nol karrali bo'lsa, bu teng sonlarni a_k bilan belgilaymiz. Yuqoridagi teoremani isbotlash uchun a_n sonlar ichida nolga teng bo'lganlari bo'lmasin deb faraz qilamiz.

Ushbu

$$u_n = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}} \quad (3.9)$$

ifodani qaraylik. $|z| < |a_n|$ deb faraz qilib, ushbu

$$\ln u_n = \ln \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bunda $\ln \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ funksiya markazi koordinata boshida radiusi

$|a_n|$ bo'lgan doirada bir qiymatli golomorf funksiya va $z = 0$ da nolga teng. U holda

$$\ln u_n = -\frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n - \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n+1} - \dots \quad (3.10)$$

egamiz. Bundan esa

$$u_n = e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n - \frac{1}{n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n+1} - \dots} \quad (3.9')$$

bo'lishini topamiz.

Biz endi

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n \cdot \dots$$

cheksiz ko'paytma kompleks tekislikning ixtiyoriy z ($z \neq a_n$) nuqtasida yaqinlashuvchi va $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ nollarga ega bo'lgan $G(z)$ butun funksiyani ifodalashini ko'rsatamiz. Shu maqsadda (3.11) ko'paytma C doirada golomorf funksiyani ifodalashini isbotlaymiz. Bu erda C doira markazi nol nuqtada radiusi $|a_n|$ ga teng. Butun funksiyaning nollari uchun

$$|a_{n-1}| \leq |a_n|$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi ko'rinib turibdi.

Chekli sondagi ko'paytuvchilari

$$u_1, u_2, \dots, u_{N-1},$$

C_n doiraga tegishli va

$$u_n \cdot u_{n+1} \cdot \dots = e^{-\sum_{n=n}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^n + \frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{n+1} + \dots \right]}, \quad |z| < |a_n| \quad (3.12)$$

egamiz.

Bizning tasdig'imiz

$$\sum_{n=n}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^n + \frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{n+1} + \dots \right] \quad (3.13)$$

Qator $|z| < |a_n|$ da biror golomorf funksiyaga yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rsatsak isbotlanadi.

(3.13) qatorning har bir hadi funksiya, C_n doiraning ichida golomorfdir. Agar (3.13) qator ixtiyoriy $|z| \leq (1-e)|a_n|$ (bu erda $e (e > 0)$ yetarlicha kichik son) doirada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, uning yig'indisi Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko'ra C_n doiraning ichida golomorf bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $|z| \leq (1-e)|a_n|$ da

$$\left| \frac{1}{n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^n + \frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{n+1} + \dots \right| \leq \frac{1}{n} \left| \frac{z}{a_n} \right|^n + \frac{1}{n+1} \left| \frac{z}{a_n} \right|^{n+1} + \dots <$$

$$< \frac{1}{n} (1-e)^n + \frac{1}{n+1} (1-e)^{n+1} + \dots < \frac{(1-e)^n}{ne}$$

egamiz. Shuningdek $\frac{(1-e)^n}{ne}$ umumiy hadli sonli qator

yaqinlashuvchi bo'lsa, (3.13) qator $|z| \leq (1-e)|a_n|$ bo'lganda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Shuning uchun biz ko'rdikki, (3.13) qator C_n doirada golomorf funksiyaning ifodalaydi. Demak, (3.11) cheksiz ko'paytma ham C_n doirada golomorf funksiyaning

ifodalaydi. Bu funksiya $Z = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$ da nolga teng va bu doirada bundan boshqa nollarga ega emas. Natijada quyidagi xulosaga kelamiz. Butun son n ni yetarlicha darajada katta son sifatida olganimizda ham (3.11) ko'paytma butun funksiyaning ifodalaydi va a_n lardan boshqa nollarga ega bo'lmaydi.

u_n ko'paytuvchi boshlang'ich faktor deyiladi, boshlang'ich faktor chiziqli ko'paytuvchi $\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ hamda ko'rsatkichli faktordan boshqa ifodalarga teng bo'ladi.

(3.7) ko'rinishda berilgan sonlar orasida nollari bo'lmasin deb faraz qilgandik. $z = 0$ izlanayotgan butun funksiyaning l tartibli noli bo'lgan holda (3.11) ko'paytmani tuzishda z^l ko'paytuvchini ham qo'shamiz.

Natijada

$$G(z) = z^l \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} + \dots + \frac{1}{n-1} \frac{z^{n-1}}{a_n^{n-1}}} \quad (*)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formulaga Veyershtass formulasi deyiladi.

Bu formulaga kelish uchun biz (3.7) sonlar ketma-ketligini $n \in \mathbb{N}$ da cheksizlikka intilsin deb faraz qildik. Ba'zi xususiy holda boshlang'ich faktorlarning soddaroq ko'rinishlaridan foydalaniladi.

Faraz qilaylik, umumiy hadi $\left|\frac{1}{a_n}\right|^p$, (bu erda p - biror o'zgarmas natural son)

bo'lgan qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Bu holda u_n sifaida

$$u_n = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} + \dots + \frac{1}{p-1} \frac{z^{p-1}}{a_n^{p-1}}} \quad (3.9')$$

ifodani olish mumkin.

Yuqoridagi savolni analiz qilingani kabi bunda ham $|z| \leq (1 - e)^{-1/p} |a_n|$ da

$$e^{\frac{1}{p} \frac{z^p}{a_n^p} + \frac{1}{p+1} \frac{z^{p+1}}{a_n^{p+1}} + \dots} \quad (3.13')$$

qatorning tekis yaqinlashuvchiligi isbotlash talab etiladi. Ushbu tengsizlikka ko'ra

$$\left| \frac{1}{p} \frac{z^p}{a_n^p} + \frac{1}{p+1} \frac{z^{p+1}}{a_n^{p+1}} + \dots \right| < \frac{1}{p} \frac{\left| \frac{z}{a_n} \right|^p}{1 - \left| \frac{z}{a_n} \right|^p} < \\ < \frac{1}{p} \frac{(1-e)^p |a_n|^p}{e} \left| \frac{1}{a_n} \right|^p$$

(3.13') qator tekis yaqinlashuvchi yoki

$$\frac{1}{p} \frac{(1-e)^p |a_n|^p}{e} \left| \frac{1}{a_n} \right|^p$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lishi talab etiladi.

4-§. Butun va meromorf funksiyalarni cheksiz ko'paytmalar orqali ifodalash

Biz oldingi paragrafda (3.7) sonlar ketma-ketligi (3.8) shartni qanoatlantirganda $G(z)$ butun funksiya mavjudki, u (*) Veyersstrass formulasi orqali ifodalanishini ko'rsatgan edik. Bunda (3.7) sonlar butun funksiyaning nollari bo'ladi.

Teskarisi, agar cheksiz ko'p nollarga ega $G(z)$ butun funksiya berilgan bo'lsa, uning nollarini moduli bo'yicha o'sish tartibi $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ keta-ketlik $n \in \mathbb{N}$ da cheksizlikka intilsin.

(*) Veyersstrass formulasi bo'yicha $G(z)$ butun funksiyaning tuzish mumkin. Bu funksiya yuqoridagidek nollarga ega. Ushbu

$$j(z) = \frac{G_1(z)}{G(z)} \quad (4.1)$$

munosabat $j(z)$ butun funksiyaning ifodalaydi, nolga aylanmaydi. Chunki,

$j(a_n) = \lim_{z \rightarrow a_n} j(z)$. Bu shartlarga ko'ra $\frac{j'(z)}{j(z)}$ ham butun funksiya bo'ladi. Demak,

$j(z) = e^{H(z)}$ ga ega bo'lamiz. Bu erda $H(z)$ biror butun funksiya.

Natijada (1) tenglikdan

$$G_1(z) = e^{H(z)} G(z) \quad (4.1')$$

yoki

$$G_1(z) = e^{H(z)} z^l \prod_{n=1}^r \frac{z - a_n}{a_n} - \frac{z}{a_n} e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} + \dots + \frac{1}{n-1} \frac{z^{n-1}}{a_n^{n-1}}} \quad (**)$$

topamiz.

Amaliyotda berilgan $G_1(z)$ funksiyaga ko'ra $H(z)$ funksiyani aniqlash bir muncha qiyinlik tug'diradi. Masalan, $G_1(z) = \sin z$ bo'lsin. $\sin z$ funksiyaning nollari $z = np$, n - butun son dan iborat. Demak, (**) formulaga ko'ra bu funksiyani

$$\sin z = e^{H(z)} z^l \prod_{n=1}^r \frac{z - a_n}{a_n} - \frac{z}{np} e^{\frac{z}{np}}$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin. Bu yerda ko'paytma n ning manfiy va musbat qiymatlari bo'yicha yoyilgan. Bu yerda biz boshlang'ich faktor sifatida soddaroq ko'rinishni olamiz, shuning uchun

$$e^{\left| \frac{1}{a_n} \right|^p} = e^{\left| \frac{1}{np} \right|^p}$$

qator $p = 2$ da yaqinlashuvchi bo'ladi.

$\sin z$ uchun oxirgi formulani yana ham soddaroq ko'rinishini olishimiz mumkin. Ikki boshlang'ich faktor bo'yicha guruhlaymiz, ya'ni n ning mos qiymatlari bo'yicha ya'ni teng va teskari ishorali qiymatlari bo'yicha guruhlaymiz. Bu guruhlash np nollarning moduli bo'yicha o'sish tartibida olingan bo'lib, u

$$p, -p, 2p, -2p, \dots, np, -np, \dots$$

ketma-ketlikni tashkil etadi.

Shunday qilib,

$$\sin z = e^{H(z)} z^l \prod_{n=1}^r \frac{z - a_n}{a_n} - \frac{z^2}{n^2 p^2} e^{\frac{z^2}{n^2 p^2}}$$

ni hosil qilamiz.

$H(z)$ butun funksiya quyidagi ko'rinishda aniqlanadi. Oxirgi formulaning ikki tomonidan logarifmik hosila olamiz.

$$(\ln \sin z)' = ctgz = H'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2 p^2}.$$

Ushbu munosabatni $ctgz$ funksiyani sodda kasrlarning cheksiz yig'indisi ko'rinishida ushbu

$$ctgz = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + k^2 p^2}$$

formulasi bilan solishtiramiz.

U holda $H'(z) = 0$ bo'lishini topamiz. Bundan esa $H(z) = const$. Bu formulaga ko'ra $\sin z$ funksiya uchun

$$\sin z = C z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 p^2} \right)$$

ko'rinishga kelamiz.

C o'zgarmasni aniqlash uchun ushbu

$$\frac{\sin z}{z} = C \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 p^2} \right)$$

munosabatdan $z \rightarrow 0$ da limitga o'tamiz. U holda $C = 1$ bo'lishini topamiz. Demak,

$\sin z$ funksiyasini cheksiz ko'paytmalar ko'rinishini $\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 p^2} \right)$

ko'rinishdan iborat bo'ladi.

Liuvill teoremasiga ko'ra har qanday chegaralangan funksiya o'zgarmasdir. Agar butun funksiya $f(z)$ n - tartibli cheksiz qutbga ega bo'lsa, u n darajali ko'phad bo'ladi. Agar $g(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n - f(z)$ funksiyaning cheksizlikda yoyilmasining bosh qismi bo'lsa, shu teoreмага ko'ra $f(z) - g(z) = 0$ o'zgarmas bo'ladi.

Algebra kursidan ma'lumki, n - darajali ixtiyoriy ko'phad n ta nolga ega, bu nollarga mos chiziqli ko'paytuvchilarning ko'paytmasi ko'rinishda ifodalanadi.

$$f(z) = A(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n) = A \prod_{k=1}^n (z - a_k) \quad (4.2)$$

Bu yerda $a_n - f(z)$ ko'phadning nollari, A va A' - biror o'zgarmas son. Butun funksiyalar umuman nollarga ega bo'lmasligi mumkin (masalan, e^z) yoki cheksiz ko'p nollarga ega bo'lishi mumkin (masalan, $\sin z$).

Umuman nollarga ega bo'lmagan butun funksiya $f(z)$

$$f(z) = e^{g(z)} \quad (4.3)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Bu yerda $g(z)$ butun funksiya.

Agar $f(z)$ butun funksiya nollarga ega bo'lmasa $\frac{f'(z)}{f(z)} = \{\ln f(z)\}'$ ham butun, u

xolda bu butun funksiyani integrallab $\ln f(z) = g(z)$ butun funksiyani hosil qilamiz.

Agar $f(z)$ butun funksiya $a_1, a_2, \dots, a_n$ chekli sondagi nollarga ega bo'lsa, uni (2) ko'rinishda ifodalash mumkin va

$$f(z) = e^{g(z)} (z - a_1) \dots (z - a_n) = A e^{g(z)} \prod_{k=1}^n (z - a_k) \quad (4.4)$$

ega bo'lamiz.

Nollarni soni cheksiz ko'p bo'lgan butun funksiyalar cheksiz ko'paytmalar yordami ifodalanadi va ularning yaqinlashish masalasi o'rganiladi.

1- ta'rif. Ushbu cheksiz

$$\prod_{k=1}^{\infty} \{1 + f_k(z)\}$$

ko'paytma D sohada yaqinlashuvchi bo'ladi, agar bu sohaning har bir z_0 nuqtasida

$$\prod_{k=1}^{\infty} \{1 + f_k(z_0)\}$$

sonli cheksiz ko'paytma yaqinlashuvchi bo'lsa.

$b_1, b_2, \dots, b_n \dots$ sonlar ketma ketligi $f(z)$ funksiyaning nollari bo'lsin va ular moduli bo'yicha o'sish tartibida joylashgan bo'lsin. m_n - orqali b_n nolning tartibini belgilaylik, $a_1, a_2, \dots$ ketma-ketlik orqali uning oddiy nollarini belgilaylik. $f(z)$ funksiyaning logarifmik hosilasini topamiz.

$$G(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \{\ln f(z)\}$$

Bu hosila faqat b_n nuqtalarda birinchi tartibli qutblarga ega va qoldig'i (chegirmasi) m_n ga teng. Demak $G(z)$ funksiya meromorf funksiya. $G(z)$ fuksiyaning sodda kasrlarga yoyilmasi $f(z)$ funksiyaning cheksiz ko'paytmali yoyilmasi bilan bog'liq bilan bog'liq. Ushbu teorema o'rinli bo'ladi.

1-teorema. $f(z)$ butun funsiyaning logarifmik hosilasi z^{p-1} ga nisbatan tez o'smasin, bunda p i 1 - butun son. U holda $f(z)$ funksiya uchun

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} - \dots + \frac{1}{p} \frac{z^p}{a_n^p} \right) \quad (4.6)$$

ko'rinishdagi yoyilma o'rinli. Bu erda m i 0 - $f(z)$ funksiya $z = 0$ dagi nolining tartibi, $g(z)$ J p tartibli biror ko'phad va $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - ketma-ketlik $f(z)$ funksiyaning nollari.

Isboti. Birinchidan $z = 0$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lmasin deb faraz qilamiz. U holda uning logarifmik hosilasi $G(z)$

$$G(z) = e^{p-1} c_k z^k + e^{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m_n}{z - b_n} + \frac{m_n}{b_n} + \frac{z}{b_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{b_n^2} + \dots + \frac{1}{p} \frac{z^p}{b_n^p} \right)}$$

ko'rinishda yoyiladi. Yoki $G(z)$ ning Teylor yoyilmasidagi bosh qismi

$$\frac{m_n}{z - b_n} = - \frac{m_n}{b_n} \frac{1}{1 - \frac{z}{b_n}} = - \frac{m_n}{b_n} \left(1 + \frac{z}{b_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{b_n^2} + \dots \right)$$

ko'rinishda bo'ladi. $G(z)$ ning tekis yaqinlashuvchiligidan $z = 0$ nuqtani ixtiyoriy z bilan tutashtiruvchi chiziq bo'yicha ($f(z)$ funksiyaning nollari yotmaydi) integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \ln f(z) &= \ln f(0) + e^{\sum_{k=1}^{p-1} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}} + \\ &+ e^{\sum_{n=1}^{\infty} m_n \ln \left(1 - \frac{z}{b_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{b_n^2} - \dots + \frac{1}{p} \frac{z^p}{b_n^p} \right)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

topamiz.

n - yig'indini bo'lakka ajratib (4.7) ni ushbu ko'rinishda

$$\ln f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z}{a_n} e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} + \dots + \frac{1}{p} \frac{z^p}{a_n^p}} \right)$$

yozamiz. $g(z)$ - J p - darajali ko'phad. Bundan esa cheksiz ko'paytmani $f(z)$ funksiya yaqinlashishi kelib chiqadi.

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} + \dots + \frac{1}{p} \frac{z^p}{a_n^p}} \right). \quad (4.8)$$

Agar $z = 0$ $f(z)$ funksiyani m karrali noli bo'lsa, $\frac{f(z)}{z^m}$ funksiya uchun yuqoridagilarni qo'llasak, (4.5) formulaga kelamiz. Teorema isbotlandi.

Yuqoridagi isbotlangan teoremani ixtiyoriy butun funksiya uchun quyidagicha ifodalash mumkin.

2-teorema (K. Veyershtass). Shunday $g(z)$ butun funksiya va butun sonlar $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ ketma-ketligi mavjudki, buning uchun

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} + \dots + \frac{1}{p_n} \frac{z^{p_n}}{a_n^{p_n}}} \right) \quad (4.9)$$

formula o'rinli va aksincha.

3-teorema (K. Veyershtass). Cheksizlikka yaqinlashuvchi $\{a_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligi uchun, $\{p_n\}$ sonlar ketma-ketligi topiladiki, (4.9) cheksiz ko'paytma $f(z)$ butun funksiyaga yaqinlashadi va a_n sonlar shu funksiyaning nollari bo'ladi.

Veyershtass formulasining eng asosiy tadbirlaridan biri $f(z)$ meromorf funksiyani butun funksiyalar yordamida ifodalashdan iborat.

2-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya qutb maxsus nuqtadan boshqa yakkaalangan maxsus nuqtaga ega bo'lmasa meromorf funksiya deyiladi.

$f(z)$ butun kompleks tekislikda bir qiymatli funksiya va qutb maxsus nuqtadan boshqa yakkaalangan maxsus nuqtalarga ega bo'lmasin. Biz $f(z)$ meromorf funksiyaning

qutblari biror $G(z)$ butun funksiyaning nollari bo'ladigan butun funksiyaning tuzishimiz mumkin.

$G_1(z) = f(z)G(z)$ ko'paytma $G_1(z)$ butun funksiyaning ifodalaydi, agar $f(z)$ funksiyaning ixtiyoriy a qutbi uchun

$$G_1(a) = \lim_{z \rightarrow a} G_1(z)$$

deb faraz qilsak.

Demak,

$$f(z) = \frac{G_1(z)}{G(z)}$$

ega bo'lamiz.

Shunday qilib, meromorf $f(z)$ funksiya ikkita butun funksiyaning nisbati ko'rinishida ifodalanar ekan.

Masalan, meromorf tgz va $ctgz$ funksiya ikkita butun funksiyaning nisbati ko'rinishda ifodalanadi:

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Meromorf funksiylarning cheksiz ko'paytmalar orqali ifodalash yordamida Mittag – Leffler masalasi yechilgan. Ushbu masalani o'rganib chiqamiz.

Quyidagi maxsus nuqtalar (qutb va o'ta muhim maxsus nuqtalar)

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \right)$$

berilgan bo'lsin va mos ravishda har bir a_n maxsus nuqtaga noma'lum $f(z)$ funksiyaning

bosh qismi $G_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k}$ bo'lsin. Bunda $G(x)$ butun funksiya. a_n nuqtalarda

maxsuslikka ega, butun tekislikda bir qiymatli bo'lgan $f(z)$ funksiyaning aniqlash talab etilsin va bunda

$$f(z) = G_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k}$$

ayirma a_n nuqtada holomorf funksiya bo'lsin. Ushbu masalaga Mittag – Leffler masalasi deyiladi.

Bu masalani xususiyl holda Veyershtrass formulasi yordamida o'rganamiz. Bu holda barcha a_n lar sodda qutb maxsus nuqtalar va chegirmasi 1 ga teng bo'lsin. U holda

$$G_n(z) = \frac{1}{z - a_n}.$$

Veyerstrass formulasi yordamida barcha nollari a_n nuqtalardan iborat bo'lgan $G(z)$ butun funksiyani aniqlaymiz.

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} - \dots + \frac{1}{n-1} \frac{z^{n-1}}{a_n^{n-1}} \right).$$

Bu $G(z)$ funksiyadan logorifmik hosila olamiz va

$$f(z) = \frac{d}{dz} \ln G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \frac{z^2}{a_n^3} + \dots + \frac{z^{n-1}}{a_n^n} \right)$$

ega bo'lamiz.

Hosil bo'lgan ushbu qator ratsional funksiya a_n sodda qutbga ega bo'lgan $f(z)$ meromorf funksiyani ifodalaydi va mos ravishda chegirmasi 1 ga teng bo'ladi.

Shunga o'xshash cheksiz ko'paytmalarni analitik funksiyalarning ko'pgina masalalarini hal etishda tadbiq qilish mumkin. Masalan, analitik funksiyalar uchun yagonalik teoremasini isborlashda ham va bu teoremaning umumlashgan holda cheksiz ko'paytmalarni qo'llash ancha osonlik yaratadi.

Xulosa

Ushbu bitiruv malakaviy ishni o'rganish jarayonida quyidagi xulosalarga kelindi.

1. Cheksiz ko'paytmalar nazariyasini ikki holi ya'ni haqiqiy sonli ko'paytmalar va ularning xossalari o'rganildi.
2. Cheksiz ko'paytmalarning yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchiligi o'rganildi hamda yaqinlashuvchiligining yetarli shartlari tekshirildi.
3. Hadlari funksiyalardan iborat bo'lgan cheksiz ko'paytmalarni haqiqiy hamda kompleks o'zgaruvchi bo'lgan hollarini yaqinlashuvchiligi o'rganildi.
4. Cheksiz ko'paytmalar bilan cheksiz qatorlar orasidagi bog'lanishlar o'rganildi. Qatorlarning yaqinlashuvchi bo'lishi bilan cheksiz ko'paytmalarning ham yaqinlashuvchi bo'lishi o'rganildi.
5. Hadlari funksiylardan iborat cheksiz ko'paytmalarning yaqinlashuvchiligi o'rganildi. Hamda absolyut yaqinlashuvchiligi va tadbiqlari o'rganildi.
6. Cheksiz ko'paytmalarning tadbiqlaridan golomorf funksiyalarning ko'paytmalar orqali ifodalanishi o'rganildi. Hamda bu ko'paytmaning ham golomorf bo'lishi tekshirildi.
7. Kompleks o'zgaruvchili butun funksiyalarning ham cheksiz ko'paytmalar orqali ifodlanishi o'rganildi. Ular uchun Veyerstrass teoremlari o'rganildi.
8. Meromorf funksiyalarni cheksiz ko'paytmalar orqali ifodalanishi o'rganildi. Hamda ularni golomorflikka tekshirildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Курант К., Роббинс Г. Что такое математике? М., МЦРМО. 568 с. 2001.
2. В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. Математический анализ. М. 367 с. 1987.
3. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. М. Наука. 432 с. 1984.
4. М.А. Лаврентьев, Б.П. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М. 749с. 1976.
5. Г.М. Фехтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. 662 с. 1974.
6. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной: Учеб.: Для вузов. — 6-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 336 с. 2005.
7. Эйдерман В. Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. — М.: ФИЗМАТЛИТ,- 256 с. 2002.
8. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ асослари. Т. 1, 2-қисмлар. 1980.
9. Xudoyberganov G., Vorisov A.K., Mansurov X.T., Shoimqulov B.A. Matematik analizdan ma'ruzalar. T. 1,2-qismlar. 2010.
10. Демидович Б. П. Сборник и задач по математическому анализу. М. 624 с. 1997.
11. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М. Наука. 564 с. 1976.
12. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функции. М. 1966.
13. <http://www.roman.by/>, <http://www.vargen.mephi.ru/>
14. <http://www.lib.mexmat.ru/>, <http://www.ziyonet.uz/> saytlari.