

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА
ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ

**фани бўйича замонавий педагогик технология асосида
ёзилган маъруза матни**

Гулистон 2006

«Алгебра ва сонлар назарияси» фанидан ўқув-методик мажмуа _____ бет.

5460100-математика (5480100-амалий математика ва информатика) таълим йўналиши бўйича тахсил олаётган талабалар учун мўлжалланган маъруза матни.

Тузувчи: физика-математика фанлари номзоди, доцент **Гаймназаров Г.**

Такризчилар: СамДУ доценти, физика-математика фанлари номзоди

Абдуқодиров Е.

ГулДУ доценти, физика-математика фанлари номзоди

Қосимов С.

Имло бўйича муҳаррир: **Абдуллаев Ж.** филология фанлари номзоди, доцент

1-Маъруза

Мавзу: ЧИЗИҚЛИ ФАЗОЛАР

Асосий саволлар:

1. Чизикли фазо тушунчаси ва унинг базиси, ўлчови.
2. Векторнинг базисдаги координатаси. Қисм фазолар устида амаллар.

Таянч иборалар ва тушунчалар.

Фазо, базис, ўлчов, координаталар, чизикли кўпхиллилик, қобик, изоморфизм.

1-асосий савол бўйича ўқитувчининг мақсади:

1. Чизикли фазо тушунчасини бериш.
2. Фазонинг базисини, ўлчовини тушунтириш.

1-асосий савол баёни

Фараз қилайлик M тўплам бўлсин. $M = \{x_1, x_2, \dots\}$. Бу тўплам элементларига нисбатан аниқ бир тўпламни тушуниш мумкин. Масалан: элементлари сонлардан, векторлардан, матрисалардан иборат бўлиши мумкин. Агар элементлари векторлардан иборат бўлса, M векторлар тўплами дейилади. Агар элементлари кўпхадлардан иборат бўлса, M кўпхадлар тўпламидан иборат бўлади ва ҳоказолар.

Энди M кўпхадлар тўплами қандай бўлмасин унинг элементларини «векторлар» деб атаймиз. Бу «вектор» тушунчаси, яъни элементларни «вектор» деб аташ кенг маънода тушунилади.

Таъриф: Агар M тўпламда икки векторнинг (элементнинг) x_k, x_s йиғиндиси $x_k + x_s$ ва бирор x_k векторни λ сонга кўпайтмаси λx_k тушунчаси киритилган бўлиб қуйидаги шартлар:

1. $\forall x_k, x_s \in M \quad x_k + x_s = x_n, x_n \in M \quad \lambda x_k = x_m, x_m \in M$
2. $x_k + x_s = x_s + x_k$
3. $x_k + (x_s + x_p) = (x_k + x_s) + x_p;$
4. $\exists \theta \in M, x_k + \theta = x_k; \quad \theta$ -нол вектор дейилади.

3. Даражаси n дан ошмайдиган $P_n(x)$ кўпхадларни қарайлик;

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

кўпхадларни қўшиш, сонга кўпайтиришни оддий маънода қўрамыз. Бу тўплам ҳам чизиқли фазони ташкил этади.

4. $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлган функциялар тўпламини олиб қарайлик.

$$M = \{f_1(x), f_2(x), \dots\}$$

Ихтиёрий $f_i(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз.

Икки функцияни қўшиш ва сонга кўпайтиришни оддий маънода қараймиз.

Демак узлуксиз функциялар тўплами ҳам чизиқли фазони ташкил этади.

5. M тўплам XOY текисликнинг фақат 1-чи чоракда ётувчи векторлардан иборат бўлсин. Бу ерда 5-шарт бажарилмайди.

2. Чизиқли фазонинг базиси ва ўлчови.

Фараз қилайлик R бирор чизиқли фазо бўлсин, бу чизиқли фазода n та векторни олиб қарайлик.

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \quad (1)$$

Таъриф. Агар ҳеч бўлмаса биттаси 0 дан фарқли бўлган

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \quad (2)$$

сонлар мавжуд бўлиб,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \dots + \lambda_n x_n \quad (3)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда (ИИ) векторлар системаси чизиқли боғланган дейилади.

Таъриф. Агар (3) тенглик фақат

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \dots, \lambda_n = 0 \quad (4)$$

Бўлгандагина бажарилса, у ҳолда (ИИ) векторлар системаси чизиқли боғланмаган дейилади.

Фазодан олинган ихтиёрий n -та векторлар системаси чизиқли боғланган ёки боғланмаган бўлиши мумкин. Улар ҳақида қуйидаги теорэмани келтирамыз.

Теорема. Агар (И) векторлар системаси чизиқли боғланган бўлса, у ҳолда улардан биттасини қолганлари орқали ифодалаш мумкин.

Исбот. Фараз қилайлик (ИИ) векторлар системаси чизиқли боғланган бўлсин.

Демак (3) тенглик λ_i ларнинг бирортаси 0 дан фарқли бўлганда ўринлидир.

Буни еътиборга олиб (3) ни қуйидагича ёзамиз. Аниқлик учун $\lambda \neq 0$ деб қарайлик.

$$x = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}x_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}x_n, \quad -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \beta_2, \quad -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \beta_3, \quad \dots \quad x = \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \dots + \beta_nx_n \quad (5)$$

Бу (5) тенглик x_1 векторни қолганлари орқали ифодалашдан иборатдир.

Таъриф. Агар R фазода n та вектор чизиқли боғланмаган бўлса, у ҳолда R фазо n ўлчовли чизиқли фазо дейилади ва R_n деб белгиланади.

Фараз қилайлик $x_1, x_2, \dots, x_n$ (Иа) чизиқли боғланмаган бўлсин.

$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ (6) чизиқли боғланган бўлсин. У ҳолда (Иа) чизиқли еркли дейилади. Энди (6) система чизиқли боғланган бўлганлиги учун ицботланган теоремага асосан уларнинг биттасини қолгаглари орқали ифодалаш мумкин. Шунинг учун x_{n+1} ни қолганлари орқали ифодалаймиз.

$x_{n+1} = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n$ (7). Бу (7) x_{n+1} векторнинг (Иа) ифодаланиши дейилади.

Таъриф. R_n фазонинг n та чизиқли боғланмаган векторлар тўплами бу фазонинг базиси дейилади.

Шундай қилиб, агар P фазода базис векторлар сони n бўлса, у ҳолда бундай фазо n ўлчовли фазо дейилади ва R_n деб белгиланади.

Масалан, $ХОУ$ текисликда векторлар фазоси 2 ўлчовли фазони ташкил этади. R_2 фазо R_1 фазо тўғри чизиқлар устида ётувчи векторлар фазоси бўлиб бир ўлчовлидир.

2-асосий савол

Векторнинг базисдаги координатаси.

Қисм фазолар устида амаллар.

2-асосий савол бўйича ўқитувчининг мақсади:

1. Векторнинг базисдаги координаталарини тушунтириш.
2. Координаталар узгаришини тушунтириш .
3. Изоморф фазоларни урнатиш.
4. Кисм фазолрнинг бирлашмасини ва кесишмасини ургатиш.

2-асосий саволдан келиб чиқадиган идентив ўқув мақсадлар:

1. Векторнинг базисдаги координаталарини тушуниб олади.
2. Изоморф фазоларни тушуниб олади.

2-асосий савол баёни

Фараз қилийлик R_n бирор n ўлчовли фазо бўлсин унинг базиси

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (1)$$

векторлардан иборат бўлсин. Энди қуйидаги векторлар системасини олайлик.

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \quad (2)$$

Бу (2) чизиқли боғланган.шунинг учун (2) даги x ни қолганлари орқали ифодалаш мумкин.

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \dots + \xi_n x_n \quad (3)$$

Бу (3) x векторнинг базис орқали ифодаланиши дейилади. Бундаги

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n \quad (4)$$

Сонлар агар x векторнинг (1) базисдаги координаталари дейилади. Агар биз (1) базисдаги бошқа бир

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n \quad (5)$$

Базиси танлансак, у ҳолда ўша биз қараётган x векторнинг координиталари бошқа бўлади, яъни

$$x = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 + \dots + \eta_n y_n \quad (6)$$

Биз x векторнинг (И) (ва (5) базисдаги координаталари орасидаги боғланиш келтириб чиқаришимиз мумкин. Бунинг учун (И) даги хар бир векторни (5)

базис орқали ифодалаймиз ва бу ифодаларни (3) га қўямиз. Натижада (6) га асосан биз ξ_i ва η_i ларга боғлиқ бўлган системани ҳосил қаламиз. Бу системани η_i Ларга нисбатан чизиқли тенгламалар системаси кўринишда ечамиз. Натижада қуйидагиларга ега бўламиз.

$$\begin{cases} \eta_1 = b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + b_{13}\xi_3 + \cdots + b_{1n}\xi_n \\ \eta_2 = b_{12}\xi_1 + b_{22}\xi_2 + b_{23}\xi_3 + \cdots + b_{2n}\xi_n \\ \vdots \\ \eta_n = b_{n1}\xi_1 + b_{n2}\xi_2 + b_{n3}\xi_3 + \cdots + b_{nn}\xi_n \end{cases} \quad (7)$$

Бу (7) базис ўзгарганда координаталарнинг ўзгариши дейилади.

Изоморф фазолар.

Фараз қилийлик R_1 ва R_2 чизикли фазолар бўлсин, уларни элементларини қуйидагича белгилаймиз.

$$R_1 = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}, \quad R_2 = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots\}$$

Таъриф. Агар R_1 ва R_2 фазоларнинг векторлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўргатилган, бўлиб бу мослик икки векторнинг йиғиндиси ва сони кўпайтириш амалларига нисбатан ҳам ўринли бўлса, у ҳолда бундай фазолар изоморф фазолар дейилади

Бу таърифни қўйидагича ифодалаш мумкин.

$$\{R_1 \ni x_i \leftrightarrow y_i \in R_2\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_k + x_s \leftrightarrow y_k + y_s \\ \lambda x_j \leftrightarrow \lambda y_j \end{array} \right\} \quad \mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_2$$

Изоморф фазога таалукли бўлган теорэмани келтирамиз.

Теорема. Хамма бир ҳил ўлчовли фазолар бир-бирига изоморфдир.

Исбот. Фараз қилайлик R_1 ва R_2 фазолар бир хил ўлчовли бўлсин.

Уларнинг базисларини мос равишда $e_1, e_2, \dots, e_n$ ва $f_1, f_2, \dots, f_n$ деб олайлик.

Энди $x \in R_1$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ векторга монотон.

$y \in R_2$, $y = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n$ векторни мос қилиб қўямиз.

Бу мослик ўзаро бир қайматлидир. Бундай мослик векторларни қўшишда ҳам ва сони векторга қўпайтиришда ҳам сақланади. Демак n ўлчовли R_1 ва R_2 фазолар бир-бирига изоморфдир, яъни $P_1 \sim P_2$. Теорэма исбот бўлди.

Қисм фазолар.

Фараз қилайлик R_n бирор фазо бўлсин. Бу фазонинг векторларидан M тўплам тузайлик. Агар M тўплам тузайлик. Агар M тўплам фазо шартларини қаноатлантирса у қисм фазо дейилади. Энди қуйидаги векторларни олайлик.

$$x_1, x_2, x_3 \dots x_m \quad (1)$$

Бу векторлардан қуйидаги ифодани тузайлик.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_m x_m = y_1 \quad (2).$$

Бу (2) йиғинди (7) системанинг чизиқли комбинацияси дейилади. Энди (2) га ўхшаш

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \dots + \beta_m x_m = y_2 \quad (2a)$$

комбинация тузайлик. Бундай $\{y_k\}$ тўплам яъни

$$\{y_k\} = \{y_1, y_2, \dots\} = L \quad (3)$$

Тўплам фазо шартларини қаноатлантиради. Демак L -қисм фазо, яъни $L \in R_n$.

Бундай қисм фазо чизиқли кобик дейилади. бунинг ўлчови R_n фазонинг ўлчовидан ортиқ эмас. L -нинг ўлчовини S - десак, у ҳолда $S \leq n$.

R_n фазодан ихтиёрий x_0, x_0 -тайинланган. Ихтиёрий x_k векторни олиб қарайлик.

$$x_0 + x_k = y_{0k}, k=1,2,3, \quad (4)$$

Векторлар системани тузайлик. y_{0k} векторлар x_k векторларни x_0 бўйича силжиши дейилади. Бундай $\{y_{0k}\} = H$ векторлар тўплами R_n фазонинг бир

қисми бўлиб қисм фазони ташкил этади. Буни текшириб кўриш мумкин. Ҳ қисм фазолар чизиқли кўпхиллик дейилади.

Қисм фазоларнинг йиғиндиси ва кесими.

Фараз қилайлик R_n чизиқли фазо бўлсин. Унинг U_1 ва U_2 қисм фазоларни олайлик, яъни

$$U_1 = \{x_1, x_2, \dots\} \text{ ва } U_2 = \{y_1, y_2, \dots\}$$

бўлсин. У ҳолда

$$W = U_1 + U_2 = \{x_i + y_i\}, \quad x_i \in U_1, U_2, y_i \in U_2$$

тўплам U_1 ва U_2 қисм фазоларнинг йиғиндиси дейилади. W -қисм фазо эканлигини кўрсатиш мумкин. U_1 ва U_2 қисм фазолардаги векторларнинг айримлари умумий бўлиши мумкин. Бу умумийлардан тузилган U тўплам қисм фазоларнинг кесими дейилади.

Ҳосил бўлган U кесим тўплам ҳам қисм фазо эканини кўрсатиш мумкин.

Энди $W = U_1 + U_2$ ва $U = U_1 \cap U_2$ қисм фазоларнинг ўлчови ҳақида тўхтаб ўтамиз.

$\dim R_n = n$ (дименсион-ўлчов) деб олсак, у ҳолда

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

тенгликни исботлаш мумкин.

Қисм фазоларнинг йиғиндиси билан биргаликда уларнинг тўғри йиғиндиси тушунчаси ҳам мавжуд. Буни қуйида кўриб ўтамиз. $W = U_1 + U_2$ қисм фазоларнинг йиғиндисининг вектори R_n фазонинг вектори бўлгани учун

$z_{ij} \in M$ $z_{ij} = x_i + y_i$ векторни U_1 ва U_2 қисм фазоларнинг бошқа векторлари орқали ифодалаш мумкин. Бундай ифодаланиш фақат биргина эмас бирнечта бўлиши мумкин. Шу нуқтаи назардан қисм фазоларнинг тўғри йиғиндиси тушунчасини киритамиз. Қисм фазоларнинг тўғри йиғиндиси қисм

фазоларнинг йиғиндиси каби Аниқланиб ундаги ҳар бир вектор U_1 ва U_2 қисм фазо векторлари оали фақат биргина кўринишда ифодаланади.

Ана шундай қисм фазоларнинг йиғиндиси қисм фазоларнинг тўғри йиғиндиси дейилади ва уни $U_1 \oplus U_2 = \bar{W}$ деб белгиланади. $\bar{W}$ тўғри йиғинди ҳар бир вектор биргина кўринишда ифодаланади.

Теорэма. R_n фазо W тўғри йиғиндидан иборат бўлиши учун $U_1 \cap U_0 = 0$ (яъни кесим фақат битта нол элемент) бўлиши зарур ва кифоядир.

Бу теорэмани бошқача кўринишда ҳам ифодалаш мумкин.

Теорэма. R_n фазо U_1 ва U_2 ўзининг қисм фазоларнинг йиғиндиси бўлиши учун қисм фазолар базисининг бирлашмаси R_n фазо базисини ташкил етиши зарур ва кифоядир.

1-маъруза бўйича амалий машғулот.

Мавзу: Чизикли фазо.

Дарснинг мақсади

Чизикли фазо тушунчасини, базис ва ўлчов мисол ва масалалар асосида ўргатиш.

Идентив ўқув мақсади

Чизикли фазо тушунчасига ега бўлади ва бунда фазонинг ўлчови, базисини ўрганиб олади.

Зарурий материаллар

Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.(М.1978) китобидан Н 1277-1279, 1282, 1283.1285-1293 масалалар 1310-1311,1317,1318.

Дарсда ечиладиган масалалар

1) 1277,1278,1310 масалалар

2) 1285-1290,1318 масалалар

Мустақил бажариш учун

1) 1282 а),б) 1283, 1311, 1291-1293, 1317

Мавзуга оид илмий муаммолар.

1. Фазонинг базис ва ихтиёрий векторини базис орқали ифодалаш.
2. Қисм фазоларнинг бирлашмаси ва кесишмасининг ўлчови.
3. Фазоларнинг изоморфлиги.

Асосий хулосалар ва уларни мустаҳкамлаш.

1. Хулоса. Чизиқли фазодаги ўзаро чизиқли боғланмаган векторлар базисни ташкил этади. Базис орқали ихтиёрий вектор ифодалаш мумкин. Базис ўзгарганда векторнинг координаталари ўзгаради. Ҳамма бир хил ўлчовли фазолар ўзаро изоморфдир.

2. Мустаҳкамлаш учун саволлар.

1. Чизиқли фазо таърифини келтиринг.
2. Базис нима ?
3. Векторнинг координаталари нима ?
4. Қисм фазолар устида қандай амаллар бажарилади ?
5. Изоморфизм нима ?

Мавзу бўйича мустақил топшириқлар:

1. Кисм фазолар ва уларнинг бирлашмаси (йигиндиси) кесишмаси.[1] §39§45
2. Векторлар сстэмасининг чизиқли боғланиши. [1], §40.
3. Векторлар сстэмасининг чизиқли кобиғи ва купхиллик [1], §44, §46.

АДАБИЁТЛАР.

1. Назаров Р. Н. Ва бошқалар Алгебра ва сонлар назарияси, И-қисм , Т. 1993 й.
2. Петрова В.Т. Лекции по алгебре и геометрии, М, 1997 г.
3. Гаймназаров Г, Жамуратов К. Чизиқли алгебра элементлари, Гулистон 1991й.

2-МАЪРУЗА.

МАВЗУ: ЧИЗИҚЛИ ВА КВАДРАТИК ФОРМАЛАР. ЕВКЛИД ФАЗОСИ.

Асосий саволлар:

1. Чизиқли ва квадратик формалар.
2. Евклид фазоси.

Таянч иборалар ва тушунчалар .

Чизиқли форма, бичизиқли форма, қўшма фазо, квадратик форма, Ермит формаси, Евклид фазо, Унитар фазо, ортогонал базис, ортогоналлаштириш.

1-асосий савол бўйича ўқитувчининг мақсади.

1. Чизиқли форма тушунчасини бериш
2. Бичизиқли форма тушунчасини бериш
3. Квадратик формани тушунтириш

4. Квадратик формаларни соддалаштиришни ургатиш

1-асосий саволдан келиб чиқадиган идентив ўқув мақсадлари.

1. Бичизикли формани тушуниб олади.
2. Квадратик формани сода шаклга келтиришни ўрганиб олади.

1-асосий савол баёни

R фазо берилган бўлсин. Бу фазода қандайдир $f(x)$ функцияни қуйидаги шартларни қаноатлантирса, $f(x)$ чизикли функция дейилади.

$$1. f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad 2. f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

$$f(\lambda x_1 + \lambda x_2) = f(\lambda x_1) + f(\lambda x_2) = \lambda f(x_1) + \lambda f(x_2) \quad (И)$$

Бу ерда f мослик $f(x)$ ни бирор λ сонга мос келтиради. Аниқроғи $f(x) = \lambda, x \in R$ вектор.

Таъриф. Агар икки ўзгарувчили $A(x, y)$ функция R фазода берилган бўлиб, ҳар қайси ўзгарувчига нисбатан чизикли бўлса, у ҳолда бу $A(x, y)$ функция бичизикли функция дейилади.

Бу таърифни бошқача қилиб айтиш мумкин. Агар $A(x, y)$ функция ҳар бир ўзгарувчига нисбатан (И) шартни қаноатлантирса, яъни

$$1. A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 A(x_1, y) + \lambda_2 A(x_2, y)$$

$$2. A(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \mu_1 A(x, y_1) + \mu_2 A(x, y_2)$$

бўлса, у ҳолда $A(x, y)$ функсия бичизикли (форма) функция дейилади.

Энди бирор R_n фазода берилган $A(x, y)$ бичизикли формани кўриб ўтамиз. R_n фазо базиси

$$e_1, e_2, \dots, e_p \quad (2)$$

бўлсин. Бу фазода ва векторларни олиб (2) базис орқали ифодалайлик.

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n, y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n$$

У ҳолда

$$\begin{aligned}
A(x, y) &= A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n, \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n) = \\
&= \xi_1 A(e_1; \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n) + \xi_2 A(e_2; \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n) + \dots + \xi_n A(e_n; \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n) = \\
&= \xi_1 \eta_1 A(e_1, e_1) + \xi_1 \eta_2 A(e_1, e_2) + \dots + \xi_1 \eta_n A(e_1, e_n) + \xi_2 \eta_1 A(e_2, e_1) + \xi_2 \eta_2 A(e_2, e_2) + \dots + \\
&\quad \xi_2 \eta_n A(e_2, e_n) + \dots + \xi_n \eta_1 A(e_n, e_1) + \xi_n \eta_2 A(e_n, e_2) + \dots + \xi_n \eta_n A(e_n, e_n) = \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_k A(e_i, e_k) = \sum_{i,k=1}^n \xi_i \eta_k A(e_i, e_k)
\end{aligned} \tag{3}$$

$$A(e_i, e_k) = a_{ik} \tag{4}$$

$$A(x, y) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \eta_k \tag{5}$$

(5) дан тузилган матриса бичизикли форманинг матрисаси дейилади, яъни

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Таъриф. Агар $A(x, y)$ бичизикли формада $x = y$ бўлса, у ҳолда $A(x, x)$ квадратик форма дейилади.

Бундай ҳолатда (4) чи $A(e_i, e_k) = a_{i,k}$ (4^б) бўлади.

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{i,k} \xi_i \xi_k \quad (5^b) \quad \xi_i = \eta_i, \quad \xi_k = \eta_k$$

Агар бу ерда $a_{i,k} = a_{k,i}$ (6) бўлса, симметрик квадрат форма бўлади. Ҳар бир бичизикли форманинг ўзига мос бўлган квадратик формаси мавжуддир. Биз R фазодаги сонлар ҳақиқий сонлар деб қарадик. R фазода қаралаётган сонлар ҳақиқий комплекс сонлар бўлса, комплекс фазо бўлади. Юқоридаги бичизикли формани комплекс фазода ҳам кўриш мумкин.

Таъриф. Агар $A(x, y)$ функция комплекс сон бўлиб бу функция учун

$A(x, y) = \overline{A(y, x)}$ (7) шарт бажарилса, у ҳолда бундай $A(x, y)$ бичизикли форма Ермит формаси дейилади.

$$\alpha = a + b_i, \quad \bar{\alpha} = a - b_i$$

Таъриф. $A(x, y)$ симетрик бичизикли форма бўлсин. $y = x$ деб фарз қилганда $A(x, y)$ да ҳосил бўладиган $A(x, x)$ функция квадратик форма дейилади.

$A(x, y)$ функция $A(x, x)$ квадратик формаси билан бир қийматли аниқланади. Ҳар қандай квадратик форма берилган базисда

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{i,k} \xi_i \eta_k$$

Формула билан ифода етилади, бунда $a_{i,k} = a_{k,i}$. Яна бир муҳим таъриф киритамиз.

Таъриф. Агар ҳар қандай $x \neq 0$ вектор учун $A(x, x) > 0$ бўлса, $A(x, x)$ квадратик форма мусбат аниқланган квадрат форма дейилади.

Мисол. $A(x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$ мусбат квадратик форма эканлиги равшан.

Теорема. R_n фазода $e_1, e_2, \dots, e_n$ (И) базис мавжуд бўлиб, $A(x, x)$ квадратик формани бу (И) базисда $A(x, x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2$

Кўринишга келтириш мумкин. Бу ерда $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ Исбот. Бирор $f_1, f_2, \dots, f_n$ базисда M тенглик ўринли бўлсин. $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ лар векторнинг бу базисдаги координатлари. Базисни (*) формулада турли индексли координаталарининг кўпайтмалари йўқолиб борадиган қилиб, аста-секин алмаштира борамиз. Базиснинг ҳар бир алмаштиришига маълум базис алмаштиришлари тўғри келгани учун, биз координаталарини формулаларини ёза оламиз.

$A(x, x)$ формани квадратлар йиғиндисига келтириш учун, бизга a_{kk} коэффициентлардан

(η_2^2 нинг коэффициенти) камида биттаси нолдан фарқли бўлиши керак бўлади. Бунга ҳамма вақт еришиш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам, нолга айнан тенг бўлмаган $A(x, x)$ формада ўзгарувчининг бирорта ҳам квадрати бўлмасин. Деб фараз қилайлик. У ҳолда камида битта кўпайтма, масалан $2a_{12}\eta_1\eta_2$ бўлади. η_1 ва η_2 координаталари

$$\eta_1 = \eta'_1 + \eta'_2$$

$$\eta_2 = \eta'_1 + \eta'_2$$

Формулага асосан алмаштирамиз, бошқа ўзгарувчиларни ўзгартмай колдирамиз. Бундай алсмаштиришда $2a_{12}\eta_1\eta_2$ ҳаднинг кўриниши $a_{12} = (\eta_1' - \eta_2')$ бўлиб қолади ва фаразга мувофиқ

$a_{11} = a_{22} = 0$ бўлгани учун бу ҳеч қандай ҳад билан кикара олмайди, яъни $\eta_1'^2$ нинг коэффициенти нолдан фарқли.

Энди (*) формуладан коэффициенти нолдан фарқли деб оламиз. Бизнинг квадратик формамиздан η_1 қатнашган ҳадларни ажратиб ёзамиз.

$a_{11}\eta_1^2 + 2a_{12}\eta_1\eta_2 + \dots + 2a_{1n}\eta_1\eta_n$ бу йиғиндини тўла квадратгача тўлдирамиз, яъни уни

$$a_{11}\eta_1^2 + 2a_{12}\eta_1\eta_2 + \dots + 2a_{1n}\eta_1\eta_n = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}\eta_1 + \dots + a_{1n}\eta_n)^2 - B \quad (**)$$
 кўринишда

ёзамиз. B билан биз фақат $a_{11}\eta_2, \dots, a_{1n}$ ҳадлар квадратларини ва уларнинг ҳарр қайси иккитасининг кўпайтмаларини ўз ичига олган ҳадларни белгиладик. (**) ифодани (*) га қўйгандан сўнг қаралаётган квадратик форма

$A(x, x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}\eta_1 + \dots + a_{1n}\eta_n)^2$ кўринишни олади. Бунда ёзилмаган ҳадларга ўзгарувчиларгина киради.

Фараз етайлик :

$$\eta_1^* = a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \dots + a_{1n}\eta_n$$

$$\eta_2^* = \eta_2,$$

$$\eta_n^* = \eta_n$$

У ҳолда квадратик форма

$$A(x, x) = \frac{1}{a_{11}}\eta_1^{*2} + \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^* \eta_i^* \eta_k^*$$

кўринишни олади.

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}^* \eta_i^* \eta_k^*$$

ифода (*) формуланинг ўнг томонига жуда ўхшаш бўлиб, бунда биринчи координата ўқ йўқ a_2^* коэффициентини нолдан фарқли деб фараз этиб (биз юқорида кўрдикки, содда ёрдамчи алмаштириш билан ҳамма вақт бу коэффициентни нолга тенглаштириш мумкин) биз ўзгарувчиларни биринчига ўхшаш

$$\begin{aligned}\eta_1^{**} &= \eta_1^* \\ \eta_2^{**} &= a_{22}^{**} \eta_2^* + a_{23}^{**} \eta_3^* + \dots + a_{2n}^{**} \eta_n^* \\ \eta_3^{**} &= \dots \eta_n^* \dots \\ &\dots \\ \eta_n^{**} &= \dots \eta_n^*\end{aligned}$$

формулаларга мувофиқ янгидан алмаштиришимиз мумкин, бундай алмаштиришдан сўнг форма

$$A(x, x) = \frac{1}{a_{11}^{**2}} \eta_1^{**2} + \frac{1}{a_{22}^{**2}} \eta_2^{**2} + \sum_{ik=3}^n a_{ik}^{**} \eta_i^{**} \eta_k^{**}$$

кўринишни олади. Бу процессни давом еттириб, ўзгарувчиларни бир қанча ўзгартиргандан кейин ўзгарувчиларга келамиз; $A(x, x)$ форма бу ўзгарувчилар орқали қуйдагича ифодаланади.

$$A(x, x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \dots + \lambda_m \xi_m^2 \quad \text{бунда } m \leq n$$

2. Инерсия қонуни

$A(x, x)$ квадратик формани квадратлар йиғиндисига келтиришда, ўзида бу квадратик форма квадратлар йиғиндисига айланадиган, яъни бу форма

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 \quad (1)$$

кўринишга келадиган базисни турлича танлаб олиш мумкин. Биз квадратик форманинг инерсия қонуни деб аталувчи теорэмани келтирамиз.

Теорема: Агар квадратик форма икки турли усул билан (яъни бошқа-бошқа иккита базисда) квадратлар йиғиндисига келтирилган бўлса, у ҳолда мусбат коэффициентларнинг сони ҳамда манфий коэффициентларнинг сони иккала ҳолда бир хилдир.

Исбот: Дастлаб ушбу леммани исбот қиламиз.

Лемма. n ўлчоли R фазода мос тартибда k ва l ўлчовли иккита R' ҳам R'' коэффициентларнинг қисм фазолари мавжуд дейлик ва шу билан бирга $k+l > n$ бўлсин. У ҳолда бу қисм фазоларнинг иккаласига ҳам тегишли бўлган $x \neq 0$ вектор мавжуддир.

Исбот. $e_1, e_2, \dots, e_k$ лар k ўлчовли R' қисм фазонинг базиси, $f_1, f_2, \dots, f_l$ лар эса l ўлчовли R'' қисм фазонинг базиси бўлсин. $k+l$ та

$$e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_l$$

векторлар чизиқли боғлиқ, чунки $k+l > n$. Бошқача қилиб айтганда, баъзиларигина нолга тенг бўлиши мумкин бўлган шундай

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$$

сонлар мавжудки.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_l f_l = 0$$

яъни

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k = -\mu_1 f_1 - \mu_2 f_2 - \dots - \mu_l f_l$$

Энди

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k = -\mu_1 f_1 - \mu_2 f_2 - \dots - \mu_l f_l = x$$

деб фараз қилайлик. Кўрамизки x вектор бир томондан

$e_1, e_2, \dots, e_k$, векторларнинг чизиқли комбинацияси сифатида тасвирланган, шунинг учун $x \in R'$, иккинчи томондан эса x нинг ўзи $f_1, f_2, \dots, f_l$ векторларнинг чизиқли комбинацияси сифатида тасвир этилган, Демак, $x \in R''$. Шундай қилиб, x вектор R' ҳамда R'' қисм фазоларнинг кесишиш жойида этади. $x \neq 0$ эканини кўрсатамиз. Агар $x = 0$

бўлганда еди, у ҳолда $e_1, e_2, \dots, e_k$, векторлар чизиқли ерки бўлганлари учун

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = t$ бўлар еди, $f_1, f_2, \dots, f_l$ векторларнинг чизиқли ерки бўлганликлари сабабли еса $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_l = 0$ бўлар еди.

Аммо $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$

Сонлар орасида камида битта нолдан фарқли сон бор, шунинг учун $x \neq 0$ ва шунинг билан лемма исбот бўлди.

$e_1, e_2, \dots, e_n$ базисда $A(x, x)$ квадратик форма

$$A(x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots - \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - \dots - \xi_{p+q}^2 \quad (2)$$

кўринишга ега деб фараз қилайлик, шу билан бирга

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ лар x векторнинг координаталари яъни

$$X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_p e_p + \xi_{p+1} e_{p+1} + \dots + \xi_{p+q} e_{p+q} + \dots \xi_n e_n$$

бўлсин. $f_1, f_2, \dots, f_n$ базисда шу квадратик форманинг ўзи

$$A(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{p'}^2 - \eta_{p'+1}^2 - \dots - \eta_{p'+q'}^2 \quad (3)$$

кўринишга ега бўлсин, бунда $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ лар x векторнинг $f_1, f_2, \dots, f_n$ базисдаги координаталари. Биз $p' = p$ ва $q' = q$ эканлигини исбот қилишимиз керак. Бу шундай бўлмасин, масалан, $p' > p$ деб фараз қилайлик $e_1, e_2, \dots, e_n$ векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат R' қисм фазони қараймиз. Унинг ўлчови P га тенг.

$f_{p'+1}, f_{p'+2}, \dots, f_n$ векторлар чизиқли комбинациясидан иборат бўлган R'' қисм фазонинг ўлчови еса $n - p'$ га тенг. $n - p' + p > n$ бўлгани учун (чунки биз $p' > p$ фараз етганимиз), леммага мувофиқ, R' ва R'' нинг кесишган жойида ётадиган $x \neq 0$ вектор мавжуд яъни

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_p e_p$$

ва

$$x = \eta_{p'+1} f_{p'+1} + \dots + \eta_{p'+q'} f_{p'+q'} + \dots + \eta_n f_n$$

$e_1, e_2, \dots, e_n$ базисда бу вектор $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p, 0, \dots, 0$ координаталарга ега

бўлиб,

$f_1, f_2, \dots, f_n$ базисда еса у $0, 0, \dots, \eta_{p'+1}, \dots, \eta_n$ координаталарга (2) ва (3)

ларга кўмиб бир то мондан еса

$$A(x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_p^2 > 0 \quad (4)$$

ни

($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ ларнинг баъзиларигина нолдга тенг бўлиши мумкин бўлгани учун), иккинчи томондан еса

$$A(x, x) = -\eta_{p'+1}^2 - \eta_{p'+2}^2 - \dots - \eta_{p'+q'}^2 \leq 0 \quad (5)$$

ни ҳосил қиламиз. Биз зиддиятликка келдик, Демак, $p' > p$ тенгсизликнинг бўлиши мумкин эмас. $p > p'$, $q > q'$ ва $q > q'$ тенгсизликларнинг бўлиши мумкин эмаслиги ҳам худди шунга ўхшаш усул билан исбот етилади. Шундай қилиб, квадратик форма учун инерсия қонуни исбот етилди.

Назорат топшириқлари

1. Чизикли формани тушинтиринг ва мисоллар келтиринг
2. Бичизикли формилани тушинтиринг
3. Бирор базисда $A = (x, x) = \sum_{ik=1}^n a_{i,k} \xi_i \eta_k$ формани сода ҳолатга келтириб буладими?
4. Квадратик формула хакида хулоса чикаринг.

2-асосий савол ЕВКЛИД ФАЗОСИ

2-асосий савол бўйича ўқитувчининг мақсади:

Евклид фазо бўйича тушунча бериш ва ортогонал базисни ургатиш.

Идентив ўқув мақсадлари:

1. Евклид фазосини ўрганади.
2. Ортогонал базисни ва ортогоналлаштиришни ўрганади.

2-асосий савол баёни

Фараз қилайлик R_n бирор Евклид фазоси бўлсин. Бу фазонинг базиси

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad (1)$$

билан белгилаймиз.

Таъриф. Агар (1) базисда ихтиёрий иккитасининг кўпайтмаси

$$(e_i, e_j) = 0 \quad (2)$$

бўлса, у ҳолда (1) базис ортогонал базис дейилади.

Таъриф. Агар (1) базис учун (2) шарт ва

$$(e_i, e_i) = 1 \quad (3)$$

шарт бажарилса, у ҳолда (1) базис ортонормаллашган базис дейилади. (3) дан кўринадики $|e_i| = 1$ яъни

$$|e_i| = \sqrt{(e_i, e_i)} = \sqrt{1} = 1$$

Энди қуйидаги теорэмани келтириб утамиз.

Теорэма Ҳар қандай R Евклид фазосида ортогонал базис мавжуддир.

Исбот. R фазонинг ихтиёрий

$$f_1, f_2, \dots, f_n \quad (4)$$

базисни олиб қараймиз. Агар бу базисни бирор усул билан ортогоналлантирсак теорэма исбот бўлади. Бошқача қилиб айтганда (1) ортогонал базис тузамиз.

$$f_1 = e_1 \quad \text{деб оламмиз.}$$

$$e_2 = f_2 + \alpha e_1 \quad (5)$$

α - номаълум сон. Бу сонни

$$(e_1, e_2) = 0$$

шарт бажариладиган қилиб танлаймиз. Энди (5) қуйидагини ёзамиз.

$$(e_1, e_2) = (e_1, f_2 + \alpha e_1) = (e_1, f_2) + \alpha(e_1, e_1)$$

$$0 = (e_1, f_2) + \alpha(e_1, e_1) \rightarrow \alpha = -\frac{(e_1, f_2)}{(e_1, e_1)}$$

$$\alpha(e_1, e_1) = -(e_1, f_2) \quad , \quad \alpha = -\frac{(e_1, f_2)}{(e_1, e_1)}$$

Бу α қийматни (5) га қўямиз ва e_2 ни топган бўламиз. e_3 ни бундай излаймиз. Яъни

$$e_3 = f_3 e_3 + \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1 \quad (7)$$

$\lambda_1 \lambda_2$ - номаълум сонлар. Бу сонларни

$$\begin{cases} (e_1 e_3) = 0 \\ (e_2 e_3) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

шартлар асосидатоапмиз. Сўнгра (7) га қўйиб

e_3 ни топган бўламиз. (1) дан e_k ларни (4) ёрдаимда.

Юқоридаги 4 та шартни қаноатлантирган фазо Евклид фазоси дейилади.

Мисоллар: 1. ХОУ текисликда берилган векторлар фазоси, скаляр кўпайтмани бундай қабул қиламиз.

$$x = (\alpha_1, \alpha_2) \quad y = (\beta_1, \beta_2) \quad (x, y) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \quad (1)$$

Бундай қабул қилинган скаляр кўпайтма юқоридаги 4 та шартни қаноатлантиради. Бундай Фазо Евклид фазо.

2. $[a, b]$ кесмадаги узлуксиз функциялар фазоси учун

$$(x, y) = (f(t), g(t)) = \int_a^b f(t) g(t) dt \quad (2)$$

Бу фазо ҳам Евклид фазо бўлади. Евклид фазосида x вектор учун

$$\sqrt{(x, x)} = |x| \quad \sqrt{(x, x)} = |x| \quad (3)$$

Аниқланган сон x векторнинг узунлиги дейилади .

Евклид фазосида x ва y векторлар орасидаги бурчак куйидаги формула билан аниқланади .

киради. Фараз етайлик : $\eta_1^* = a_{11} \eta_1 + a_{12} \eta_2 + \dots + a_{1n} \eta_n$ $\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$

(4)

Бу (4) формула куйидагидан олингандир.

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cos \varphi \quad \cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \quad \varphi = x \wedge y$$

куйида Яна бир тенгсизликни келтириб утамыз.

$$\frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1 \quad (x, y) \leq |x| \cdot |y| \quad (5)$$

(3) ни еътиборга олиб (5) куйидагича бўлади.

$$(x, y) \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

$$(x, y) \leq \sqrt{(x, x) \cdot (y, y)} \quad (6)$$

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y) \quad (6^1)$$

киради. Фараз етайлик : $\eta_1^* = a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \dots + a_{1n}\eta_n$ $\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$

(4)

Бу (4) формула куйидагидан олингандир.

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cos \varphi \quad \cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \quad \varphi = x \wedge y$$

куйида Яна бир тенгсизликни келтириб утамыз.

$$\frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1 \quad (x, y) \leq |x| \cdot |y| \quad (5)$$

(3) ни еътиборга олиб (5) куйидагича бўлади.

$$(x, y) \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

$$(x, y) \leq \sqrt{(x, x) \cdot (y, y)} \quad (6)$$

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y) \quad (6^1)$$

(6) – Коши-Бунъяковскийтенгсизлигидир.

Биз юқорида ҳақиқий фазони олиб қарадик, яъни бунда қаралаётган сонлар ҳақиқий сонлардир. Бундай фазолар Евклид фазосидир.

Агар P фазода қаралаётган сонлар комплекс сонлар, у ҳолда Евклид фазо унитар фазо дейилади.

2-маъруза бўйича амалий машғулот

Мавзу: Чизиқли ва квадратик формалар. Евклид фазоси.

Дарснинг мақсади:

Чизиқли, бичизқли, квадратик ва форманинг каноник кўринишга келтиришни мисоллар асосида ўргатиш. Евклид фазосини ўргатиш

Идентив ўқув мақсади:

Квадратик формани каноник кўринишга келтиришни ўрганиб олади. Евклид фазосида ортогоналлаштиришни билади.

Зарурий материал

Проскуряков. И. В.: Сборник задач полинейной алгебре. (М. 1978) китобидан
Н1175-1178, 1187-1189, 1351-1361, 1362.

Дарсда ечиладиган масалалар.

- 1) 1175, 1177, 1351, а), в), с)
- 2) 1187, 1188, 1361

Мустақил бажариш учун

- 1) 1176, 1351, с), д), е), 1189, 1362

Назорат топшириқлар.

1. Евклид фазосини тушунтиринг. Мисоллар келтиринг
2. Коши-Буняковский тенгсизлигини кўрсатинг
 - A) $(x, x) = |x|$
 - B) (x, y)
 - C) $|x| \leq \sqrt{(x, y)}$
 - D) $(y, y) \geq (x, y)$
 - E) $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$
3. Қайси шартда $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ базис ортогоналлашган дейилади?
 - A) $(l_i, l_i) = 0$
 - B) $(l_i, l_k) = 0 \quad i \neq k$
 - C) $(l_i, k) = 1$
 - D) $(l_i, k)^2 = 1$
 - E) $(l_i, l_k) = 0; \quad (l_k, l_k) = 1$
4. Ортогоналлаштириш жараёнини тушунтиринг.

Мавзуга оид илмий муаммолар.

1. Форма тушунчасини киритиш.

2. Чизикли форманинг ифодаси.
3. Квадратик форманинг каноник формаси.
4. Ихтиёрий фазода скаляр кўпайтма.
5. Ихтиёрий базисни ортогоналлаштириш.

Асосий хулосалар ва уларни мустаҳкамлаш.

1. Хулоса. Ҳар қандай квадратик формани каноник кўринишга келтириш мумкин. Функциялар форма кўринишида бўлиши мумкин. Евклид фазосида скаляр кўпайтма муҳим. Ихтиёрий базисни ортогоналлаштириш мумкин. Евклид фазоси- бу чизикли фазо.

2. Мустаҳкамлаш учун саволлар.

1. Чизикли ва бичизикли форма нима?
2. Квадратик форма нима?
3. Ихтиёрий фазода скаляр кўпайтма нима?
4. Евклид фазосига мисол келтиринг.
5. Ортогонал базис нима?

Мавзу бўйича мустақил топшириқлар

1. Бичизикли формулалар, [1], И-боб, §4, п,2, [2], 11-бет
2. Квадратик формани соддалаштириш [1], И-боб, §5, [2], 27-32-бет
3. Ортогонал базис [1], И-боб, §3, [2], 35-37-бет

Адабиётлар:

1. Гелфанд «Чизикли алгебрадан лекциялар» 1961
2. Гаимназаров Г. «Чизикли алгебра элементлари», 1999
3. Назаров. Р.Н ва бошқалар «Алгебра ва сонлар назарияси» 1-кисм, 1993

З-МАЪРУЗА.

МАВЗУ: СҲИЗИҚЛИ ОПЕРАТОРЛАР

АСОСИЙ САВОЛЛАР.

1. Чизикли операторлар ва унинг матрисаси
2. Чизикли операторлар устида амаллар

Мавзуга оид таянч тушунча ва иборалар:

Оператор, оператор матрисаси, йигинди, купайтма, бирлик оператор, тескари оператор.

1-асосий савол бўйича ўқитувчининг мақсади.

1. Чизикли оператор ва унинг асосий матрисаси тушунчасини бериш.

Идентив ўқув мақсадлар:

1. Чизикли операторни тушуниб олади.
2. Оператор матрисасини тузади.

1-асосий савол баёни

Фараз қилайлик R_n бирор чизикли фазо бўлсин. Ихтиёрий x векторини y векторга бирор қонун қоида билан мос келтирайлик. Бундай мослик $\bar{x}$ ни $\bar{y}$ га алмаштириш дейилади. Алмаштиришлар операторлар деб юритилади.

Масалан. 1) $y = f(x) = x^2$ бу ерда қонун ёки қоида квадратга кўтаришдир.

$$x = 2 \rightarrow y = 4$$

$$x = 3 \rightarrow y = 9$$

2) f мослик ҳосила олиш бўлсин. $y = x^2$ бўлса $y' = 2x$

$$y = x^2 \rightarrow 2x = \frac{dy}{dx} \qquad y = \sin x \rightarrow \cos x = y'$$

Демак операторлар амаллардир. Яна бунга мисоллар келтирайлик. Векторларни паралел кўчириш, симметрия, проекциялар, буриш ва хоказолар. Шундай қилиб операторларни амаллар деймиз. Уларни

$A, B, C, \dots$ харфлар билан белгилаймиз. $Ax = y$

$x \in R_n, y \in R_n$ ёки $y \notin R_n$ бўлиши ҳам мумкин.

Таъриф. Агар бирор A оператор R_n фазода қуйидаги шартларни қаноатлантирса, у ҳолда бундай оператор чизикли оператор дейилади.

$$1) A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$$

$$2) A(\lambda x) = \lambda Ax, \lambda - \text{ўзгармас сон.}$$

Мисоллар

И) R_n да x га ўтказувчи операторни олиб қарайлик.

$Ax = x, Ax_1 = x_1, Ax_2 = x_2$ юқоридаги шартларни текширамиз.

$$1. A(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = Ax_1 + Ax_2$$

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$$

$$2. A(\lambda x) = \lambda x, x = Ax$$

$$A(\lambda x) = \lambda Ax$$

Демак, бундай оператор чизикли оператор. Бундай операторни бирлик ёки айният оператор дейилади.

2) $x \rightarrow 0, \forall x$ яъни x вектор нол векторга ўцин. $Ax = 0$ бундай оператор ноловой оператор дейилади. Бу оператор ҳам чизиклидир, чунки

$$1. A(x_1 + x_2) = 0 = 0 + 0 = Ax_1 + Ax_2$$

$$2. A(\lambda x) = 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda Ax$$

3) $Ax = -x$ чизикли оператор, бу векторни қарама-қарши тасвирлаш ёки ойнали тасвирлаш оператори .

4) $Ax = x^2$ хақиқий сонлар фазосида

$$x_1, x_2 \quad Ax_1 = x_1^2, \quad Ax_2 = x_2^2 \quad A(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2 = Ax_1 + Ax_2$$

$$A(x_1 + x_2) \neq Ax_1 + Ax_2$$

айтганда оператор берилганда биз унинг матрисасини туза оламиз. Уз навбатида ҳар қандай матриса оператордан иборатдир.

Масалан фазонинг векторлари $x = (a_1, a_2, a_3)$ $Ax = y = (a_1, 2a_2, 3a_3)$ бу операторнинг $e_1 = (1,0,0)$ $e_2 = (0,1,0)$ $e_3 = (0,0,1)$ базисдаги матрисаси тузилсин.

$$Ae_1, Ae_2, Ae_3 = ?$$

$$Ae_1 = (1, 2 \cdot 0, 3 \cdot 0) = (1, 0, 0)$$

$$Ae_2 = (0, 2 \cdot 1, 3 \cdot 0) = (0, 2, 0)$$

$$Ae_3 = (0, 2 \cdot 0, 3 \cdot 1) = (0, 0, 3)$$

$$\begin{cases} Ae_1 = (1, 2 \cdot 0, 3 \cdot 0) = (1, 0, 0) \\ Ae_2 = (0, 2 \cdot 1, 3 \cdot 0) = (0, 2, 0) \\ Ae_3 = (0, 2 \cdot 0, 3 \cdot 1) = (0, 0, 3) \end{cases} \quad (1)$$

$$Ae = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2) \text{ дан}$$

$$Ae_1 = (1, 0, 0) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

$$Ae_2 = (0, 2, 0) = 0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

$$Ae_3 = (0, 0, 3) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3$$

$$Ae = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ae операторнинг базисдаги матрисаси.

Назорат топшириқлари.

1.1. Қуйидагилардан нечтаси чизикли оператор бўлади.

1) $Ax = x$

2) $Ax = -x$

3) $Ax = x + a$

4) $Ax = 2x$

5) $Ax = \frac{dx(t)}{d(t)}$

6) $Ax = \int_a^b x(t) dt$

А) ҳаммаси

В) учтаси

С) бирортаси эмас

Д) Фақат 5 ва 6 Е) фақат 7 дан бошқаси

1.2 Оператор матрисасини тушунтиринг

1.3 Бирлик матриция учун матриция тузинг

2-асосий савол.

Чизиқли операторлар устида амаллар

2-асосий савол бўйича ўқитувчининг мақсади.

Оператор устида амаллар ўргатиш.

Идентив ўқув мақсадлари.

2.1 Операторларни кўпайтиришни ўрганиб олади.

2.2 Тескари операторни тушуниб олади.

2-асосий савол баёни

Фараз қилайлик R_n фазода A, B чизиқли операторлар берилган бўлсин.

Ихтиёрий x вектор учун шундай C оператор мавжуд бўлиб $Ax + Bx = Cx$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда C оператор A ва B операторнинг йиғиндиси дейилади. Операторнинг йиғинедисини $A + B = C$ деб ёзамиз.

Операторларнинг йиғиндиси қуйидаги қонунларга бўйсунди.

1. $(A + B)x = (B + A)x$ комутативлик.

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ ассоциативлик

Энди операторнинг кўпайтмасини кўриб ўтамиз. Агар оператор x векторни y ўтказса ва B оператор y ни z га ўтказса, яъни $Ax = y$, $Bu = z$ бўлса, у ҳолда x векторни z га ўтказувчи C оператор A ва B операторлар кўпайтмаси дейилади.

$BAx = B(Ax) = Cx = z$ деб ёзилади. Операторларнинг кўпайтмаси қуйидаги қонунларга бўйсунди.

1. $AB \neq BA$

2. $A(BC) = (AB)C$

$$3. A(B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Операторлар кўпайтмасы операторларнинг кетма-кет бажарилишидан иборат. 1-хоссани кўриб ўтамиз, яъни $AB \neq BA$ муносабатни кўрсатамиз. A оператор геометрик маънода x ни Ox ўқига проекциялашни олайлик. B деб векторнинг 90° га бурилишини олайлик.

$$Ax_1 = np_{Ox} x_1 = x_1, x_1 \perp x_2 \quad B(Ax_1) = Bx_1 = x_2, BAx_1 = x_2 \neq 0$$

$$Bx_1 = x_2, A(Bx_1) = Ax_2 = np_{Ox} x_2 = 0, ABx_1 = 0 \quad x_2 \neq 0, A \cdot B \neq B \cdot A$$

Тескари операторлар.

Агар A оператор x векторни y га ўтказган бўлиб, $Ax = y, By = x$ бўлса y ҳолда A ва B бир-бирига тескари оператор дейилади. A операторга тескари оператор A^{-1} деб ёзилади. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ бирлик оператор ўзини-ўзига ўтказаверади. $Ex = x$

Мисол. A интеграллаш ва B ҳосила олиш бўлсин.

$$x = t^2, \quad Ax = \frac{1}{3}t^3 + C, \quad B(Ax) = t^2$$

тескари операторнинг мавжуд бўлиши оператор матрисаларининг махсус ёки махсусмас бўлишига боғлиқдир. Агар оператор матрисанинг дитерминанти нолдан фарқли бўлса, яъни матриса махсусмас бўлса, y ҳолда бундай операторга тескари оператор мавжуд. Шундай қилиб тескари оператор мавжуд бўлиши учун унинг матрисаси махсусмас бўлиши керак.

Мисол. A оператор дифференциаллаш бўлсин. Шу операторни кўпёҳадлар базисида $(1, x, x^2, x^3)$ кўриб ўтайлик.

$$R_3(t) = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\} \text{ системалар кўпёҳадни ташкил этади. Масалан}$$

$$R_3(t) = \{t_1(t), x_2(t), x_3(t), x_3(t), \dots\} \quad x_1(t) = 1 - 2t^2 \quad x_2(t) = -2 + t + \frac{3}{2}t^2 + t^3$$

$$x_3(t) = -3 + t + t^2, \quad x_4(t) = 5 + 3t$$

$(1, x, x^2, x^3)$ базис бўлади, чунки

$$\{\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 = 0\}, \quad \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

базисга A векторни татбиқлаймиз.

$$e_0 = 1, e_1 = t, e_2 = t^2, e_3 = t^3$$

$$A e_0 = 0, A e_1 = 1, A e_2 = 2t, A e_3 = 3t^2$$

$$A e_0 = 0 = 0 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

$$A e_1 = 1 = 1 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

$$A e_2 = 2 = 0 \cdot e_0 + 2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

$$A e_3 = 3 = 0 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) даражси 3 дан ошмайдиган кўпхадлар фазасидаги дифференциаллаш операторининг матрисасидир, бунда

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Демак, } A^{-1} \text{ мавжуд эмас.}$$

3-мартга бўйича амалий машғулот

Мавзу: Чизикли операторлар

Дарснинг мақсади:

Чизикли операторлар ва улар устида амалларни мисол, масалалар ечиш билан ўргатиш.

Идентив ўқув мақсадлари:

Операторлардан чизикли бўлганини билиб олади ва улар устида амалларни бажара олади.

Зарурий материаллар

Проскуряков.И.В: Сборник задач полинейной алгебре.(М.1978) китобидан Н1441-1444-1446,1449-1452.

Дарсда ечиладиган масалалар

- 1) 1441,1443,1445
- 2) 1949,1951

Мустақил ечиш учун

- 1) 1442,1444,1446
1950,1952

НАЗОРАТ ТОПШИРИҚЛАР.

1. Операторларни кўпайтиришни тушунтиринг.
2. $AB=BA$ муносабатга мисол келитиринг ва изоҳланг, хулоса чиқаринг.
3. $AX=B$ тенгликда X операторни топиш учун қайси бир муносабат ўринли? Тескари операторни изоҳланг.

A) $x = \frac{B}{A}$ B) $x = A^{-1}B$ C) $x = BA^{-1}$

D) $x = B^{-1}A$ D) $x = AB^{-1}$

4. A операторининг тескари оператори мавжудлик шарти нимадан иборат? Изоҳланг

Мавзуга оид илмий муаммолар.

1. Чизикли оператор тушунчаси.
2. Операторни матрица кўринишда тасвирлаш.
3. Операторларнинг кетма-кет бажарилиши.
4. Тескари операторнинг мавжудлиги.

Асосий хулосалар ва уларни мустаҳкамлаш.

1. Хулоса. Бир векторни бошқа векторга ўтказувчи амалиёт оператор. Операторни матрица кўринишида тасвирлаш мумкин. Ҳар қандай матрица – бу оператор. Операторлар кўпайтмаси бу операторларнинг кетма-кет бажарилиши. Оператор матрицаси махсусмас бўлса, у ҳолда тескари операторлар мавжуд.

2. Мустаҳкамлаш учун саволлар.

1. Чизикли оператор нима ?
2. Оператор матрицаси қандай тузилади ?
3. Матрица ўзгариши нима ?
4. Операторлар устида қандай амаллар бажарилади ?
5. Тескари оператор қандай ҳолда мавжуд.

МАВЗУ БЎЙИЧА МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. Чизикли оператор ва улар устида амаллар. [1], 2-боб, 9, [2], 2-боб
Пункт 12, 17 бет.
2. Инвариант қисм фазолар [2], 18 бет. [1], 2-боб 10

АДАБИЁТЛАР:

1. Гелфанд «Чизикли алгебрадан лекциялар» 1961

2. Гаимназаров Г. «Чизиқли алгебра элементлари», 1999

3. Фаддеев. Д. К. “Лекция по алгебре” 1984

4-МАЪРУЗА.

МАВЗУ: ОПЕРАТОРНИНГ ХОС ВЕКТОРЛАРИ ВА ХОС СОНЛАРИ.

Асосий савол.

Хос векторлар ва хос сонлар.

Мавзуга оид таянч тушунча ва иборалар:

Хос векторлар, хос сон, хара̀теристик кўпхад, хара̀теристик тенглама

Асосий савол бўйича ўқитувчининг мақсади:

Операторнинг хос векторини ва хос сонларини топишни ўргатиш.

Идентив ўқув мақсадлари:

1. Хос сонларни топиш учун хара̀теристик тенглама туза олади.
2. Хос векторларни топиш учун чизиқли тенгламалар системасини туза олади.

Асосий савол баёни

Фараз қиламиз R_n чизиқли фазода A оператор берилган бўлсин.

Таъриф. Агар A оператор R_n фазонинг x векторини ўзига хос λ_x векторга ўтказса, яъни

$$Ax = \lambda x \quad (1)$$

бўлса, у ҳолда бундай x вектор A операторнинг махсус вектори дейилади.

Бу ерда λ махсус сон дейилади. Бу таърифни қисқача бундай ҳам айтиш мумкин. Агар x вектор (1) шартни қаноатлантирса, махсус вектор дейилади. Махсус векторни бундай ҳам таърифлаш мумкин.

Таъриф . Агар бирор x вектор A оператор туфайли ўзига ўхшаш λ_x векторга ўца, яъни $Ax = \lambda x$ бўлса, у ҳолда бундай вектор махсус вектор дейилалди.

Мисоллар: A оператор нол оператор бўлсин. $Ax = 0, x$ вектор бирор R фазодан олинган. Шу операторнинг махсус векторларини олиб қарайлик.

$$0 = 0 \cdot x$$

$$\lambda x = 0 = 0 \cdot x$$

$$\lambda = 0$$

нол оператор учун махсус сон $\lambda = 0$ бўлиб, ҳамда x векторлар махсус вектор бўла олади.

2. Айният оператори (ёки бирлик) операторини олиб қарайлик.

$$Ax = x = 1 \cdot x, \lambda = 1, x \neq 0 \text{ махсус сон } 1.$$

3. $Ax = -x$ ойнали оператор.

$$Ax = -x = (-1)x \quad \lambda = -1, x \neq 0 \text{ махсус сон } -1.$$

Характеристик кўпхад.

R_n Фазода берилган A операторнинг махсус векторларини топишни кўриб ўтаимиз. Буни ушбу теорэма орқали ифодалаймиз.

Теорэма. R_n фазода берилган A чизикли оператор ҳеч бўлмаганда битта махсус векторга ега.

Исбот. x вектор A операторнинг махсус вектори бўлсин.

$$Ax = \lambda x \quad (\text{И})$$

Фазонинг базасини

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad (2)$$

билан белгилаймиз. x вектори базис орқали ифодалаймиз.

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n \quad (3)$$

$$\lambda x = \lambda_{\xi_1} e_1 + \lambda_{\xi_2} e_2 + \cdots + \lambda_{\xi_n} e_n \quad (4)$$

А операторнинг чизиқлигини еътиборга олиб (3) га кўра ушбунни ёзамиз

$$Ax = A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n) = A(\xi_1 e_1) + A(\xi_2 e_2) + \cdots + A(\xi_n e_n) = \xi_1 A e_1 + \xi_2 A e_2 + \cdots + \xi_n A e_n \quad (5)$$

Энди (4) билан (5) дан ушбуни ёзамиз.

$$\lambda_{\xi_1} x + \lambda_{\xi_2} e_2 + \lambda_{\xi_n} e_n = \xi_1 A e_1 + \xi_2 A e_2 \cdots + \xi_n A e_n$$

А операторнинг (2) базисдаги матрисасини олиб қарайлик.

$$Ae = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Бу берилган (2) базисдаги A операторнинг матрисаси. Бу матрисага асосан қуйидагиларни ёзамиз.

[illegible]

Энди (7) ва (6) га қўйиб қуйидагиларни ҳисоблаймиз. Натажада қуйидагиларни ҳосил қиламиз.

$$\begin{aligned} & (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n)e_1 + (a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n)e_2 + \cdots + (a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n)e_n = \\ & \lambda_{\xi_1}e_1 + \lambda_{\xi_2}e_2 + \cdots + \lambda_{\xi_n}e_n \end{aligned} \quad (2)$$

векторлар системаси базис бўлганлигидан охирги тенгликдан қуйидагиларни ҳисоблаймиз.

$$\begin{aligned} &a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n = \lambda\xi_1 \\ &a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n = \lambda\xi_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n = \lambda\xi_n \end{aligned}$$

Бундан

(8)

(9) нўмалумларга нисбатан бир

жинсли тенгламалар системасидир. Бу бир жинсли тенгламалар системаси нол эмас ечимга ега бўлиши учун унинг дитерминанти

(10)

Бўлиши зарур ва кифоя. Бу (10) λ га нисбатан n – даражали алгебраик тенгламадир. Бунинг чап томони λ га нисбатан n даражали кўпхад. Бундай кўпхад характеристик кўпхад дейилади. Шундай қилиб

(11)

Бу (III) ни ечиб λ_i махсус сонларни топамиз. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ларни (8) га қўйиб (9) ни топамиз. Демак (2) кўринишдаги махсус векторларни топамиз. Бу махсус векторлар битта ёки бир нечта бўлиши мумкин. (8) система характеристик (ҳал қилувчи) система дейилади.

Оператор матрисасининг детерминанти ва унинг изи.

Фараз илайлик R_n фазода A оператор берилган бўлсин.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Характеристик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

буни ёйиб бунда ёйишимиз мумкин.

$$(-1)^n \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + b_2 \lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1} \lambda + b_n$$

ёки

$$(-1)^n (\lambda^n - P_1 \lambda^{n-1} + P_2 \lambda^{n-2} + \cdots + P_n) = 0 \quad (2)$$

Бунинг чап томони n – даражали кўпхад ва уни қуйидагича белгилаймиз.

$$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - P_1 \lambda^{n-1} + P_2 \lambda^{n-2} + \cdots + P_n) = 0 \quad (3)$$

Махсус векторларни топишда (3) кўпхад асосий ролни ўйнайди.

λ махсус сонларни топиш асосий масала бўлиб қолади. Бу махсус векторларни топиш учун $P(\lambda)$ нинг даражаси юқори бўлганда илдизларни топиш яъни (2) тенгламани ечиш мураккаблашади. Бу ерда коэффициентлар $P_1, P_2, \dots, P_n$ асосий рол ўйнайди. (3) даги P_n озод хад A матрицанинг дитерминантидан иборат, яъни P_1 коэффициент матрица бош дииоганалининг элементлари йиғиндисидан иборат. P_2 коэффициент 2-тартибли бош минорларнинг йиғиндисидан иборат, яъни 2-тартибли дитерминантлар йиғиндисидир.

Юқорида қайт қилиндики P_1 коэффициент бош дииоганал элементлари йиғиндисидан иборат. Бу A операторнинг изи дейилади. Вийета формуласига асосан операторнинг изи характеристик кўпхадларнинг илдизлари йиғиндисига тенг.

$$P_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ лар (2) нинг илдизи.}$$

Агар операторнинг матрисаси дииоганал кўринишда бўлса, яъни

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ушбу характеристик тенглама қуйидагича бўлади.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \dots, \lambda_n = a_{nn}$$

Бундан кўринадики агар матрисанинг дитерминанти ўзгармаган ҳолда диагонал кўринишга келтирилса масала жуда осонлашади.

Энди биз A матрица билан биргаликда $A = \lambda E$ матрисани кўриб ўтамыз.
 E бирлик матрица.

$$A = \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \text{ ёки } |A - \lambda E| = 0 \quad \text{бунга асосан} \quad P(\lambda) = |A - \lambda E| = \det(A - \lambda E)$$

Энди буларга таълуқли бўлган қуйидаги теорэмани келтирамыз.

Теорэма. (Гамильтон-Кели) агар $P(\lambda)$ кўпхад A операторнинг характеристик кўпхади бўлса, у ҳолда $P(A) = 0$ бўлади.

Бу теорэмани исботлаш учун ёрдамчи лиммани кўриб ўтамыз.

Лемма. Агар $P(\lambda)$ кўпхад қуйидаги кўринишда бўлиб,

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \lambda + a_m \\ P(\lambda)E &= (A - \lambda E)C(\lambda) \end{aligned} \quad (4)$$

бўлиб,

$$C(\lambda) = C_0 \lambda^{m-1} + C_1 \lambda^{m-2} + \cdots + C_{m-1}$$

бўлса, у ҳолда $P(A) = 0$ бўлади.

$C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$ – матрисалар.

Бу леммани бундай исботлаш мумкин.

$$P(A)E = (A - AE)C(A), \quad AE = A \quad \text{бундан}$$

$$P(A) = 0 \quad P(A) = 0, \quad P(A)E = P(A).$$

4-мартуза бўйича Амалий Машғулоти.

Мавзу: Операторнинг хос векторлари ва хос сонлари

Дарсинг мақсади:

Характеристик тенглама асосида операторнинг хос сонлари ва хос векторларини топишни ўргатиш.

Идентификатор мақсади:

Операторнинг хос сонларини ва унга мос бўлган векторларни топаолади.

Зарурий материаллар.

Проскурянов И.В. Сборник задач полинейной алгебре.(М.1978)
китобидан № 1465-1474, 1487, 1488, 1489.

Дарсда ечиладиган масалалар.

- 1) 1465, 1467, 1469, 1471
- 2) 1487, 1488

Мустақил ечиш учун.

1466, 1468, 1472, 1473

НАЗОРАТ ТОПШИРИҚЛАРИ:

1. Хос векторларни тушунтириш ва хос сонлар билан боғлаб изоҳланг.
2. Характеристик тенгламани тузишни изоҳланг ва бундан нимани аниқлаш мумкинлигини айтиш. Тўғри жавобни кўрсатиш.
А) Хос вектор координаталарини аниқлаймиз.
В) Хос сонларни топамиз.

- С) Детерминантнинг 0 га тенглигини кўрсатамиз.
 - Д) Матрисанинг ранги топилади.
 - Е) n - даражали тенгламани ечиб ҳамма хос сонлар топилади.
3. Характеристик кўпхад нима ва у қандай хоссаларга ега?
 4. Хос векторларни топиш усулини изоҳланг.

Мавзуга оид илмий муаммолар.

1. Хос вектор тушунчасини киритиш.
2. Характеристик кўпхад тузиш.
3. Характеристик тенгламанинг илдизини аниқлаш.
4. Хос векторларни тузиш.

Асосий хулосалар ва уларни мустаҳкамлаш.

1. Хулоса. Ихтиёрий вектор, оператор туфайли ўзига ўхшаган векторга ўца, у хос вектор бўлади. Оператор ҳеч бўлмаганда бита хос векторга ега. Характеристик тенглама – бу алгебраик тенглама. У матрица детерминанти орқали тузилади. Хос сонга мос келувчи хос векторлар чексиз кўпдир.

2. Мустаҳкамлаш учун саволлар.

1. Операторнинг хос вектори нима ?
2. Операторнинг хос сони нима ?
3. Характеристик кўпхад қандай тузилади.
4. Характеристик тенглама илдизлари қандай бўлади ?
5. Илдизларга мос равишда хос векторлар қандай топилади ?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР.

1. Оператор матрисасининг детерминанти ва изи.
2. 21-23 бет, 1, 10, пункт 4.

АДАБИЁТЛАР:

1. Гелфанд «Чизиқли алгебрадан лекциялар» 1961
2. Гаимназаров Г. «Чизиқли алгебра элементлари», 1999
3. Фаддеев. Д. К. «Лекция по алгебре» 1984

5-МАЪРУЗА.

МАВЗУ: МАТРИСАЛАРНИНГ ЖОРДАН НОРМАЛ ФОРМАСИ.

АСОСИЙ САВОЛ: ЖОРДАН НОРМАЛ ФОРМАСИ.

МАВЗУГА ОИД ТАЯНЧ ТУСХУНСҲА ВА ИБОРАЛАР:

λ -матриса, каноник λ -матрисалар, детерминант бўлувчилари, инвариант кўпайтирувчилар, ўқшашлик, эквивалентлик, Жордан форма.

Асосий савол бўйича ўқитувчининг мақсади:

Жордан матрисаларини ўргатиш.

Асосий саволдан келиб чиқадиган идентификатор ўқув мақсадлар:

2.1. Жордан матрисасининг кўринишини билади.

2.2. Бекрилган операторни Жордан матрисаси кўринишига келтириш мумкинлигини ўрганиб олади.

Асосий савол баёни

R_n фазода A чизикли оператор берилган бўлсин. A операторнинг $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ хос қийматларига мос чизикли боғланмаган K та $K \leq n$ $e_0, f_0, \dots, h$ хос векторлар мавжуд деб фараз қилайлик. Бу ҳолда K группа,

$$e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, h_1, \dots, h_s \quad (1)$$

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, Ae_2 = e_1 + \lambda_1 e_2, \dots, Ae_p = e_{p-1} + \lambda_1 e_p$$

$$Af_1 = \lambda_2 f_1, Af_2 = f_1 + \lambda_2 f_2, \dots, Af_q = f_{q-1} + \lambda_1 f_q \quad (2)$$

$$Ah_1 = \lambda_k h_1, Ah_2 = h_1 + \lambda_k h_2, \dots, Ah_s = h_{s-1} + \lambda_k h_s$$

Кўринишда бўлади. Кўрамизки ҳар бир группанинг базис векторлари бу операторда шу группа векторларининг чизикли комбинациясига ўтади. Бундан базис векторларининг ҳар бир группаси.

A операторга нисбатан инвариант қисм фазони вужудга келиши келиб чиқади. (2) формула билан берилган операторни бир мунча тўлароқ кўриб чиқайлик.

Ҳар бир группада вужудга келган қисм фазода махсус вектор бор, масалан, $e_1, e_2, \dots, e_p$ вектордан вужудга келган қисм фазода бундай махсус вектор e_1 бўлади. Ҳақиқатдан ми сол учун $e_1, e_2, \dots, e_p$ векторлардан вужудга келган қисм фазони қарайлик. Бу қисм фазонинг бирор вектори, яъни $c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_p e_p$ кўринишдаги бирор чизикли комбинация (e ларнинг ақалли биттаси нолга тенг эмас) махсус вектор бўлсин, яъни

$$A(c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_p e_p) = \lambda(c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_p e_p)$$

кўринишдаги бирор чизикли комбинация ҳосил бўлади. Бунинг чап томонига (2) формулага мувофиқ унинг ифодасини қўйсак

$$C_1 \lambda_1 e_1 + C_2(e_1 + \lambda_1 e_2) + \dots + C_p e_{p-1} + \lambda_1 e_p = \lambda C_1 e_1 + \lambda C_2 e_2 + \dots + \lambda C_p e_p$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундаги

базис векторларидан ҳар бирининг коэффициентларини тенглаштирсак

$\lambda_1, C_1, C_2, \dots, C_p$ миқдорни аниқлаш учун

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1\lambda_1 + C_2 = \lambda C_2 \\ C_2\lambda_1 + C_3 = \lambda C_2 \\ \dots\dots\dots \\ C_{P-1}\lambda_1 + C_P = \lambda C_{P-1} \\ C_P\lambda_1 = \lambda C_P \end{array} \right.$$

тенгламалар системасига ега бўламиз.

Дастлаб $\lambda = \lambda_1$ еканлигини кўрсатамиз. Хақиқатдан $\lambda \neq \lambda_1$ бўлган ҳолда сўнги тенгликдан $C_p = 0$ деган натижани олган бўлар едик ва ундан сўнг қолган тенгликлардан $C_{p-1} = C_{p-2} = \dots = C_2 = C_1 = 0$ экани келиб чиқар еди. Шундай қилиб $\lambda = \lambda_1$. Шундай бўлса тенгликдан $C_2 = 0$, иккинчисидан $C_3 = 0$ ва хоказо $C_p = 0$ ларни ҳосил қиламиз. Бинобарин,, махсус вектор $C_1 e_1$ га тенг ва Демак, у кўпайтувчисига Аниқлик Билан мос группаларнинг биринчи векторига тенг.

(2) алмаштиришнинг матрисасини ёзиб оламиз. Хар бир группанинг векторлари шу группа векторларининг чизиqli комбинациясига алмашгани учун алмаштириш матрисасининг биринчи p та устунидан фақат биринчи p та юл элементларигина нолдан фарqli бўла оладилар, бундан кейинги q та устунининг шу устунлар номерлари билан бир хил номерли юлларида турган элементларигина нолдан фарqli бўлишлари мумкин ва ҳоказо. Шундай қилиб берилган базисда алмаштириш матрисаси бош диогонал бўйича жойлашган. K та катакдан иборат бўлиб, бу катакларнинг ҳеч бирига тегишли бўлмаган элементларнинг ҳаммаси нолга тенг бўлади. А алмаштириш матрисасининг K хар бир катагида қандай элемент туришини билиш учун группа векторларининг қандай алмаштиришини Яна бир марта ёзиш кифоя. Буни ёзсак

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \lambda_1 e_1 \\ Ae_2 &= e_1 + \lambda_1 e_2 \\ &\dots\dots\dots \\ Ae_{p-1} &= e_{p-2} + \lambda_1 e_{p-1} \\ Ae_p &= e_{p-1} + \lambda_1 e_p \end{aligned}$$

Базиснинг маълум алмаштиришига жавоб берадиган матрисанинг қандай тузилишини

ёдга олсак, векторларнинг берилган группасига мос бўлган матрисанинг катаги

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Кўринишда бўлишини топамиз. Бутун матрисага келсак, у мос тартибда $P, Q, \dots, S$ тартибли шунга ўхшаш матрисалардан тузилган яъни қуйида Жорданнинг нормал шаклидаги матрисаси ёки қисқача Жордан матрисаси деб аталувчи матрисани ҳосил қиламиз (баъзан матрисанинг Жордан шакли деб ҳам юритилади).

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & 1 & \cdots & 0 \\ & & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & \lambda_k & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Бунда катакчадан ташқари ҳамма элементлар —ноллар.

5-мартуза бўйича амалий машғулат.

Мавзу: Матрисанинг Жордан нормал формаси.

Дарсинг мақсади: Кўпхадли матрисаларни ва уни Жордан формасига келтиришни мисол, масала билан ўргатиш.

Идентиф ўқув мақсадлари: λ -матрисаларни билади, Жордан катакларини билади, ихтиёрий матрицани Жордан формасига келтиради.

Зарурий материаллар

Искандаров Р. Олий алгебра, ИИ- қисм, Т. 1963. китобидан:

- 1) 102-123 бетдан мисоллар
- 2) 124-143 бетдан мисоллар.

Дарсда ечиладиган мисоллар.

- 1) 102, 105, 109, 113, 117 бетдаги мисоллар-масалалар
- 2) 125, 126, 128, 134, 139, 141 бетдаги масалалар.

Мустақил ечиш учун.

- 1) 122 бетдаги №1а) б) в), №2, №3 а) с)
- 2) 143 бетдаги 1,2,5,6 масалалар.

Назорат топшириқлари.

1. Жордан катакларини тушунтиринг.
2. Жордан катагини характеристик кўпхадларини изоҳланг
3. Қолдирилган сўзларни ёзинг.

R унитар (комплекс) фазода A операторнинг

.....

базисдаги матрисаси учун шундай базис мавжудки, бу базисда

..... нинг матрисаси Жордан матрисасидан иборат.

Буни изоҳланг.

4. матрисанинг Жордан нормал кўринишини изоҳланг.

Мавзуга оид илмий муаммолар.

1. Жордан матрицаси.
2. λ – га оид Жордан катаги.
3. Операторни Жордан матрицасига келтириш.

Асосий хулосалар ва уларни мустаҳкамлаш.

1. Хулоса. Жордан матрицасида катаклар диагонал бўйича жойлашган. Қандай операторни Жордан матрицаси кўринишига келтириш мумкин.

2. Мустаҳкамлаш учун саволлар.

1. Жордан катаги нима ?
2. Жордан матрицаси нима ?
3. λ – га оид Жордан катаклари нима ?
4. Жордан матрицага таалукли теорэмани айтинг.

Адабиётлар.

1. Хожиев Ж..Х,Файнлеб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси, Тошкент «Ўзбекистон» , 2001й
2. Курош А.Г. Олий алгебра курси , Тошкент «Ўқитувчи», 1967й
3. Гельфанд И.М. Сборник задач по линейной алгебре

6-маъруза.

Мавзу: Евклид фазосида чизикли оператор.

Асосий саволлар:

1. Унитар ва Евклид фазосида операторлар.
2. Унитар ва ортогонал операторлар.
3. Мусбат операторлар.

Таянч иборалар ва тушунчалар.

Унитар фазо, нормал оператор, мусбат оператор, қўшма оператор, ортогонал оператор, унитар оператор, махсус операторнинг триганаметрик шакли.

1-асосий савол бўйича ўқитувчининг мақсади.

Евклид фазосида нормал, қўшма операторларни тушунтириш ва хоссаларини ўтганиш

1-асосий саволдан келиб чиқадиган идентив ўқув мақсадлари:

1. Нормал операторни ва унинг хоссаларини ўрганиб олади. ва хоссаларини ўзлаштириб олади.
2. Қўшма ва ўз-ўзига қўшма операторни ўрганиб олади ва хоссаларини ўзлаштириб олади.

1-асосий савол баёни

Фараз қилайлик R_n Евклид фазоси бўлсин. Бу фазда

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$$

$$y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n$$

иккита векторни олиб қарайлик. Бу векторларда

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad (1)$$

фазонинг базиси. Бу фазода $A(x, y)$ бичизикли функцияни олиб қарайлик ва уни қуйидагича ёзамиз.

$$A(x, y) = \sum_{i,k=1}^n a_{i,k} \xi_i \eta_k \quad (2)$$

Бу (2) суммани бошқача кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Буни биз қуйидагича ёзамиз

$$A(x, y) = (a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \dots + a_{n1}\xi_n)\eta_1 + (a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n)\eta_2 + \dots + (a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \dots + a_{nn}\xi_n)\eta_n \quad (3)$$

(3) даги қавсларни бизлар мос равишда $e_1, e_2, \dots, e_n$ билан белгиласак

$$e_k = a_{1n}\xi_1 + a_{2k}\xi_2 + \dots + a_{nk}\xi_n \quad (4)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n$$

десак (3) ниқуйидагича ёзиш мумкин.

$$A(x, y) = e_1\eta_1 + e_2\eta_2 + \dots + e_n\eta_n \quad (5)$$

η_k - комплекс сон η_k - га қўшма.

Агар (5) даги e_k ларни бирор z векторнинг координаталари деб карасак, яъни

$$Z = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \dots + \zeta_n e_n \quad (6)$$

у ҳолда (5) ни биз қуйидагича ёзишимиз мумкин.

$$A(X, Y) = (Z, Y) \quad (7)$$

Z вектор x вектордан ҳосил бўлгандир. Уни A оператор деб қабул қиламиз, яъни

$$Ax = Z \quad \text{Буни ётиборга олсак} \quad (7) \quad \text{ни бундай ёзамиз.}$$

$$A(x, y) = (x, y) = (Ax, y) \quad (8)$$

Бу (8) дан кўринадики E вклид фазосида ҳар қандай бичизиқли формагақандайдир оператор тугри келади. Буни тескариси, яъни ҳар қандай операторга чизиқли функция мос келади дейиш ҳам мумкин. Бу мослик бир қийматлидир. Худи юқоридагидек биз қуйидагича ҳосил қилишимиз мумкин.

$$A(x, y) = (x, A^* y) \quad (9)$$

A^* оператор A оператордан фарқ қилиши мумкин. Уларнинг матрисалари бир-биридан транспозициялаш туфайли ҳосил бўлади.

$$\text{ТАЪРИФ. Агар} \quad (Ax, y) = (x, A^* y) \quad (10)$$

шарт бажарилса, у ҳолда A ва A^* операторлар Евклид фазосида бир-бирга қўшма операторлар дейилади. қўшма операторлар ҳуди комплексқўшма сонларга ўхшашдир.

Теорэма. Евклид фазосида ҳар бир A операторга бита қўшма оператор мос келади. Бу теорэмани исботини биз юқорида (8), (9) ларни келтириб чиқаришда қайд қилиб ўтдик. Энди (8) ва (9) дан қуйидагини ёзамиз.

$$(Ax, y) = A(x, y) = (x, A^*y).$$

қўшма операторлар қуйидаги хоссаларга эга.

$$1^0. (AB)^* = B^*A^*$$

$$2^0. (A^*)^* = A$$

$$3^0. (A+B)^* = A^*+B^*$$

$$4^0. (\lambda \cdot A^*) = \lambda \cdot A^*$$

$$5^0. E^* = E \quad \text{бирлик оператор}$$

4^0 -даги λ , $\bar{\lambda}$ комплекс сонлар қуйидагича. $\lambda = a + bi$, $\bar{\lambda} = a - bi$

A оператор ва унинг қўшмаси A^* орасида

$$A = A^* \quad (11)$$

шартни қаноатлантирувчи оператор ҳам мавжуд. Бундай операторлар ўз-ўзига қўшма дейилади. Ёки Ермит операторлари ҳам дейилади.

Ҳақиқий Евклид фазосининг ўз-ўзига қўшма операторларисимметрик оператор дейилади.

Теорэма. 1. A чизикли операторнинг ўз-ўзига қўшма бўлиши учун (Ax, y) ифода Ермитнинг бичизикли формасидан иборат бўлиши зарур ва кифоя.

Исбот. Ҳақиқатан (Ax, y) нинг Ермитформаси бўлиши

$$(Ax, y) = (Ay, x) \quad (a)$$

Еканини билдиради. A алмаштиришнинг ўз-ўзига қўшма бўлиши еса

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad (б)$$

еканини билдиради . (а) ва (б) тенгликларнинг бир-бирига эквивалент эканлигини куриш осон. Хаар қандай ζ комплекс сони $\zeta = \alpha + i\beta$ курунишда тасвирласа бўлади. Бунда α ва β ҳақиқий сонлар.

Теорэма 2. Хар қандай A чизикни операторнинг

$$A = A_3 + iA_2 \quad (12)$$

курунишда тасвир етилиши мумкин. , бунда A_2 ва A_3 лар ўз-ўзига қўшма операторлар

Ибот Ҳақиқатан $A = \frac{A + A^*}{2} + i \frac{A - A^*}{2}$ Энди $\frac{A + A^*}{2} = A_1$ $\frac{A - A^*}{2i} = A_2$

фараз етилса

$$A_1^* = \left(\frac{A + A^*}{2} \right)^* = \frac{1}{2} (A + A^*)^* = \frac{1}{2} (A^* + A^{**}) = \frac{1}{2} (A^* + A) = A_1 \quad \text{ва}$$

$$A_2^* = \left(\frac{A - A^*}{2i} \right)^* = \frac{1}{2i} (A - A^*)^* = \frac{1}{2i} (A^* - A^{**}) = -\frac{1}{2i} (A^* - A) = A_2 \quad \text{яъни } A_1$$

ва A_2 лар ўз- ўзига қўшма алмаштиришлардир.

Теорэма 3. A ва B ўз- ўзига қўшма чизикли операторлар бўлсин. AB операторнингхам ўз-ўзига қўшма бўлиши учун

$$AB = BA \quad (13)$$

бўлиши,яъни A ва B операторларўрин алмашувчи бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Берилган $A^* = A$ ва $B^* = B$

Биз $(AB)^* = AB \quad (14)$

тенглик бажарилишининг зарур ва етарли шартини изламоқдамиз. Лекин

$$(AB)^* = B^* A = BA$$

Демак фақат $AB = BA$ бўлган ҳолдагина (14) тенглик уринли бўлади. Теорэма исбот бўлди

Таъриф. Агар бирор U оператор учун

$$U \cdot U^* = U^* U = E \quad (15)$$

шарт бажарилса ,у ҳолда бундай оператор унитар оператор дейилади.

Таъриф Агар A оператор учун

$$A^*A = AA^* \quad (16)$$

Шарт бажарилса, у ҳолда бу оператор нормал оператор дейилади.

Теорэма 4. Ўз-ўзига қўшма бўлган операторларнинг махсус сонлари ҳақиқий сондан иборат.

Исбот Ўз-ўзига қўшма оператор учун $\bar{x} \neq 0$ махсус вектор ва λ махсус қиймат бўлсин. У ҳолда $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ тенгликни назарда тутиб, ушбуга ега бўламиз.

$$(A\bar{x}, \bar{x}) = (\bar{x}, A\bar{x}) \quad \text{ёки} \quad (\lambda\bar{x}, \bar{x}) = (\bar{x}, \lambda\bar{x}) \quad \text{бундан} \quad \lambda(\bar{x}, \bar{x}) = \lambda(\bar{x}, \bar{x})$$

сўнгги тенгликнинг икки томони $(\bar{x}, \bar{x}) \neq 0$ га қсқартирсак $\lambda = \bar{\lambda}$ экани келиб чиқади. Бу еса λ нинг ҳақиқий сон эканини кўрсатади.

Теорэма 5. Ўз-ўзига қўшма бўлган операторнинг ҳар хил махсус сонларга мос келувчи махсус векторлар ўзаро ортогоналдир.

Операторнинг ҳар хил махсус сонлари унинг операторлари ҳам дейилади.

Исбот. $Ae_1 = \lambda_1 \bar{e}_1$, $Ae_2 = \lambda_2 \bar{e}_2$ ва $\lambda_1 \neq \lambda_2$ бўлсин у ҳолда

$$(A\bar{e}_1, \bar{e}_2) = (\bar{e}_1, A\bar{e}_2) \quad \text{ёки} \quad (\lambda_1 \bar{e}_1, \bar{e}_2) = (\bar{e}_1, \lambda_2 \bar{e}_2) \quad \lambda_1(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \lambda_2(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0 \quad \text{бундан} \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad \text{бўлгани учун} \quad (\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0$$

Мустақил топшириқлар.

1. Ўхшаш матрисалар ҳақида теорэмалар. [1], 376 – бет
2. $D(\lambda)$ кўпҳадлар ҳақида лемма, [2], 156 – бет.
3. Жордан матрисаси ҳақида теорэма, [3], 142 – бет, [4], 24 – 27 – бетлар.

Адабиётлар.

1. Курош А.Д. Олий алгебра курси, 1976
2. Гелванд И.М. Чизикли алгебрадан лекциялар, 1971.
3. Искандаров Р. Олий алгебра, ИИ-қисм, 1962.

4. Гаймназаров Г , Жомуродров К. Чизикли алгебра элементлари ,
Гулистон.1999 йил.

Назорат топшириқлари

1. Евклид фазосида чизикли оператор қандай кўринишда бўлишини изохланг.
2. Қайси ҳолатда A^* оператор A га қўшма дейилади.
$$A) (Ax, y) = (A^*x, y)$$
$$B) (Ax, A^*y) = (A^*y, Ax)$$
$$C) (A^*x, y) = (A^{-1}x, y)$$
$$D) (Ax, y) = (A^*x, y)$$
$$E) (A^{-1}x, y) = (Ax, A^*y)$$
3. A операторнинг ўз-ўзига қўшма бўлиш шартини айтинг ва изохланг.
4. Унитар фазода ўз-ўзига қўшма бўлган оператор ҳақида теорэмани изохланг.

2-асосий савол .

Унитар ва ортогонал операторлар.

2-асосий савол бўйича ўқитувчининг мақсади

Унитар ва ортогонал операторни ўргатиш.

2 -асосий саволдан келиб чиқадиган идентив ўқув мақсадлари

1. Унитар операторни ва унинг хоссасини билиб олади.
2. Ортогонал оператор ва унинг хоссасини ўзлаштириб олади.

2-асосий савол баёни

Агар P фазода қаралаётган сонлар комплекс сонлар, u ҳолда Евклид фазо унитар фазо дейилади. Фараз қилайлик R_n Евклид фазо бўлсин. Бу

фазода u чизикли оператор берилган бўлсин. Бу операторнинг қушмасини u^* деб белгиласак. Агар u оператор

$$u \cdot u^* = u^* u = E \quad (1)$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда бу оператор унитар оператор дейилади. (Бунда E – бирлик оператор, $Ex = x$) қуйида келтирилган теорэма ҳар қандай u операторнинг унитар бўлиш ва бўлмаслигини кўрсатади. Теорэма. (асосий) Бирор u чизикли оператор унитар бўлиши учун

$$u^* = u^{-1}$$

шарт бажарилиши зарур ва кифоя. (исботи қуйидагиги ўхшаш) ТЕОРЕМА. Бирор u оператор R_n Евклид фазосида унитар бўлиши учун ихтиёрий x ва y векторлар берилганда.

$$(ux, uy) = (x, y) \quad (2)$$

шарт бажарилиши зарур ва кифоядир. ((x, y) -скаляр кўпайтма)

Исбот. 1. Зарурий шarti, фараз қиламиз u унитар бўлсин, яъни (1) шарт бажарилсин, у ҳолда қушма оператор таърифига асосан

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad (ux, uy) = (x, u^* uy) \quad (ux, uy) = (x, Ey) = (x, y)$$

2. Кифоялик шarti, фараз қилайлик (2) шарт бажарилсин.

$$(ux, uy) = (u^* ux, y)$$

$$u^* = u^{-1}$$

$$u^* ux = x, \quad u^* u = E$$

Демак, бу унитар оператор.

Энди бу теорэмадан келиб чиқадиган натижаларни кўрайлик, (2) да $(x = y)$ десак

$$(ux, ux) = (x; x) \quad |\lambda|^2 = 1 \quad |\lambda| = 1.$$

Теорэма 3. R_n Евклид фазосида унитар бўлган u оператор учун матрисаси диагонал кўринишда бўлган, яъни

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad |\lambda_n| = 1 \quad (5)$$

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad (6)$$

ортогонал базис мавжуддир, яъни (6) базис .

$$\begin{cases} (e_i, e_j) = 0 \\ (e_i, e_i) = 1 \end{cases} \quad i \neq j$$

Исбот. u унитар оператор бўлсин. Бу ҳолда аввалги теоремада ҳосил қилинган n та жуфт-жуфти Билан ортогонал нормаланган хос векторлар изланмоқда бўлган базисни ташкил қилади. Ҳақиқатдан

$$ue_1 = \lambda_1 e_1$$

$$ue_2 = \lambda_2 e_2$$

.....

$$ue_n = \lambda_n e_n$$

ва Демак , $e_1, e_2, \dots, e_n$ базисда u операторнинг матрисаси (5)

кўринишда бўлади . Теорема 2 асосан $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ сонлар модулларига кўра 1 га тенгдир . Теорема исбот бўлди .

Таъриф. Агар

$$AA^* = A^*A$$

шарт бажарилса , u ҳолда A оператор нормал чизикли оператор дейилади .

Унитар оператор ҳам уз –узига қўшма оператор ҳам нормал операторнинг хусусий ҳоли эканлиги равшандир.

Таъриф. Ҳақиқий Евклид фазосининг A оператори учун

$$AA^* = E$$

шарт бажарилса , u ҳолда A оператор ортогонал оператор дейилади.

Теорема. R_n ҳақиқий Евклид фазосида A оператор ортогонал бўлиши учун

$$(Ax, Ay) = (x, y) \quad (7)$$

шарт бажарилиши зарур ва кифоядир. (исбот теорэма 1 каби)
(Бу ортогонал операторлар учун юқорида келтирилган теорэмалар уринлидир.)

қуйидаги теорэмани исбоциз келтирамиз.

Теорэма 4. А оператор ортогонал бўлиши учун (ҳақиқий Евклид фазосида) ортогонал бўлган базис , яъни

$$e_1, e_2, \dots, e_n \text{ векторлардан} \quad (8)$$

оператор туфайли ҳосил бўлган.

$$Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n \text{ векторлар} \quad (9)$$

ортогонал базис бўлиши зарур ва кифоядир.

Уз-узига қўшма бўлган операторнинг матрисаси симметрик матрисадан иборат эканлиги сизга маълум, яъни

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Таъриф. Уз-узига қўшма бўлган операторлар симметрик операторлар дейилади.

$$A^* = A^{-1}$$

Энди ҳар қандай операторни иккита операторлар қўпайтмасига ажратишни кўриб утамиз , бунинг учун аввало қуйидаги тушунчани киритамиз.

Таъриф. Уз-узига қўшма бўлган χ оператор

$$H(x, x) \geq 0 \quad (10)$$

шартни қаноатлантирса , у ҳолда бундай оператор мусбат оператор дейилади.

Теорэма 5. Ҳар қандай махсусмас А операторни

$$A = HU \quad (11)$$

кўринишда тасвирлаш мумкин . Бу ерда χ -мусбат Аниқланган оператор , У-унитар оператор . Бу ҳақда қуйидагига қаранг.

А махсусмас оператор ,яъни А оператор матрисасининг дитерминанти нольдан фарқли дейилади .

$$\det A \neq 0$$

Бц юқоридаги теорэма $\alpha = a + bi$ комплекс сонни тригонометрик сонга келтиришга ўхшайди.

$$\alpha = z(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

3-ҳақиқий сон $|\cos \varphi + i \sin \varphi| = 1$

6-маърузабўйича амалий машғулат.

Мавзу: Евклид фазосида чизиклиоператорлар.

Дарснинг мақсади: Евклидфазосида қўшма, номал,ортогонал опеоператорларни билади.

Зарурий материаллар.

Проскуряков И.В. « Сборник задач по линейно алгебра» М. Наука 1978й. китобидан масалалар.

- 1) №1541, 1542, 1543, 1555
- 2) 1571, 1572, 1573, 1583, 1586.

Дарсда ечиладиган масалалар.

- 1) 1541, 1543, 1555
- 2) 1571, 1573

Мустақил ечиш учун.

- 1) 1542
- 2) 1572, 1585, 1586.

Назорат топшириқлар

1. Унитар операторни тушунтириб беринг.
2. Қолдирилган сўзларни ёзинг.
- У унитар оператор бўлиши учун зарур ва кифоя.
3. Унитар оператор хоссаларини айтинг.
4. Ортогонал операторни тушунтиринг.
5. Ортогонал оператор учун қайси бири тўғри?

А) $AA^*=A^*A$

Б) $(Ux, Uy)=(x, y)$

С) $AA^*=E$

Д) $A^{-1}A=E$

Е) $(Ax, Ay)=(x, y)$

Мавзуга оид илмий муаммолар.

1. Операторларни ҳар хил турларга ажратиш.
2. Қайси турга мансуб бўлиш критерийсини аниқлаш.
3. Операторни кўпайтма сифатида аниқлаш.

Асосий хулосалар ва уларни мустаҳкамлаш.

1. **Хулоса.** Операторнинг шартлар бажарилишига кўра унитар, нормал, ортогонал, симметрик, мусбат турларга ажратилади.
2. Булар ҳақида критерий аниқланади.
3. Махсусмас операторни иккита мусбат ва унитар оператор кўпайтмаси сифатида тасвирлаш мумкин.

2. Мустаҳкамлаш учун саволлар.

1. Қўшма оператор нима ?
2. Унитар оператор нима ?
3. Нормал оператор нима ?
4. Ортогонал оператор нима ?
5. Мусбат оператор нима ?
6. Операторларнинг қайси турга мансуб эканлиги қандай ажратилади ?

7. Қандай оператор йиғинди кўринишида тасвирланади ?
8. Қандай оператор кўпайтма кўринишида тасвирланади ?

7-маъруза

Мавзу: Группалар. Қисм группалар

Асосий савол

1. Қисм группалар ва уларнинг хоссалари
2. Изоморф группалар
3. Фактор группа. Гомоморфизм.

Таянч иборалар ва тушунчалар

Қисм группа, группа ёйилмаси, Логранж теорэмаси, циклик группа, изоморфизм, Кели теорэмаси.

Асосий савол бўйича ўқитувчининг мақсади.

1. Қисм группа ва группа ёйилмасини ўргатиш.
2. Сиклик группани тушунтириш

Асосий саволдан келиб чиқадиган идентив ўқув мақсадлари

1. Группани қимс группалар орқали ёйишни ўрганиб олади.

2. Сиклик группани ўрганиб олади.

Асосий савол баёни

Аввало ҳалқа ва майдон таърифини еслаб ўтайлик.

Таъриф. И. Агар M тўпдамда қўшиш ва айириш ва кўпайтириш амали бажарилса, бундай тўпдам ҳалқа дейилади.

Мисоллар. 1) бутун сонлар тўплари. $B = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

2) кўпхадлар тўплари $P(x)$

3) квадрат матрисалар тўплари

4) HOY текисликда ётувчи йўналтирилган кесмалар, векторлар тўплари ҳалқа эмас.

5) $[a, b]$ да узлуксиз функциялар тўплари

Таъриф. 2. Агар M тўпдамда қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш амаллари бажарилса бундай тўпдам майдон дейилади.

Мисоллар. Юқоридаги мисоллардан 1), 2), 3), 4) Лар майдон эмас. $[a, b]$ да узлуксиз бўлган функциялар майдони ташкил этади. Рационал сонлар тўплари R майдонни ташкил қилади. Фараз қилайлик M тўпдамнинг элементлари қуйидагича $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ $a_k, a_s \in M$ бўлсин.

Икки элемент орасида бажариладиган амални φ деб белгилаймиз. Агар φ амални бажарилганда ҳосил бўлган элемент M тўпдамга тегишли бўлса бундай амал алгебраик амал дейилади.

Таъриф. Агар M тўпдамда ва унда Аниқланган φ амалга нисбатан қуйидаги шартлар бажарилса, у ҳолда бундай тўпдам группа дейилади.

1) φ алгебраик амал бўлсин. $a_k \varphi a_s = b \in M$, $a_k, a_s \in M$

2) ассоциативлик бажарилсин: $(a_k \varphi a_s) \varphi a_n = a_k \varphi (a_s \varphi a_n)$

3) M тўпдамда бирлик элемент деб аталувчи e элемент мавжуд бўлиб $a_k \varphi e = a_k$ бўлсин.

4) M тўпдамда ихтиёрий a_k элементларга тескари a_k^{-1} элемент мавжуд бўлиб $a_k \varphi a_k^{-1} = e$ бажарилсин.

Мисоллар . 1) R - рационал сонлар тўплами. φ амал кўпайтириш бўлсин.

Рационал сонлар тўплами кўпайтиришни нисбатан группани ташкил этади.

2) B - бутун сонлар тўплами. φ -амал қўшиш бўлсин. Бутун сонлар тўплами қўшишга нисбатан группа бўла олади.

3) B -бутун сонлар тўплами. φ -амал кўпайтириш бўлсин. Бунда 4-шарт бажарилмайди. Бутун сонлар тўплами кўпайтиришга нисбатан группани ташкил етмайди.

4) M тўплам махсусмас кватдрат матрисалар тўпламидан иборат бўлсин. φ амал матрисаларни кўпайтириш бўлсин. 1-2 шартлар бажарилади.

$$3. e = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad AE = A$$

4. $\det A \neq 0$ (махсусмас бўлгани учун) $\exists A^{-1} \in M$.

Сиклик группалар.

Фараз қилайлик P бирор группа бўлсин. φ -группа амали. P группадан ихтиёрий a элемент оламиз.

$$a\varphi a = a^2, a\varphi a\varphi a = a^3, \dots, a\varphi a\varphi \cdots \varphi a = a_n$$

$$a_0 = e, ea = ae = a$$

$$a, a^{-1} \in P$$

$$a^{-1}\varphi a^{-1} = a^{-2}, a^{-3}, \dots, a^{-n}$$

$$a^k\varphi a^{-k} = a_0$$

$$a^m\varphi a^k = a^{m+k}, m, k, -\pm 1, \pm 2, \dots$$

a элементнинг даражаларидан тўплам тузамиз.

$$A = \{\dots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, \dots\}$$

Теорэма. A тўплам группани ташкил этади.

Бу теорэмани исботини мустақил бажариш мумкин. Юқорида тузилган A группа циклик группа дейилади. a элементнинг бирор r даражаси e га тенг бўлсин, яъни $a^r = e$ (1)

Шу шартни қаноатлантирувчи r сонларнинг энг кичиги элементнинг тартиби дейилади.

Масалан: $C = \{1, -1, i, -i\}$ ϕ амал кўпайтириш. C группадир. $e = 1, a = i \in C, r = 4$.
 Фараз қилайлик P тўплам бирор ϕ амалга нисбатан группани ташкил ецин. P тўпламнинг бирор H қисмини ажратамиз. $P \supset H$. H нинг ўзи P да Аниқланган ϕ амалга нисбатан группани ташкил еца, уни қисм группа деб аталади. қисм группа бир нечта бўлиши мумкин. P группа чекли ёки чексиз бўлиши мумкин. P группа чексиз бўлса унинг қисм группаси чекли ҳам, чексиз ҳам бўлиши мумкин. Энди P группани H қисм группа бўйича ёйишни кўриб ўтамиз. Аввало икки тўпламнинг тўғри йиғиндиси тушунчасини келтирамиз.

Агар $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ва $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ берилган бўлса, у ҳолда

$$A \oplus B = C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\} \text{ деб ёзамиз, бунда } a_i \oplus b_i = c_i, a_i \in A, b_i \in B, c_i \in C.$$

ТЕОРЭМА. P группа учун қуйидаги тенглик ўринлидир.

$$P = H \oplus H\phi a_1 \oplus H\phi a_2 \oplus \dots \quad (1).$$

ИСБОТ. Агар H қисм группа P группага устма-уст тушса, яъни $H \equiv P$, у ҳолда $P = H$ деб ёза оламиз. Агар устма-уст тушса, $H \not\equiv P$ у ҳолда $H \subset P$. P дан a_1 элемент оламиз. У H га кирмасин, яъни

Энди бўлса у ҳолда $H\phi a_1 = \{H_1\phi a_1, H_2\phi a_2, \dots\}$ агар $H \oplus H\phi a_1$ тўплам P группа билан устма-уст тушса $P = H \oplus H\phi a_1$ деб ёза оламиз. Агар (2) тенглик ўринли бўлмаса, у ҳолда $H \oplus H\phi a_1$ га кирмайдиган P нинг бошқа a_2 элементини олиб қараймиз. $a_2 \notin H \oplus H\phi a_1$. Бундай ҳолатда қуйидаги йиғиндини оламиз. $H \oplus H\phi a_1 \oplus H\phi a_2 \oplus \dots$ агар бу йиғинди P билан устма-уст тушса, $P = H \oplus H\phi a_1 \oplus H\phi a_2 \oplus \dots$ деб ёза оламиз. Агар устма-уст тушмаса юқоридаги муҳокамани давом еттириб (И.) тенгликни ҳосил қиламиз. Бу

ҳосил бўлган (И) тенглик P группанинг H қисм группа бўйича ёйилмаси дейилади.

Таъриф. Чекли группада элементларнинг миқдори шу группанинг тартиби дейилади.

Чекли группанинг ёйилмасидаги қўшилувчилар сони чеклита бўлади. Агар P группа чексиз бўлса, у ҳолда унинг ёйилмаси чекли бўлиши ҳам бўлмаслиги ҳам мумкин. Чекли группа ҳақида теорэмани келтириб ўтамыз.

Теорема. (Логранж) чекли P группанинг тартиби унинг қисм группасининг тартиби билан унинг индексининг кўпайтмасига тенг.

Исбот. $P = H \oplus H\phi a_1 \oplus H\phi a_2 + \dots + H\phi a_r$ десак, группа индекси $r+1$ та, $ind = r+1$

Агар $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ ва $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ Деб олсак, у ҳолда $n = m(r+1)$ эканлигини кўрсатиш қийин эмас. Бунда $n - P$ группанинг тартиби. $(r+1) - P$ группанинг индекси.

Назорат топшириқлари

1. Группа тушунчасини айтинг ва қисм группани тушунтиринг.
2. Группа ёйилмаси ҳақидаги теорэмани изоҳланг.
3. логранж теорэмасининг моҳиятини изоҳланг
4. Группа a элементининг циклик группаси дед нимага айтилади

Тўғри жавобни аниқланг

- А) $A = \{a^0, a^1, a^2, \dots\}$ -тўплам
- В) $A = \{a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, \dots\}$
- С) $A = \{e, 0, 1\}$
- Д) $A = \{\dots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, \dots\}$
- Е) $A = \{aa^{-1}, aa^{-2}, \dots\}$

2-асосий савол. Изоморф группалар

2-асосий савол бўйича ўқитувчининг мақсади.

1. Группаларда изоморфизмни тушунтириш
2. Ёндош синфларни ўргатиш

2-асосий саволдан келиб чиқадиган идентив ўқув мақсадлари

1. Изоморф группаларни ўрганиб олади.
2. Ёндош синфларни тушуниб олади.

2-асосий савол баёни

Фараз қилайлик иккита P_1 ва P_2 группалар берилган ва унинг амали $\varphi_1 : P_2$ нинг амали φ_2 бўлсин.

Таъриф. Агар P_1 ва P_2 группаларнинг элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган бўлиб, бу мослик группа амалларига нисбатан ҳам ўринли бўлса, у ҳолда бу группалар бир-бирига изоморф дейилади.

Шундай қилиб $P_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ва $P_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ бўлганда

$$a_k \in P_1 \leftrightarrow b_s \in P_2$$

$$\begin{matrix} a_k, a_e \in P_1 \\ b_s, b_m \in P_2 \end{matrix} \quad \left\{ \begin{matrix} a_k \leftrightarrow b_s \\ a_e \leftrightarrow b_m \end{matrix} \right\} \rightarrow \{a_k \varphi_1 a_2 \leftrightarrow b_s \varphi_2 b_m\} \text{ бўлса, у ҳолда } P_1 \text{ ва } P_2$$

изоморф бўлади

Ва $P_1 \cong P_2$ деб ёзилади.

Агар P_1 группанинг бирор H қисм группасининг ҳамма элементлари P_2 группанинг бирлик (нейтрал) элементига мос келса, у ҳолда P_1 ва P_2 группаларда гомоморф дейилади. Бундай

H қисм группа P_1 нинг ядроси дейилади ёки гомоморфизм ядроси дейилади.

Таъриф. Агар P_1 группанинг элементлари P_2 группанинг элементларига бир қийматли мос келтирилган бўлиб, бу мосликда группалардаги амаллар ўринли бўлса, у ҳолда бундай мослик гомоморф мослик дейилади.

Бу таърифни бундай ифодалаш мумкин:

$$\begin{matrix} a_k, a_e \in P_1 \\ b_s, b_m \in P_2 \end{matrix} \quad \left\{ \begin{matrix} a_k \leftrightarrow b_s \\ a_e \leftrightarrow b_m \end{matrix} \right\} \rightarrow \{a_k \varphi_1 a_2 \leftrightarrow b_s \varphi_2 b_m\}$$

Буни $P_1 \approx P_2$ деб ёзамиз. Изоморфизм ва гомоморфизм ҳақида теоремаларни келтириб ўтамиз.

Теорема. Агар P_1 ва P_2 группалар гомоморф мосликда бўлса, яъни P_1 ва P_2 группага гомоморф аксланса, у ҳолда P_1 группанинг фактор группаси P_2 группага изоморф аксланади.

Бу теоремани исботлаш учун қуйидаги белгилашни киритамиз. $\frac{P_2}{H} - P_1$

группанинг фактор группаси. $\frac{P_1}{H} = \{H \oplus H\varphi a_1 \oplus H\varphi a_2 \oplus \dots\}$ $P_1 \cong P_2$ изоморф мослик.

Энди $\{P_1 \approx P_2\} \rightarrow \left\{ \frac{P_1}{H} \cong \frac{P_2}{H} \right\}$ муносабатни исботлаш кифоя. Буни мустақил бажариш мумкин.

Назорат топшириқлари

1. Қуйидаги муносабатларни тушунтиринг.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k \in p_1 \leftrightarrow \varphi_s \in p_2 \\ a_m \in p_1 \leftrightarrow \varphi_n \in p_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \{a_k \in p_1 \leftrightarrow b_s b_n \in p_2\}$$

2. Кели теоремасини изоҳланг

3. Ўнг ва чап ёндош синфларни изоҳланг

4. Тўғри жумлаларни аниқланг

- А) Иккита ёндош синф кесими бўш эмас Б) Иккита ёндош синф кесими бўш
- С) Иккита ёндош синф устма-уст тушади
- Д) H қисм группанинг ёндош синфлари H га тенг қувватлими эмас
- Е) H қисм группанинг ёндош синфлари H га тенг қувватлими

3-асосий савол Фактор группа.

3-асосий савол бўйича ўқитувчининг мақсади.

Фактор группа ва гомоморфизмни ўргатиш

3-асосий саволдан келиб чиқадиган идентив ўқув мақсадлари

1. Фактор группани ўрганиб олади.
2. Гомоморфизмни тушуниб олади.

3-асосий савол баёни

Фараз қилайлик P группа H қисм группа бўйича қуйидагича ёйилган бўлсин.

$$P = H \oplus H\varphi a_1 \oplus H\varphi a_2 \oplus \dots \oplus H\varphi a_n \oplus \dots \quad (1)$$

Бу ерда φ группа амали. Агар бу ерда $H\varphi a_k = a_k\varphi H$ шарт бажарилса, H қисм группа нормал бўлувчи дейилади. Умуман a_k ва a_s да $H\varphi a_k = a_s\varphi a_k$

(2) шарт бажарилса, H қисм группа нормал бўлувчи дейилади. Умуман a_k ва a_s да $a_k\varphi a_s \neq a_s\varphi a_k$ (3)

Агар $a_k\varphi a_s = a_s\varphi a_k$ бўлса комутатив группа ёки Абел группаси дейилади.

Энди

$M = \{H_1\varphi a_1, H_2\varphi a_2, \dots, H\varphi a_n, \dots\}$ (4) тўпламни кўриб ўтайлик. Бу тўплам φ амалга нисбатан группани ташкил этади. Буни бевосита исботлаш мумкин.

Бу ерда H нормал бўлувчи, $H\varphi H = H$ тенглик ҳам етиборга олинади.

(4) таплам фоктор группа дейилади.

Фактор группадаги ёнма-ён турган элементлар қўшни класслар дейилади.

Улар умумий элементга ега эмас, яъни $H\varphi a_k \cap H\varphi a_s \neq 0, k \neq s$

Фараз қилайлик G_1 ва G_2 тўпламлар группани ташкил қилсин. Бу тўпламлардан ихтиёрий

$x_1 \in G_1$ ва $x_2 \in G_2$ элементларни олайлик. Бу тўпламларнинг тўғри кўпайтмаси қуйидагича олинади.

$$G_1 \times G_2 = \{(x_1, x_2), \dots\}; G_1 = \{x_1, y_1, z_1, \dots\}, G_2 = \{x_2, y_2, z_2, \dots\} \text{ яъни}$$

$G_1 \times G_2 = \{(x_1, x_2), (y_1, y_2), \dots\} = M$ деб белгилаймиз. Бу M тўпламда икикта элемент кўпайтмасини қуйидагича қабул қилайлик.

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

Агар φ бирор группа амали билан, уни $a\varphi b = ab$ деб қарайлик. Нейтрал элементни

$e = (e_1, e_2) = (1, 1)$ деб қабул қаламиз. $(e_1 \in G_1, e_2 \in G_2), e = (1, 1) \in M$

x_1 ва $x_1^{-1} \in G_1$ элементлар бир-бирига тескари элемент, у ҳолда $x_1 \cdot x_1^{-1} = e_1 = 1$

$x_2 \cdot x_2^{-1} = e_2 = 1$ бунда $x_2, x_2^{-1} \in G_2$ $(x_1^{-1}, x_2^{-1}) \in M$ элемент (x_1, x_2) га тескаридир.

Ҳақиқатдан ҳам $(x_1, x_2)(x_1^{-1}x_2^{-1}) = (x_1x_1^{-1}, x_2x_2^{-1}) = (e_1, e_2) = (1, 1) \in M$ шундай қилиб,

компонентлар бўйича қабул қилинган кўпайтириш амалига нисбатан

$M = G_1 \times G_2$ тўплам группани ҳосил қилади. Шундай қилиб M тўплам G_1 ва

G_2 ларнинг декарт кўпайтмаси бўлган M тўплам $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$

(1) кўпайтмага нисбатан группани ҳосил қилади. Бундай M тўплам G_1 ва G_2 группаларни ташқи тўғри кўпайтмаси дейилади. (уни ТТК деб ёзамиз.)

Ташқи тўғри кўпайтма $\otimes$ тарзда белгиланади. ТТК даги $(x, 1)$

элементни олайлик. $\{(x, 1)\}$ тўплам ТТК да қисм тўплам яъни $\{(x, 1)\} \subset G_1 \otimes G_2$

ва $\{(x, 1)\} \leftrightarrow G_1$ (изоморфдир) худди шундай $G_1 \otimes G_2 \supset \{(1, x_2)\} \leftrightarrow G_2, (1, x_2) \leftrightarrow x_2$ бу ерда

$(x_1, x_2)^{-1} = (x_1^{-1}, x_2^{-1})$ дир.

Энди G_1 группанинг H_1 ва H_2 қисм группаларни олиб қарайлик.

$(h_i^{(1)} \in H_1)$ ва $(h_j^{(2)} \in H_2)$ бўлсин. қуйидаги $H_1 \cdot H_2$ кўпайтма қисм

группаларнинг ички тўғри кўпайтмаси дейилади, (яъни ИТК).

$H_1 \cdot H_2 = \{h_k^{(1)} \cdot h_k^{(2)}\}, H_i = \{h_1^{(i)} \cdot h_2^{(j)}, \dots\}, i = 1, 2$

$H_1 \cdot H_2 = \{h_1^{(1)} \cdot h_{k1}^{(2)}, h_2^{(1)}, h_2^{(2)}, \dots\}$

Теорэма. Агар G_1 группанинг H_1, H_2 қисм группалари унинг нормал қисм группалари бўлиб,

$$\{H_1 \cap H_2 = 1 = e$$

$$\{H_1 \cdot H_2 = G \quad (2)$$

Шартларни қаноатлантирса, у ҳолда $H_1 \otimes H_2$ тўғри ташқи кўпайтмасига G изоморф бўлади. Бу теорэмадан G группа унинг иккита қисм группалари

ТТК си бўйича ёйиш кўрсатилган. Буни бир нечта қисм группалари учун ҳам исботлаш мумкин.

Теорэма. Агар G группанинг нормал қисм группалари $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ лар ушбу

$$H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap \dots \cap H_n = 1 = e = G$$

$H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_n = G$ шартларини қаноатлантирса, у ҳолда $H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_n \leftrightarrow G$ ўринли бўлади. Бу теорэма G группани ТТК га нисбатан нормал қисм группа бўйича ёйиш дейилади.

7-Маъруза бўйича амалий машғулотлар

Мавзу: Группалар, қисм группалар.

Дарснинг мақсади: Группа тушунчасини, қисм группалар ва уларнинг хоссаларини масалалар ечиш билан ўргатиш.

Идентов ўқув мақсадлари: Группани билади, группа ёйилмасини билади. Фонтон группа ва у ҳақидаги теорэмани билади.

Зарурий материалар.

Проскурсов И.В. «Сборник задач по линейной алгебре» М. Наука 1978й. китобидан.

- 1) №1634-даги 1-20 масала
1649, 1680, 1651, 1652, 1653, 1654.
- 2) 1659 1-8, 1662 1-3, 1663.

Дарсда ечиладиган масалалар.

- 1) 1634 дан 1,3,5,7,9,1650,1652,1654
- 2) 1659 дан 1) 3,5,7, 1663

Мустақил ечиш учун.

- 1) 1634 дан 2, 4, 6, 8, 10, 12 1651, 1653
- 2) 1659 дан 2, 4, 6, 8, 1662, 1, 2, 3.

Назорат топшириқлари

1. Группанинг нормал бўлувчиси нима
2. Фактор группани тушунтиринг
3. Қуйидаги муносабатларни изохланг.

$$\{a_k \in p_1, a_m \rightarrow b_s, b_n \in p_2\} \Rightarrow \{a_k a_m \in p_1 \rightarrow b_s, b_n \in p_2\}$$
$$p_1 \approx p_2$$

4. A группа $\bar{A}$ группага гомоморф аксланса, қуйидагилардан қайси бири тўғри? (H -гомоморфизм ядроси)

- А) A/H фактор группа $\bar{A}$ гомоморф
- В) A/H фактор группа $\bar{A}$ изоморф
- С) A/H ва $\bar{A}$ гомоморф эмас
- Д) A/H ва $\bar{A}$ изоморф эмас
- Е) $A/H \equiv A$

Мавзуга оид илмий муоммолар.

Муаммо (Борсайд)

$B(m, d)$ группа $x^d = 1$ кўпхилликда чеклими ёки чексизми?

- 1) $d \geq 7$, $d \geq 2$, $d \geq 4381$, $d \geq 665$, ва $m \geq 2$ да чексиз эканлиги исботлаш.

(Корганслов М.И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, М.1977, стр.130-131.

Ихтиёрий м натурал ва р туб сон учун м билан хосил бўлувчи чекли микдордаги чекли группалар мавжуд.

(А.И. Костринки 1959 да исботи Лекин юқоридаги муаммо тўла ечилган эмас (131 бет)

Асосий хулосалар

1. Ҳар қандай группани унинг қисм группалари бўйича ёйиш мумкин.

2. Иккита группа бир-бирига изоморф ёки гомоморф бўлиши мумкин.
3. Биринчи группа билан иккинчи группага изоморф бўлмаса , ухолда фонтор группаси билан изоморф бўлади.

Мустаҳкамлаш учун саволлар.

1. Группа ва унинг қисм группаси нима?
2. Лагрант теорэмасини нимадан иборат?
3. Нормал бўлувчи нима
4. Гомиморфизм ва изоморфизм масалаларнинг фарқи нимада?

Мавзу бўйича мустақил топшириқлар

1. Сиклик группалар [2]46 – 50 бет. [1]14606,63 – 65 -п
2. Ёндош синфлар [1]14 – 606,65 – n . [2]51 – 53 – бетлар

Адабиётлар

1. Курош.А.Г.олий алгебра курси.1976 й
2. Гаймназаров Г , Жомуродрв К. Чизикли алгебра элементлари , Гулистон.1999 йил.
3. Алгебра ва сонлар назарияси (2-курс)

Асосий адабиётлар.

1. Хожиев Ж..Х,Файнлеб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси, Тошкент «Ўзбекистон» , 2001й
- 2.Курош А.Г. Олий алгебра курси , Тошкент «Ўқитувчи», 1967й
- 3.Гельфанд И.М. Сборник задач по линейной алгебре

Қўшимча адабиётлар.

1. Искандаров Р. Олий алгебра, ИИ- қисм Тошкент «Олий ва ўрта мактаб», 1963
2. ғаймназаров Г, Ғаймназаров О.Г Функционал анализ курсидан масалалар ечиш, Тошкент «Фан ва технология» 2006 й
3. ғаймназаров Г., Жомуратов К. чизикли алгебра элементлари, Гулистон 1999й
4. Фадеев Д.К., Соминский И.С. ,Сборник задач по вўсшай алгебра. М.»Научи»,1977.

Интернет сайтлари

1. [хтти://WWW. мссе. зу](http://WWW.mscs.zu)
2. [хтти://либ](http://lib), мехмат. зу, Гельфанд
3. [хтти://WWW](http://WWW). месеҒ зу, [хтти:ҒҒ лип.мехмет.зу](http://lib.mechmet.zu),Кострикан А.И.
4. [хтти: //WWW](http://WWW), месе.зу, [хтти://лип](http://lib). мехмат.зу,Курош А.Г.

МУНДАРИЖА

1-маъруза. Чизиқли фазолар.....	3
2 -маъруза. Чизиқли ва квадратик формалар. Евклид фазоси.....	14
3-маъруза. Чизиқли оператор.....	27
4- маъруза. Операторнинг хос векторлари ва хос сонлари	36
5-маъруза. Матрисаларнинг Жордан нормал формаси	44
6-маъруза. Евклид фазосида чизиқли оператор	49
7-маъруза. Группалар. Қисм группалар	60