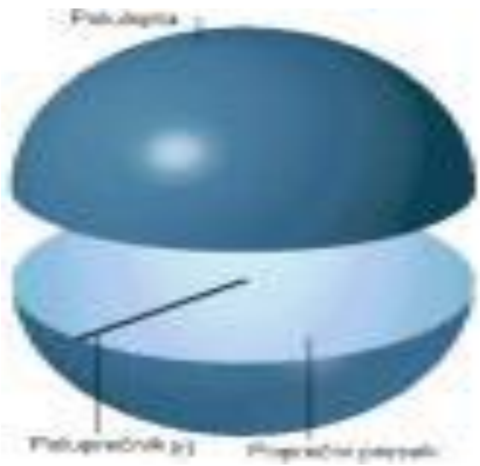
Жиззах Политехника Институти

“Олий математика” кафедраси

М.Мансуров.

Аналитик геометрия элементлари

(ўқув қўлланма)



(Менежмент ва иқтисодиёт йўналиши учун)

Жиззах – 2006

Ўқув қўлланма “Олий математика”нинг бўлимларидан бири бўлган Аналитик геометриянинг асосий масалаларини ўрганишга бағишланган бўлиб, у менежмент йўналишида таълим олувчи биринчи курс талабаларига мўлжалланган.

Ўқув қўлланма “Олий математика” кафедраси услубий семинарида кўриб чиқилди ва “Автомеханика ” факультети услубий кенгашида тасдиқлаш учун тався этилди.

Баённома №________ 2006 йил

Кафедра мудири доц. А. Бердияров.

Ўқув қўлланма “Автомеханика” факультети услубий кенгашида мухокома қилинди ва тасдиқлаш учун институт услубий кенгашига тавсия қилинди.

Баённома №________ 2006 йил

Факультет услубий кенгаши
раиси, доцент Х. Эгамбердиев

Ўқув қўлланма институт услубий кенгашида маъқулланди ва ўқув жараёнида қўшимча адабиёт сифатида фойдаланиш учун тавсия этилди.

Баённома №________ 2006 йил

Институт услубий кенгаш
раиси, доцент М. Позилов

Тақризчилар 1. А.Қодирий ногмли ЖПИ доценти Д.Ботиров
2. ЖПИ “Олий математика” кафедра доценти Р.Анваров

Мундарижа.

I-боб Векторлар алгебраси:

1§. Координатлар системаси
2§. Векторлар (асосий тушунчалар)
3§. Векторлар устида Чизиқли амаллар
4§. Векторнинг компонентаси ва проекцияси
5§. Компоненталари билан берилган векторлар устида Чизиқли амаллар.
6§. Икки векторни скаляр купайтмаси
7§. Икки векторни векторли купайтмаси
8§. Уч векторнинг аралаш купайтмаси
9§. Компоненталари билан берилган векторларни купайтмаси

II-боб Текисликда аналитик геометрия

10§. Чизиш тенгламаси хакида тушунча. Чизиқ тенгламасини тузиш коидаси.
11§. Туғри чизиқ(асосий тушунчалар)
12§. Туғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси
13§. Берилган нуқтадан утиб берилган векторга перпендикуляр булган Туғри чизиқтенгламаси.
14§. Туғри чизиқни умумий тенгламаси ва уни текшириш
15§. Туғри чизиқнинг каноник ва кесмаларга нисбатан тенгламаси
16§. Туғри чизиқнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан Туғри Чизиқгача булган масофа
17§. Икки Туғри чизиқорасидачи бурчак. Икки Туғри чизиқнинг кесишуви.
18§. Иккинчи тартибли эгри Чизиқлар. Айлана, Эллипс, гипербола ва парабаланинг каноник тенгламалари.

III-боб Фазода аналитик геометрия

19§. Берилган нуқтадан утиб, берилган векторга перпендикуляр булган текислик тенгламаси.
20§. Текисликнинг умумий тенгламаси ва уни текшириш
21§. Уч нуқтадан утган текислик тенгламаси Текисликнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси
22§. Текисликнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан текисликгача булган масофа.
23§. Икки текислик орасидачи бурчак. Уч текисликни кесишуви
24§. Фазода Туғри Чизиқ. Туғри чизиқнинг вектор шаклдаги тенгламаси. Туғри чизиқнинг каноник ва параметрик тенгламалари.
25§. Фазода Туғри чизиқнинг умумий тенгламаси ва уни каноник куринишга келтириш
26§. Икки Туғри чизиқорасидаги бурчак. Туғри чизиқва текислик орасидаги бурчак.
27§. Туғри чизиқва текисликнинг кесишуви
28§. Иккинчи тартибли сиртлар хакида тушунга Иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламаси.
29§. Айланма сирт
30§. Эллипсоид. Бир ва икки паллали гиперболоид
31§. Эллиптик параболоид.
32§. Гиперболик параболоид.

.

КИРИШ

Ушбу ўқув қўлланма «Менежмент» мутахассислигига ажратилган укув соатига мулжалланган булиб «Иктисодда математика» курсини таркибий кисми булган «Аналитик геометрия булимига багилиланган»

Ўқув қўлланма уч бобдан иборат булиб, тенглик аналитик геометрия, иккинчи тартибли Чизиқлар ва фазода аналитик геометрияни уз ичига олади.

«Менежмент» йуналишидаги мутахассисликларга математика Фани учун кам укув соати ажратилганлигини хисобга олиб иложи борича ўқув қўлланма хажмини оширмасликка харакат килинди. Ўқув қўлланма укув дастуридаги маърузаларни тула камраб, олганлиги учун уни укув кулланмаси сифатида фойдаланиши мумкин. Ўқув қўлланма муаллифларнинг Жиззах политехника институтида куп йиллар мобайнида укиган маъруза ва амалиёт мажгулотлари асос килиб олинди. Шунингдек куп йиллар давомида синовдан утган ва ижобий бехоланган узбек ва рус тилларидаги адабиётлардан кенг фойдаланилди.

Фани чукуррок урганишини хохлаган талабалар учун китоб охирида етарлича тулик адабиётлар руйхати келтирилди. Ўқув қўлланмани баён килиш жараёнида исботи келтирилмаган тасдикларни исботини урганиш учун адабиётлар курсатилди.

Муаллиф

1§. Координаталар системаси.

Координаталар-маълум тартибда олинган ва нуқтанинг Чизиқдаги, текисликдаги, сиртдаги ёки фазодаги вазиятини характерлайдиган сонлардир. Нуқтанинг координаталари тушунчасидан фойдаланиб. Аналитик геометрия фани геометрик шаклларни алгебраик анализ ёрдамида текширади. Аналитик геометриянинг вазифаси: биринчидан геометрик образларни нуқталарнинг геометрик урни деб караб, шу образларнинг умумий хоссаларига асосан уларни тенгламаларини тузади ва иккинчидан, тенгламаларнинг геометрик маъносини аниклаб, бу тенгламалар билан берилган геометрик образларни шаклини, хоссаларини ва текисликда ёки фазода жойлашишини урганади

Равшанки Чизиқлар нуқталарнинг геометрик урнидир, сиртларни эса Чизиқлардан ва жисмларни сиртлардан ташкил тонган деб караш мумкин

Шунинг учун геометрик шаклларни текисликда ёки фазода нуқталарнинг урни деб караш мумкин.

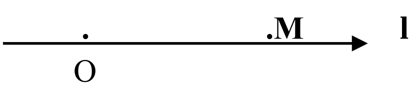
Аналитик геометрияда нуқтанинг Чизиқдаги, текисликдаги ва фазодаги урни сонлар ёрдамида аникланади. Нуқтанинг урнини аникловчи сонлар унинг координаталари дейилади.

Энди координата системалари билан танишамиз:

<u>Тугри Чизиқдаги нуқтанинг координатаси</u>

Мусбат йуналиши танлаб олинган L Тугри чизиқ<u>ук</u> деб аталади. Укни йуналиши одатда стрелка билан курсатилади

Таъриф. Агар Тугри Чизиқда координаталар боши деб аталувчи О нуқта, мусбат йуналиш ва масштаб бирлиги танлаб олинган булса у холда Тугри Чизиқда Декатр *) координаталар системаси берилган дейилади*. Бу Тугри Чизиқдаги М нуқтани тула аниклаш учун, ундан О нуқтагача булган масофа ОМ кесманинг узунлиги ва йуналиши берилган булиши керак. Кесманинг йуналиши + ёки – ишоралар оркали, масалан О нуқтадан унг томонга куйилса мусбат, чап томонга куйилса манфий деб кабул килинган. Шу кабул килинган шартда, Тугри чизиқнинг хар бир нуқтаси ягона бир сонни ифодалайди. Бу сон каралаётган нуқтанинг абсциссаси (координатаси) дейилади ва   x харфи билан белгиланади, худди шунингдек, харбир хакикий сонга Тугри Чизиқда ягона нукти мос келади. Яъни Тугри чизиқ   устидаги нуқталар ва хакикий сонлар туплами орасида бир киймати мослик урнатилади.*

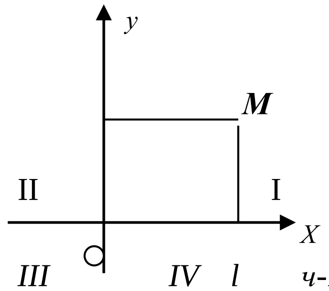


Абсциссаси x га тенг М нуқтани М(х) куринишда белгиланади. ($M_1(1)$, $M_2(2)$, M_3 (-2), M_4(-5), $M_5(0)$) нуқталарни ясанг.

Аналитик геометрияда нуқта берилган деганда, унинг координатаси берилгани тушунилади.

Текисликдаги нуқтанинг координаталари

Таъриф: Текисликда Тугри бурчакли координаталар системаси берилган дейилади, агар иккита узаро перпендикуляр ук, уларни кесишинг нуқтаси



ч-1

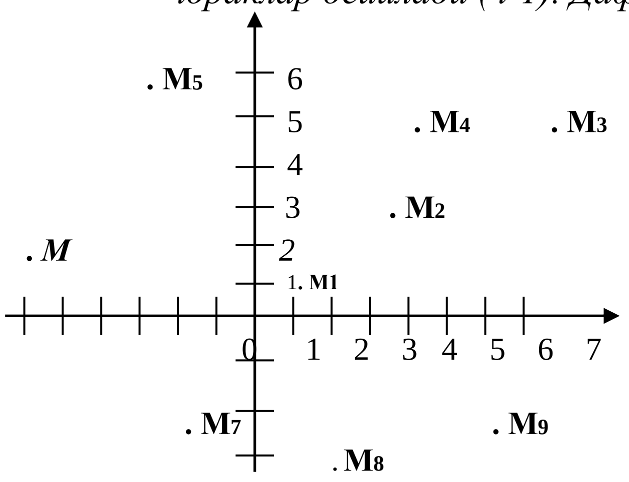
О (санок боши) ва масштаб бирлиги берилган булса. Одатда бу укларни бири горизонтал, иккинчиси вертикал жойлашган булади. (Р. Декарт, француз олими 1596-1650) Горизантал укни абсциссалар уки, (ОХ), вертикал укни ординаталар (ОУ) уки дейилади. Бу укларни иккаласи координата уклари, уларнинг кесишган нуқтаси (санок боши) координата боши дейилади. Координаталар боши ОХ ук учун хам, ОУ ук учун хам санок бошланадиган нуқта хисобланади. Укларни хар бирида мусбат йуналишлар стрелкалар билан курсатилади. Нуқтанинг текисликдаги урни анашу координаталар системасига нисбатан аникланади.

Текисликда бирор М нуқтанинг (ч-1) урини аниклаш учун бу нуқтадан, ОХ ва ОУ укларига перпендикуляр туширамиз ва координати уклари билан кесишиш нуқталарини Р ва Q билан белгилаймиз.

М нуқта берилган булса, равшанки Р ва Q нуқталар аникланади ва Р,Q маълум булса, М нуқтани урнини аниклаш осон. Маълумки, кесмаларнинг узунликлари бирор узунлик бирлиги билан улчанади. Шу туфайли координата укларида масштаб бирлиги танлаб олинган булади: х=ор, у=оQ деб белгиласак, бу сонлар ёрдамида текисликда факат битта М нуқтани топамиз; x *сони М нуқтани абсциссаси, у сони эса уни ординатаси дейилади ва М(х;у) куринишда ёзилади. Масалан М (4;-5) булса х=4, у=-5 эканини билдиради.*

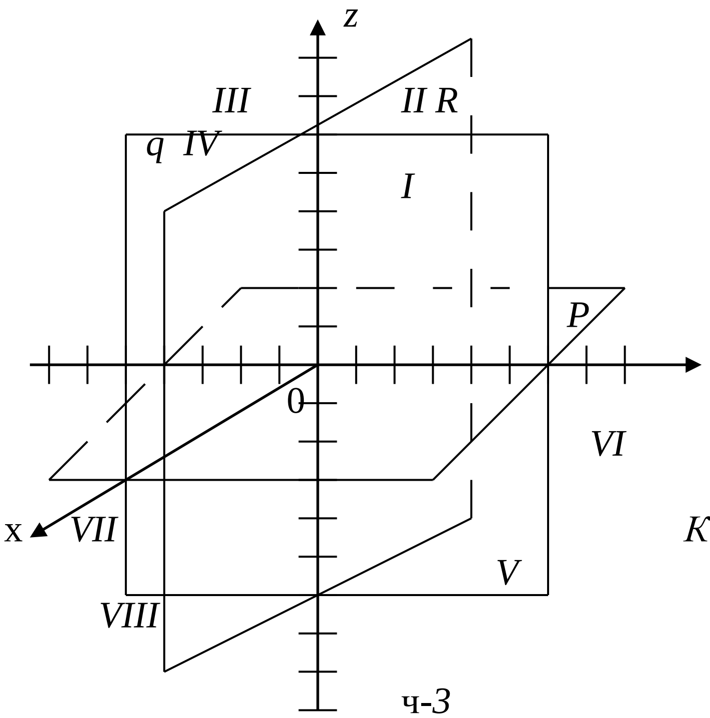
Нуқта берилган деймиз, агар унинг координаталари берилган булса.

Координата уклари текисликни турт булакка ажратади, бу булаклар чораклар дейилади (ч-1). Дафтарнинг булинган квадратчалар томонини масштаб бирлиги сифатида кабул килсак (ч-2) да курсатилган нуқталарнинг координаталари куйидагича булади: M_1 (1;1), M_2 (3;3), M_3 (7;5), M_4 (4;5), M_5 (-3;6), M_6 (-6;2), M_7 (-2;-2), M_8 (2;-3), M_9 (6;-2)



ч-2

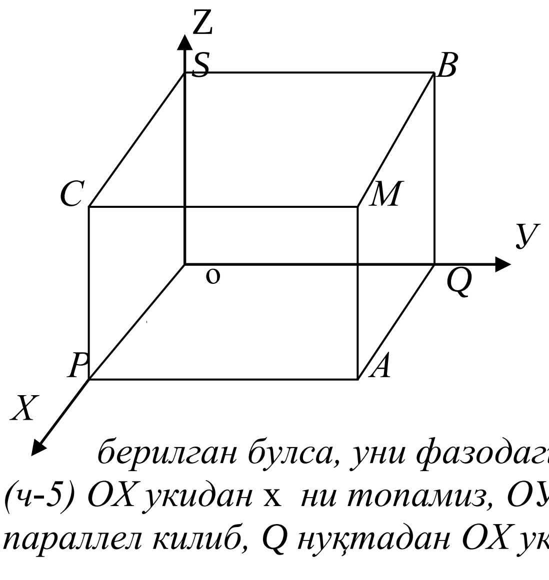
Фазода Туғри бурчакли координаталар системаси



ч-3

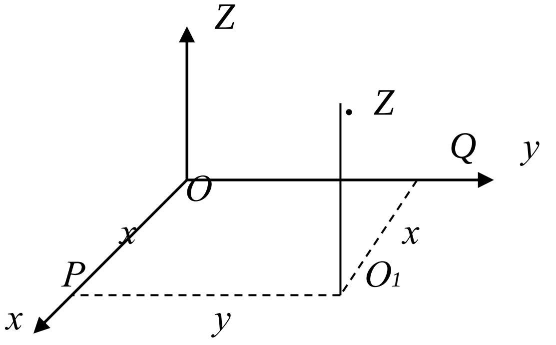
Фазода нуқтанинг урнини аниклаш учун бир-бири билан Туғри бурчак хосил килиб кесишадиган учта H,Q,R текисликларни караймиз. Бу текисликларни координата деб текисликлари аталади. P,Q,R текисликлар OX,OУ,OZ Туғри Чизиқлар буйича кесишади, бу Чизиқлар координата уклари дейилади ва OX абсцисса уки, OУ ординати уки ва OZ аппликаталар уки деб аталади. Бу уч укнинг кесишган нуқтаси O координаталар боши дейилади. Координата текисликлари узаро кесишиб фазони саккиз кисмга (булакка) ажратади. Бу булаклар октантлар дейилади. Бу келтирилган координата системаси фазода Туғри бурчакли Декарт координаталар системаси дейилади. Фазода Туғри бурчакли Декарт координаталар системасини кискача куйидагича таърифлаш мумкин:

Таъриф: Фазода Туғри бурчакли Декарт координаталар системаси берилган дейилади, агар учта узаро перпендикуляр уқ, уларни кесишган нуқтаси O ва масштаб бирлиги берилган булса. Фазода хар кандай нуқтанинг урни координата системасига нисбатан учта сон билан аникланади. Фазода бирор M нуқта ва маълум масштаб бирлиги берилган булсин (ч-4). M нуқтадан координата укларига перпендикулярлар туширамиз ва уларни координата уклари билан кесишган нуқталарини



P,Q,S билан белгилаймиз. Агар P,Q,S нуқталар берилган булса M нуқтани топиш мумкин. Демак M нуқтани фазодаги вазиятини X=OP, У=OQ ва Z=OS микдорлар белгилайди ва улар M нуқтанинг координатлари, аникроги X M нуқтанинг абсцессаси, У ординацияси ва Z аплекатаси дейилади. Агар фазода бирор, M (x;y;z) нуқта берилган булса, уни фазодаги вазиятини куйидагича аниклаш мумкин (ч-5) OX укидан x *ни топамиз, OУ укидан уни топамиз. P нуқтадан OУ укига параллел килиб, Q нуқтадан OX укига параллел килиб Туғри чизиқутказамиз* *ва уларни кесишган нуқтасини Q_1 билан белгилаймиз. O_1 нуқтадан OZ укига параллел килиб узук Чизиқ утказамиз.*

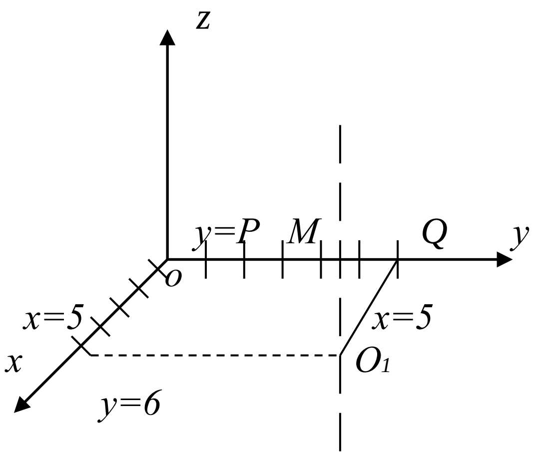
Шундан кейин z ни ишорасига караб, агар $z > 0$, булса O_1дан юкорига караб узунлига z булган O_1Z ва $Z < 0$ була O_1 дан пастга караб узунлиги O_1Z кесми ажратамиз. O_1Z кесмани охирги *нуқтаси биз излаётган М нуқтадир. М (5;6;3) нуқтани ясайлик: x=5 ва y=6 кесмаларни топиб, уларни охиридан ОХ ва ОУ укига параллел килиб узук Чизиқлар утказамиз, сунгри уларни кесишиш нуқтаси O_1дан OZ укига*



г-5

параллел килиб узук Чизиқлар утказамиз. Z=3>0, булганиди. O_1 нуқтадан юкориги караб 3 бирлик улчаймиз, шу кесмани охири, яъни O_1M кесма хосил булади. Анашу топилган М нуқта биз излаётган нуқтадир

Такидлаймизки M_1 (x;y) нуқта текисликда, M_2 (x;y;z) нуқта фазода берилган булса. M_1ни кайси чоракда, M_2 эса кайси актантда эканлигини куйидаги ж-1 ва ж-2 жадвалдан фойдаланиб аниклаш мумкин



ч-6

Ж-1

Чораклар	(x;y) нукта коор иш	
	X	y
I	x>0	y>0
II	x<0	y>0
III	x<0	y<0
IV	x>0	y<0

Ж-2

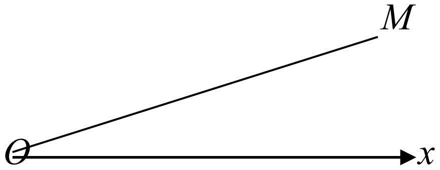
Октантлар	x;y;z) нукта коор иш		
	X	У	Z
I	x>0	y>0	z>0
II	x<0	y>0	z>0
III	x<0	y<0	z>0
IV	x>0	y<0	z>0
V	x>0	y>0	z<0
VI	x<0	y>0	z<0

Такидлаймизки координаталар системаси факатгина шу курсатилган координаталар системаси эмас, балки чексиз купдир. Масалан текисликда Декарт координаталар системасида ОХ ва ОУ уклари перпендикуляр булмаса, масалан α бурчак ташкил килса, бундай координата системасига аффин координата системаси дейилади.

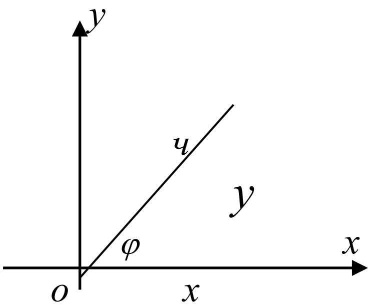
Амалда кутб, эгри Чизиқли, сферик ва цилиндрик координата системалари кенг кулланилади.

Мисол учун кутуб координаталар системаси билан танишайлик. Текисликни ихтиёрий О нуқтасидан ОХ укини утказимиз. Бу вактда текисликдаги М нуқтанинг вазияти икки микдор билан, О нуқтадан М

Нуқтагача булган |<u>ОМ</u>|=r масофа ва



r нинг ОХ уки билан ташкил килган Бурчаги $\wp$ оркали аникланади. О Нуқта-кутб, ОХ ук кутб уки, r эса М нуқтанинг радиус вектори, $\wp$ эса кутб бурчаги дейилади. r ва $\wp$ сонлар М нуқтанинг кутб координаталари дейилади ва М(r;$\wp$) куринишда ёзилиб, М (х;у)-М(r;$\wp$)



ч-7

Агар Туғри бурчакли Декарт координаталар системасини координата боши кутб билан ОХ уки кутб уки билан устма уст тушса нуқтанинг Туғри бурчакли Декарт координаталари ва кутб координаталар орасида куйидаги содда богланиш мавжуд:

$x=r\,Cos\varphi$. $y=rSin\,\varphi$. $r=\sqrt{x^2+y^2}$. $\varphi=arc\ tg\ y/x$

М: М(5;5) нуқтани кутб координаталар системасидаги координаталарини топинг,

Ечиш: $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$; $\varphi=arctg\ y/x=arctg\ 1=45^0=\frac{\pi}{4}$.

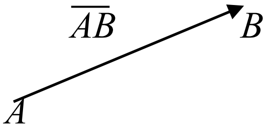
Демак $M(5;5)=M\left(5\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$

2§ Векторлар (асосий тушунчалар)

Математика, физика,техника,радиотехника ва шунга ухшаш фанларда икки хил микдорлар билан иш куришга Туғри келади. Бу микдорларнинг бир тури узининг сон кийматлари билан тула аникланади. М: юза, хажм, *температура,зичлик каби микдорлар. Бундай микдорлар скаляр микдорлар дейилади. Иккинчи бир микдорлар узининг сон киймати дан ташкари тула аникланиши учун йуналишлари хам берилган булиши керак. М: куч, тезлик, тезланиш каби микдорлар.*

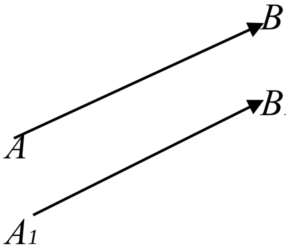
Узининг сон киймати ва йуналиши билан аникланадиган микдорлар векторлар дейилади.

Бу таърифдан геометриядаги йуналган $\overline{\text{кесма}}$ хам вектор эканлиги келиб чикади. Шу туфайли биз векторни йуналган кесма сифатида урганамиз. Тадкикотлар шуни курсатадики, йуналган кесма учун уринли булган барча хоссалар ва бажарилидиган амаллар векторлар учун хам уринли экан. Шунинг учун биз векторни аник маъносига этибор бермасдан йуналган кесма сифатида урганамиз. Бундан кейин вектор деганда йуналган кесмани тушунамиз. Энди векторларга тегишли асосий тушунчалар билан танишамиз. Векторлар а, в, с, каби харфларни устига Чизиқ куйиб белгиланади (босмада а куюқ рангда). Агар вектор йуналган кесма билан тасвирланган булиб А унинг боши, В унинг кейинги учи булса АВ символ билан белгиланади. Векторнинг бошидан охиригача булган масофа векторнинг



узунлиги (ёки модули) дейилади ва $|\overline{a}|$, $|\overline{AB}|$ куринишда белгиланади. Векторлар бир-бирига параллел ёки бир Туғри Чизиқда ётса бундай векторлар колленеар векторлар дейилади.

Икки а ва в вектор тенг дейилади, агар: 1)$|\overline{a}|=|\overline{в}|$, 2)колленеар, 3) йуналишлари бир хил булса.



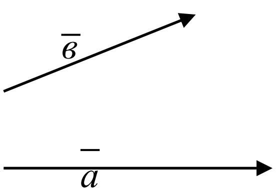
М: $\underline{AB}=A_1\underline{B_1}$, чунки учала шарт бажарилади. Векторларнинг тенглиги таърифидан параллел векторларнинг бошини бир нуқтадан бошка нуқтага кучириш мумкинлиги келиб чикади Бошлангич нуқтасини текисликнинг ёки фазонинг ихтиёрий нуқтасига кучириш мумкин булган векторлар озод векторлар дейилади.

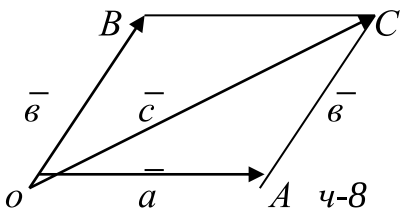
Уч вектор <u>компланар </u>дейилади, агар учали вектор бир текисликда ёки параллел текисликларда ётса. Узунлиги ,бирга тенг векторга бирлик вектор дейилади ва $\overline{a}_0$ куринишда белгиланади, яъни $|\overline{a}_0|=1$

Узунлиги (модули) нолга тенг векторга ноль вектор дейилади, яъни $|\overline{o}|=0$, нол векторни йуналиши аникланмаган булади.

3§Векторлар устида Чизиқли амаллар.

Векторлар устида Чизиқли амаллар деганда уларни кушиш, ақир<u>иш </u>ва бирор узгармас λ сонга купайтириш тушунилади. $\overline{a}$ ва $\overline{в}$ озод векторлар берилган булсин.





ч-8

Таъриф:Икки а,в вектор йигиндиси деб $\overline{a}$ ва $\overline{в}$ кушилувчи векторларга ясалган параллелограм<u>нинг у</u>мумий учи Одан чиккан с=ОС диагоналдан иборат

$\bar{c}$ векторга айтилади ва

$\bar{c}=\bar{a}+\bar{в}$ куринишда ёзилади

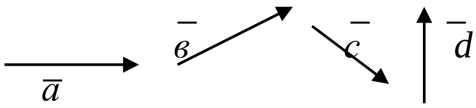
$\overline{OB}=\overline{AC}$ булганидан $\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}$. Бу тенглик векторларни кушишда учбурчак коидасидан фойдаланиш мумкинлигини курсатади.

Учбурчак коидаси: икки a, $в$ векторларни кушиш учун a векторнинг охирига $в$ векторни бошлангич нуқтасини куйиб a векторни бошини $в$ векторнинг охири билан туташтирамиз. Хосил булган $OC=c$ вектор $a+в$ га тенг. Векторларни кушиш уриналмаштириш ва группалаш конунига буйсинади:

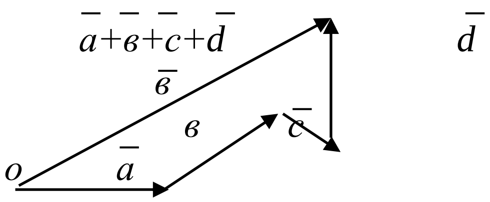
$\bar{a}+\bar{в}=\bar{в}+\bar{a}$; $(\bar{a}+\bar{в})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{в}+\bar{c})=\bar{a}+\bar{в}+\bar{c}$

Векторларни кушишда векторлар сони иккитадан зиёт булса, уларни кушишнинг куйидаги купбурчаклар коидаси мавжуд:

Бир неча векторни кушиш учун кушилувчи биринчи векторнинг охирги учига кушилувчи иккинчи векторнинг бошлангич учини келтирамиз, ясалган кушилувчи иккинчи векторнинг охирги учига учинчи векторни куямиз ва х.к. Хосил булган синик чизиқнинг бошлангич нуқтаси билан охирги нуқтасини туташтирувчи вектор (ёпувчи вектор), берилган хамма векторларнинг йигиндиси булади.



векторлар берилган $\bar{a}+\bar{в}+\bar{c}+\bar{d}$ векторни ясаймиз:



Векторлар алгебрасида айириш амали кушиш амалига тескари амал деб каралади.

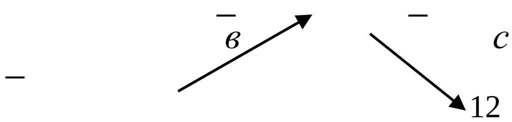
Таъриф a вектордан $в$ векторни айирмаси деб шундан c_1 векторга айтиладики, уни $в$ векторга кушганда a вектор, хосил булади, $c_1+в=a$ ёки $c_1=a-в$ Бундан куринадики (ч-8) $a-в$ вектор $\overline{BA}$ вектордир. Демак $\bar{a}$ вектордан $в$ векторни айирмаси a ва $в$ векторлар курилган параллелограмнинг O учидан чикмаган диагоналидан иборат BA вектордир.

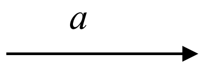
Таъриф a вектор билан $\lambda>0$ хакикий соннинг купайтмаси деб модул $\lambda|a|$га тенг, йуналиши a векторнинг йуналиши билан бир хил $\bar{c}$ векторга айтилади ва $c=\lambda a$ шаклда ёзилади.

Агар $\lambda<0$ булса $\bar{c}$ векторнинг йуналиши $\bar{a}$ векторнинг йуналишига тескари булади.

Векторни сонга купайтириш уриналмаштириш, группалаш ва таксимот конунларига буйсинади: $\lambda a=\bar{a}\lambda$; $\bar{к}(\lambda a)=\bar{к}\bar{\lambda} a$; $(\bar{a}+в)\bar{\lambda}=\lambda a+\lambda в$

Масала.

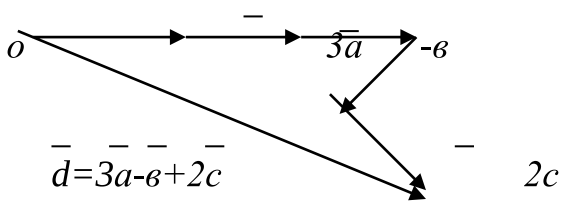




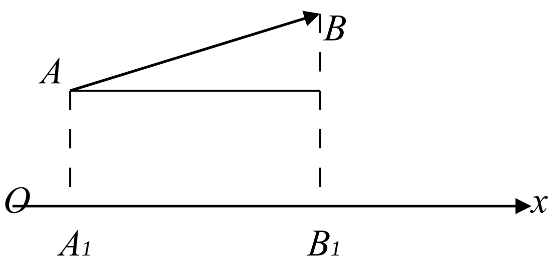
Векторлар берилган $\bar{d}=3\bar{a}-\bar{в}+2\bar{c}$ векторни ясанг

Ечиш. Ихтиёрий О нуқта оламиз ва О нуқтага $3\bar{a}$ векторни бошини куямиз, $3\bar{a}$ нинг охирига $-\bar{в}$ векторни, хосил булган $3\bar{a}-\bar{в}$ векторни охирига $2\bar{c}$ векторни бошини куямиз, сунгри О нуқтани $2\bar{c}$ векторнинг охири билан туташтирсак

$\bar{d}=3\bar{a}-\bar{в}+2\bar{c}$ вектор хосил булади.

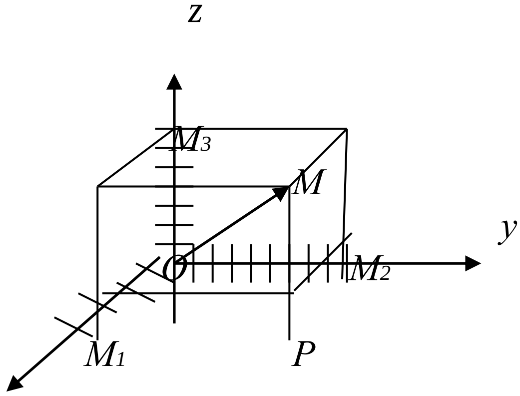


4§ Векторларнинг компонентаси ва проекцияси.



$\overline{AB}$ векторнинг ОХ укдаги проекцияси деб, унинг боши А, учи булган В нуқталарнинг шу укка туширилган A_1,B_1 –проекцияларни туташтирувчи $\overline{A_1B_1}$ векторнинг $|\overline{A_1B_1}|$ микдорига, яъни йуналган A_1B_1 кесманинг + ёки – ишора билан олинган узунлигига айтилади.

Равшанки $пр_{ох}\,\overline{AB}=|\overline{AB}|\,Cos\,\alpha$ ва $пр_{ох}\,(\bar{a}+\bar{в}+\bar{c})=пр_{ох}\,\bar{a}+пр_{ох}\,\bar{в}+пр_{ох}\,\bar{c}$ Тугри бурчакли бирор координаталар системасининг О координата бошидан чиккан ОМ вектор берилган булсин (ч-9) Бу векторни координата укларидаги проекцияларини топамиз. Бунинг учун ОМни М учидан ХОУ текисликка МР перпендикуляр тушурамиз ва Р нуқтадан ОУ укка параллел Тугри чизиқутказамиз. Бу Тугри чизиқбилан ОХ

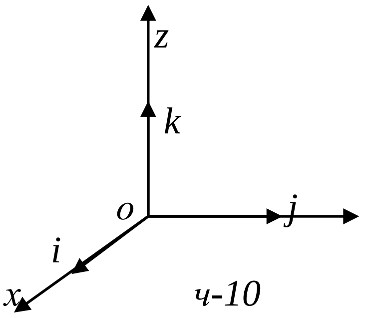


укнинг кесишган нуқтаси M_1 булсин. Натижада ОХ укида $\overline{OM_1}$ вектор хосил булади. $\overline{OM_1}$ вектор $\overline{OM}$ векторнинг ОХ укдаги компоненти дейилади. Худди шунингдек OM_2 ва OM_3 векторлар $\overline{OM}$ векторнинг ОУ ва OZ уклардаги компонетлари дейилади. Йуналган OM_1PM синик чизиқни x ч-9 ёпувчиси ОМ булганидан.

$OM = OM_1 + M_1P + PM = OM_1 + OM_2 + OM_3$

яъни фазодаги хар кандай вектор координата укларидаги узининг компоненталари йигиндисига тенг, ёки $\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z$

Векторни ана шу куринишда ифодалаш векторни компоненталарга ёки ташкил этувчиларга ажратиш дейилади.

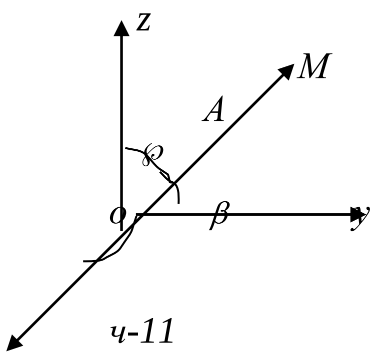


ч-10

Координата укларининг хар бири учун бирлик вектор танлаб олиш ёки бирлик вектор киритиш векторлар алгебраси ва уни татбикларида катта кулайлик тугдиради. $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ бирлик векторларни мос равишда ox,oy,oz укларидан танлаб оламиз (ч-10), $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ векторлар асосий бирлик ортогонал векторлар ёки ортлар дейилади. OM_1 вектор OX укдаги вектор булиб, i хам OX укда булгани учун $OM_1 = ix$ деб ёзиш мумкин, бунда X нинг абсолют киймати $\overline{OM_1}$ векторнинг модулига тенг (OM_1 ва i векторларни йуналиши бир хил ёки турлича булишига караб Xнинг ишораси (+) ёки (-) булади). Худди шунингдек $OM_2 = j$, У, $OM_3 = kz$ деб ёзиш мумкин, демак $OM = iX + jY + kz$ тенгликни хосил киламиз. X,У,Z сонлар ОМ векторнинг учи булган М нуқтанинг координаталари булиб, ОМ векторнинг координата укларидаги проекцияларидир, ix, jy, кz векторлар эса ОМ векторнинг компоненталари дейилади. О нуқта билан М нуқтани туташтириб хосил килинган r=ОМ вектор М нуқтанинг радиус-вектори дейилади. Радиус вектор r берилган булса, унинг охирги учи М нуқтани координаталар X, У, Z булади. X, У, Zлар ОМ векторнинг укдаги проекциялари булганидан $\overline{OM} = \bar{a}$ деб белгиласак, а=(X;У;Z)= ix+jy+ кz куринишда ёзилади. Радиус векторнинг узунлиги (ч-9) параллелепипед диагоналининг узунлигига тенг булганидан:

$|\bar{r}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Бирор $\bar{a}\{x,y,z\}$ вектор берилган булсин. $\bar{a}$ билан $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ортлар орасидаги бурчакларни мос равишда $\alpha, \beta, \wp$ билан белгилайлик (ч-11)



ч-11

$Cos\,\alpha$, $Cos\,\beta$, $Cos\,\wp$ лар $\bar{a}$ векторнинг йуналтирувчи косинуслари дейилади.

$Cos\alpha = \frac{x}{|a|}$ $Cos\beta = \frac{y}{|a|}$ $Cos\wp = \frac{z}{|a|}$ булганидан

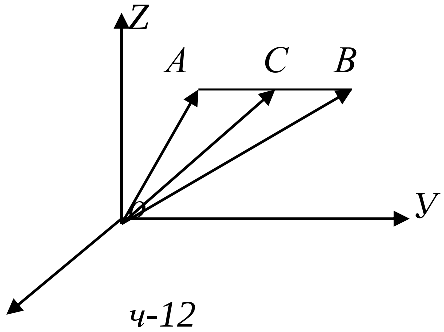
$Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\wp = 1$

5§ Компонентлари билан берилган векторлар устида Чизиқли амаллар

$\bar{a}$ ва в векторлар компоненталари билан берилган булсин, яъни

$a\{x_1,y_1,z_1\}=\bar{i}x_1+\bar{j}y_1+\bar{k}z_1$, $\bar{в}\{x_2,y_2,z_2\}=\bar{i}x_2+\bar{j}y_2+\bar{k}z_2$

Векторларни йигиндисининг бирор укка нисбатан олинган проекцияси кушилувчи векторларнинг шу укдаги проекциялари йигиндисига тенглигидан.
$a\pm в=i(x_1\pm x_2)+j(y_1\pm y_2)+к(z_1\pm z_2)$
Демак компоненталари билан берилган векторларни кушиш (айириш) учун унинг бир исимли компоненталарини кушиш (айириш) керак экан.
Масала. $A(x_1,y_1,z_1)$ ва $B(x_2,y_2,z_2)$ нуқталар берилган.
Бу икки нуқта орасидаги кесмани λ нисбатда булувчи $C(x,y,z)$ нуқта топилсин.



ч-12

Ечиш: A,B,C нуқталарнинг радиус векторлари $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ларни караймиз.
Масала шартига кури
$\frac{\overline{AC}}{BC}=\lambda$ *ёки* $\overline{AC}=\lambda\overline{CB}$

$\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}$ *ёки* $\overline{OC}-\overline{OA}=\lambda(\overline{OB}-\overline{OC})$
$CB=OB-OC$

Охирги тенгликдан
$$OC=\frac{OA+\lambda OB}{1+\lambda}$$
$\overline{OC}$ изланаётган C нуқтанинг радиус векторидир. Охирги тенгликни $\overline{OC}$, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ векторларни компоненталари оркали ёзсак
$$\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z=\frac{1}{1+\lambda}\left[\bar{i}(x_1+\lambda x_2)+\bar{j}(y_1+\lambda y_2)+\bar{k}(z_1+\lambda z_2)\right)$$
Тенгликни хар икки томонидаги i, j, k лар олдидаги коэффициентларни тенглаштирсак
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$
Бу масалани ечиш жараёнидан келиб чикадики $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ нуқталардан $\overline{AB}$ вектор тузсfк $\overline{AB}=\bar{i}(x_2-x_1)+\bar{j}(y_2-y_1)+\bar{k}(z_2-z_1)$ ва

$$|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Векторни сонга купайтириш коидасига кура

$n\bar{a}=\bar{i}(nx_1)+\bar{j}(ny_1)+\bar{k}(nz_1)$

Масала $\bar{a}=\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{в}=-2\bar{i}+j-5\bar{k}$ *векторлар берилган булса* $3\bar{a}-2\bar{в}$ *векторнинг компоненталарини топинг.*
Ечиш: 3а ва –2в векторларни компоненталар оркали ёзиб, сунгра кушамиз:

$3\bar{a}=3\bar{i}+9\bar{j}+6\bar{k}$
$+-2\bar{a}=4\bar{i}-2\bar{j}+10\bar{k}$

$\overline{3a\text{-}2a}=7\,\bar{i}+7\,\bar{j}+16\,k$

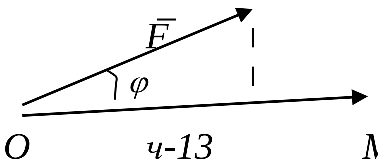
6§ Икки векторни скаляр купайтмаси:

Икки $\bar{a}$ ва $\bar{в}$ векторнинг скаляр купайтмаси деб. бу векторларнинг модуллари билан улар орасидаги бурчак косинусининг купайтмасига айтилади ва (а, в) куринишда белгиланади, яъни

$$(\bar{a},\bar{в})=|\bar{a}|\;|\bar{в}|\;Cos\alpha \qquad (6;1) \qquad\qquad \alpha=(a,\,в\,)$$

Векторни укка тушурилган проекцияси таърифига асосан пр $_{\bar{a}}\bar{в}=|\bar{в}|\,Cos\alpha$, *пр* $_{\bar{в}}\bar{a}=|\bar{a}|\,Cos\varphi$, *булганидак (6;1)дан* $(\bar{a},\bar{в})=|\bar{a}|\,пр_{\bar{a}}\bar{в}=|\bar{в}|\,пр_{\bar{в}}\bar{a}$ *(6;2)*

Икки векторни скаляр купайтмаси механика ва физикада куйидаги татбикга эга.



ч-13

О материал нуқтага $\bar{F}$ куч таъсир этиб, бу нуқтани $\overline{OM}$га кадар силжитса, $\bar{F}$ кучнинг силжини натижасида бажарган иши $A=|\overline{OM}|\,пр_{\overline{OA}}\bar{F}=(\overline{OM},\bar{F})$ *формула билан хисобланади*

Демак (OM,F) скаляр купайтма физика ва механика нуқтаи назаридан Fкуч таъсири остида бирор О нуқтани $\overline{OM}$ векторга кадар силжитишда $\bar{F}$ кучнинг бажарган ишини билдирида.

Векторларнинг скаляр купайтмаси куйидаги хоссаларга эга:

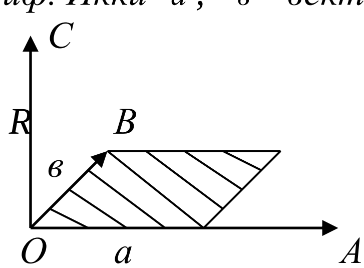
1. $(\bar{a},\bar{в}) = (\bar{в},\bar{a})$ *урин алмаштириш конуни;*
2. $(\bar{a},\bar{в})\lambda=(\bar{a},\lambda\bar{в}) = (\lambda\bar{a},\bar{в})$ *скаляр купайтувчига нисбатан группалаш конуни*
3. $(\bar{a}+\bar{в},\bar{c})=(\bar{a},\bar{c})+(\bar{в},\bar{c})$ *таксимот конуни;*
4. *Икки векторни скаляр купайтмаси нолга тенг булади, агар улардан бирортаси ноль ёки улар перпендикуляр булса.*

Хусусий холда $\bar{a}=\bar{в}$ булса $(\bar{a},\bar{a})=|\bar{a}|^2$ булади ёки $|\bar{a}|=\sqrt{(\bar{a},\bar{a})}$.

7§ Икки векторни векторли купайтмаси.

Икки $\bar{a}$, $\bar{в}$ векторларни скаляр купайтириш натижасида сон (скаляр) хосил булишини курдик, энди $\bar{a}$ ва $\bar{в}$ векторни бошка усулда купайтирилса вектор хосил булишини курсатамиз.

Таъриф. Икки $\bar{a}$, $\bar{в}$ векторнинг вектор купайтмаси деб шундай $\bar{c}$ векторга айтиладики, бу вектор $\bar{a}$, $\bar{в}$ векторларга перпендикуляр булиб, унинг модули $\bar{a}$ ва $\bar{в}$ векторлардан ясалган параллелограм юзига тенг, йуналиши эса $\bar{c}$ векторнинг С учидан караганда $\bar{c}$ вектор атрофи-



r-14

$\bar{a}$ да вектордан $\bar{в}$ векторга энг кичик бурчак билан айланиши соат стрелкасига тескари булади.

$\bar{a}$ ва $\bar{в}$ векторнинг вектор купайтмаси босмида $\bar{a} x \bar{в}$, кул ёзувда $[\bar{a}, \bar{в}]$ куриниши белгиланади.

Вектор купайтмалар куйидаги хоссаларга эга.

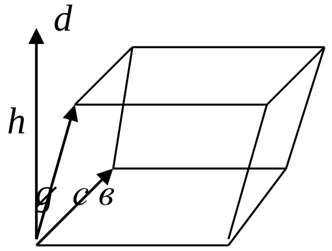
1. $[\bar{a}, \bar{в}]=-[\bar{в}, \bar{a}]$
2. $[\lambda \bar{a}, \bar{в}]=[\bar{a}, \lambda\bar{в}]=\lambda\ [\bar{a}, \bar{в}]$
3. $[(\bar{a}+\bar{в})\bar{c}]=[\bar{a}, \bar{c}]+[\bar{в}, \bar{c}]$
4. *Икки векторни векторли купайтмаси нолга тенг булиши учун шу векторлардан бирортаси нолга тенг ёки коллиниар булиши керак*

Демак $[\bar{a}, \bar{в}]=0$ шарт $\bar{a}$ ва $\bar{в}$ векторларнинг колленеарлик шартидир.

8§ Уч векторни аралаш купайтмаси

Учта $\bar{a}, \bar{в}, \bar{c}$ векторлар берилган булсин $[\bar{a}, \bar{в}]$ вектор купайтма билан $\bar{c}$ векторни скаляр ёки векторли купайтириш мумкин. Биринчи холда купайтма аралаш купайтма дейилади ва $([\bar{a}, \bar{в}]\bar{c})$ ёки $(\bar{a}, \bar{в}, \bar{c})$ куринишда ёзилади.

$([\bar{a}, \bar{в}]\bar{c})$ микдор скаляр микдор булиши равшан. Энди аралаш купайтманинг геометрик маъносини аниклаймиз:



а r-15

$$V_{п.п} = Sh = |[\bar{a}, \bar{в}]|h \qquad \frac{h}{|\bar{c}|} = Cos\varphi$$

$$h = |c|Cos\varphi \qquad \varphi = ([\bar{a}, \bar{в}]\hat{\ }\bar{c}) \text{ булганидан}$$

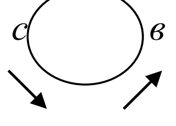
$$([\bar{a}, \bar{в}]\bar{c}) = |[\bar{a}, \bar{в}]|\,|\bar{c}|\,Cos([\bar{a}, \bar{в}]\bar{c}) \text{ Демак } V_{п.п.} = |[\bar{a}, \bar{в}]\bar{c}| = \pm([\bar{a}, \bar{в}]\bar{c})$$

Охирги тенгликдан куринадики, аралаш купайтманинг абсолют киймати шу $\bar{a}, \bar{в}, \bar{c}$ векторларга курулган параллелепипеднинг хажмига тенг.

Энди аралаш купайтманинг баъзи хоссалари билан танишамиз.

1) $([\bar{a}, \bar{в}]\bar{c})=-([\bar{в}, \bar{a}]\bar{c})$, $([\bar{a}, \bar{в}]\bar{c})=-([\bar{a}, \bar{c}]\bar{в})$, $([\bar{a}, \bar{в}]\bar{c})=-([\bar{c}, \bar{в}]\bar{a})$, *купайтмада икки кушни вектор урни алмаштирилса аралаш купайтма ишорасини тескарисига алмаштиради.*
2) *$\bar{a}, \bar{в}, \bar{c}$ векторларнинг уринлари доиравий циклда алмаштирилса, аралаш купайтма ишорасини узгартирмайди, яъни*

$([\bar{a}, \bar{в}]\bar{c})=([\bar{в}, \bar{c}]\bar{a})=([\bar{c}, \bar{a}]\bar{в})$



а

3) *Агар $\bar{а},\bar{в},\bar{с}$ векторлардан исталган иккитаси бир-бирига тенг ёки коллинеар булса, уларнинг аралаш купайтмаси нолга тенг булади.*
4) *Агар $\bar{а},\bar{в},\bar{с}$ векторлар компланар булса, уларнинг аралаш купайтмаси нолга тенг, яъни ($[\bar{а}\,,\ \bar{в}\,]\bar{с}\,$)=0 булади. Бу тенглик уч векторнинг компланарлик шартидир, яъни $\bar{а},\bar{в},\bar{с}$ векторлар компланар булиши учун ($[\bar{а}\,,\ \bar{в}\,]\bar{с}\,$)=0 булиши зарур ва етарлидир.*

9§ Компоненталари билан берилган векторларни купайтириш

$\bar{а},\bar{в},\bar{с}$ векторлар компоненталари билан берилган булсин, яъни $\bar{а}=\bar{i}x_1+\bar{j}y_1+\bar{к}z_1$ $\bar{в}=\bar{i}x_2+\bar{j}y_2+\bar{к}z_2$; $\bar{с}=\bar{i}x_3+\bar{j}y_3+\bar{к}z_3$ Аввало компоненталари билан берилган икки векторни скаляр купайтириш масаласини урганайлик:

$(\bar{а},\bar{в}\,)=(\bar{i}\,x_1+\bar{j}\,y_1+\bar{k}\,z_1)\,(\bar{i}\,x_2+\bar{j}\,y_2+\bar{k}\,z_2)$. Тенгликни унг томонидаги кавсларни купхадни купхадга купайтириш коидасига асосан купайтирамиз:

$$\begin{aligned}(\bar{а},\bar{в}\,)=&(\bar{i},\bar{i}\,)\,x_1x_2+(\bar{i},\bar{j}\,)\,x_1y_2+(\bar{i},\bar{k}\,)\,x_1z_2+\\&+(\bar{j},\bar{i}\,)\,y_1x_2+(\bar{j},\bar{j}\,)\,y_1y_2+(\bar{j},\bar{k}\,)\,y_1z_2+\\&+(\bar{k},\bar{i}\,)\,z_1x_2+(\bar{k},\bar{j}\,)\,z_1y_2+(\bar{k},\bar{k}\,)\,z_1z_2\end{aligned}\qquad(9.1)$$

6&даги икки векторни скаляр купайтиришнинг таърифига асосан $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ бирлик ортогонал векторлар булганидан

Cos $(\bar{i},\bar{j}\,)$ =Cos $\frac{\pi}{2}$=0, Cos $(\bar{i},\bar{k}\,)$=0, Cos $(\bar{j},\bar{k}\,)$=0

Шу сабабли $(\bar{i},\bar{j}\,)=(\bar{i},\bar{k}\,)=(\bar{j},\bar{i}\,)=(\bar{j},\bar{k}\,)=(\bar{k},\bar{i}\,)=(\bar{k},\bar{j}\,)=0$ ва $(\bar{i},\bar{i}\,)=(\bar{j},\bar{j}\,)=(\bar{k},\bar{k}\,)=1$, демак

$$(\bar{а},\bar{в}\,)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (9.2)$$

(9.2) тенглик куйидаги теоремани исботидир

Теорема. Компоненталари билан берилган $\bar{а}=\bar{i}x_1+\bar{j}y_1+\bar{к}z_1$ $\bar{в}=\bar{i}x_2+\bar{j}y_2+\bar{к}z_2$ векторларнинг скаляр купайтмаси бу векторларнинг бир исмли компоненталари купайтмасининг йигиндисига тенг.

Агар $\bar{а}\perp\bar{в}$ булса $(\bar{а},\bar{в}\,)=0$ булганидан $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$,бу тенглик икки векторнинг перпендикулярлик тартидир. 6§ даги (6.1) тенгликдан

$$Cos\varphi=\frac{(а,в)}{|а\,\|\,в|}\qquad ёки\qquad Cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\qquad(9.3)$$

Энди иккита компоненталари билан берилган векторларни векторли купайтириш масаласини карайлик. $\bar{а}=\bar{i}x_1+\bar{j}y_1+\bar{к}z_1$ $\bar{в}=\bar{i}x_2+\bar{j}y_2+\bar{к}z_2$ булсин

$[\bar{а},\bar{в}\,]=[\bar{i}\,x_1+\bar{j}\,y_1+\bar{k}\,z_1\,]\ [\bar{i}\,x_2+\bar{j}\,y_2+\bar{k}\,z_2]$

Кавсларни очиб чиксак (9.1) куринишдаги тенгликка эга буламиз, факат скаляр купайтли урнида векторли купайтма катнашади. Векторли купайтма таърифига асосан

$[\bar{i},\bar{i}]=|\bar{i}||\bar{i}|\,\mathrm{Sin}\,O=0$, $[\bar{j},\bar{j}]=0$, $[\bar{k},\bar{k}]=0$ ва $[\bar{i},\bar{j}]=\bar{k}$, $[\bar{j},\bar{i}]=-\bar{k}$, $[\bar{j},\bar{k}]=-[\bar{k},\bar{j}]=\bar{i}$, $[\bar{k},\bar{i}]=-[\bar{i},\bar{k}]=\bar{j}$ *булади.*

Бу тенгликларни инобатга олсак (9.1)дан $[\bar{a},\bar{в}]=\bar{i}(y_1z_2-y_2z_1)-$
$-\bar{j}(z_2x_1-x_2z_1)+\bar{k}(x_1y_2-y_1x_2)$ (9.4)

(9.4)ни куйидаги куринишда ёзиш мумкин

$$[\bar{a},\bar{в}]=\bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \qquad (9.5)$$

Энди куйидаги $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ *детерминантни*

биринчи сатр элементлари буйича ёйсак

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \qquad (9.6)$$

(9.5) ва (9.6) тенгликни солиштирсак

$$[\bar{a},\bar{в}]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (9.7)$$

Демак компоненталар билан берилган икки векторни векторли купайтмаси (9.7) формула билан топилар экан.

Агар $\bar{a}\,//\,\bar{в}$ *булса* $[\bar{a},\bar{в}]=0$, *булади ёки*

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0,\ y_1z_2-y_2z_1=0,\quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}=0,\ x_1z_2-x_2z_1=0,\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0,\ x_1y_2-y_1x_2$$

ёки $\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$ $\quad \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$ $\quad \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$ *Бу тенгликлардан*

$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$ *(9.8) тенглик келиб чикади.*

Демак (9.8) тенглик икки векторнинг коллинеарлик шартидир.

Энди компоненталари билан берилган уч векторнинг аралаш купайтмасини топиш масаласи билан шугилланамиз. $\bar{a} = \bar{i}x_1 + \bar{j}y_1 + \bar{\kappa}z_1$ $\bar{в} = \bar{i}x_2 + \bar{j}y_2 + \bar{\kappa}z_2$; $\bar{c} = \bar{i}x_3 + \bar{j}y_3 + \bar{\kappa}z_3$ *векторлар берилган булсин.*

Уч векторни аралаш купайтмасини таърифига асосан $[\bar{a},\bar{в}]$ *векторни* $\bar{c}$ *векторга скаляр купайтириш керак:*

$$[\bar{a},\bar{в}] = i\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \kappa\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \qquad (9.5)$$

$\bar{c} = \bar{i}x_3 + \bar{j}y_3 + \bar{k}z_3$

Икки векторни скаляр купайтириш формуласига асосан (9.2)

$$([\bar{a},\bar{в}]\bar{c}) = \begin{vmatrix} x_3 & y_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - j_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \quad \text{ёки}$$

$$([\bar{a},\bar{в}]\bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (9.9)$$

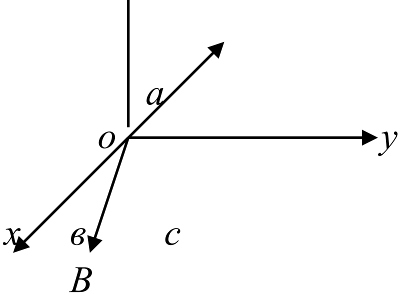
Агар $\bar{a},\bar{в},\bar{c}$ *векторлар компланар булса*

$$([\bar{a},\bar{в}]\bar{c}) = 0 \quad \text{ёки} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9.10)$$

(9.10) тенглик берилган уч векторнинг компланарлик шартидир.

Энди векторлар устида купайтириш амалларини куллаб ишланадиган иккита масала караймиз:

1-масала $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{в} = \overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$ *векторлар берилган. Ушбу векторлар ясалсин ва* $(\bar{a},\bar{в})$, $(\bar{в},\bar{c})$, $[\bar{a},\bar{в}]$, $[2\bar{a},\bar{c}]$ *ва* $([\bar{a},\bar{в}]\bar{c})$*лар хисоблансин.*



Ечиш: $\bar{a},\bar{в},\bar{c}$ *векторларни ясаймиз ва навбат билан талаб килинган микдорларни Хисоблаймиз.* $(\bar{a},\bar{в})$ *ва* $(\bar{в},\bar{c})$*лар (9.2) формула билан хисобланади:*

$(\bar{a},\bar{в})=2\ 1+(-1)2+2(-2)=2-2-4=-4$

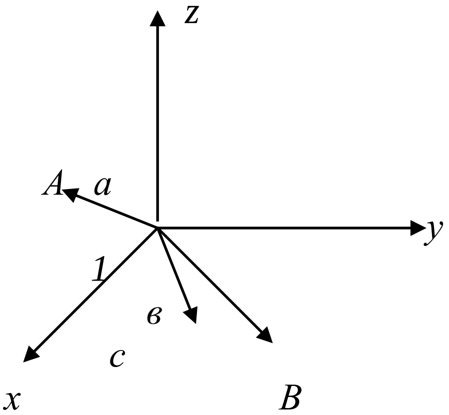
$(\bar{в},\bar{c})=1\ 1+2\ 1+(-2)\ (-1)=1+2+2=5$

$[\bar{a},\bar{в}]$ *ва* $[2\bar{a},\bar{c}]$ *(9.7) формула оркали векторли купайтмани 2-хоссасини* $[2\bar{a},\bar{c}]$*ни хисоблашда куллаб хисобланади:*

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$[\bar{a}, \bar{в}] = \begin{matrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{matrix} = 2\bar{i} + 4\bar{k} + 2\bar{j} + \bar{k} - 4\bar{i} + 4\bar{j} = -2\bar{i} + 6\bar{j} + 5\bar{k}$

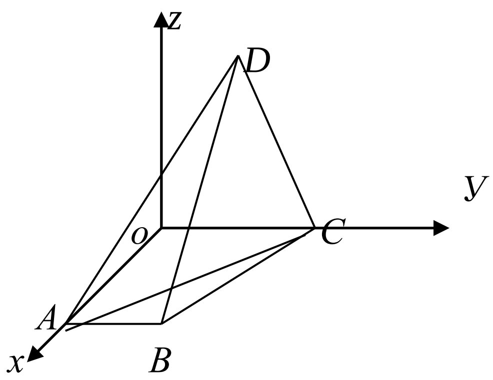
$$[2\bar{a}, \bar{c}] = 2[\bar{a}, \bar{c}] = 2\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(\bar{i} + 2\bar{k} + 2\bar{j} + \bar{k} - 2\bar{i} + 2\bar{j}) = -2(-\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}) = -2\bar{i} + 8\bar{j} + 6\bar{k}$$



$([\bar{a}, \bar{в}]\bar{c})$ни (9.9) формула оркали хисоблаймиз:

$$([\bar{a}, \bar{в}]\bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4+2+2-4+4-1=-$$

2-масала Учлари A(3;0;0), B(3;2;0), C(0;4;0) ва D(2;1;4) нуқталарда



булган пирамида берилган. Куйидагиларни топинг:

1) Пирамида ABC асосини юзини, AC томони узунлиги ва $\angle ABC$ топилган.

2) Пирамиданинг хажми топилсин

Ечиш 1) $\triangle ABC$нинг юзи $\overline{BA}$ ва $\overline{BC}$ векторларга курулган параллелограм юзини ярмига тенг, AC томон узунлиги эса $\overline{AC}$ векторни модулига тенг.

$\overline{BA}$, $\overline{BC}$ ва $\overline{AC}$ векторларни компоненталари оркали ёзамиз: $\overline{BA} = -2\bar{j}$, $\overline{BC} = -3\bar{i} + 2\bar{j}$, $\overline{AC} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$

$$[\overline{BA}, \overline{BC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6\bar{к}, \quad |[\overline{BA}, \overline{BC}]| = 6 \qquad S\Delta_{ABC} = \frac{6}{2} = 3кв.б$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0} = \sqrt{9+16} = 5$$

$\angle ABC$ эса BA ва BC векторлар орасидаги бурчак булганидан (9.3)

$$Cos\angle A\overline{BC} = \frac{(\overline{BA},\overline{BC})}{|\overline{BA}||\overline{BC}|} = \frac{0-4+0}{\sqrt{4}\sqrt{9+4}} = -\frac{4}{2\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \angle ABC = arcCos\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

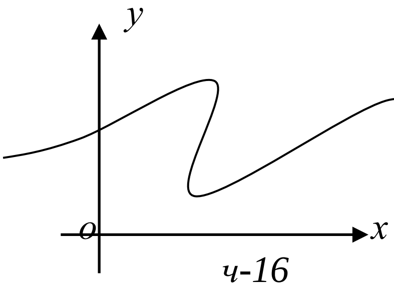
Энди учлари A,B,C,D нуқталарда булган пирамиданинг хажмини топамиз: Равшанки $\overline{BA},\overline{BC},\overline{BD}$ векторларга курулган параллепипеднинг хажми V= + ([$\overline{BA},\overline{BC}$] $\overline{BD}$) эди. Биз излаётган пирамида хажми эса $\overline{BA},\overline{BC},\overline{BD}$ векторларга курулган параллепипед хажмининг $\frac{1}{6}$ кисмига тенг

(2, 226 бет): $\overline{BD} = \overline{i}+\overline{j}-4\overline{k}$

$$V п. = \pm\frac{1}{6}\ ([\overline{BA},\overline{BC}]\ \overline{BD}) = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \pm\ (-24) = 4 \text{ куб б}$$

Чизиқ тенгламаси хакида тушунча. Чизиқ тенгламасини тузиш коидаси.

Бирор ХОУ координаталар системасида кандайдир Чизиқ, яъни эгри Чизиқ берилган булсин.

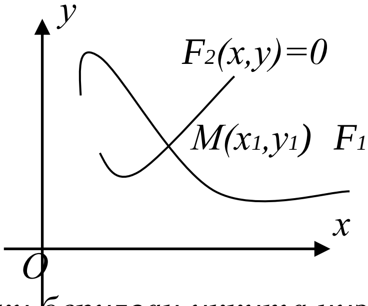


ч-16

F(x,y)=0 (10.1) тенглама L эгри чизиқнинг тенгламаси дейилади, агар L эгри Чизиқ устида ётган M(x,y) нуқтани координаталари (10.1) тенгламани каноатлантирса ва унинг устида ётмаган $\overline{M}$ ($\overline{x}$, $\overline{y}$) нуқталарнинг координаталари (10.1)ни каноатлантирмаса.

Берилган таърифдан куринадики L эгри Чизиқ уни ташкил килувчи нуқталар тупламидан иборат экан

Эгри чизиқни тенгламаси тушунчаси геометрик масалаларни алгебраик усул билан ечиш имконини беради. Масалан иккита $F_1(x,y)=0$ ва $F_2(x,y)=0$ Чизиқларни кесишиш нуқтасини топиш талаб килинсин.



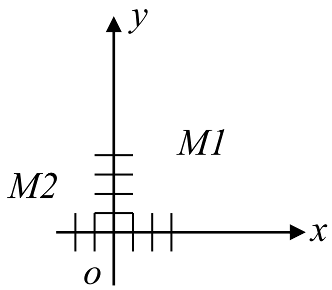
Агар бу эгри Чизиқлар бирор нуқтада кесишса, бу кесишиш нуқтаси $M(x_1;y_1)$ хар иккала Чизиққа тегишли булади, яъни $M(x_1,y_1)$ нуқтанинг коорди-наталари хар иккала тенгламани каноатлантиради. Бундан курина-дики берилган иккита чизиқни кесишиш нуқтасини топиш учун уларни тенгламаларини система килиб ечиш керак экан.

Энди чизиқни тенгламасини тузиш масаласига кайтайлик

Аналитик геометрияни биринчи вазифаси Чизиқ тенгламасини тузиш, яъни чизиқни нуқталарни геометрик урни деб караб, унинг умумий хоссалари ёки таърифига асосан тенгламаларини тузиш эди.

Чизиқ тенгламасини куйидаги коидага таяниб тузиш кулай: L Чизиқ устида координаталари ўзгарувчи булган M(x,y) нуқта олинади ва шу чизиқнинг характерли хоссалари ёки таърифига асосан ўзгарувчи X ва Уни богловчи конунни, яъни F(x,y)=0 тенглама тузилади.

Чизиқ тенгламасини тузишга мисоллар келтирайлик 3-мисол $M_1(3;4)$ ва $M_2(-2;3)$ нуқталардан баробар узокликда ётган нуқталар



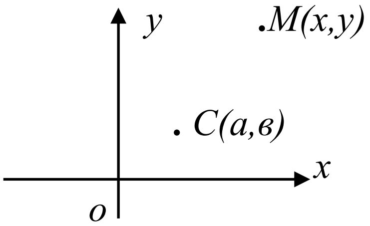
геометрик урнининг тенгламаси тузилсин
Ечиш: Хозирча бизга намаълум ва тенгламасини тузишимиз лозим булган Чизиқ устидан координаталари ўзгарувчи булган M(x,y) нуқта оламиз.
Масала шартига кура $|M_1M|=|MM_2|$. Икки нуқта орасидаги масофани топиш

формуласидан d= $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$ *фойдаланиб $|M_1M|$,$|MM_2|$ларни топамиз ва тенглаштирамиз:*

$|M_1M|=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$, $|MM_2|=\sqrt{(-2-x)^2+(3-y)^2}$ *$|M_1M|$ ва $|MM_2|$ларни тенглаштириб соддалаштирсак* $x^2-6x+9+y^2-8y+16=4+4x+x^2+9-6y+y^2$
$-10x-2y+25-13=0$, $10x-2y+12=0$ *ёки* $5x-y+6=0$

Демак биз излаётган чизиқ тенгламаси $\boxed{5x-y+6=0}$ *экан.*

2-мисол. Харбир ихтиёрий M(x,y) нуқтаси берилган C(a,в) нуқтадан баробар узокликда ётган текислик нуқталарининг тенгламаси тузулсин.



Ечиш: Масала шартига кура |CM| узгармас, яъни бир хил булганидан |CM|=R ёки
$\sqrt{(x-a)^2+(y-в)^2}$ =R *ёки* $(x-a)^2+(y-в)^2=R^2$ **(10.2)**
Айлана таърифини эсга олсак, (10.2) тенглама маркази C(a,в) нуқтада ва радиуси R булган айлананинг тенгламасидир. Хсусий холда a=в=0, яъни C нуқта координата боши булса $x^2+y^2=R$ **(10.3)** *тенглама хосил булади. (10.2) тенглама маркази C(a,в) нуқтада ва радиуси Rга тенг булган айлананинг каноник (энг содда) тенгламаси дейилади. (10.3) эса маркази координата бошида ва радиуси R булган айлананинг каноник тенгламасидир.*

11§ Туғри чизиқ(асосий тушунчалар)

Туғри чизиқ-геометриянинг асосий тушунчаларидан булиб, нуқтани таърифлаб булмаганидек, уни хам бевосита таърифлаб булмайди, лекин унинг билвосита таърифи геометрия курсининг аксиоматик тузишда берилади. Масалан: Туғри чизиқни декарт координаталар системасида Ax+By+c=0 тенгламани каноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик урни, ёки берилдан икки нуқтадан баробар узокликда турувчи нуқтанинг геометрик урни, ёки ёруглик манбадан карама-караш таркалган нур деб караш мумкин.

Биз асосан текисликда туғри чизиқларни тенгламаларини тузишда Евклид постулатларидан фойдаланамиз.*

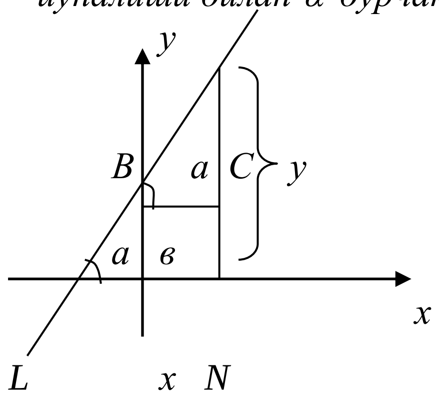
Бу постулатлар куйидагилар:

1. *Икки нуқтадан битта (ягона) туғри чизиқутказиш мумкин;*
2. *туғри тизиқ кесмасини чексиз давом эттириши мумкин;*
3. *хар кандай нуқтани марказ килиб ихтиёрий радиусли айлана чизиш мумкин;*
4. *хамма туғри-бурчаклар узаро тенг;*
5. *Бир текисликда ётган икки туғри чизиқни учинчи Туғри чизиқкесганда, ички биртомонли бурчаклар йигиндиси π дан кичик булса, бу Туғри чизиқички биртомонли бурчаклар йигиндиси π дан кичик томонда кесишади*

Анашу беш постулатни асосида курулган геометрияга Евклид геометрияси дейилади. Биз туғри чизиқ тенгламаларини тузиш жараёнида Евклидни биринчи постулати ва унга эквивалент булган тасдиклардан фойдаланамиз

12§ Туғри чизиқни бурчак коэффициентли тенгламаси

Текисликда Декарт координаталар системасида бирор L туғри чизиқ берилган булиб, ОУ укини В(0;в) нуқтасидан утиб, ОХ укинг мусбат йуналиши билан α бурчак ташкил килсин.Шу туғри чизиқнинг тенгламаси тузулсин. Чизиқ тенгламасини тузиш коидасига асосан (10§) L туғри чизиқустида М(х;у) координаталари ўзгарувчи нуқта оламиз ва х билан у орасидаги богланишни топамиз:ч-17га этибор берсак



г-17

$\frac{MC}{DC}=tg\alpha$, *MC=y-в , BC=x булганида*

$\frac{y-в}{x}=tg\alpha$, *y=xtg a+в , tgα =k деб*

белгиласак, у=кх+в (12.1) (12.1) тенглама биз тузишимиз лозим булган чизиқ тенгламаси булиб, туғри чизиқнинг бурчак коэффицентли тенгламаси *дейилади (12.1) тенгламада к туғри чизиқнинг бурчак коэффициенти, в эса туғри чизиқнинг бошлангич ординатаси дейилади.*

Энди туғри чизиқнинг бурчак коэфициентли тенгламаси ёрдамида ечиладиган иккита масалани карайлик

1-масала. Берилган $м_1(x_1;y_1)$ нуқтадан утиб, бурчак коэффиценти к булган туғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

Ечиш: (12.1) Туғри чизиқ$M_1(x_1;y_1)$ нуқтадан утсин, яъни $M(x_1;y_1)$ нуқтани координаталари (12.1) тенгламасини каноатлантирсин, яъни $y_1=кx_1+в$ (12.2) (12.1)дан (12.2)ни айнирсак

$y-y_1=к(x-x_1)$ *(12.3)*

(12.3) тенглама биз излаётган Туғри чизиқнинг тенгламаси булиб, маркази $M_1(x_1;y_1)$ нуқтада булган Туғри чизиқдастасини тенгламаси дейилади.

2-масала. Берилган $M_1(x_1;y_1)$ ва M_2 $(x_2;y_2)$ нуқталардан утувчи Туғри чизиқнинг тенгламаси тузилаш

Ечиш: (12.3) тенглама $M_1(x_1;y_1)$ нуқта маркази булган туғри чизиқ дастасининг тенглама булганидан, бу дастада $M_2(x_2;y_2)$ нуқтадан утувчи туғри чизиқ хам бор, яъни $M_2(x_2;y_2)$ нуқтанинг координаталари (12.3) тенгламани каноатлантирсин, $y_2-y_1=к\ (x-x_1)$

Охирги тенгликдан к ни топиб (12.3)га куйсак

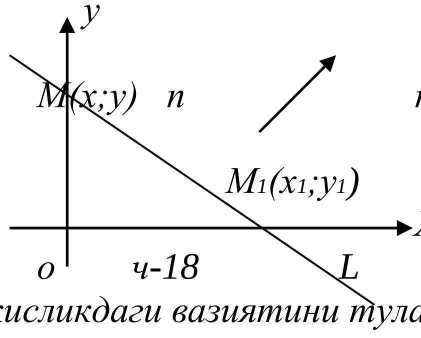
Постулат-аксиома

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (12.4)$$ *тенглама хосил булади*

(12.4) тенглама $M_1(x_1;y_1)$,M_2 $(x_2;y_2)$ нуқталардан утувчи туғри чизиқнинг тенгламасидир.

13§ Берилган нуқтадан утиб берилган векторга перпендикуляр булган туғри чизиқ тенгламаси

Берилган $M_1(x_1;y_1)$ нуқтадан утиб $\bar{n}=a\bar{i}+b\bar{j}$ векторга перпендикуляр булган туғри чизиқ тенгламасини тузамиз.



ч-18

Бунинг учун XOУ текислигида L туғри чизиқни караймиз. $M_1(x_1;y_1)$ L туғри чизиқнинг бирор нуқтаси ва $\bar{n}$ унга перпендикуляр вектор булсин $\bar{n}$ вектор L туғри чизиқнинг нормал вектори дейилади. Равшанки M_1 нуқта ва $\bar{n}$ вектор туғри чизиқнинг XOУ текисликдаги вазиятини тула аниклайди. M(x;y) нуқта L туғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси булсин. L туғри чизиқни тенгламасини тузиш учун X ва У *уртасидаги богланишни топамиз. M_1M вектор $\bar{n}$ векторга перпендикуляр булганидан ($\overline{M_1M};\bar{n}$)=0 ёки $M_1M=(x-x_1)i+(y-y_1)j$ булганидан $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$ (13.1)*

(13.1) тенглама биз излаётган L туғри чизиқнинг тенгламаси булиб, у берилган нуқтадан утиб, берилган векторга перпендикуляр булган туғри чизиқ тенгламаси дейилади.

14§ Туғри чизиқни умумий тенгламаси ва уни текшириш

Биз 13 §да ХОУ текисликда ихтиёрий L туғри чизиқ $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$ (13.1) тенглама билан ифодаланишини курдик. Энди куйидаги теоремани исботлаймиз

Теорема: Х ва У Декарт координаталарига нисбатан биринчи даражали хар кандай алгебраик тенглама текисликдаги бирор туғри чизиқнинг тенгламасидир.

Исбот: Х ва У ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали алгебраик тенгламанинг умумий куринишини

$$Ax+By+C=0 \qquad (14.1)$$

шаклда ёзиш мумкин. Исботлаймизки (14.1) тенгламадан (13.1) келиб чикади $A^2+B^2\neq 0$ булганидан (акс холда (14.1) туғри чизиқни ифодаламайди)

$$Ax+B\left(y+\frac{C}{B}\right)=0 \quad \text{ёки} \quad A\left(x+\frac{C}{A}\right)+By=0$$

Бу тенгламалар (13.1) куринишдаги тенгламалардир, чунки

$$A(x-0)+B\left(y-\left(-\frac{C}{B}\right)\right)=0 \quad \text{ёки} \quad A\left(x-\left(-\frac{C}{B}\right)\right)+B(y-0)=0$$

Демак (14.1) туғри чизиқтенгламаси экан (13.1)да кавсларни очиб чикиб (14.1) тенгламани хосил килиш кийин эмас. Хакикатан
$Ax-A_1x_1+By-By_1=0$ ёки $Ax+By+(-Ax_1-By_1)=0$ ёки $C=-Ax_1-By$, белгилаш киритсак

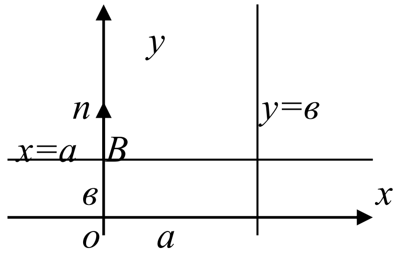
$$Ax+By+C=0 \qquad (14.1)$$

(14.1) куринишдаги тенглама туғри чизиқнинг умумий тенгламаси дейилади.

Туғри чизиқни умумий тенгламаси (14.1)да A,B,C ларни хусусий кийматларида ХОУ координата системасида туғри чизиқни тутган вазиятини урганишга, уни умумий тенгламасини текшириш дейилади:

Энди A,B,C ларни баъзи бир, кийматларида туғри чизиқнинг координата укларига нисбатан кандай жойлашганини текширамиз.

1. A=0, B =0, C $\neq$0 булса n=Bj бу-



либ By+C=0, $y=\frac{-c}{в}$ *=в булади* $\bar{n}=B\bar{j}$ *вектор тўғри чизиқни нормал векто-ри булганлигидан y=в OX укига параллел тўғри чизиқтенгламасидир, аникроги ОУ укидан в бирлик ажратиб*

ч-19

OX укига параллел тўғри чизиқтенгламасидир.

2. $A\neq 0$*, B=0,* $C\neq 0$ *булса* $\bar{n}=A\bar{j}$ *булиб, Ax+C=0,* $x=-\frac{C}{A}$ *=a тенглама OX укидан a бирлик ажратиб Оу укига параллел булган Тўғри чизиқтенгламасидир.*

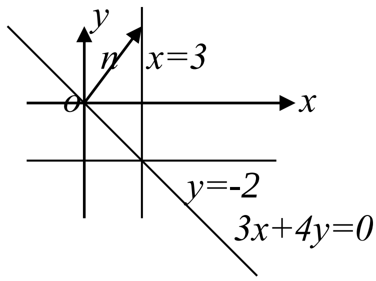
Демак (14.1) тенгламади кайси ўзгарувчи катнашмаси тўғри чизиқунга катмашмаган ўзгарувчига мос келувчи координата укига параллел булар экан.

3. A=0, $B\neq 0$*, C=0 булса By=0 ёки y=0 y=0 тенглама OX укини тенгламасидир.*

4. $A\neq 0$*, B=0, C=0 булса Ax=0 ёки x=0 x=0 тенглама ОУ укини тенгламасидир*

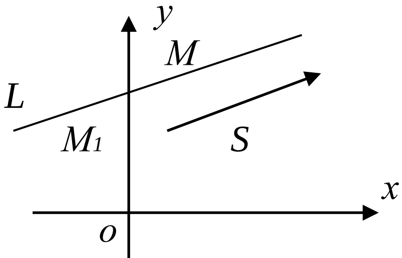
6. $A\neq 0$*,* $B\neq 0$*, C=0, Ax+By=0, бу тенглама координата бошидан утиб* $\bar{n}=A\bar{i}+B\bar{j}$ *векторга перпендикуляр булган тўғри чизиқтенгламасидир.*

Мисол учун x=3, y=-2 ва 3x+4y=0 тўғри чизиқларни XOУ координата системасидаги вазияти (ч-20)да курсатилган



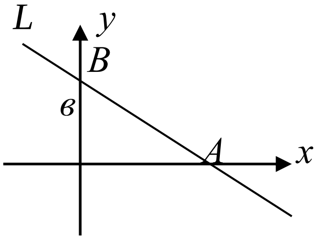
ч-20

15§ Тўғри чизиқнинг каноник ва кесмаларга нисбатан тенгламаси.



ч-21

XOУ текисликда L тўғри чизиқберилган булсин (ч-21). Унинг вазияти бирорта $M_1(x_1;y_1)$ *нуқтанинг ва берилган L Тўғри Чизиқка параллел булган* $\bar{S}=m\bar{i}+n\bar{j}$ *векторнинг бери-лиши билан тула аникланади.* $\bar{S}$ *векторга Lтўғри чизиқнинг йуналтирувчи вектори дейилади. Энди берилган L тўғри чизиқни тенгламасини тузамиз: L Тўғри чизиқ устидак M(x;y) нуқта оламиз ва x,y ларни богловчи тенглама тузамиз:*



$\overline{M_1M}=(x-x_1)\,\bar{i}+(y-y_1)\,\bar{j}$*, вектор* $\bar{n}=m\bar{i}+n\bar{j}$ *векторга параллел булганидан*

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n} \qquad (15.1)$$

ч-22

(15.1) тенглама туғри чизиқнинг каноник тенгламаси дейилади. Энди координата бошидан утмаган ва мос равишда координата укларидан а ва в кесма ажратган L туғри чизиқтенгламасини тузамиз (ч-22)

Равшанки L Туғри чизиқни А(а;0) ва В(0;в) нуқталардаги утувчи туғри чизиқдеб карасак, (15.1) тенгламага асосан

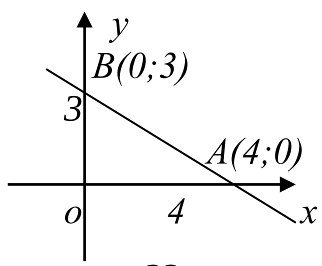
$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{в-0} \quad ёки \quad \frac{x-a}{-a}=\frac{y}{в} \quad ёки \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1 \quad (15.2)$$

(15.2) тенглама туғри чизиқнинг кесмалар шаклдаги тенгламаси дейилади. (15.2) тенгламада а ва в лар ОХ ва ОУ укларидан туғри чизиқажратган кесмаларни билдирганидан, туғри чизиқтенгламаси кесмалар шаклда берилганда уни ясаш кулай. Шу сабабли умумий тенгламаси билан берилган туғри чизиқни кесмалар шаклига келтириш масаласини курайлик.

Туғри чизиқАх+Ву+С=0 (14.1) тенгламаси билан берилган булиб координата бошидан утмасин, яъни С≠0. (14.1) тенгликда озод ход Сни тенгликнинг унг томонига утказиб, тенгликни –Сга буламиз, яъни

$$Ax+By=-C, \qquad \frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1 \quad ёки \quad \frac{x}{\frac{-c}{A}}+\frac{y}{\frac{-c}{B}}=1 \;; \; -\frac{C}{A}=a \;; \; -\frac{C}{B}=в$$

деб белгиласак $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$ *тенглама хосил булади*



ч-23

Мисол. 3х+4у-12=0 туғри чизиқясалсин.
Ечиш: 1-усул: берилган тенгламани кесмалар шаклига келтирамиз

$$3x+4y=12, \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$$

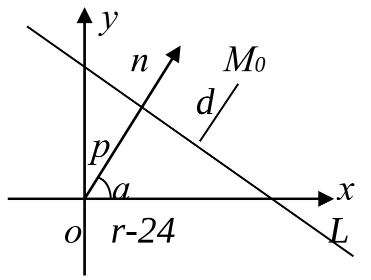
Демак хосил булган тенгламадан куринадики бу туғри чизиқОХ укидан а=4 ва ОУ укидан в=3 бирлик ажратиб утадиган туғри чизиқэкан.

2-усул. Малумки берилган икки нуқтадан факат битта туғри чизиқутади. Шу сабабли тенгламаси билан берилган туғри чизиқни ясаш учун унинг устида ётувчи иккита нуқта топиш кифоя. Масалан шу туғри чизиқни координата-уклари билан кесишилган нуқталарини координаталарини топиш кифоя: 3х+4у-12=0, х=0 десак 4у-12=0, у=3, у=0 десак 3х-12=0, х=4, яъни А(4;0) ва В(3;0) нуқталар хосил булади. Топилган А ва В нуқталарни координата укларида белгилаб, чизгич ёрдамида шу икки нуқтадан утувчи Туғри чизиқясалади (ч-23)

16§ Туғри чизиқнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан туғри чизиқгача булган масофа

13§даги $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$ (13.1) тенгламани карайлик

Таъриф. Агар (13.1) тенгламада $\bar{n}=A\bar{i}+B\bar{j}$ нормал вектор бирлик вектор булса, (13.1) тенгламага туғри чизиқнинг нормал тенгламаси дейилади. Агар $\bar{n}$ бирлик, вектор булса $\bar{n}=\bar{i}Cos\alpha+\bar{j}Sin\alpha$ куринишда ёзиш мумкин, бу вактда (13.1) куйидаги куринишни олади:



$Cosa(x-x_1)+Sina\,(y-y_1)=0$ ёки
$xCosa+ySina-(x_1Cosa+y_1Sina)=0$, ёки
$xCosa+ySina-p=0$ $(p=x_1Cosa+y_1Sina)$ (16.1)
(16.1)тенгламага туғри чизиқнинг нормал тенгламаси дейилади. Энди туғри чизиқ умумий тенгламаси $Ax+By+C=0$ (14.1)

билан берилган булса уни нормал тенгламага келтиришни курсатамиз. Бунинг учун (14.1) тенгламани нормалловчи купайтувчидеб аталувчи М сонга купайтирамиз:

$(MA)x+(MB)y+(CM)=0$ (16.2)

(16.1) ва (16.2) тенгламаларни солиштирсак $MA=Cosa$, $MB=Sina$, $CM=-p$

$(MA)^2+(MB)^2=Cos^2a+Sin^2a=1$ булганидан

$$M^2(A^2+B^2)=1 \quad \text{ёки} \quad M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (16.3)$$

М ни ишораси озод С нинг ишорасига тескари килиб олинади, чунки $-p<0$ (14.1)ни (16.3)га купайтирсак

$$\frac{Ax+By+Cz}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (16.4)$$

(16.4) тенглама (14.1) нинг нормал холга келтирилган куринишидир.

Агар L туғри чизиқустида ётмаган $M_0(x_0;y_0)$ нуқта берилган булса, шу нуқтадан L туғри чизиқгача булган масофани топиш талаб килинса, исбот килинганки ([к, 65 б]) L туғри чизиқдан $M_0(x_0;y_0)$ нуқтагача булган масофани хисоблаш учун туғри чизиқни нормал тенгламасидаги ўзгарувчи координаталари х,у ларни M_0 нуқтани x_0,y_0 координаталарига алмаштириб,сунгра абсолют микдорини хисоблаш

керак, яъни $d_{м0}=|x_0Cosa+y_0Sina-p|$, $d_{м1}=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A_2+B_2}}\right|$

Мисол. А(2;3) нуқтадан $4x+3y-7=0$ туғри чизиқгача булган масофа топилсин

Ечиш: Берилган тенглама учун нормалловчи купайтувчи Мни топамиз ва тенгламани Мга купайтирамиз:

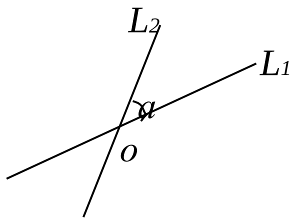
$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}} = \pm\frac{1}{5} \qquad \frac{4x+3y-7}{5}=0 \qquad d_A = \left|\frac{4\cdot 2+3\cdot 3-7}{5}\right| = \left|\frac{8+9-7}{7}\right| = 2$$

Агар $M_0(0;0)$ нуқтадан (16.1) туғри чизиқгача булган масофани топсан
$d_{M0}=|0Cosa+0Sina-p|=|-p|=p$
Демак (16.1) тенгламада р координата бошидан туғри чизиқгача булган масофани билдирар экан.

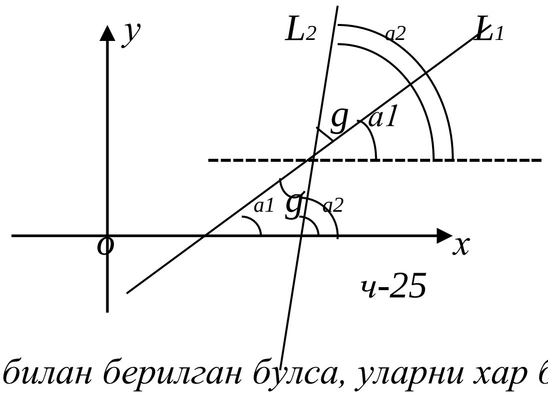
Умуман туғри чизиқни нормал тенгламаси бошка тенгламаларидан куйидаги икки хоссаси билан фарк килади:

1. *x,y лар олдидаги коэффициентлар квадратларининг йигиндиси бирга тенг.*
2. *p>0 булиб координата бошидан туғри чизиқгача булган масофани билдиради.*
3.

17§ Икки туғри чизиқ орасидаги бурчак. Икки туғри чизиқни кесишуви.



Таъриф. Икки туғри чизиқ орасидаги бурчак деб, улар узаро кессишиб хосил килган уткир бурчакка айтилади. L_1 ва L_2 туғри чизиқлар мос равишда $y=к_1x+в_1$ $(A_1x+B_1y+C_1)=0$ ва $y=к_2x+в_2$ $(A_2x+B_2y+C_2=0)$ тенгламалари билан аникланган булсин. Шу туғри чизиқорасидаги бурчак $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$



ч-25

тангенсини топамиз
Равшанки (ч-25) $a_2=a_1+\alpha$ *ёки*
$\alpha=\alpha_2-\alpha_1$ *Демак*

$$tg\ g=(a_2-a_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tga_1tga_2}$$

$к_1=tga_1$, $к_2=tga_2$ *булганидан*

$$tg\ g = \frac{к_2-к_1}{1+к_1к_2} \quad (17.1)$$

Агар L_1 ва L_2 умумий тенгламалари билан берилган булса, уларни хар бирини у га нисбатан ечиб $к_1к_2$ ларни топамиз:
$B_1y=-A_1x-C_1$,

$$y=\frac{-A_1}{B_1}x-\frac{C_1}{B_1} \qquad к_1=\frac{-A_1}{B_1}$$

$B_2y=-A_2x-C_2$,

$$y=\frac{-A_2}{B_2}x-\frac{C_2}{B_2} \qquad к_2=\frac{-A_2}{B_2}$$

Топилган $к_1$ва $к_2$ларни (17.1)га куйсак $tg\ g = \dfrac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$ *(17.2)*

Агар $L_1//L_2$ булса $\alpha=0$, $tg0=0$ ёки $A_1B_2-A_2B_1=0$, $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$ *(17.3)*

Агар $L_1 \perp L_2$ *булса* $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $tg\frac{\pi}{2} = \infty$ *ёки* $A_1A_2+B_1B_2=0$ *(17.3)*

(17.2) икки туғри чизиқнинг параллелик шарти. (17.3) эга икки туғри чизиқнинг перпендикулярлик шартидир

18§ Иккинчи тартибли эгри чизиқлар. Айлана, Эллипс, Гипербола ва Параболанинг каноник тенгламалари

Куйидаги $Ax^2+Bxy+Cy^2+Дx+Ey+F=0$ *(18.1) тенглама билан ифодаланадиган чизиқга иккинчи тартибли эгри чизиқ дейилади, бу ерда* $A^2+B^2+C^2 \neq 0$ *булиб А,В,С,Д,Е,Fлар (18.1) тенгламанинг коэффициентлари дейилади.*
Биз курсимизда В=0 холни урганамиз, яъни $Ax^2+Cy^2+Дx+Ey+F=0$ *(18.2)*
(18.2)ни чап томонини $(a+в)^2=a^2+2aв+в^2$ *формула ёрдамида тулик квадратини ажратамиз: бунинг учун тенгликни чап томонига* $\frac{Д^2}{4A}.\ \frac{E^2}{4C}$ *ифодаларни кушиб айирамиз:*

$$Ax^2+Дx+\frac{Д^2}{4A}+Cy^2+Ey+\frac{E^2}{4C}-\frac{Д^2}{4A}-\frac{E^2}{4A}+F=0 \text{ ёки}$$

$$A\frac{Д^2}{(x+2a)}+C\frac{E^2}{(y+2c)}=\frac{Д^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F \qquad (18.3)$$

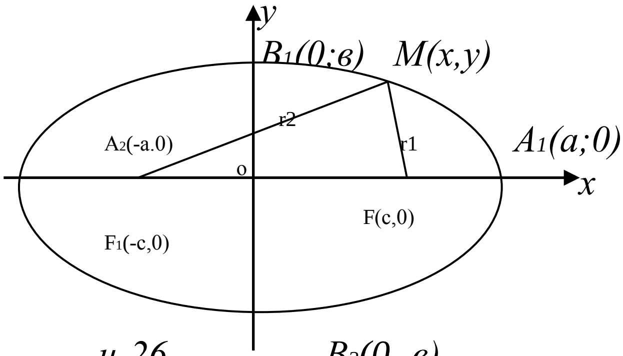
$$x_0=-\frac{Д}{2A,} \qquad y_0=-\frac{E}{2C,} \qquad \Delta=\frac{Д^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F \text{ деб белгиласак}$$

$A(x-x_0)^2+C(y-y_0)^2=\Delta$ *(18.4) тенглама хосил булади.* $(x_0;y_0)$ *нуқта эгра чизиқнинг симметрия маркази дейилади. Хусусий холда текширишни соддалаштириш учун* $x_0=0$, $y_0=0$ *десак (18.4) тенглама, яъни соддалашади, яъни* $Ax^2+Cy^2=\Delta$ *(18.5)*

Айлана. Биз 10§да маркази М(а;в) нуқтада ва радиуси R булган айланани тула урганган эдик $(x-a)^2+(y-в)^2=R^2$ *(10.2)*
Тадкидлаймизки айлани хам иккинчи тартибки эчки чизиқ экан, чунки (10.2)ни очиб чикса $x^2+y^2-2xa-2yв \neq a^2+в^2-R^2=0$ *(18.6)*
(18.6)ни (18.2) билан солиштирсак А=С=1, Д=-2а, Е=-2в, $F=a+в_2-R_2$ *экан*
Эллипс (18.5) тенглама билан берилган иккинчи тартибли эгри чизиқ эллипс дейилади. агар А ва С бир хил ишорали булса, яъни АС>0. Аниклик учун А>0, С>0 булсин, Δ *учун куйидаги холлар булади:* $\Delta>0$, $\Delta<0$, $\Delta=0$,
Агар $\Delta>0$ *булса, (18.5) ни* Δ *га булсак*

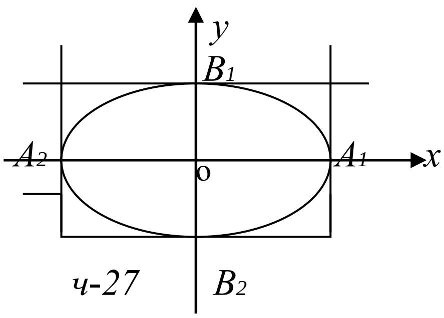
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$ *, бу ерда* $a=\sqrt{\frac{\Delta}{A}}$, $в=\sqrt{\frac{\Delta}{C}}$ *(18.7)*

тенглама хосил булади, (18.7) тенгламага ярим уклара а ва в булган эллипснинг каноник тенгламаси дейилади $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;в)$, $B_2(0;-в)$ *нуқталар эллипснинг учлари дейилади. (18.7) тенгламада х ва у лар квадратда булганидан* $M_1(x_1;y_1)$ *эллипсга тегишли булса* $M_2(-x_1;y_1)$ $M_3(-x_1;y_1)$ *ва* M_4 $(x_1;-y_1)$ *нуқталар хам эллипсга тегишли булади, демак эллипс координата боши ва координата укларига нисбатан симметрик экан. Эллипсни бу хоссаси уни ясашда кулайлик тугдиради, яъни уни графигини бир чоракда ясаб, бошка чоракларга симметрик равшида кучириш мумкин.*



ч-26

(18.7) эллипсни ясат учун тенгламани у га нисбатан ечамиз $y=\pm\frac{в}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ *,* $-a\leq x\leq a$ *(18.8)*
(18.8) тенгламани ифодаловчи эгри чизиқни (эллипс) [0;а] кесмида ясаб, сунгра симметрик кучирсак эллипс (ч-26) хосил булади. Амалда эса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$ *эллипсни ясаш учун* $x\neq a$*, у=+в чизиқларни ясаб тугри турт бурчак хосил киламиз (ч-27) . Хосил булган туғри турт бурчак томонларини урталари булган* A_1,A_2,B_1,B_2 *нуқталар эллипснинг учлари булади. Бу нуқталарни турт бурчакдан чикмайдиган килиб эгри чизиқлар билан туташтирсак эллипс хосил булади.*$F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$, $c=\sqrt{a^2-в^2}$ *эллипснинг фокуслари дейилади.*



ч-27

$E=\frac{c}{\alpha}$ *ифодаги эллипснинг эксцентриситети дейилади. с < а булганидан Е<1 булади Эллипс шаклини уни эксцентриситети ёрдамида текшириш мумкин:* $E=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

булганидан Е катталашиб 1га якилашса эллипс ОХ уки томон сикилади, аксинча Е кичиклашса эллипс айланага якинлашади ва Е=0 булса а=в булиб $x^2+y^2=a^2$ *айлани хосил булади, бундай куринадики айлана Е=0 булган эллипс экан.*

Эллипс устида М(х,у) нуқта оламиз ва уни эллипснинг фокуслари билан туташтирамиз. Хосилбулган /MF/=r, ва $|MF_2|=r^2$ *лар эллипснинг фокал радиуслари дейилади.*

Исбот килинганки ([л, 191 б) $r_1=a-Ex$, $r_2=a+Ex$ *Бундан* $r_1+r_2=2a$ *(18.9) (18.9) дан эллипснинг классик таърифи келиб чикади ([ш132 б)*

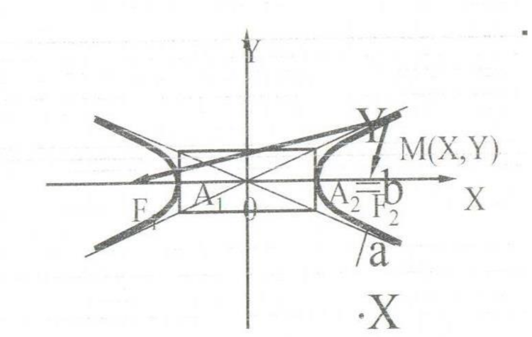
Гипербола. (18.5) тенглама билан берилган иккинчи тартибли эгри чизиқ гипербола дейилади, агар А ва С хар хил ишорали булса, яъни АС<0, Масалан А>0, С<0 булсин, :Δ >0, Δ <0, Δ =0, булиши мумкин Агар А>0, С<0булибΔ>0 булса

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ ,\qquad a=\sqrt{\frac{\Delta}{A}}\,,\qquad в=\sqrt{\frac{\Delta}{C}}\qquad (18.10)$$

а-гиперболанинг хакикий ярим уки, в-мавхум ярим уки дейилади (18.10) тенгламада х ва у лар квадратда булганидан гиперболани шакли хам координата уклари ва бошига нисбатан симметрик булади.

Гипербола ОХ укиши $A_1(a,0)$. $A_2(a;0)$ нуқталарда кесиб утади, ОХ уки билан кесишмайди. A_1,A_2 нуқталар гиперболанинг учлари, улар орасидаги 2а узунликка тенг чесма эса унинг хакикий уки дейилади. ОУ укдаги B_1дан B_2 гача булган 2в узунликдаги кесма гиперболанинг мавхум уки дейилади. Гиперболани ясат учун (18.10) тенгламани у га нисбатан ечамиз

$$y=\pm\frac{в}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ ,|x|>a\qquad (18.11)$$



(18.11) дан куринадики х а дан ∞ гача усса, у эса О дан ∞ гача усади. Демак х=а нуқтадан чикиб чексизга интиладиган чизиқни ясаймиз ва сунгра уни координата х укларига симметрик килиб ясаймиз Демак гипербола икки кисмдан иборат булиб, улар гиперболанинг тармоклари дейилади.

$F_1(c;0)$ *ва* $F_2(-c;0)$, $c=\sqrt{a^2+в^2}$

чг-28

нуқталар гиперболанинг фокуслари дейилади. $E=\frac{c}{a}$ *гиперболанинг*

экцентриситети дейилади, С>а булганидан Е>1

Таъриф. Агар М(х;у) нуқта бирор эгри чизиқ буйлаб харакатланиб (силжиб) борганда бирор L туғри чикикдан М(х;у) нуқтагача булган масофа нолга интилса, L туғри чизиқ шу эгри чизиқнинг асимптотаси дейилади.

Исбот килинганки ([1,198 б) $y=\frac{в}{a}x$ *ва* $y=-\frac{в}{a}x$ *Туғри чизиқ(18.10) гиперболанинг асимптоталаридир. Гиперболани ясашда, аввал унинг асимптотиларини ясаб олиш керак. Бунинг учун* $x=\pm a$, $y=\pm$ *в туғри чизиқларни ясаб туғри турт бурчак хосил киламиз. Хосил булган туғри турт бурчак диагоналларини давом эттирсак, (18.10) гиперболанинг* *асимитоталари хосил булади. Энди гиперболани, ясаш учун а ва –а нуқталардан асимитота буйлаб чексизликка интилувчи чизиқлар чизамиз ва III ва IV чоракка симметрик килиб утказамиз.*

Энди худди эллипсдаги каби гипербола устида М(х;у) нуқта оламиз ва F_1F_2 нуқталар билан туташтирамиз, $|MF_1|=r_1$, $|MF_2|=r_2$ десак r_1 ва r_2 га (18.10) гипербола М нуқтасининг фокаль радиуслари дейилади. Исбот килинганки ([л 200 б) х>0 булса r_1=Ех-а, ri=Ех+а ва х<0 булса r_1=а-Ех,
r_2=-а-Ех. Бу тенгликлардан r_1-r_2=+ 2а (18.12) келиб чикади.
(18.12) гиперболанинг классик таърифидир

Парабола.

$Ax_2+Cy_2+Дx+Ey+F=0$ (18.2) тенгликни карайлик.
Таъриф. (18.2) тенгликда А ёки С лардан бирортаси ноль булса, хосил булган тенгламани ифодаловчи чизиқга парабола дейилади.

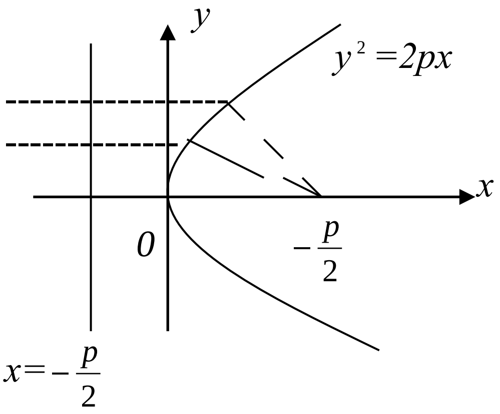
Хакикатан С=0 булса $Ax_2+Дx+Ey+F=0$ ёки
$A(x+\frac{Д}{2a})^2+E\overline{y-\frac{Д}{2a}}+F=0$ ёки $A(x-x_0)_2=-Ey+F-\frac{Д}{2A}$ ёки $A(x-x_0)^2=By+C$ (18.13)
Масалан А=1,x_0=0, С=0 булса x_2=2qу (В=2q)парабола хосил булади.

Агар С $\neq$0, А=0 булса
y^2=2рх тенглама хосил булади.

Равшанки x^2=2qy, y_2=2рх тенгламалар билан ифадаланадиган параболалар мактабда чукур урганилган. Мисол учун y^2=2рх (р>0) параболани урганайлик.

$F(\frac{p}{2},0)$ нуқта параболанинг фокуси, х=$\frac{P}{-2}$ тугри чизиқ эса унинг директрисаси дейилади Параболанинг ихтирий М(х;у) нуқтасидан F фокусгача булган |MF|=r узунлик М нуқтанинг фокал радиуси дейилади. Худди шунингдек М нуқтадан дериктриссагача булган масофа $\left|x+\frac{1}{2}\right|=r$

булади. Бундан эса параболанинг классик таърифи келиб чикади, яъни парабола бу ихтиёрий нуқтасидан фокусгача ва директриссагача булган масофалар тенг булган нуқталарнинг геометрик урнидир.



III - Фазода аналитик геометрия.

19 - Берилган нуқтадан ўтиб берилган векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси.

Аввало текисликни тушунчасига тегишли баъзи тушунчалар билан танишайлик. Текислик тушунчаси сттереометриянинг асосий тушунчаларидан бўлиб, текисликдаги тўғри чизиқ каби бевосита таърифланмайди.

Текисликка тегишли асосий хоссалар қўйидаги аксиомаларда мужассамлашган:

1) *Бир тўғри чизиқ устида ётмаган уч нуқтадан факатгина бир текислик ўтади.*
2) *Бир тўғри чизиқнинг икки нуқтаси текислик устида ётса, колган барча нуқталари хам шу текислик устида ётади.*

Келтирилган аксиомалар ва улардан келиб чикадиган натижалардан фойдаланиб текисликни қўйидаги берилиш усуллари ёрдамида аниклаш мумкин:

1) *Битта тўғри чизиқдан ва унда ётмовчи нуқтадан ўтувчи текислик.*
2) *Иккита кесишувчи тўғри чизиқ, оркали битта текисллик утади.*
3) *Иккита параллель тўғри чизиқ, оркали битта текислик утади.*

Одатда текисликни грек алфавитни α, β, γ харфлари билан белгиланади, ясашда эса текисликни бирор чекли кисми параллелограмм шаклда курсатилади.

Энди қуйидаги масалани карайлик:

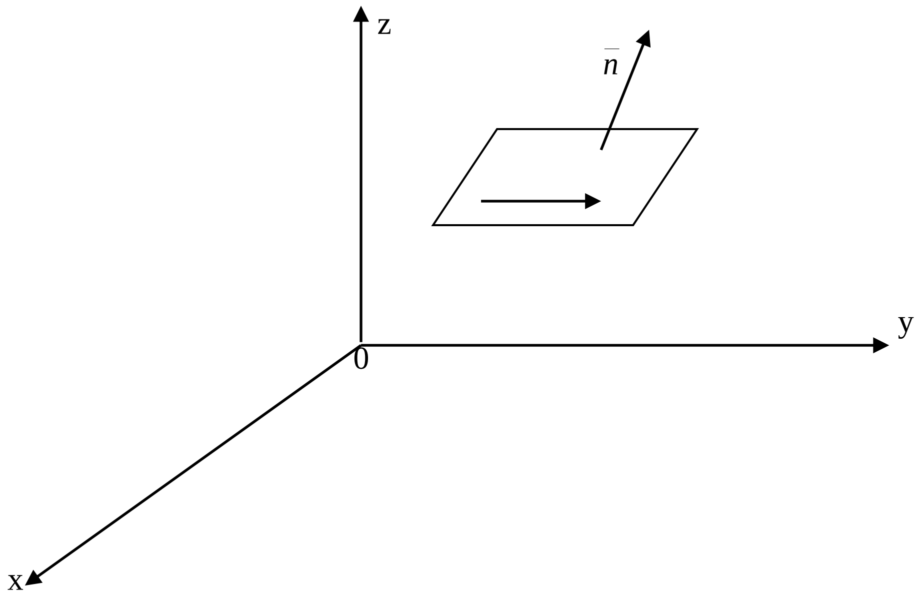
Фазода $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан утиб $\bar{n} = \{A; B; C\}$ векторга перпендикуляр бўлган α текислик берилган бўлсин. Шу α текисликнинг тенгламаси тузилсин. Берилган текисликка перпендикуляр бўлган хар кандай вектор текисликнинг нормал вектори дейилади.

α текислик тенгламасини тузамиз, чизиқ ва сиртни тенгламасини тузиш коидасига асосан α текислик устида $M(x, y, z)$ координаталари ўзгарувчи нуқта оламиз ва ўзгарувчи координаталар бўлган x, y, z орасидаги богланишни топамиз:

M нуктани M_0 бирлаштириб $\overline{M_0M} = (x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j} + (z - z_0)\bar{k}$ векторни хосил киламиз. $\bar{n}$ нормал вектор α текислик устида ётган тўғри чизиққа перпендикуляр, хусусий холда $\bar{n} \perp \overline{M_0M}$, яъни $(\overline{M_0M}, \bar{n}) = 0$ ёки

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ *(19,1)* *ёки* $\overline{M_0M} = \overline{OM} - \overline{OM_0} = \bar{r} - \bar{r_0}$

эканини эътиборга олсак $(\bar{r} - \bar{r_0}, \bar{n}) = 0$. *(19,2)* *биз излаётган текисликнинг вектор шаклдаги тенгламаси дейилади.*



20 – Текисликни умумий тенгламаси ва уни текшириш.

Фазода тўғри бурчакли координаталар системасида x, y, z *ўзгарувчиларга нисбатан чизиқли*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (20,1)$$

бу ерда $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, *тенглама берилган бўлсин. Исбот киламизки (20,1) текисликнинг тенгламаси. Хакикатдан* $A \neq 0$ *бўлса* $A(x + \frac{D}{A}) + By + Cz = 0$ *(20,2) бўлиб (20,2) тенглама (19,1) куринишдаги тенгламадир, яъни (20,1) текислик тенгламасини ифодалайди. Худи шунингдек (19,1)ни очиб чиксак*

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0 \quad \text{ёки} \quad D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

десак, $Ax + By + Cz + D = 0$ *(19,1) тенгламаси хосил бўлади. (19,1)га текисликнинг умумий тенгламаси дейилади. Энди текисликни, умумий тенгламасини текширамиз: текисликни умумий тенгламасини текшириш деганда, A, B, C, D коэффициентларни баъзи кийматлари нолга тенг бўлганда текисликни фазода кандай жойлашганлигани текширамиз:*

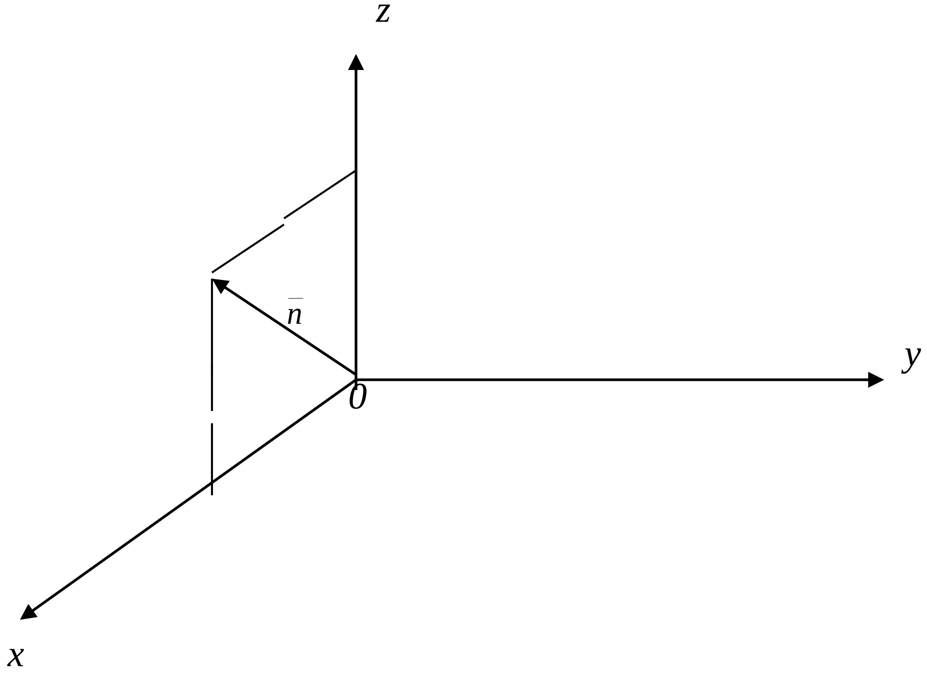
1) *D = 0 бўлсин, бу холда (19,1) тенглама* $Ax + By + Cz = 0$ *бўлиб координата бошидан ўтади ва нормал вектори* $\bar{n} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$ *бўлади.*
2) *A = 0, B, C, D* $\neq 0$ *бўлсин, яъни By+Cz+D=0*
3) *B = 0, A, C, D* $\neq 0$ *бўлсин, яъни Ax+Cz+D=0*
4) *C = 0, A, B, D* $\neq 0$ *бўлсин, яъни Ax+By+D=0*

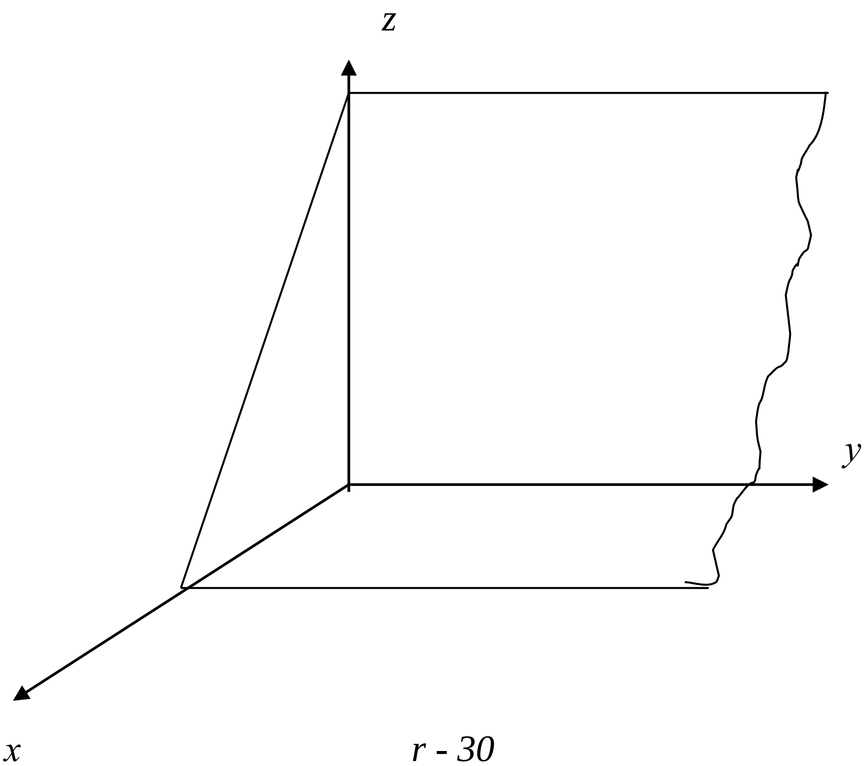
2, 3, 4 хол учун умумий коида келтириб чикарамиз.

Бунинг шу уч холдан бирортасини, Масалан: 3 – холни карайлик. B = 0 бўлса, $\bar{n} = A\bar{i} + C\bar{k}$ *бўлади, яъни* $\bar{n}$ *вектор Билан ОУ уки орасидаги бурчак* 90^0 *га перпендикуляр бўлади. Энди Ax+Cz+D=0 тенгламани кесмалар шаклига келтирсак*

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1, \quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1, \quad a=-\frac{D}{A}, \quad c=-\frac{D}{C},$$

$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1,$ *текислик ОХ укидан* a *ва ОУ укидан с бирлик ажратиб* $\bar{n}$ *векторга перпендикуляр ёки ОУ укига параллель бўлган текислик тенгламасидир.* *(r – 30)*





r - 30

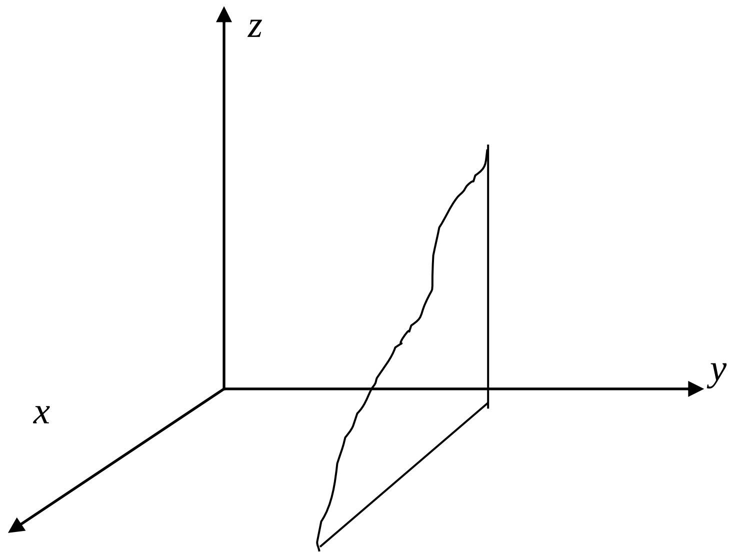
Бундан куринадики текисликнинг умумий тенгламасида ўзгарувчи x, y, z *лардан кайси бири катнашмаса, текислик шу катнашмаган ўзгарувчига мос келувчи координата укига параллел бўлар экан.*

5) А = В = 0, С, D $\neq 0$ *бўлсин, яъни Cz+D=0*

6) B = C = 0, A, D $\neq 0$ *бўлсин, яъни Ax+D=0*

7) A = C = 0, B, D $\neq 0$ *бўлсин, яъни By+D=0*

5, 6, 7 хол учун умумий коида келтириб чикарамиз. Масалан: 7 холни карайлик:
A = C = 0 бўлса $\bar{n} = B\bar{j}$ *бўлади, яъни By+D=0 текислик учун ОУ уки нормал вектор вазифасини бажаради, ОУ укига перпендикуляр текисликлар эса XOZ текислиги ва унга параллель бўлган текисликлардир. By + D = 0 тенгламадан* $y = -\frac{D}{B} = b$*. Демак By + D = 0 текислик ОУ укидан ва бирлик ажратган ва XOZ текислигига параллель бўлган* $(r - 31)$ *текисликни ифодалайди.*



r – 31

5 – холда текислик OZ укига, 6 – холда OX укига параллель бўлади.

Демак текисликни умумий тенгламасида ўзгарувчилардан иккитаси катнашмаса шу катнашмаган ўзгарувчиларга мос келувчи координата текисликларига параллель бўлар экан, М: x ва y катнашмаса теки слик XOУ координата текисликлигига параллель бўлади, y ва z катнашмаса текислик УOZ текислигига параллель бўлади.

8) A = B = D = 0, C $\neq 0$

9) B = C = D = 0, A $\neq 0$

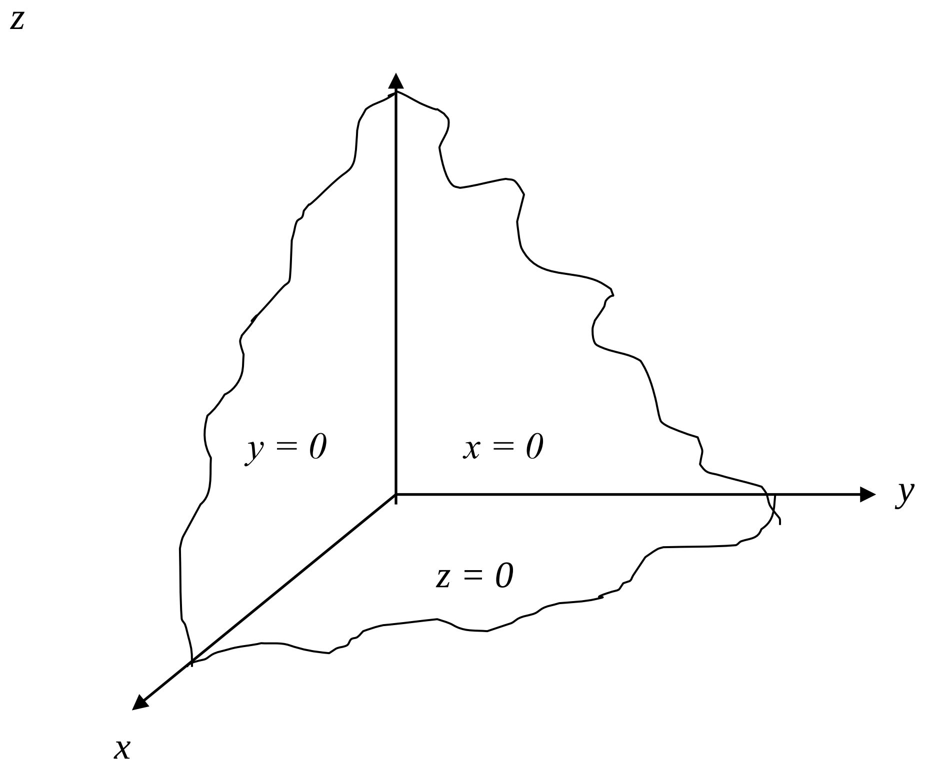
10) A = C = D = 0, B $\neq 0$

8, 9, 10 холлар 5, 6, 7 холларнинг D=0 бўлгандаги хусусий холидир, яъни текисликнинг умумий тенгламасида озод хад D=0 бўлиб икки ўзгарувчи катнашмаса, текислик шу катнашмаган ўзгарувчига мос келувчи координата текислигини ифодалайди:

X = 0 тенглама УOZ координата текислигини,

У = 0 тенглама XOZ координата текислигини,

Z = 0 тенглама XOУ координата текислигини ифодалайди (r – 32).



21 – Уч нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси. Текисликни кесмаларга нисбатан тенгламаси.

Қуйидаги масалани караймиз: бир тўғри чизиқ устида ётмаган $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *ва* $M_3(x_3, y_3, z_3)$. *Нуқталардан ўтувчи текислик тенгламаси тузулсин. Нормал вектори* $\bar{n} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$ *бўлиб* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *нуқтадан утган текислик тенгламасини ёзамиз.*

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \qquad (21.1)$$

бу ерда A, B, C номаълум узгармас сонлар. A, B, C ни ихтиёрлигидан фойдаланиб ушбу текисликни $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *ва* $M_3(x_3, y_3, z_3)$ *нуқталардан ўтади деб фараз киламиз, яъни* M_2 *ва* M_3 *нуқтанинг координаталар (21.1) тенгламани каноатлантирсин, яъни*

$$\begin{cases} A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \\ A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0 \\ A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0 \end{cases} \qquad (21.2)$$

A, B, C ни номаълум десак (21.1) уч номаълумли учта бир жинсли чизиқли тенгламалар системасидир.

Равшанки бир жинсли тенгламалар системаси тривиал (0,0,0) ечимга эга бўлади. Бизни эса (21.2) системани нотривиал ечими кизктиради.

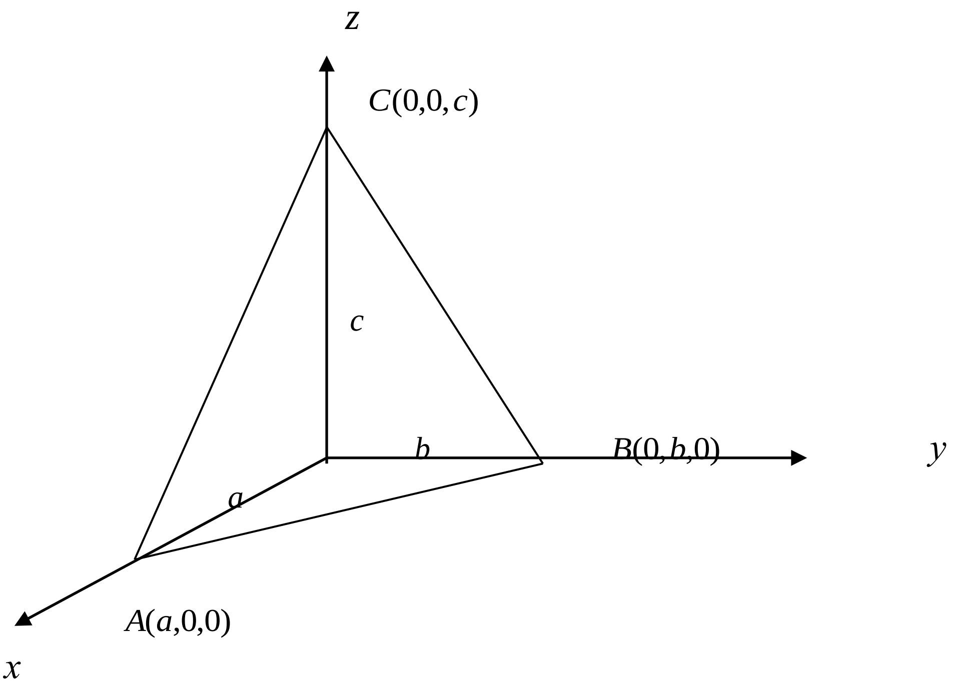
Чизиқли алгебра курсида исбот килинганки, бир жинсли тенгламалар системаси нотривиал ечимга эга бўлиши учун (21.2) системани асосий детерминанти нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (21.2)$$

(21.2) тенглама биз излаётган текисликнинг тенгламаси, яъни M_1, M_2 ва M_3 нуқталардан ўтувчи текисликнинг тенгламасидир.

Энди текисликни ясаш учун кулай бўлган текисликни кесмаларга нисбатан тенгламаси деб аталувчи тенгламани уч нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасидан фойдаланиб келтириб чикарамиз.

Текислик координата укларини $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ ва $C(0,0,c)$ нуқталарда кесиб утсин, бошкача айтганда текислик координата укларидан мос равишда a,b,c кесмалар ажратсин (r – 32).



(21.2) формуладан фойдаланиб A, B, C нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини тузамиз: $x_1=a$, y_1, $z_1=0$; $x_2=0$, $y_2=b$, $z_2=0$; $x_3=y_3$ $z_3=c$ *бўлганидан*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ёки} \ \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

детерминантни хисобласак $(x-a)bc + abz + acy = 0$ *ёки* $xbc + yac + abz = abc$

ёки $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ *(21.3) (охирги тенглик* abc *га бўлинган)*

(21.3) тенглама текисликни кесмаларга нисбатан тенгламаси дейилади.

$M:\ \frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2}=1$ *тенглама координата укларидан мос равишда 3, 5, 2 бирлик ажратган текисликни ифодалайди.*

Текислик кесмаларга нисбатан тенгламаси билан берилган бўлса, уни ясаш кулай бўлганидан, умумий тенгламаси билан берилган текисликни кесмаларга нисбатан тенгламага келтиришни урганамиз: бунинг учун текисликни умумий тенгламасидаги озод хад D ни тенгликни унг томонига утказиб, тенгликни $-D$ га бўлиш кифоя.

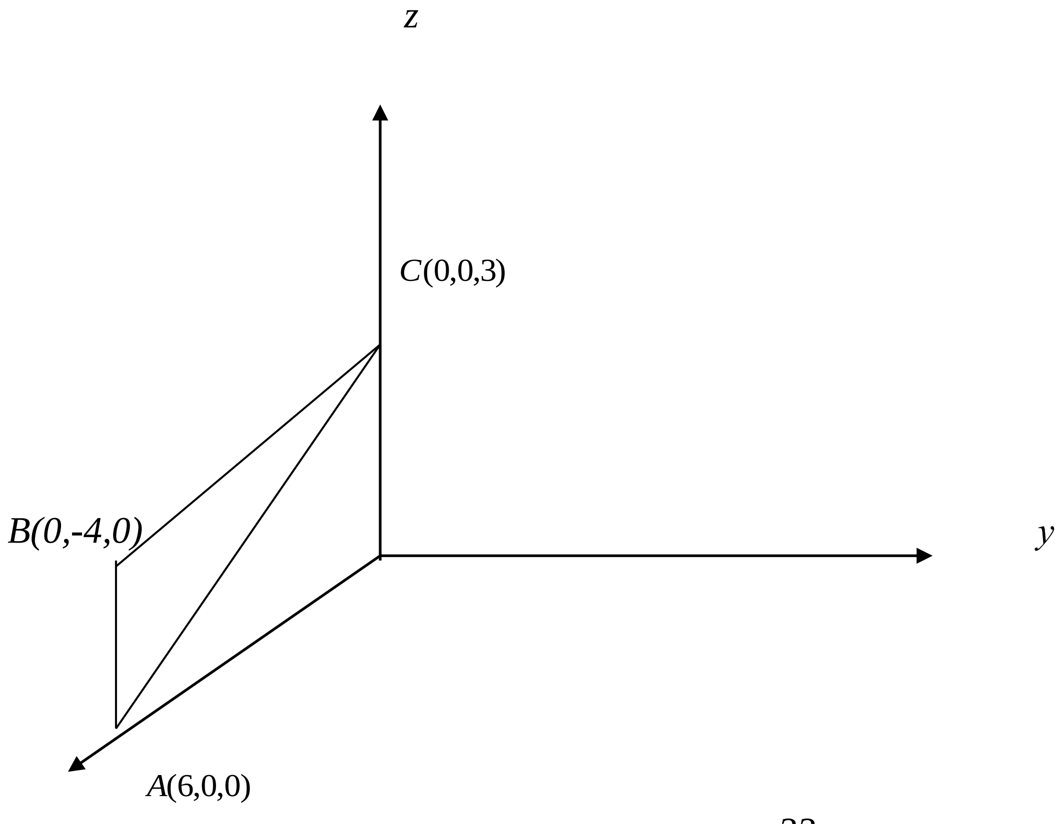
$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad Ax + By + Cz = -D, \quad \frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1, \text{ ёки}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (21.3), \text{ бу ерда } a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}.$$

МИСОЛ: $2x - 3y + 4z - 12 = 0$ *текисликни ясанг.*

ЕЧИШ: Берилган тенгламани кесмаларга нисбатан тенгламага келтирамиз:

$2x - 3y + 4z = 12$ *(/12)* $\frac{x}{6} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{3} = 1$. *Демак бу текислик OX укидан* $a = 6$*, OУ укидан* $b = -4$ *ва* OZ *укидан* $c = 3$ *бирлик ажратиб утар экан.* *(r – 33)*



r – 33.

22 – Текисликни нормал тенгламаси. Нуқтадан текисликгача бўлган масофа.

$M_1(r_1) = M_1(x_1; y_1; z_1)$ *нуқта ва* $(\bar{r}, \overline{n^0}) - p = 0$ *(22) текислик берилган бўлсин. ((21.1) тенглама (19.2) дан* $\bar{n} = \overline{n^0}$ *бўлганда хосил бўлади).*

r – 33

(22.1) тенгламага текисликнинг вектор куринишдаги нормал тенгламаси дейилади. $M_1(\overline{r_1})$ *нуқтадан* α *текисликкача бўлган масофа деб* M_1 *нуқтадан текисликка туширилган* $|M_1M_0| = d$ *перпендикулярнинг узунлигига айтилади.*

Биз (22.1) тенгламага ва берилган M_1 *нуқтанинг радиус вектори* $\overline{r_1}$ *га асосланиб* M_1 *нуқтадан(22.1) текисликкача бўлган масофани топамиз.(r– 33)*

Векторларни кушиш коидасига асосан $\overline{OM_0} = \overline{OM_1} + \overline{M_1M_0}$ *ёки* $\overline{r_{(M_0)}} = \overline{r_1} + \overline{M_1M_0}$ $\overline{M_1M_0} = -n^0\delta$, *чунки* $\overline{M_1M_0}$ *билан* n^0 *коллинеар,* $d = \pm\delta$.

M_0 *текислик нуқтаси бўлгани учун* $\overline{r_0}$ *(22.1) текислик тенгламасини каноатлантиради, яъни* $((\overline{r} - \overline{n^0}\delta)\cdot n^0) - p = 0$ *ёки* $(\overline{r_1}\overline{n^0}) - \delta - p = 0$, $\delta = (\overline{r_1}\overline{n^0}) - p$ *ёки* $d = |\delta|$ *бўлганидан*

$$d = |(\overline{r_1}\overline{n^0}) - p| \qquad (22.2)$$

Демак, берилган $M_1(r_1)$ *нуқтадан берилган (22.1) текисликгача бўлган масофани топиш учун текисликнинг нормал тенгламасидаги узгарув радиус вектор* $\overline{r}$ *ни* M_1 *нуқтанинг* r_1 *радиус вектори билан алмаштириш ва хосил бўлган соннинг абсолют кийматини олиш керак экан. (22.2) формулани координата формасида ёзамиз:*

$$\overline{r_1} = \overline{i}x_1 + \overline{j}y_1 + \overline{k}z_1, \overline{n^0} = \overline{i}\cos\alpha + \overline{j}\cos\beta + \overline{k}\cos\gamma \text{ бўлса}$$

$$(\overline{r_1}, \overline{n^0}) = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma \quad \text{ёки}$$

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p| \quad - \quad (22.3)$$

Бундан куринадики, M_1 *нуқтаданQ текисликкача бўлган масофани топиш учун текисликни нормал тенгламасидаги ўзгарувчи x, y, z лар урнига* M_1 *нуқтанинг координаталари* x_1, y_1, z_1 *ларни қўйиб хосил бўлган натижанинг абсолют кийматини олиш керак экан. Энди текислик умумий тенгламаси билан берилган бўлса, уни нормал куринишга келтириш билан шугулланамиз.*

Бирлик векторни хамма вакт $n^0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ *тенгликдан фойдаланиб хосил килиш мумкин. (19.2) тенгламани* $(\bar{r}, \bar{n}) + D = 0$ *(22.4) куринишда ёзиш мумкин.*

Равшанки (22.4) да $\bar{n}$ *бирлик вектор бўлса, тенглама текисликнинг нормал тенгламасига айланади, яъни*

$$(\bar{r}_1, \pm\overline{n^0}) + \frac{D}{\pm|\bar{n}|} = 0 \quad (22.5)$$

$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{n}} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ *ифодага нормалловчи купайтувчи дейилади. Демак* $Ax + By + Cz + D = 0$ *текисликни умумий тенгламаисни нормал тенгламага келтириш учун, уни* μ *нормалловчи купайтувчига купайтириш керак экан, бунда* μ *нинг ишораси озод хад* D *нинг ишорасига тескари бўлади. Текисликни нормал тенгламасини* $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, *текисликни умумий тенгламасини нормал куринишга келтирилгани* $\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$ *билан солиштирсак*

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \ \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \ \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$p = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *лар текисликка утказилган нормал векторнинг йуналтирувчи косинуслари дейилади.*

Текисликнинг нормал тенгламаси $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ *унинг бошка тенгламаларидан қуйидаги хоссалари билан ажралиб туради:*

1. *x, y, z лар олдидаги коэффициентлар квадратлари йигиндиси бирга тенг,* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
2. *озод* $p\rangle 0$ *бўлиб координата бошидан текисликгача бўлган масофани билдиради.*

Демак текислик тенгламаси берилган бўлса, уни нормал тенгламалигини аниклаш учун шу икки шартни бажарилишини текшириб куриш керак.

МАСАЛА: 2x + y – 2z – 9 = 0 текисликдан M_1 *(1,0,-3) нуқтагача бўлган масофа топилсин.*

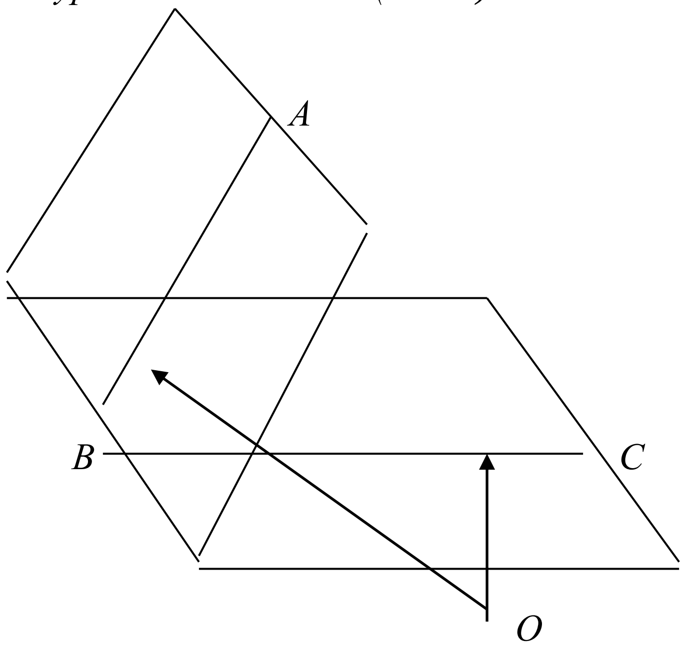
ЕЧИШ: 2x + y – 2z – 9 = 0 текисликни умумий тенгламаси эмас, чунки $2^2 + 1^2 + (-2)^2 \neq 0$. *Шу сабабли нормалловчи купайтувчи* μ *ни хисоблаймиз ва берилган тенгламани* μ *га купайтирамиз:*

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \pm\frac{1}{3}; \mu = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{2z}{3} - 3 = 0. \quad d_{\mu_1} = \left|\frac{2\cdot 1}{3} + \frac{0}{3} + \frac{2\cdot 3}{3} - 3\right| = \left|\frac{2}{3} - 1\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

23 – Икки текислик орасидаги бурчак. Уч текисликни бир нуқтада кесишуви.

Икки текислик орасидаги бурчак деб бу текисликлар орасидаги икки ёкли бурчакка айтилади. (r – 34)



Икки текислик узининг вектор шаклдаги тенгламаси ёки умумий тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$\begin{matrix} (\overline{r},\overline{n_1})+D_1=0 \\ (\overline{r},\overline{n_2})+D_2=0 \end{matrix} \quad \text{ёки} \quad \begin{matrix} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{matrix}$$

$\overline{n_1}$ *ва* $\overline{n_2}$ *нормал вектор орасидаги бурчак берилган текисликлар орасидаги бурчак тенг ёки уни* π *гача тулдиради. Икки текислик орасидаги бурчак деб улар орасидаги кушни бурчакларни ихтиёрийсини тушунганимиздан, икки вектор орасидаги бурчакни топиш формуласига асосан шу бурчакни косинусини, яъни* $\cos\varphi$ *ни топамиз:*

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{n_1},\overline{n_2})}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (23.1)$$

Агар текисликлар параллел бўлса, $\overline{n_1}$ *ва* $\overline{n_2}$ *хам параллел бўлади, икки векторни параллелик шартига асосан*

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (23.2)$$

Агар текисликлар перпендикуляр бўлса, уларни нормал векторлари перпендикуляр бўлди, яъни

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \qquad (23.4)$$

МАСАЛА: $\begin{matrix} x+y+4z+3=0 \\ 2x-y+2z-8=0 \end{matrix}$ *текисликлар орасидаги бурчак топилсин.*

ЕЧИШ: $\overline{n_1}=\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k}, \overline{n_2}=2\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$ *бўлганидан (23.1) формулага асосан*

$$\cos\varphi = \frac{2-1+8}{\sqrt{1+1+16}\cdot\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi = 45^0$$

Энди уч текисликни бир нуқтада кесишиш масаласини карайлик. Умумий тенламалари билан учта текислик берилган бўлсин:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \qquad (23.5) \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0 \end{aligned}$$

Бу текисликлар бир нуқтада ёки чексиз куп нуқтада ёки умуман кесишмаслиги мумкин. Агар (23.5) текисликлар бир нуқтада кесишса, бу нуқта барча текисликларга тегишли бўлади, яъни унинг координаталари (23.5) даги тенгламаларни хар бирини каноатлантиради.

Демак учта текисликнинг кесишган нуқтасини топиш учун бу тенгламаларни биргаликда система килиб ечиш керак. (23.5) тенгламалар системаси уч номаълумли учта чизиқли бржинслимас тенгламалар системаси бўлганлигидан, чизиқли тенгламалар системасини ечишни бирор усули билан, масалан Крамер коидаси билан ечиш мумкин.

МАСАЛА: $x+y+z=0, 2x-y-z-3=0, 3x+2y+2z-1=0$ *текисликларни кесишиш нуқтаси топилсин.*

ЕЧИШ: *Берилган учта текисликни кесишиш нуқтасини топиш учун бу тенгламаларни биргаликда система килиб ечамиз:*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-z=3 \\ 3x+2y-2z=17 \end{cases}$$

Берилган тенгламалар системасини Крамер коидаси билан ечайлик: аввало системани асосий детерминантини хисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2+4-3+3+2+4 = 12 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 17 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 6-17+17+6 = 12; \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 17 & -2 \end{vmatrix} = -6+34-9+17 = 36;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 17 \end{vmatrix} = -17+9-6-34 = -57+9 = -48$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{12} = 3; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -\frac{48}{12} = -4$$

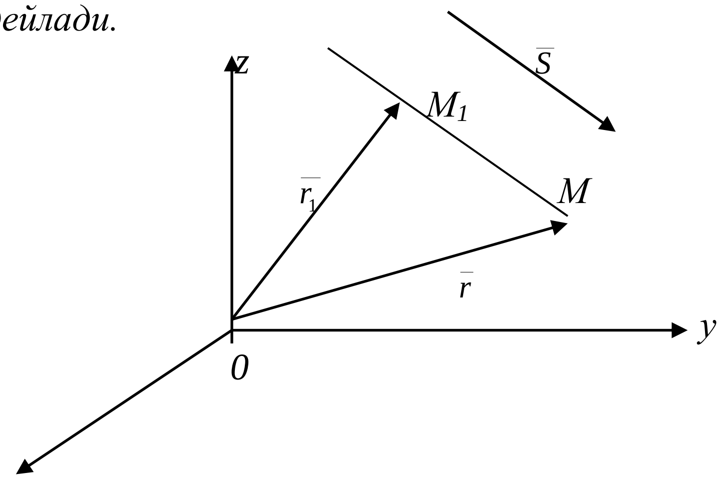
Демак бу уч текислик $M_1(1;3;-4)$ *нуқтада кесишар экан.*

24 – Фазода тўғри чизиқ. Тўғри чизиқнинг вектор щаклдаги тенгламаси. Тўғри чизиқнинг каноник ва параметрик тенгламалари.

Фазодаги тўғри чизиқ хам текисликдаги тўғри чизиқ каби бевосита тарифга эга эмас, билвосита таърифга эга: фазода тўғри чизиқни икки текисликнинг кесишиш нукталарини геометрик урни деб караш мумкин. Текисликдаги тўғри чизиқлар учун келтирилган барча аксиомалар фазодаги тўғри чизиқлар учун хам уринли бўлиб қуйидаги битта хосса билан фарк килади:

Текисликда икки тўғри чизиқ параллел бўлмаса, улар кесишади, фазода эса кесишмаслиги мумкин.

Фазода параллел бўлмасдан кесишмайдиган тўғри чизиқларга <u>*айкаш*</u> *тўғри чизиқлар дейлади.*



г - 35

Фазода тўғри чизиқнинг вектор шаклдаги тенгламасини келтириб чикарамиз: фазода бирор $\overline{S}$ *вектор ва* $M_1(r_1)=M_1(x_1;y_1;z_1)$ *нуқта берилган бўлсин. Равшанки* M_1 *нуқтадан* $\overline{S}$ *векторга параллел бўлган факат битта тўғри чизиқ ўтади. Шу тўғри чизиқ* M_1 *ва M нуқтаданўтувчи тўғри чизиқ бўлсин. M нуқтани координаталари x, y, z бўлиб шу тўғри чизиқ буйлаб харакатлана олсин. Энди чизиқ тенгламасини тузиш коидасига асосан x, y, z лар орасидаги богланишни топамиз:*

$\overline{M_1M}=\overline{r}-\overline{r_1}$ *ва* $\overline{S}$ *векторлар коллиниар бўлганидан* $\dfrac{\overline{r}-\overline{r_1}}{\overline{S}}=\lambda$ *(24.1), бунда* λ *бирор скаляр сон. (24.1) дан* $\overline{r}$ *векторларни топсак*

$$\overline{r}=\overline{r_1}+\lambda\overline{S} \quad (24.2)$$

(24.2) тенгламага фазода тўғри чизиқнинг вектор шаклдаги тенгламаси дейилади. (24.2) тенгламадаги $\overline{S}$ *векторга тўғри чизиқнинг йуналтирувчи вектори дейилади.*

$\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k};\overline{r_1}=x_1\cdot i+y_1j+z_1k$ *бўлса (24.2) дан қуйидаги тенгликлар хосил бўлади, яъни* $x=x_1+\lambda m; y=y_1+\lambda n; z=z_1+\lambda p$ *(24.3)*

(24.3) тенгламалар фазода тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари дейилади. (λ *- параметр)*

(24.3) тенгликни хар биридан λ *ни топиб, сунгра тенглаштирсак*

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \quad (24.4)$$

(24.4) фазода тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси дейилади. Агар тўғри чизиқнинг йулантирувчи вектори $\bar{S}$ *бирлик вектор бўлса, яъни* $\bar{S}=\bar{i}\cos\alpha+\bar{j}\cos\beta+\bar{k}\cos\gamma$ *бўлса (24.4) қуйидаги куринишни олади:*

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma} \quad (24.5)$$

$\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma$ *лар тўғри чизиқнинг йулантирувчи косинуслари дейилади.* $\bar{S}$ *векторнинг компонентлари* $m;n;p$ *бирданига нолга тенг бўлмаслиги равшан, чунки бирданига нолга тенг бўлса тўғри чизиқнинг фазодаги урни аникланмайди. Лекин* $m;n;p$ *лардан биттаси, хатто иккитаси нолга тенг бўлиши мумкин.*

МАСАЛАН: $m\neq 0;n\neq 0;p\neq 0$ *бўлса* $x=x_1+\lambda m;y=y_1+\lambda o;z=z_1+\lambda p$ *ёки* $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{o}=\frac{z-z_1}{p}$ *тенглама хосил бўлади. Нолга бўлиш мумкин бўлмаганидан бу тенгламани кандай тушуниш керак?*

Охирги тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{o},\ \frac{x-x_1}{m}=\frac{z-z_1}{p} \quad \text{ёки} \quad o(x-x_1)=m(y-y_1) \quad \text{ёки} \quad y-y_1=0 \quad \text{ёки}$$

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{z-z_1}{p},\ y=y_1$$

Охирги тенгламалар йуналтирувчи вектори $\bar{S}=m\bar{i}+o\bar{j}+p\bar{k}$ *бўлган тўғри чизиқни билдиради.*

Агар $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ *нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузиш талаб килинса* $\bar{S}=(x_2-x_1)\bar{i}+(y_2-y_1)\bar{j}+(z_2-z_1)\bar{k}$ *бўлганидан* $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

25 – Фазода тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси ва уни каноник куринишга келтириш.

Фазода тўғри чизиқниикки текисликни кесишишидан хосил бўлган нуқталарнинг геометрик урни деб караш мумкин, яъни

$$\left.\begin{aligned}A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0\end{aligned}\right\} \quad (25.1)$$

(25.1) фазода тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси дейилади, бунда текисликлар параллел бўлмаслиги керак, яъни $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}, \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ *ёки*

$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 C_1 \\ A_2 C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0.$$

(25.1) умумий тенгламадан унинг каноник тенгламасига утиш мумкин. Бу қуйидагича амалга оширилади:

$\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} A_1 C_1 \\ A_2 C_2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}$ *детерминантлар хисобланади.*

Берилган текисликлар параллел бўлмаганидан $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} A_1 C_1 \\ A_2 C_2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}$ *детерминантлардан хеч бўлмаганда биттаси нолдан фаркли бўлади.*

МАСАЛАН: $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ *бўлсин. Бу вактда (21.1) ни қуйидаги куринишда ёзамиз:*

$$\left.\begin{aligned} A_1 x + B_1 y = -C_1 z - D_1 \\ A_2 x + B_2 y = -C_2 z - D_2 \end{aligned}\right\} \quad (25.2)$$

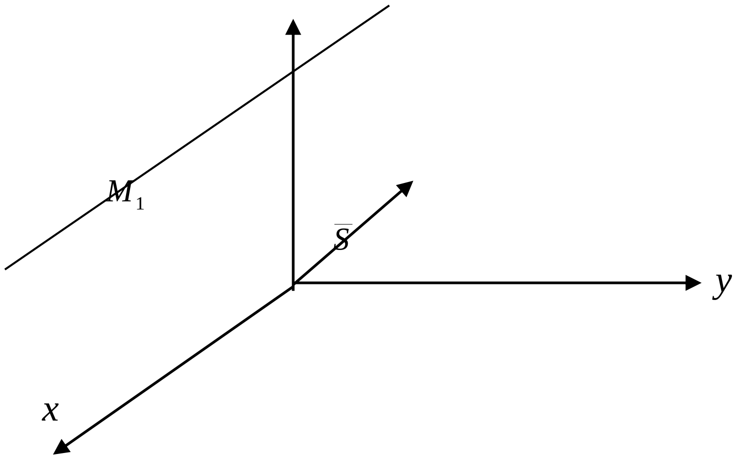
(25.2) x *ва* y *нисбатан икки номаълумли иккита чизиқли биржинслимас тенгламалар системасидир. Уни* x *ва* y *га нисбат ечсак*

$$\begin{aligned} x = a_1 z + b_1 \\ y = a_2 z + b_2 \end{aligned} \quad (25.3)$$

тенгламалар хосил бўлади. (25.3) тенгламаларни z *га нисбатан ечиб, уларни тенглаштирсак*

$$\frac{x-b_1}{a} = z; \frac{y-b_1}{a_2} = z\,, \quad \frac{x-b_1}{a_1} = \frac{y-b_2}{a_2} = z \quad \text{ёки} \quad \frac{x-b_1}{a_1} = \frac{y-b_2}{a_2} = \frac{z-0}{1}.$$

Охирги тенглама $M_1(b_1;b_1;0)$ *нуқтадан утиб йуналтирувчи вектори* $\overline{S} = a\overline{i} + a_2\overline{j} + \overline{k}$ *бўлган тўғри чизиқнинг каноник тенгламасидир.*



МАСАЛА: 2x – 3y +2z – 5 = 0, 3x + 2y – 3z + 6 = 0 тенгламалар билан тасвирланган тўғри чизиқнинг каноник куринишга келтириб ясалсин.

ЕЧИШ: $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 -3 \\ 3 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 = 13 \neq 0$ *демак берилган тенгламаларда x ва y ларни урнида колдириб, колганларини тенгликни унг томонга утказамиз*

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2z + 5 \\ 3x + 2y = 3z - 6 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13, \Delta_x = \begin{vmatrix} -2z+5 & -3 \\ 3z-6 & 2 \end{vmatrix} = -4z + 10$$

$$9z - 18 = 5z - 8$$

$$\Delta_y = \begin{matrix} 2 & -2z \\ 3 & \end{matrix} = 6z - 12 + 6z - 15 = 12z - 27$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5z-8}{13} = \frac{5}{13}z - \frac{8}{13}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{12z-27}{13} = \frac{12}{13}z - \frac{27}{13}$$

яъни $x = \frac{5}{13}z - \frac{8}{13}; y = \frac{12}{13}z - \frac{27}{13}$, *ёки* $\frac{x + \frac{8}{13}}{\frac{5}{13}} = z; \frac{y + \frac{27}{13}}{\frac{12}{13}} = z$

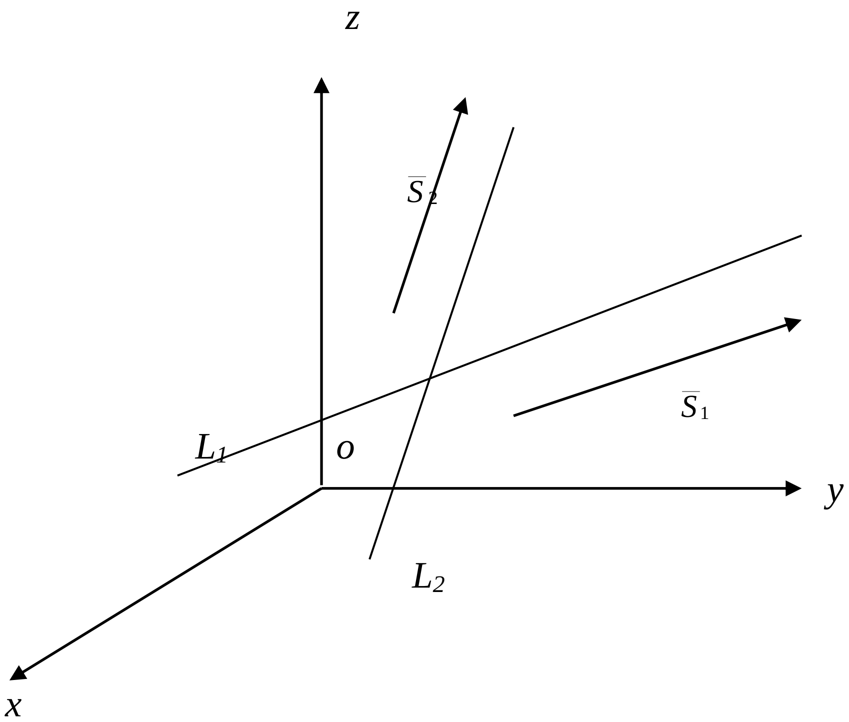
охирги тенгликларни тенглаштирсак

$$\frac{x + \frac{8}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{y + \frac{27}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{z - p}{1}$$

Бу тенглама $M_1(-\frac{8}{13}; -\frac{27}{13}; 0)$ *нуқтадан утиб йуналтирувчи вектор* $\bar{S} = \frac{5}{13}\bar{i} + \frac{12}{13}\bar{j} + \bar{k}$ *бўлган тўғри чизиқ тенгламасидир.*

26 – Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак.

Фазода икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак сифатида фазонинг исталган нуқтасидан шу тўғри чизиқларга параллел утказилган икки тўғри чизиқнинг ташкил килган бурчакларидан ихтиёрий бирини оламиз. Бу бурчак 0 билан П орасида узгаради. Агар L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар узинг каноник тенламалари билан берилган бўлса равшанки улар орасидаги бурчак уларнинг йуналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка тенг.



$$L_1: \quad \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$L_2: \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \quad \text{бўлса}$$

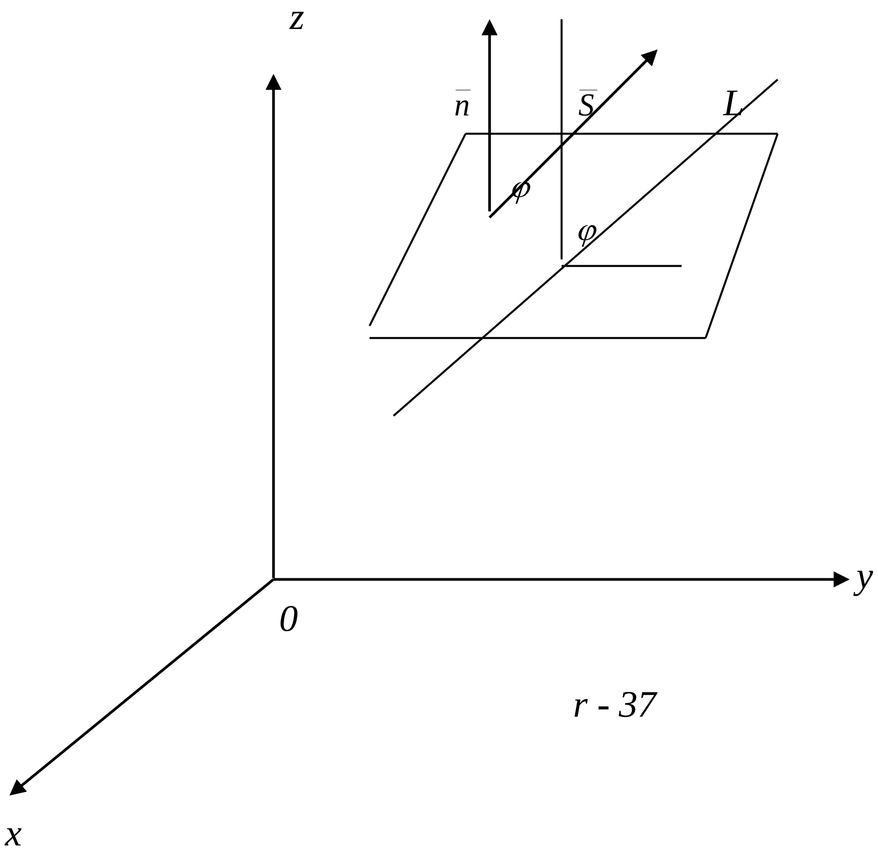
$$\cos\varphi = \frac{(\overline{S_1}, \overline{S_2})}{|\overline{S_1}||\overline{S_2}|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (26.1)$$

Агар $L_1 \parallel L_2$ *бўлса* $\overline{S}_1 \parallel \overline{S}_2$ *бўлиб* $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ *(26.2)*

(26.2) икки тўғри чизиқнинг параллелик шартидир. Агар $L_1 \perp L_2$ *бўлса* $\overline{S}_1 \perp \overline{S}_2$ *бўлиб* $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ *(26.3)*

(26.3) икки тўғри чизиқ перпендикулярлик шартидир.

Энди тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчакни топиш масаласини карайлик: Тўғри чизиқ билан унинг текисликдаги проекцияси орасидаги бурчакка тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак деб айтилади. (r – 37)



r - 37

Тўғри чизиқ $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ *тенглама билан текислик эса* $Ax+By+Cz+D=0$ *тенглама билан берилган бўлсин. Тўғри чизиқ билан унинг проекцияси орасидаги бурчак* φ *урнига, текисликнинг нормал вектори* $\bar{n}$ *билан тўғри чизиқнийуналтирувчи* $\bar{S}$ *вектори орасидаги* $\frac{\ddot{I}}{2}-\varphi$ *бурчакни топиш кулай. Хакикатан* $\cos(\frac{\ddot{I}}{2}-\varphi)=\sin\varphi$ *бўлганидан*

$$\sin\varphi=\frac{(\bar{n},\bar{S})}{|\bar{n}||\bar{S}|}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \quad (26.4)$$

Агар L II Q бўлса $\bar{n}\perp\bar{S}$ *бўлиб* $Am+Bn+Cp=0$ *(26.5)*

(26.5) тўғри чизиқ ва текисликнинг параллелик шартидир. Агар L II Q бўлса $\bar{n} II \bar{S}$ *бўлиб* $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ *(26.6)*

(26.6) тўғри чизиқ ва текисликнинг перпендикулярлик шартидир.

27 – Тўғри чизиқ ва текисликни кесишуви.

L тўғри чизиқ $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ *(27.1) кваноник тенгламаси билан, Q текислик* $Ax+By+Cz+D=0$ *(27.2) умумий тенгламаси билан берилган* *бўлсин ва улар узаро параллел бўлсин. L тўғри чизиқ билан Q текисликни кесишган нуқтасини топамиз, яъни (27.1) ва (27.2) тенгламалар системасини ечимини топамиз: бунинг учун (27.1) прапорцияни умумий кийматини λ билан белгилаймиз ва бу тенгламалардан x, y, z ларни топамиз, яъни*

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}=\lambda,\ \frac{x-x_1}{m}=\lambda,\ \frac{y-y_1}{n}=\lambda,\ \frac{z-z_1}{p}=\lambda \quad \text{булардан}$$

$$x=m\lambda+x_1,\ y=n\lambda+y_1,\ z=p\lambda+z_1 \quad (27.3)$$

(27.3) даги x, y, z ларнинг кийматларини (27.2) га куямиз:

$$A(m\lambda+x_1)+B(n\lambda+y_1)+C(p\lambda+z_1)+D=0 \quad \text{ёки}$$

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D+\lambda(A_m+B_n+C_p)=0 \quad (27.4)$$

L тўғри чизиқ ва Q текислик параллел бўлмаганидан $Am+Bn+Cp\neq 0$ *(27.4) дан λ ни топамиз:*

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A_m+B_n+C_p} \quad (27.5)$$

(27.5) ни (27.3) га қўйсак $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *тўғри чизиқ билан текисликни кесишган нуқтаси хосил бўлади. Агар* $Am+Bn+Cp=0$ *бўлиб* $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0$ *бўлса тўғри чизиқ билан текислик кесишмайди. Агар* $Am+Bn+Cp=0$ *бўлиб* $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ *бўлса, бу вактда L тўғри чизиқ устида ётади ва улар чексиз куп нуқтада кесишади.*

МАСАЛА: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{2}$ *тўғри чизиқ билан* $x+2y-2z-3=0$ *текисликнинг кесишиш нуқтаси топилсин.*

ЕЧИШ: $Am+Bn+Cp=1\cdot 2+3\cdot 2+2\cdot(-2)=2+6-4=4\neq 0$, *демак берилган тўғри чизиқ ва текислик параллел эмас. Энди тўғри чизиқ тенгламасини параметрик шаклга келтирамиз:*

$$\frac{x-1}{2}=\lambda;\frac{y}{3}=\lambda;\frac{z-1}{2}=\lambda,\ x=2\lambda+1,\ y=3\lambda,\ z=2\lambda+1$$

x, y, z ларни текисликнинг умумий тенгламасига куямиз:

$$2\lambda+1+2\cdot 3\lambda-2(2\lambda+1)-3=0$$

$$2\lambda+1+6\lambda-4\lambda-2-3=0;4\lambda-4=0,\lambda=1$$

$$x_0=2\lambda+1=2\cdot 1+1=3;y_0=3\cdot 1=3;z_0=2\cdot 1+1=3$$

Демак берилган тўғри чизиқ ва текисликни кесишиш нуқтаси $M_0(3;3;3)$ *экан.*

28 – Иккинчи тартибли сиртлар хакида тушунча. Иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламаси.

Декарт координаталар системасида координаталари $F(x,y,z)=0$ *(28.1) тенгламани каноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик урни сирт* *дейилади. Сиртнинг бу таърифа умумий бўлиб, (28.1) тенглама чекли сондаги нуқталар тупламини, чексиз куп нуқталар тупламини ёки умуман нуқталар тупламини ифодалаши мумкин. Масалан:* $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=0$ *тенглама битта (0,2,1) нуқтани ифодалайди,* $x^2+y^2+z^2+4=0$ *тенглама эса умуман нуқтани ифодаламайди. Демак x, y, z катнашган хар кандай тенглама сиртни ифодалайвермас экан. Энди сирт тенгламасини катий таърифини берамиз:*

$F(x,y,z)=0$ *(28.2) тенглама бирор S сиртнинг тенгламаси дейилади, агар шу сиртда ётган хар бир нуқтанинг координаталари (28.1) тенгламани каноатлантирса ва сиртда ётмаган нуқтанинг координаталари (28.1) тенгламани каноатлантирмаса.*

Фазода сирт тенгламаси берилган бўлса, сирт берилган дейилади. Сиртлар учун хам қуйидаги икки масала ечилади:

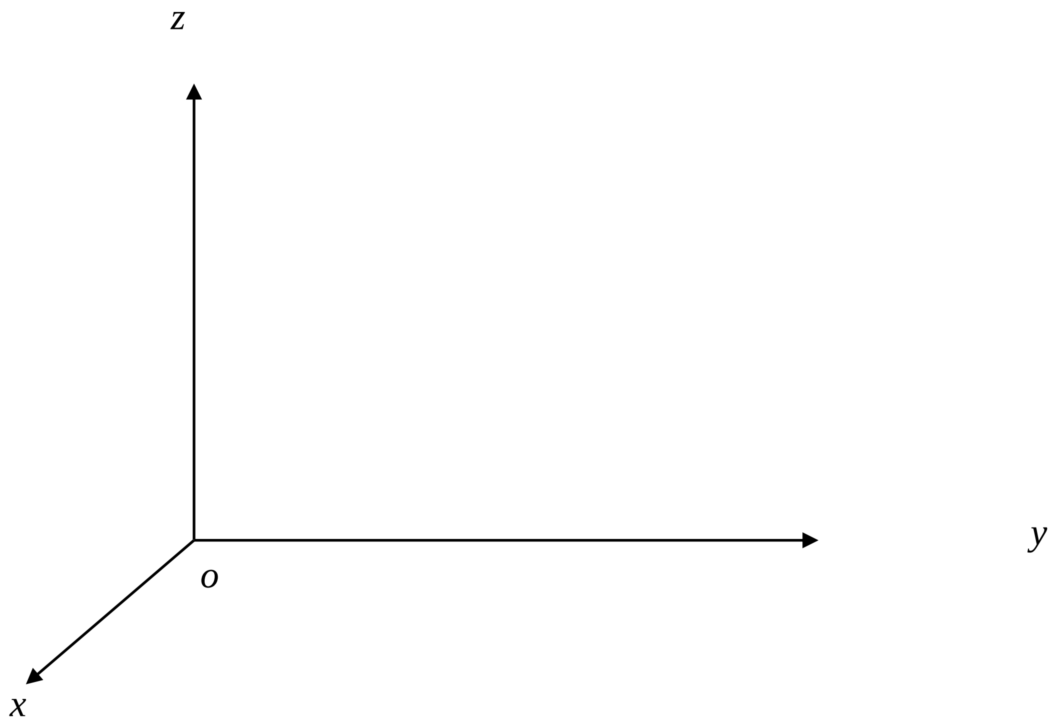
1. *Фазода сиртнинг умумий хоссасидан фойдаланиб, унинг тенгламасини тузиш.*
2. *Фазода бирор сирт тенгламаси билан берилган бўлса, шу тенглама билан берилган сиртни ясаш.*

Масала: C (a;b;c) нуқтадан баробар узокликда турган нуқталар геометрик урнинг тенгламасини тузинг.

Ечиш: Масалада тенгламаси тузилиши талаб килинаётган сирт бу, равшанки – сферадир. Фзода Декарт координата системасини караймиз. Сирт устидан координаталари ўзгарувчи $M(x;y;z)$ *нуқта оламиз, масала шартига кура* $|CM|=узгармас=R$ *ёки*

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z+c)^2}=R \quad ёки$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \quad (28.3)$$



(28.3) тенглама сферанинг каноник тенглама C (a;b;c) унинг маркази ва R радиуси дейилади. Хсусий холда $a = b = c = 0$ *бўлса (28.3) қуйидаги* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *(28.4) куринишни олади.*

(28.4) тенглама маркази координата бошида ва радиуси R бўлган сферани ифодалайди.

қуйидаги $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2E_1xy + 2E_2xz + 2E_3yz + 2A_1x + 2B_1y + 2C_1z + F = 0$ *(28.5) тенглама билан ифодаланадиган сиртда иккинчи тартибли сирт дейилади, бу ерда* $A^2 + B^2 + C^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 \neq 0$.

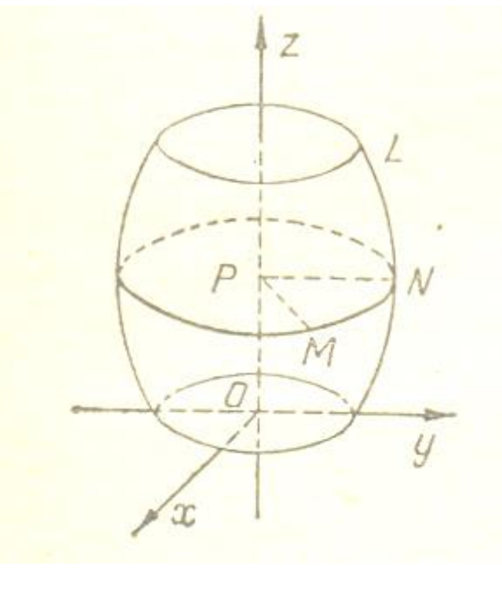
(28.5) тенглама иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламаси дейилади. Биз $E_1 = E_2 = E_3 = 0$ *бўлган холни, яъни* $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A_1x + 2B_1y + 2C_1z + F = 0$ *(28.6) тенгламага караймиз. Равшанки (28.3) тенгламада кавсларни очиб чксак (28.6) тенглама ухшаш тенглама хосил бўлади. Демак сфера иккинчи тартибли сирт экан.*

Такидлаймизки (28.6) тенгламада A = B = C бўлса, тенглама сферани ифодалайди. Умуман айтганда барча иккинчи тартибли сиртларни бирор хоссасига асосланиб тенгламасини чикариб бўлмайди. Купинча аналитик геометрияни иккинчи масаласини ечишга, берилга тенгламакга асосан уни ясашга тўғри келади. Бу масала купинча параллел кесимлар усули деб аталувчи усул оркали ечилади. Бу усулнинг мохияти қуйидагидан иборат: $F(x, y, z) = 0$ *сирт координата текисликлари x = 0, y = 0, z = 0 ва уларга параллел бўлган* $x = h_1; y = h_2; z = h_3$ *текисликлар билан кесиши текширилади. Сунгра кесиш натижасида хосил бўлган эгри чизиқларни тахлил килиб сиртнинг узи ясалади. Масалан: кандайдир номаълум сирт берилган, уни x = 0, y = 0, z = 0 текисликлар билан кесиш натижасида бирхил радиусни айлана хосил бўлсин.*

Равшанки бундай хоссага эга бўлган сирт сферадир.

29 – Айланма сирт.

Иккинчи тартибли сиртлар орасида айланма сиртлар учрайди. Масалан: $x^2 + y^2 = R^2$ *айланани OX уки атрофида айлантирсак* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *сфера хосил бўлади.*



Энди айланма сиртлар хакида тушунчалар билан танишамиз: YOZ текисликда бирор L чизиқ (r – 40) F (y;z) = 0 тенглама билан берилган бўлсин. L чизиқнинг OZ ук атрофида айланашидан хосил бўлган сирт тенгламасини тузамиз. Кулайлик учун L чизиқнинг хамма нуқталари учун $y \geq 0$ *бўлсин.* $M(x, y, z)$ *нуқтаизланаётган айланма сиртнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин.* $M(x, y, z)$

нуқтаси L чизиқнинг $N(0,y,z)$ *нуқтасини айланиш вактидаги бирор холати деб караш мумкин N нуқтаOZ уки атрофида айланганда маркази* $P(0,0,z)$ *нуқтада бўлим радиуси У га тенг бўлган айлана хосил бўлади, бу айлана хамма вакт ХОУ текисликка параллел текисликда ётади. Шунинг учун М ва N нуқталарнинг аппликаталари бир хил, яъни Z=z бўлади.* $P(0,0,z)$, $M(x,y,z)$ *бўлганидан*

$$PM = \sqrt{x^2 + y^2}; PM = PN = Y \quad \text{бўлганидан } Y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Z ва У ларнинг ифодаларини L чизиқнинг тенгламаси F (y;z) = 0 га қўйсак $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ *хосил бўлади. Бу тенглама айланма сирт тенгламасидир. Агар L чизиқни хамма нуқталари учун* $y \geq 0$ *бўлмаса, у холда* $y \langle 0$ *бўлади, бу холда PN = - Y,* $Y = -\sqrt{x^2 + y^2}$ *. Бу холда айланма сирт тенгламаси.*

$$F(-\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \text{ бўлади.}$$

Иккала холни бирлаштирсак

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \text{ тенглама хосил бўлади.}$$

Демак YOZ текисликдаги L чизиқниOZ уки атрофида айланишидан хосил бўлган айланма сирт тенгламасини тузиш учун чизиқ тенгламасидаги у ни $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ *билан алмаштириш керак экан.*

Агар L чизиқнимос равишда ОХ ва ОУ уклари атрофида айлантиришдан хосил бўлган айланма сирт тенгламасини тузсак мос равишда $F(x, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ *ва* $F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ *тенгламалар хосил бўлади.*

Масала: YOZ текисликда жойлашган: 1) $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ *эллипс, 2)* $\frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1$ *гипербтла, 3)* $y^2 = 4z$ *параболаларнинг OZ ук атрофида айланишидан хосил бўлган айланма сиртларнинг тенгламалари тузилсин.*

Ечиш: чизиқлар YOZ текисликда берилагн бўлиб, OZ уки атрофида айланишидан хосил бўлган сиртларни тенгламаларини тузиш кераклигида у ни $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ *, яъни* y^2 *ни* $x^2 + y^2$ *га алмаштирамиз:*

$$\frac{x^2 + y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1, \quad \frac{x^2 + y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad x^2 + y^2 = 4z.$$

Хосил бўлган тенгламалар билан ифодаланадиган айланма сиртларга мос равишда айланма эллипсоид, айланма гиперболоид ва айланма параболоид деб айтиладт.

30 – Эллипсоид.

Тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *(30.1)*

тенглама билан ифодаланадиган сирт эллипсоид дейилади. a,b,c *эллипсоиднинг ярим уклари дейилади. Агар* a,b,c *лар бир-бирига тенг бўлмаса (30.1) уч укли эллипсоид дейилади. Агар* $a=b=c$ *бўлса (30.1) дан маркази координата бошида ва радиуси* $R=a$ *бўлган сфера хосил бўлади.*

(30.1) тенглама билан берилган эллипсоидни шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини аниклайлик:

1. (30.1) билан (28.5) ни соллиштирсак эллипсоид иккини тартибли сирт эканлиги келиб чикади.

2. (30.1) да учта мусбат сонни йигинси бирга тенглигида $\frac{x^2}{a^2}\le 1, \frac{y^2}{b^2}\le 1, \frac{z^2}{c^2}\le 1$ *ёки* $x^2\le a^2, y^2\le b^2$, $z^2\le c^2$ *бу тенгсизликлардан* $-a\le x\le a$, $-b\le y\le b,\ -c\le z\le c$ *(30.2)*

Демак эллипсоид чегараланган сирт бўлиб, кирралари $2a,2b,2c$ *тўғри бурчакли параллелепипед ичига жойлашган фигурадан иборат.*

3. (30.1) ва (30.2) дан куринадики, агар (30.1) даги кушилувчилардан бирортаси бирга тенг бўлса, колган иккитаси нолга тенг бўлиши керак. Масалан: $\frac{x^2}{a^2}=1$ *бўлса* $x=\pm a$, $y=0$, $z=0$, *бўлади ва (30.1) эллипсоид ОХ укини* $A_1(a;0;0)$, $A_2(-a;0;0)$ *нуқталарда кесиб ўтади. Худди шунингдек (30.1) эллипс ОУ укини* $B_1(0;b;0)$, $B_2(0;-b;0)$, *OZ укини эса* $C_1(0;0;c)$, $C_2(0;0;-c)$ *нуқталарда кесиб ўтади.*

4. Энди (30.1) эллипсоидни координата текисликлари билан кесишишидан хосил бўладиган чизиқларни аниклаймиз:

а) Эллипсоидни ХОУ текислик билан кесайлик. Бу холда $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ z=0\end{cases}$ *ёки*

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *яъни ХОУ текисликда ярим уклари* a *ва* b *га тенг бўлган эллипс хосил бўлади.*

в) Энди эллипсоидни XOZ текислиги билан кесак $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$ *ёки*

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, *бу эса XOZ текисликда ярим уклари* a *ва* c *га тенг бўлган эллипсдир.*

с) Энди YOZ текислик билан кессак $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ *ёки* $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, *бу эса YOZ текисликда ярим уклари* b *ва* c *бўлган эллипс тенгламасидир.*

5. Энди (30.1) эллипсоидни координата текисликларига параллел текисликлар билан кесганда хосил бўладиган чизиқларни урганамиз:

а) Эллипсоидни ХОУ га параллел $z=h$ *текислик билан кесайлик* $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ z=h \end{cases}$ *ёки* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}$. *Бу ерда қуйидаги уч хил бўлиши мумкин:*

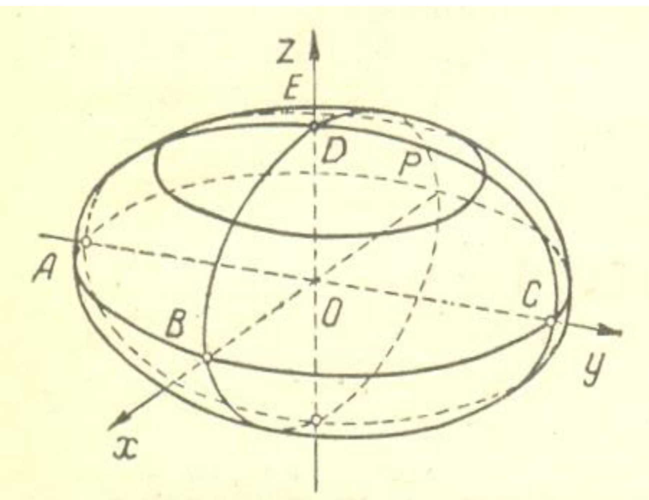
а) $-c\langle h\langle c$ *бўлса* $1-\dfrac{h^2}{c^2}\rangle 0$ *бўлиб* $\dfrac{x^2}{a^2(1-\frac{h^2}{c^2})}+\dfrac{y^2}{b^2(1-\frac{h^2}{c^2})}=1$ *тенгламага эга бўлаймиз, бу эса* $z=h$ *текисликда маркази* $(0;0;h)$ *нуқтабўлган эллипс тенгламасидир.*

в) $h=c$ *ёки* $h=-c$ *бўлса* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ *бўлиб* $x=0, y=0$ *бўлади. Демак* $z=\pm c$ *текисликлар* $(0;0;c)$ *ва* $(0;0;-c)$ *нуқталарда эллипсоидга утказилган уринма текисликни ифодалайди.*

с) $h\rangle c$ *ёки* $h\rangle -c$ *бўлса* $1-\dfrac{h^2}{c^2}\langle 0$ *бўлиб,* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\langle 0$ *бўлиб, яъни текислик эллипсоид билан кесишмайди.*

Худди шунингдек XOZ ва YOZ текисликларга параллел бўлган текисклар билан эллипсоиднинг кесишувини текишириб тахлил килсак 5. даги каби эллипслар хосил бўлганини курамиз.

6. (30.1) тенгламада x, y, z *лар жуфт даражада бўлганидан эллипсоид координата бошига нисбатан симметрик деган хулосага келамиз. Бу 1 – 6 маълумотлар (30.1) эллипсоидан шакли кесимларда эллипслар хосил бўлишидан (r – 41) куринишда бўлада деган хулосага келамиз. Хусусий холда* $a=b\neq c$ *бўлса* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ *айланма эллипсоид хосил бўлади.*



r - 41

31 – Гиперболоидлар.

Аналитик геометрияда икки хил, яъни бир паллали ва икки паллали гиперболоидлар урганилади. Биз уларни алохида навбат билан урганамиз.

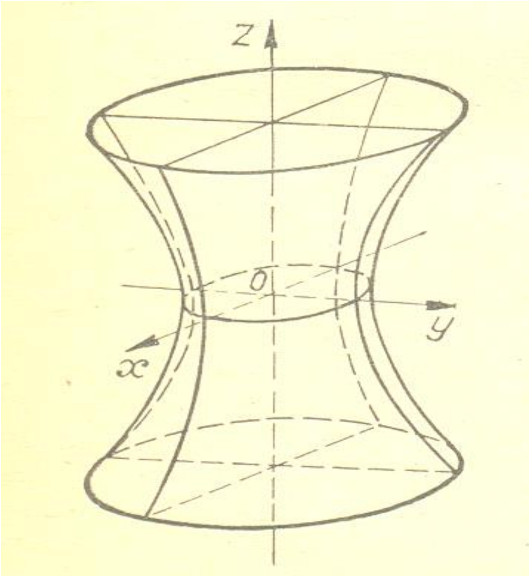
Бир паллали гиперполоид.

Тўгри бурчакли Декарт координаталар системасида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *(31.1)* *тенглама билан ифодаланадиган сиртга бир паллали гиперполоид дейилади. Бир паллали гиперполоидни ясаймиз: уни координата текисликлари унга параллел бўлган текисликлар билан кесамиз:*

1. ХОУ текислик билан кесак $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ z=0\end{cases}$ *ёки* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ *(31.2)*

Бу чизиқ ХОУ координата текисликгида ярим уклари a,b *бўлган эллипсдир. Агар уни ХОУ текисликка параллел* $z=h$ *текислик билан кессак* $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ z=h\end{cases}$ *ёки* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}.$ *(31.3)*

Хосил бўлган эгри чизиқ $z=h$ *текисликда маркази* $(0;0;h)$ *нуқтада бўлиб ярим уклари* $a_1=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, $b_1=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ *лардан иборат эллипсдир. Бунда* h *нинг киймати* $-\infty$ *дан* ∞ *гача узгарган* a_1 *ва* b_1 *хакикий кийматларга эга бўлади. Энди (31.1) гиперболоидни XOZ ва YOZ текисликлар билан кессак* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *(31.4) ва* $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *(31.5) гиперболаларга эга бўлиши (31.4) гиперболани хакикий уки ОХ бўлиб, (31.5) ники ОУ дир. Равшанки (31.3) тенглама билан ифодаланган эллипснинг ярим уклари (31.4) ва (31.5) гиперболанинг хакикий уклари* a,b *га пропорционал бўлади. Шунинг учун бир паллали гиперболоид (31.2) эллипсни ХОУ текисликка параллел силжитишдан ва бу харакат пайтида у (31.4) ва (31.5) гиперболалар шохлари буйича сирпаниб боришидан хосил бўлади деб караш мумкин.*



Бу текширишлар бир паллали гиперпоплоид r – 42 да келтирилган чексиз узун ва ХОУ текисликдан хар икки томонга узоклашган сари кенгайиб борувчи трубкасимон сирт эканини курсатади. (31.1) тенгламада a,b,c *лар бир ковакли гиперболоиднинг ярим уклари дейилади. Агар* $a=b$ *бўлса (31.2) айланма айланади. Шу сабабли* $a=b$ *бўлса бир паллали гиперболоидни (31.4) ёки (31.4) гиперболанинг OZ уки атрофида айланишидан хосил бўлган сирт деб караш мумкин. Бу сирт тенгламаси* $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *бўлади.*

Икки паллали гиперболоид.

Тўгри бурчакли координаталар системасида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ *(31.6) тенглама билан ифодаланадиган сирт икки паллали гиперболоид дейилади.*

a,b,c *сонлар икки паллали гиперболоиднинг ярим уклари дейилади. Агар* $a=b$ *бўлса (31.6) тенглама* $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ *куринишни олади ва тенглама билан ифодаланган сирт* $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *гиперболани OZ уки атрофида айланишидан хосил бўлади ва шу сабабли уни ясаш кийин бўлмайди.*

Энди (31.6) сиртни ясаш билан шугулланамиз. Бу сиртни XOZ(y = 0) ва YOZ(x = 0) текисликлар билан кессак, кесимда

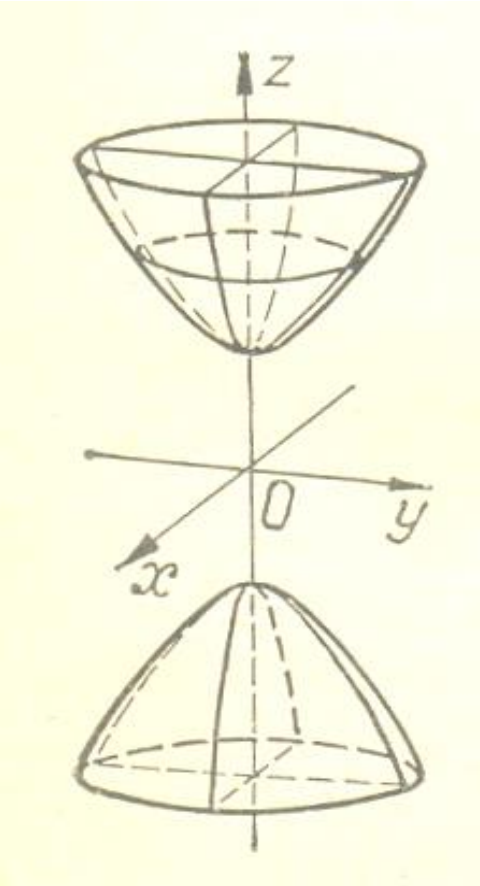
$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad (31.7), \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (31.8)$$

гиперболалар хосил бўлади. (31.7) ва (31.8) гиперболаларнинг хар иккаласини хам хакикий уки OZ уки бўлиб, улар OZ укини $(0;0;c)$ *ва* $(0;0;-c)$ *нуқталарда кесиб ўтади. Энди (31.6) сиртни ХОУ тиекисликка параллел* $z=h$ *текислик билан кесамиз (31.6) ХОУ текислик билан кесишмайди*

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \\ z=h \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1. \quad (31.9)$$

(31.9) ярим уклари $a_1=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$, $b_1=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ *бўлган эллипсни* $|h|\geq c$ *шартда тенгламасидир.* $|h|\langle c$ *бўлганда* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\langle 0$ *бўлим мавхум эллипс хосил*

бўлади. $|h|$ нинг киймати c дан ∞ гача узгарганда a_1 ва b_1 ярим уклар 0 дан ∞ гача усади ва c усиб борган сари эллипснинг ярим уклари ва узи катталашади. (31.6) тенгламада x, y, z лар жуфт даражада бўлганлигидан координата бошига ва координата текисликларига нисбатан шакли симметрик эканлиги келиб чикади. Кесимда хосил бўлган чизиқлар ва килинган тахлилларга таяниб икки паллали гиперболоид иккита чукур эллиптик ваза ва $a = b$ бўлганда иккита чукур коса шаклдаги $r-43$ да тасвириланган сиртдан иборат экан деган хулосага келамиз.



r – 43

32 – Эллиптик параболоид.

Тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}, (p \rangle 0, q \rangle 0)$ (32.1) тенглама билан ифодаланган сирт эллиптик параболоид деб аталади.

Эллиптик параболоидни ясаш учун XOZ(y = 0) ва YOZ(x = 0) текисликлар билан келамиз:

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = 0 \\ y = 0 \end{cases}, x^2 = 2pz \quad (32.2), \quad \begin{cases} z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = 0 \\ x = 0 \end{cases}, y^2 = 2qz \quad (32.3)$$

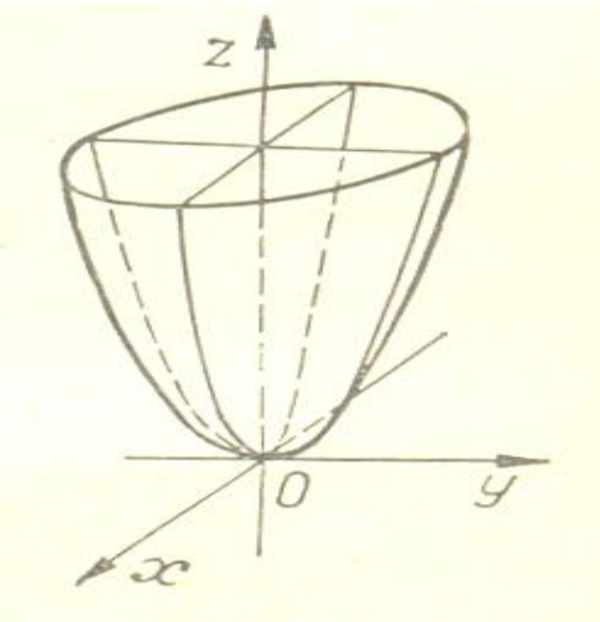
(32.2) ва (32.3) тенглама билан ифодаланган чизиқлар симметрия уки OZ бўлган, XOУ текисликдан юкорида жойлашган параболаларни тасвирлайди.

Энди (32.1) сиртни XOУ текислигига параллел бўлган $z = h$ *текислик билан келамиз:*

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = 0 \\ z = h \end{cases} ,\hat{e}\grave{e} \ \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = h \quad (32.3)$$

(32.3) чизиқ ярим уклари $a_1 = \sqrt{2ph}$*,* $b_1 = \sqrt{2qh}$ *бўлган эллипсдир. Равшанки* $h \geq 0$*, агар* $h = 0$ *бўлса (32.1) параболоид XOУ текисликка уринади.* h *нинг киймати 0 дан* ∞ *гача узгарса* a_1 *ва* b_1 *уклар хам 0 дан* ∞ *гача катталашиб боради, яъни* $z = h$ *текислик (31.1) эллиптик параболоидни кесишидан хосил бўлган XOУ текисликка параллел кесим юкорига кутарилаган сари эллипс катталаша боради. Бу тахлиллар эллиптик параболоид (r – 44) да келтирилга шаклда бўлишини билдиради.*

$p = q$ *бўлса (32.2) ва (32.3) параболалар тенглашади, (32.3) эллипс эса айланага айланади. Бу холда (32.1) тенглама* $z = \frac{x^2 + y^2}{2p}$ *(32.4) куринишни олади ва (32.2) ёки (32.3) параболани OZ уки атрофида айланишидан хосил бўлади деб караш мумкин.*



r – 44

33 – Гиперболик параболоид.

Тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}, (p\rangle 0, q\rangle 0)$ *(33.1) тенглама билан ифодаланган сирт гиперболик параболоид дейилади.*

Гиперболик параболииднинг шаклини аниклаш учун параллел кесимлар усулини куллаймиз:

(33.1) сиртни XOZ(y = 0) текислик билан кессак

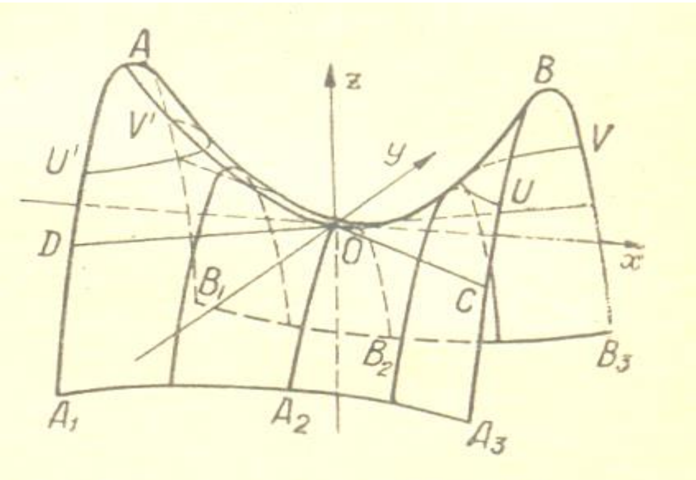
$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q}, x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases} \quad (33.2)$$

парабола хосил бўлади. (33.2) симметрия уки OZ бўлиб, кабакриклиги "пастга" караган параболадир. Энди (33.1) ни YOZ текисликка параллел $x = h$ *текислик билан кессак:*

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} \quad ёки \quad y^2 = -2q(z - \dfrac{h^2}{2p}) \\ x = h \end{cases} \quad (33.3)$$

$h = 0$ *бўлсак бу чизиқ симметрия уки OZ бўлиб координата бошидан ўтувчи кабариклиги "юкорига" караган парабола бўлиб,* $h \neq 0$ *бўлса учи (33.2) парабола учи билан бир нуқтада бўлиб (33.3) парабола шу параболага параллел бўлган параболаларни билдириш. Энди (33.1) сиртни XOY текисликка параллел* $z = h$ *текислик билан кесамиз.*

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = 0 \\ z = h \end{cases}, \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = h \quad (33.4)$$



Бу чизиқ хакикий уки $z = h$ *текисликда бўлиб,* $h \rangle 0$ *бўлганда OX укка парллел гиперболан,* $h \langle 0$ *бўлганда эса хакикий уки OY укка параллел гиперболани тасвирлайди,* $h = 0$ *бўлса (33.4) дан* $\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0$ *ва* $\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0$ *хосил бўлади.*

Бу тенгламалар координата бошидан утган тўғри чизиқ тенгламаларидир. Юкоридаги тахлиллардан куринадики гиперболик парболоид r – 45 да курсатилган эгар шаклда бўлиши келиб чикади. (33.1) тенгламада x *ва* y *лар квадратда катнашганидан XOZ ва YOZ текисликлар гиперболик параболоиднинг симметрия текисликлари бўлади.* $O(0;0;0)$ *нуқтагиперболик параболоидни учи* p, q *сонлар унинг параметрлари дейилади.*

Асосий адабиётлар.

1. ***Х.Латипов, Ш.Тожиев, Р.Рустамов- “Аналитик геоиетрия ва чизиқли алгебра” тошкент 1995йил.***
2. ***М.Камолов – “Аналитик геометрия” Тошкент 1972йил.***
3. ***М.М.Пастников – “Аналитическая геометрия” Москва 1973йил.***

Ёрдамчи адабиётлар.

1. ***В.Т.Лисичкин, И.А.Соловейчик-“Математика” Москва 1992 йил.***
2. ***В.П.Минорский – “Олий математикадан масалалар тўплами” Тошкент 1975 йил.***
3. ***Б.Бобонахаров, М.Мансуров – “Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра элементларидан*** **масалалар тўплами” Жиззах 2002 йил.**