

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

TERMIZ DAVLAR UNIVERSITETI

MAGISTRATURA BO'LIMI

Qo'lyozma huquqida

УДК _____

QULMAMATOV SHERZOD ABDUHAMIDOVICH

**LAMINAR OQIMNING TURBULENT OQIMG'A AYLANISHI
NAZARIYASI
Mavzusida**

**5A130202 «Amaliy matematika va axborot texnologiyalari»
mutaxassisligi bo'yicha magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan**

DISSERTATSIYA

Ilmiy rahbar:

f.m.f.d Ch.B. Normurodov

Termiz-2014

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
ASOSIY QISM	
I BOB. TURBULENTLIKNING PAYDO BO’LISHIGA OID EKSPERIMENTAL NATIJALAR.....	11
1-§. Trubada laminar oqimning turbulent oqimga aylanishi.	11
2-§. Chegaraviy qatlamdagi jism atrofida laminar oqimning turbulent oqimga aylanishi.....	12
3-§. Plastinkada uzunasiga yo’naltirilgan oqim.....	12
 II BOB. BOSIM GRADIYENTINING TURBULENTLIKNING PAYDO BO’LISHIGA TA’SIRI.....	 13
1-§. Bosim gradiyenti manfiy bo’lgan hol.....	13
2-§. Bosim gradienti nolga teng bo’lgan hol.....	20
3-§. Bosim gradienti musbat bo’lgan hol.....	23
 III BOB. TEKIS PLASTINKADA LAMINAR OQIMNING TURBULENT OQIMG A AYLANISHI.....	 26
1-§. Turg’unlik tenglamalari.....	26
2-§. Xos qiymat muammosi.....	29
3-§. Spektal-to’r metodi.....	33
 IV BOB. NEYTRAL TURG’UNLIK EGRI CHIZIQLARINI HISOBLASH NATIJALARI.....	 38
1-§. Bosim gradienti manfiy holda neytral egri chiziq.....	38
2-§. Bosim gradienti nolga teng holda neytral egri chiziq.....	41
3-§. Bosim gradienti musbat holda neytral egri chiziq.....	43
XULOSA.....	47
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.....	48

Kirish

Hisoblash metodlarining keyingi yillarda jadal rivojlanishi yirik ilmiy-taxnikaviy muammolarni yechish zarurati va zamonaviy kompyuterlarning paydo bo'lganligi bilan bog'liq. Bunda quyidagi muammolarni ko'rsatish yetarli: 1) yadro energiyasini egallash, yadro reaktorlarini yaratish; 2) uchish apparatlari (samolyot va raketalarni) ni loyihalash; 3) kosmik parvozlarning dinamikasi; 4) plazmalar fizikasini boshqariladigan termoyadroviy sintez muammosi tufayli o'rganish va boshqalar.

Ushbu masalalarni yechishni hisoblash metodlarini qo'llamasdan amalga oshirib bo'lmaydi. Hisoblash matematikasi va uning tadbiri sohasidagi yutuqlar matematika faniga bo'lgan qiziqishni yanada oshirdi va uning yangi bo'limlarining paydo bo'lishiga olib keldi.

Amaliy masalalarni yechishda matematik metodlarni qo'llash matematika sohasidagi fanlarning asosiy masalasi bo'lib qolmasdan, balki maxsus amaliy xarakterga ega bo'lgan fanlarning oldida turgan muhim masalalardan hisoblanadi. Sodda amaliy masalalarda real hodisalarni tadqiq etishda matematik tushunchalarning qo'llanilishi namoyish etish mumkin, masalan hosila tushunchasini material nuqtaning harakati tezligi yoki sterjenning chiziqli zichligi vositasida, integralni ish kuchi, differensial tenglamalarni tuzishda radioaktiv parchalanish tenglamalarini chiqarish va hokazolar. Albatta, bu bilan amaliy masalalarni yechishga matematika sohasidagi mutaxassislarni jalb qilish maqsadga muvofiq emas degan iborani qo'llash noo'rin. Matematika sohasidagi mutaxassislardan amaliy masalalarni yechishda foydalanish zarur va foydali.

Matematika yaxlit fan bo'lib hisoblanadi. Matematika fanini toza va amaliy matematikaga qat'iy bo'lib bo'lmaydi, toza va amaliy matematika matematika deb ataluvchi fanning ajratib bo'lmaydigan bo'limlaridir, bu bo'limlarni bir-biridan ajratib bo'lmaydi.

Ushbu mulohazalarning to'g'riligini tasdiqlash uchun avvalambor toza matematika nima? va amaliy matematika nima? degan savollarga qat'iy ta'rif berish lozim. Ushbu savollarga javob berish unchalik oddiy emas.

Qandaydir ma'noda aytish mumkinki, toza matematika deganda matematikaning shunday bo'limi tushuniladiki, unda matematik modellar o'zligicha, biror-bir real hodisaga (fizik, kimyoviy, biologic, iqtisodiy, ijtimoiy va boshqa biror-bir) bog'lamasdan o'rganadi. Toza matematikada tadqiqotlar (sifatliy va miqdoriy) yetarlicha umumiylikda olib boriladi, keng doiradagi masalalarni yechishning umumiy metodlari va algoritmlari o'rganiladi.

Amaliy matematikaga esa matematikaning shunday qismi kiradiki, unda u yoki bu real hodisani modellovchi matematik modellar o'rganiladi. Real ob'yektlarni o'rganish avvalo, ularni matematik modellashtirishdan boshlanadi, ya'ni ob'yektlarni tavsiflashda ilgaridan ma'lum bo'lgan yoki qaralayotgan hol uchun maxsus yaratilgan matematik modellarni tavsiflashdan boshlanadi. Ushbu modellarni o'rganish jarayonida ko'pincha boshqa matematik modellar paydo bo'ladiki, ularni o'z navbatida o'rganish talab etiladi va shunday qilib, amaliy matematika yangi matematik modellarning kuchli manbai bo'lib hisoblanadi. Amaliy matematika sohasidagi tadqiqotlar ko'pincha yirik yangi ilmiy yo'nalishlarning yaratilishiga olib keladi. Ana shu ma'noda matematikaning yangi yo'nalishlari axborotlar nazariyasi, operatorlar nazariyasi, tasodifiy jarayonlar nazariyasi, optimal boshqarish nazariyasi, iqtisodiy matematika va boshqalar paydo bo'ldi.

Amaliy matematikada matematik modellarni o'rganishdan maqsad, mos aniq real hodisani tadqiq etishga qaratilgan bo'ladi. Shu sababli, amaliy matematikada umumiy metodlarni o'rganish bilan bir qatorda, berilgan real ob'yekt bilan bog'langan o'ta xususiy maxsus metodlarni o'rganish muhim o'rin egallaydi. Albatta, qaralayotgan hodisani modellashtiruvchi matematik modelni izlashda, ushbu modelni o'rganishda mavjud bo'lgan matematik resurslar yetarli bo'lmasdan qoladi. Hattoki, kerakli matematik modelni o'rganish uchun metodlar mavjud bo'lganda ham, ushbu metodlar talab qilingan natijalarni olish

uchun moslashmagan bo'ladi. Bunday hollarda qo'yilgan masalani yechish uchun yangi maxsus metodlar ishlab chiqishga to'g'ri keladi, ular matematikada yangi umumiy metodlar manbai bo'lib hisoblanadi.

Aniq hodisa, jarayon va boshqalarni matematik tavsiflash u yoki bu sonli xarakteristikalar asosida olinadi. Shu sababli, amaliy matematikada masalalarni yechishning sonli metodlari katta ahamiyatga ega bo'ladi. Ana shu sababli, aniq bir masalani yoki keng doiradagi masalalarni (masalan, konkret ob'yektga bog'lamasdan Laplas tenglamasini sonli yechish) yechishga mo'ljallangan metodlarni ishlab chiqish amaliy matematika va axborot texnologiyalari yo'nalishidagi asosiy masalalardan hisoblanadi.

Matematik modellashtirish amaliy xarakterga ega bo'lgan masalalarni yechishda o'ta muhim ahamiyatga ega. Amaliy masalalarda tabiat hodisasi, ishlab chiqarish jarayoni, konstruksiya, boshqarish sistemasi, iqtisodiy reja va shu kabi "nomatematik" ob'yektlar bevosita beriladi. Tadqiqot ob'yektni formallashtirishdan, tegishli matematik modelni qurishdan boshlanadi, ob'yektning eng muhim xususiyatlari va xossalari kiritiladi hamda matematik munosabatlar yordamida tavsiflanadi. Matematik model qurilgandan so'ng, ya'ni masalaga matematik forma berilgandan keyingina uni o'rganish uchun matematik metodlardan foydalanish mumkin.

Amaliy masalalarda matematik modelni qurish ishning eng murakkab va ma'suliyatli bosqichlaridan biridir. Tajriba ko'rsatadiki, ko'p hollarda modelning to'g'ri tanlanishi muammoning yarmidan ko'pini hal qilish demakdir. Bu bosqichning qiyinligi shundan iboratki, u matematik va sotsial bilimlarning uyg'unlashishini talab etadi. Ammo, amaliy matematikada qaraladigan katta muammolar uchun mutaxassislarning bunday uyg'unlashishi tipik emas. Odatda matematik modellar ustida matematiklar hamda o'rganilayotgan ob'yekt tegishli bo'lgan sohaning mutaxassislari birgalikda ishlaydilar. Ularning faoliyati muvaffaqiyatli bo'lishi uchun bir-birini tushunishi g'oyatda muhim. Bunday uyg'unlikka matematiklar ob'yekt haqida maxsus bilimlarga ega bo'lganda ularning sheriklari esa ma'lum darajada matematik

bilimga, o'z sohasida tadqiqotning matematik metodlarini qo'llanish tajribasiga ega bo'lgandagina erishish mumkin.

Matematik model hech qachon qaralayotgan ob'yekt bilan aynan bir xil bo'lmaydi, uning barcha xossalarini va xususiyatlarini bera olmaydi. Soddalashtirishga, ideallashtirishga asoslangan model ob'yektning taqribiy tavsifidan iborat. Shuning uchun modelni tahlil qilishdan olingan natijalar ob'yekt uchun doim taqribiy xarakterga ega bo'ladi. Ularning aniqligi model va ob'yektning moslik, adenvatlik darajasiga bog'liqdir. Aniqlik haqidagi natijalarning ishonchliligi haqidagi masala amaliy matematikaning eng nozik masalalaridan biridir. Ob'yektning holati va xossalarini aniqlaydigan qonunlar to'liq ma'lum va ularning qo'llanilishi bo'yicha katta amaliy tajribaga ega bo'lganda aniqlik masalasi osonlik bilan hal bo'ladi. Undan natijalarning qaralayotgan model ta'minlaydigan aniqligini (tajribagacha, ya'ni matematik modelni yechish boshlanguncha) baholash mumkin.

O'rganilayotgan ob'yekt haqida ma'lumotlar yetarli bo'lmaganda yanada murakkabroq holat yuz beradi. Bu holda gipoteza xarakteriga ega bo'lgan qo'shimcha farazlar kiritishga to'g'ri keladi. Bu gipotetik modelni tadqiq qilishdan olingan natijalar o'rganilayotgan ob'yekt uchun shartli xarakterga ega. Ularning o'rinniligi boshlang'ich farazlar qanchalik to'g'ri ekanligiga bog'liq. Ularni tekshirish uchun modelni tadqiqot qilish natijalarini o'rganilayotgan ob'yekt haqidagi barcha ma'lumotlar bilan taqqoslash lozim. Hisoblab topilgan va eksperimental ma'lumotlarning yaqinlik darajasi gipotetik modelning sifati haqida, boshlang'ich farazlarning to'g'riligi yoki xatoligi haqida fikr yuritishga imkon beradi. Shunday qilib, qandaydir matematik modelni qaralayotgan ob'yektni o'rganishga tadbiq etish masalasi oddiy matematik masala emas va uni matematik modellar yordamida his etib bo'lmaydi. Haqiqatning asosiy mezonini amaliyot, tajribadir.

Hozirgi vaqtda murakkab jarayonlarni nazariy tadqiq etishning yangi usuli paydo bo'ldi, u matematik tavsiflashga yoki matematik modellashtirishga yo'l

qo'yadi – bu hisoblash eksperimentidir, ya'ni, real jarayonlarni hisoblash matematikasi vositasida tadqiq etish.

Hisoblash eksperimentini batafsil qarab chiqamiz. Biror-bir fizik jarayonni o'rganish talab qilingan bo'lsin. Uni hisoblash eksperimenti asosida tadqiq etamiz. Hisoblash eksperimenti beshta bosqichdan iborat bo'ladi.

Birinchi bosqich – masalani matematik talqin etish yoki matematik modelni tanlash. Bungacha fizik yaqinlashishni tanlash zarur, ya'ni, qanday faktorlarni hisobga olish lozim, qaysilarini inobatga olmaslik mumkin. Fizik yaqinlashishni tanlash – fizika sohasidagi mutaxassislar tomonidan amalga oshiriladi.

Matematik model nima? Izlanayotgan fizik miqdorlar guruhi va berilgan miqdorlar guruhi ko'rsatiladi: ular orasida bog'liqlik mavjud, ya'ni, tenglama (algebraik yoki differensial) bu tenglamani barcha zaruriy ma'lumotlar (tenglama koeffitsientlari haqida, boshlang'ich va chegaraviy shartlar haqida) bilan yozish matematik modelni tanlashdan iborat.

Ikkinchi bosqich – masalani yechish uchun taqribiy (sonli) metodni tuzish, hisoblash algoritmini yozish;

Uchinchi bosqich – hisoblash algoritmini kompyuter uchun dasturlash;

To'rtinchi bosqich – kompyuterda hisoblashlar o'tkazish;

Beshinchi bosqich – olingan sonli natijalarni tahlil etish va matematik modelni aniqlashtirish.

Hisoblash eksperimenti – standart programma asosida hisoblanadigan bir martalik hisoblash emas, balki turli matematik modellar asosida o'tkaziladigan variantlar seriyasidir.

Disertatsiya mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi. Disertatsiya ishida gidrodinamik turg'unlik nazariyasida muhim ahamiyatga ega bo'lgan laminar oqimning turbulent oqimga aylanishi masalalari bayon qilinadi. Bunday oqimlarda Reynolds sonining ma'lum bir qiymatigacha oqim laminar (qatlamli) holatda harakatlanadi, Reynolds sonining qiymati o'zining kritik qiymati $R_{e_{kr}}$ ga erishganda oqimda betartib harakat boshlanadi, unda uyurmalar

hosil bo'ladi, qaralayotgan laminar oqim turbulent oqimga aylanib boshlaydi. Turli oqimlar uchun kritik Reynolds sonini hisoblash oqimda qachon turbulentlik hodisasi paydo bo'lishini oldindan ilmiy asosda aytish mumkin. Laminar oqimning turbulent oqimga aylanishini zamonaviy o'ta samarali hisoblash metodlari va kompyuterlarsiz aniqlab bo'lmaydi. Turli oqimlar uchun Reynolds sonini aniqlash, laminar oqimni turbulent oqimdan ajratib turuvchi neytral turg'unlik egri chiziqlarini chizish dissertatsiya mavzusining dolzarbligini ko'rsatadi.

Tadqiqot ob'yekti va predmetining belgilanishi: tadqiqot ob'yekti sifatida yarim cheksiz tekis plastinkadagi yopishqoq qisilmaydigan suyuqlik harakati qaraladi, oqimni bosim gradienti manfiy, nolga teng va musbat hollarda tadqiq etish, uning predmetini tashkil etadi.

Tadqiqot maqsadi va vazifalari: yarim cheksiz tekis plastinkada qisilmaydigan yopishqoq suyuqlik harakatida laminar oqimning turbulent oqimga aylanishini tadqiq etish ishning maqsadi bo'lib, bunda quyidagi vazifalarni bajarish nazarda tutiladi:

- turbulentlikning paydo bo'lishidagi eksperimental natijalarni tahlil etish;
- bosim gradientining turbulentlikning paydo bo'lishiga ta'sirini tadqiq etish;
- tekis plastinkada laminar oqimning turbulent oqimga aylanishini nazariy jihatdan o'rganish, sonli yechish metodlarini va ularning algoritmlarini ishlab chiqish;
- bosim gradienti manfiy, nolga teng va musbat bo'lgan hollarda neytral turg'unlik egri chiziqlarini chizish, kritik Reynolds sonlarini aniqlash.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari: tadqiqotda quyidagi asosiy masalalar qaraladi:

- trubada, chegaraviy qatlamda, plastinkada laminar oqimning turbulent oqimga aylanishi tabiatini aniqlash;
- bosim gradientining turbulentlik paydo bo'lishiga ta'sirini o'rganish;

- tekis plastinkada laminar oqimning turbulent oqimga aylanishini tadqiq uchun turg'unlik tenglamalarini chiqarish;
- turg'unlikni tadqiq etish uchun xos qiymat muammosini spektral-to'r metodi bilan yechish algoritmini chiqarish;
- bosim gradienti manfiy, nolga teng va musbat bo'lganda neytral turg'unlik egri chiziqlarini tuzish, kritik Reynolds sonlarini aniqlashdan iborat bo'lib, quyidagi farazga asoslanadi: eng kichik qo'zg'alishlar metodida qo'zg'alishlar shu ma'noda kichik deb hisoblanadiki, turg'unlik tenglamalarida ularga nisbatan ikkinchi miqdor bo'lgan hadlar inobatga olinmaydi.

Mavzu bo'yicha qisqacha adabiyotlar tahlili: Mavzu bo'yicha asosiy adabiyotlar quyidagilardan iborat bo'lib, ularda laminar oqimning turbulent oqimga aylanishining fizik mohiyati, turg'unlik tenglamalari, bosim gradientining turbulentlik paydo bo'lishiga ta'siri, spektral-to'r metodi, neytral turg'unlik egri chiziqlarini tuzish masalalari yoritilgan.

1. Линь Ц.Ц Теория гидродинамической устойчивости. –М.: Иностр. лит, 1958.-195с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.-М.: Наука, 1974.-571с.
3. Абуталиев Ф.Б, Нормуродов Ч.Б. Математическое моделирование проблемы гидродинамическое устойчивости.-Ташкент, Фан ва технология, 2011.-188с.

Tadqiqotda qo'llanilgan uslublarning qisqacha tavsifi: tadqiqotda yuqori aniqlikka ega bo'lgan o'ta samarali spektal-to'r metodi qo'llanilgan. Bu metodda xos qiymat muammosi qaralayotgan integarllash intervalida to'r kiritiladi, to'rning chetki nuqtalarida mos chegaraviy shartlar, to'r tugunlarida esa masalaning yechimi va uning $(t-1)$ tartibgacha bo'lgan hosilalarining uzluksizligi talab etiladi. Taqribiy yechimni birinchi turdagi Chebishev ko'phadlarigatori ko'rinishida ifodalsh uchun har bir to'r elementi $[-1, +1]$ kesmaga akslantiriladi. Asosiy differensial tenglama, chegaraviy va uzluksizlik shartlari bilan birgalikda umumlashgan algebraik xos qiymat muammosiga

keltiriladi. Uni yechish natijasida xos qiymatlar aniqlanadi va xos qiymatlarning mavhum qismlari tahlil qilinib, neytral turg'unlik egri chiziqlari chiziladi.

Tadqiqot natijalarining nazariy va amaliy ahamiyati: laminar oqimning turbulent oqimga aylanishi tadqiq etish ishning nazariy jihatini ko'rsatsa, hisoblash eksperimenti vositasida neytral turg'unlik egri chiziqlarini tuzish, kritik Reynolds sonini aniqlash uning amaliy ahamiyatini bildiradi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi: Yarim cheksiz tekis plastinkada qisilmaydigan yopishqoq suyuqlik harakatida bosim gradientining turg'unlikka ta'sirini tadqiq etilganligi, neytral turg'unlik egri chiziqlari chizilganligi, kritik Reynolds sonlarining aniqlanganligi tadqiqotning ilmiyligini ko'rsatadi.

Dissertatsiya tarkibining qisqacha tavsifi: Dissertatsiya, kirish, to'rtta bob, o'n ikkita paragraf, xulosa va adabiyotlar ro'yxatini o'z ichiga olgan bo'lib, uning birinchi bobida turbulentlikning paydo bo'lishiga oid eksperimental natijalar tahlil qilinadi. Ikkinchi bobda bosim gradientining turbulentlikka ta'siri masalalari yoritilgan. Tekis plastinkada laminar oqimning turbulent oqimga aylanishi, turg'unlik tenglamalari, xos qiymat muammosi hamda spektral-to'r metodi keltirilgan. Neytral turg'unlik egri chiziqlarini, kritik Reynolds sonlarini hisoblash natijalari to'rtinchi bobda berilgan. Dissertatsiya xulosalanib, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati keltirilgan.

I BOB. Turbulentlikning paydo bo'lishiga oid eksperimental natijalar

1-§. Trubada laminar oqimning turbulent oqimga aylanishi.

Real suyuqliklarning oqimi ko'pincha laminar (qatlamli) oqimlar harakatidan keskin farq qiladi. Ular shunday o'ziga xos xususiyatlarga ega ekani, u turbulentlik deb ataladi. Real suyuqliklarning trubalar, kanallar va chegaraviy qatlamlardagi oqimlarida Reynolds soni ortib borishi bilan laminar oqim formasining turbulent oqimga aylanishi yaqqol kuzatiladi. Laminar oqimning turbulent oqimga bunday o'tishi ba'zan uni turbulentlikning paydo bo'lishi deb ham atashadi, gidrodinamika sohasida fundamental ahamiyatga ega. Dastlab bunday o'tish to'g'ri tuba va kanallardagi oqimlarni kuzatishda aniqlangan. O'zgarmas ko'ndalang kesimga ega bo'lgan silliq devorli to'g'ri trubada suyuqlikning har bir zarrachasi to'g'ri chiziqli trayektoriya bo'ylab harakatlanadi. Yopishqoqlik mavjud bo'lganligi sababli, suyuqlikning devorga yaqin joylashgan zarrachalari uzoqda joylashgan zarrachalarga nisbatan sekin harakatlana boshlaydi. Oqim tartiblangan holda bir-biriga nisbatan siljuvchi qatlamlar (qatlamli yoki laminar oqim) sifatida harakatlanadi. Ammo, kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, Reynolds soning katta qiymatlarida oqim tartiblanmagan holatga kelib qoladi. Oqimda kuchli aralashish kuzatiladi, uni trubadagi oqimda oqimga bo'yalgan suyuqlikni kiritish orqali osongina kuzatish mumkin. Bu eksperiment dastlab O.Reynolds tomonidan o'tkazilgan oqimga kiritilgan bo'yoqli suyuqlik oqim laminar bo'lganda qat'iy chegaralangan chiziqlar bo'ylab harakatlanadi va oqim turbulentlikka aylanishi bilan suyuqlik bo'yog'i tuba bo'ylab tarqalib ketadi va trubadagi oqimni to'liq bo'yaydi. Bu shuni ko'rsatadiki, turbulent oqimda tuba o'qi bo'ylab harakatlanayotgan asosiy oqimga, ko'ndalang harakat paydo bo'ladi, ya'ni, tuba o'qiga perpendikulyar bo'lgan harakat vujudga keladi. Ana shu ko'ndalang harakat oqimda aralashib ketishga olib keladi.

Aynan bitta oqim uchun Reynolds sonining aynan bitta qiymatidan boshlab, laminar oqim turbulent oqimga aylanadi. Reynolds sonining ana shu

qiymati kritik Reynolds soni deb ataladi. O'z navbatida, trubadagi oqimda $Re < Re_{kr}$ bo'lsa oqim laminar bo'ladi.

2-§. Chegaraviy qatlamdagi jism atrofida laminar oqimning turbulent oqimga aylanishi

Ancha keyinroq eksperimental tadqiqotlar natijasida chegaraviy qatlamda ham oqim laminar va turbulent bo'lishi mumkinligi kuzatildi. Chegaraviy qatlamdagi jism atrofida laminar oqimning turbulent oqimga aylanishi ko'pgina faktorlarga bog'liq bo'ladi, ular orasida, Reynolds sonidan tashqari, tashqi oqimda bosimning o'zgarish xarakteri, devor sirtining holati (uning silliqligi yoki notekisligi), chegaraviy qatlamlardan tashqi oqimda qo'zg'alishlar mavjudligini ko'rsatish mumkin.

3-§. Plastinkada uzunasiga yo'naltirilgan oqim

Chegaraviy qatlamda oqimning laminar formadan turbulent formaga o'tishini tekis plastinkada uzunasiga yo'naltirilgan oqimda kuzatish mumkin. Agar plastinkadagi chegaraviy qatlam laminar bo'lsa, u holda chegaraviy qatlamning qalinligi $\sqrt{x}$ ga proportsional ravishda o'sadi, bu yerda x chegaraviy qatlam qaralayotgan plastinkaning bosh qismigacha bo'lgan masofa. Plastinkaning bosh qismida chegaraviy qatlam hamisha laminar bo'ladi, oqimning quyi qismlarida u turbulentlikka aylanadi. Bosh qismi o'tkir bo'lgan plastinkaga odatdagi havo oqimining purkalishida laminar oqimning turbulent oqimga aylanishi plastinkaning bosh qismidan x masofada sodir bo'ladi, bu masofa ushbu tenglikdan aniqlanadi:

$$Re_{kr} = \left(\frac{\sigma_m x}{\nu} \right)_{kr} = 3.5 \cdot 10^5 \div 10^6$$

Plastinkada uzunasiga yo'naltirilgan oqimda kritik Reynolds sonini juda oshirish mumkin, buning uchun oqib keluvchi oqimni kichik qo'zg'alishlar bilan qarash lozim.

II BOB. Bosim gradiyentining turbulentlikning paydo bo'lishiga ta'siri

1-§. Bosim gradiyenti manfiy bo'lgan hol

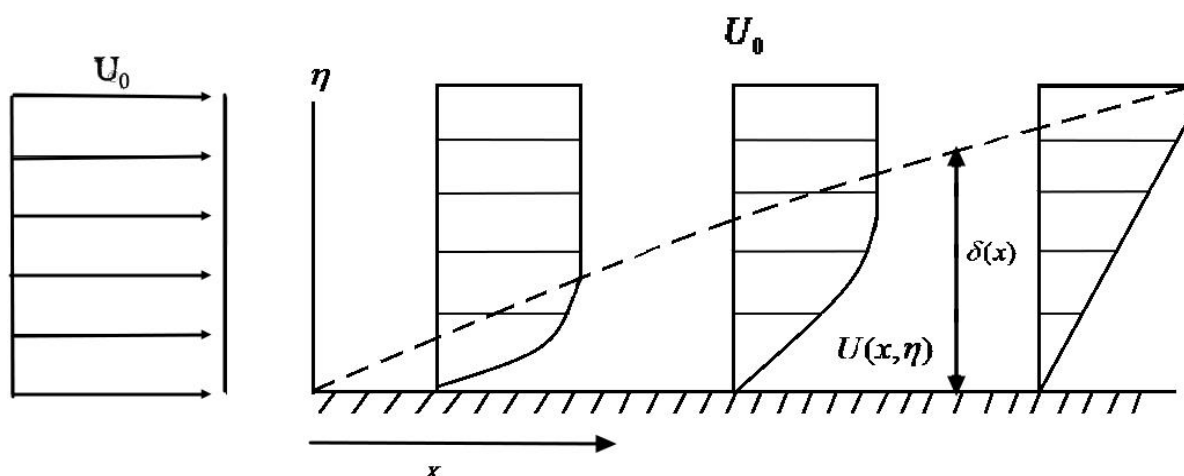
Ushbu paragrafda yarimcheksiz tekis plastinkada qisilmaydiga yopishqoq suyuqlikning harakati tenglamalarini qaraymiz. Oqimga bosim gradiyenti ta'sirini tavsiflovchi teng laminarni hosil qilamiz. Shunday qilib, chegaraviy qatlamda Orr-Zommerfeld tenglamasi uchun xos qiymat muammosini hosil qilamiz.

$$\frac{1}{i_k \text{Re}} D^2 \psi - \left((U(\eta) - \lambda) D + \frac{d^2 v}{d\eta^2} \right) \psi = 0, \quad \eta_0 < \eta < \eta_e \quad (1)$$

$$\psi(\eta_0) = \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_0) = 0, \quad \psi(\eta_e) = \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_e) = 0 \quad (2)$$

Bunda chegaraviy shartlar birjinsli bo'lib, ular suyuqlikning chegaradan o'tib ketmasligi va yopishqoqligini ifodalaydi. Bu yerda $D = \frac{d^2}{d\eta^2} - k^2$ - differensial operator, $v(\eta)$ - asosiy oqim tezlik profili, η - asosiy oqimga ko'ndalang yo'naltirilgan koordinata, $k = 2\pi/l$ - to'lqin soni, l - to'lqin uzunligi bo'lib, u 2π kesmada nechta to'lqin borligini aniqlaydi. $\text{Re} = \rho UL / \mu$ - Reynolds soni, ρ, μ - mos ravishda suyuqlikning zichligi va yopishqoqligi, $\psi(\eta)$ - qo'zg'alishlar uchun tok funksiyasi amplitudasi, U, L - mos ravishda xarakterli tezlik va uzunlik masshtablari, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ - masalaning xos qiymatlari bo'lib, λ_r to'lqin tebranishlarining fazoviy tezligi, λ_i - o'sish koeffitsienti. Agar $\lambda_i > 0$ bo'lsa, oqim turg'unmas, agar $\lambda_i < 0$ bo'lsa turg'un. Agarda $\lambda_i = 0$ bo'lsa, tebranishlar neytral turg'un bo'ladi. (k, Re) tekisligida $\lambda_i = 0$ bo'ladigan nuqtalar to'plami egri chiziqni tashkil etadi, bu egri chiziq neytral turg'unlik egri chizig'i deyiladi. Dissertatsiya ishida tekis plastinkadagi laminar oqim turg'unligini tadqiq etishda neytral turg'unlik egri chiziqlarini hosil qilish qaraladi, bunda bosim gradienti turlicha bo'lishi mumkin.

Shunday qilib, tenglama (1)dagi $U(y)$ funksiya chegaraviy qatlamdagi tezlik profili bo'lsin. Yarimcheksiz tekis plastinkadagi chegaraviy qatlamni qaraymiz, u rasmda keltirilgan



Oqib kelayotgan oqim tezligini U_0 - orqali belgilaymiz, x o'qini plastinka bo'ylab, η o'qini plastinkaga perpendikulyar qilib yo'naltiramiz, koordinata boshiga esa plastinkaning oldingi qismiga joylashtiramiz.

Yopishqoq suyuqliklar uchun plastinkaga yopishish sodir bo'ladi, u plastinkaga yaqin sohada suyuqlikning plastinkaga ishqalanishi evaziga yupqa qatlam paydo bo'lishiga olib keladi, bu qatlamning mavjudligi tok chiziqlari harakatini keskin o'zgartirib yuboradi. Ushbu yupqa qatlamda oqimning tezligi plastinkadan noldan (yopishqoqlik), o'zining tashqi oqimdagi to'liq qiymatigacha erishadi, ushbu oqimda suyuqlikni ishqalanishsiz harakatlanayapti deb qarashimiz mumkin. Takidlangan yupqa qatlam chegaraviy qatlam yoki ishqalanish qatlami deb ataladi. Chegaraviy qatlam qalinligini $\delta(x)$ orqali belgilaymiz. Ushbu qatlam plastinkaning bosh qismidan uzoqlashib borganda asta-sekin o'sib (kengayib) boradi.

Ko'rinib turibdiki, bu holda tezlik profili ikkita koordinataga bog'liq bo'ladi, ya'ni x va η dan : $U(x, \eta)$. Mualliflar ishlarida [1-5] ko'rsatilishicha, tezlik $U(x, \eta)$ va η uchun mos masshtablarni shunday tanlash mumkinki, bunda tezlik profillari $U(x, \eta)$ plastinkaning oldingi qismidan ixtiyoriy x masofalarda affin-o'xshash bo'ladi. Tezlik profili $U(x, \eta)$ uchun xarakterli masshtab sifatida

oqib kelayotgan oqim tezligi U_0 ni, koordinata η uchun xarakterli masshtab qilib chegaraviy qatlam qalinligi $\delta(x)$ ni olish mumkin. Bunday holda chegaraviy qatlamdagi tezlik profillari o'zaro affin-o'xshash bo'ladi va faqat bitta η koordinata orqali xarakterlanadi, ya'ni $U = U(\eta)$. Bunda tenglama (1) uchun xarakterli o'lchamsiz parametrlar to'plami ushbu formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$Re = U_0 \delta / \nu, \quad \delta = \sqrt{2\nu L / U_0}, \quad k\delta = (2\pi / l)\delta = G Re.$$

$$G_1 = 2\pi / R_1, \quad R_1 = lU_0 / \nu$$

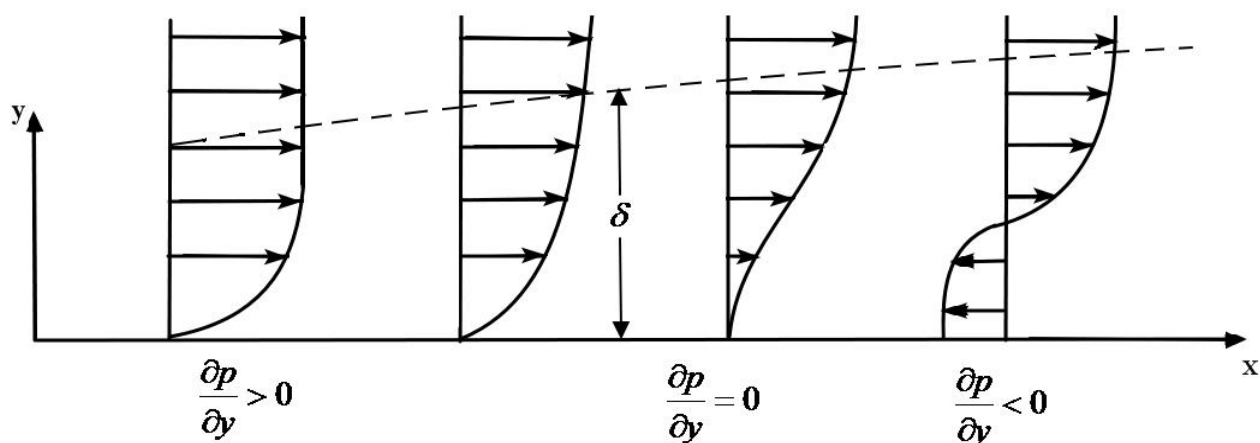
Bu yerda $\nu = \mu / \rho$ - kinematik yopishqoqlik, U_0 - chegaraviy qatlamdan tashqaridagi xarakterli tezlik, L - plastinka bo'ylab xarakterli uzunlik, δ - chegaraviy qatlamning qalinligi, l - qo'zg'alishlar to'lqini uzunligi, k, G - to'lqin soni, R_1 - to'lqin uzunligi bo'yicha Reynolds soni, Re - Reynolds soni. Chegaraviy shartlar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\psi(\eta) = \frac{d\psi}{d\eta} = 0, \text{ agar } \eta = 0$$

$$\psi(\eta), \frac{d\psi}{d\eta} \rightarrow 0, \text{ agar } \eta \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Bu shartlardan birinchisi chegaradan o'tib ketmaslik va yopishqoqlik shartlaridir, ikkinchisi esa, chegaradan uzoqda qo'zg'alishlar so'nishini bildiradi.

Chegaraviy qatlamda bosim gradienti o'zgarishi asosiy oqim profilining ham o'zgarishiga olib keladi, buni ushbu rasmdan ko'rish mumkin.



Bunda avvalambor, chegaraviy qatlamda tormozlangan suyuqlikning qanday sharoitlarda tashqi oqimga ko'chib o'tishini aniqlashimiz lozim, boshqacha qilib aytganda, qanday sharoitlarda oqim chegaradan ajraladi. Agar jism konturi bo'yicha bosim ortib boradigan soha mavjud bo'lsa, u holda unchalik katta kinetik energiyaga ega bo'lmagan va chegarada tormozlangan suyuqlik, bosim gradienti yuqori bo'lgan sohaga o'tish holatiga ega bo'lmaydi. Buning o'rniga tormozlangan suyuqlik yuqori bosim sohasidan chetlashadi va jismdan uziladi va plastinkadan tashqi oqimga tomon qisiladi. Bundan tashqari, plastinkaga yaqin sohada tormozlangan suyuqlik zarrachalari bosim gradienti ta'sirida odatda tashqi oqim yo'nalishiga teskari bo'lgan yo'nalishda harakatlanadi.

Chegaraviy qatlamda asosiy oqim $U(\eta)$ Fokker-Sken tenglamasi yechimining birinchi hosilasi sifatida aniqlanadi [6]:

$$g''' + gg'' + \beta[1 - (g')^2] = 0, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad (4)$$

uning boshlang'ich shartlari

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = g_0 \quad (5)$$

Formparametr β ning turli qiymatlariga turli oqim profillari $U(\eta)$ va boshlang'ich shart g_0 mos keladi. Parametr β ning musbat qiymatlariga bosim gradientining manfiy qiymatlari to'g'ri keladi. Monografiya [6]dan formparametr β , g_0 ning boshlanishini ko'rsatuvchi jadval bo'lagini keltiramiz.

β	g_0	$A(\beta)$
0,2	0,6809	0,984

Bu holda Fikker-Sken tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi.

$$g''' + gg'' + 0,2[1 - (g')^2] = 0,$$

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = 0,6869$$

Bundan tezlik profili $U(\eta) = g'$ ni toppish uchun sistema (4), (5) ni birinchi tartibli uchta oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltiramiz.

Belgilash kiritamiz

$$g = d_1, \quad d_1' = d_2, \quad d_2' = d_3 \quad (6)$$

bu holda

$$d_3' = -d_1 d_3 + \beta(d_2^2 - 1), \quad (7)$$

$$d_1(0) = 0, \quad d_2(0) = 0, \quad d_3(0) = g_0.$$

Bu sistemani integrallash uchun to'rtinchi tartibli aniqlikka ega bo'lgan Runge-Kutta metodidan foydalanish mumkin.

Uchta birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechishga Runge-Kutta metodi algoritmini bayon qilamiz. Ushbu paragrafda Runge-Kutta metodi algoritmini umumiy ko'rinishda

keltiramiz, ikkinchi paragrafda esa ushbu algoritmning Fokker-Sken tenglamasi (6)-(7)ga tadbqiqini namoyish etamiz.

Shunday qilib, quyidagi sistemani yechish talab qilingan bo'lsin

$$\begin{aligned}x'(t) &= f_1(t, x, y, z), \\y'(t) &= f_2(t, x, y, z), \quad 0 < t \leq \eta_l \\z'(t) &= f_3(t, x, y, z)\end{aligned}\tag{8}$$

sistema uchun boshlang'ich shartlar

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0\tag{9}$$

berilgan bo'lsin. Integrallash intervali $[0, \eta_l]$ ga teng oraliqli to'r kiritamiz: ya'ni

$$t_n = nh, \quad n=0,1,2,\dots,M, \quad \eta_l = Mh,$$

bu yerda $h = \eta_l / M$ - to'rning qadami.

Sistema (8), (9) ni yechish uchun Runge-Kutta metodi algoritmi quyidagi ko'rinishga ega:

$$k_1 = hf_1(t_n, x_n, y_n, z_n),$$

$$b_1 = hf_2(t_n, x_n, y_n, z_n),$$

$$g_1 = hf_3(t_n, x_n, y_n, z_n),$$

$$k_2 = hf_1\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{b_1}{2}, z_n + \frac{g_1}{2}\right),$$

$$b_2 = hf_2\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{b_1}{2}, z_n + \frac{g_1}{2}\right),$$

$$g_2 = hf_3\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{b_1}{2}, z_n + \frac{g_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf_1\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{b_2}{2}, z_n + \frac{g_2}{2}\right),$$

$$b_3 = hf_2\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{b_2}{2}, z_n + \frac{g_2}{2}\right),$$

$$g_3 = hf_3\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{b_2}{2}, z_n + \frac{g_2}{2}\right),$$

$$k_4 = hf_1(t_n + h, x_n + k_3, y_n + b_3, z_n + g_3),$$

$$b_4 = hf_2(t_n + h, x_n + k_3, y_n + b_3, z_n + g_3),$$

$$g_4 = hf_3(t_n + h, x_n + k_3, y_n + b_3, z_n + g_3),$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4),$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4),$$

bu yerda $n=0, 1, \dots, M-1$.

2-§. Bosim gradienti nolga teng bo'lgan hol

Formparametr β ning nolga teng qiymati bosim gradientining nolga teng bo'lgan qiymatiga mos keladi. Bu holda Fokker-Sken tenglamasi quyidagi ko'rinishini oladi:

$$\begin{aligned} g''' + gg'' &= 0, \quad 0 \leq \eta < \infty, \\ g(0) &= 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = g_0 = 0,4696. \end{aligned}$$

Ushbu paragrafda oddiy differensial tenglamalar sistemasi (6), (7) ni yechish algoritmini keltiramiz. Buning uchun sistema (6), (7) ni (8) ko'rinishiga yozamiz

$$\begin{cases} d_1 = d_2, \\ d_2 = d_3, \\ d_3 = -d_1 \cdot d_3 + \beta(d_2^2 - 1), \end{cases} \quad (10)$$

uning boshlang'ich shartlari

$$d_1(0) = d_0^{(1)} = 0, \quad d_2(0) = d_0^{(2)} = 0, \quad d_3(0) = d_0^{(3)} = g_0. \quad (11)$$

Sonli hisoblashlar o'tkazish uchun integrallash intervali $[0, \infty)$ da cheksizlikni katta ammo, chekli miqdor η_l bilan almashtiramiz. Shunday qilib, yangi integrallash intervali $[0, \eta_l]$ ga ega bo'lamiz.

Bu holda Runge-Kutta metodi algoritmi sistema (10), (11) uchun quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{aligned} k_1 &= h d_n^{(2)}, \\ b_1 &= h d_n^{(3)}, \\ g_1 &= h[-d_n^{(1)} \cdot d_n^{(3)} + \beta((d_n^{(2)})^2 - 1)], \end{aligned}$$

$$k_2 = h(d_n^{(2)} + \frac{b_1}{2}),$$

$$b_2 = h(d_n^{(3)} + \frac{g_1}{2}),$$

$$g_2 = h[-(d_n^{(1)} + \frac{k_1}{2})(d_n^{(3)} + \frac{g_1}{2}) + \beta((d_n^{(2)} + \frac{b_1}{2})^2 - 1)],$$

$$k_3 = h(d_n^{(2)} + \frac{b_2}{2}),$$

$$b_3 = h(d_n^{(3)} + \frac{g_2}{2}),$$

$$g_3 = h[-(d_n^{(1)} + \frac{k_2}{2})(d_n^{(3)} + \frac{g_2}{2}) + \beta((d_n^{(2)} + \frac{b_2}{2})^2 - 1)],$$

$$k_4 = h(d_n^{(2)} + b_3),$$

$$b_4 = h(d_n^{(3)} + g_3),$$

$$g_4 = h[-(d_n^{(1)} + k_3)(d_n^{(3)} + g_3) + \beta((d_n^{(2)} + b_3)^2 - 1)],$$

$$d_{n+1}^{(1)} = d_n^{(1)} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$d_{n+1}^{(2)} = d_n^{(2)} + \frac{1}{6}(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4), \tag{12}$$

$$d_{n+1}^{(3)} = d_n^{(3)} + \frac{1}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4), \quad n = 0, 1, \dots, M-1.$$

Sistema (12)ni yechish natijasida asosiy oqim profili $U(\eta)$ ning qiymatlari to'rt tugunlari $t_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, M$, $Mh = t_n = \eta_l$ da aniqlanadi. Bu qiymatlar sifatida quyidagilar olinadi.

$$U(0) = d_0^{(1)} = 0, \quad U(h) = d_1^{(1)} = 0, \quad U(2h) = d_2^{(1)}, \dots, U(\eta_l) = d_n^{(1)}.$$

Ma'lumki, oqimning tezlik profili teng oraliqli qadamlar bilan hisoblangan. Asosiy oqim tezlik profili $U(\eta)$ ni birinchi turdagi Chebishev ko'phadlari qatori ko'rinishida ifodalash uchun tezlik profilining hisoblangan qiymatlarini Chebishev ko'phadlari tugunlariga interpolatsiyalash lozim, ya'ni

$$y_l^{(j)} = \cos(\pi l / p_j), \quad l = 0, 1, \dots, p_j, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

tugunlarda tezlik profili $U_j(y_l^{(j)})$ ning qiymatlari aniqlanadi. So'ngra asosiy oqimning tezlik profilini quyidagi birinchi turdagi Chebishev ko'phadlari qatori ko'rinishida ifodalaymiz.

$$U_j(y_l^{(j)}) = \sum_{n=0}^{p_j} b_n^{(j)} T_n(y_l^{(j)}),$$

$$y_l^{(j)} = \cos(\pi l / p_j), \quad l = 0, 1, \dots, p_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

bu yerda $T_n(y)$ - birinchi turdagi Chebishev ko'phadlari, $y_l^{(j)}$ - ularning tugunlari, p_j - esa oqim profilini to'rtinchi elementida approksimatsiyalash uchun zarur bo'lgan ko'phadlar soni. $U_j(y_l^{(j)})$ funksiyaning qatorga yoyilmasidagi $b_n^{(j)}$ koeffitsientlar quyidagi teskari Chebishev almashtirishi yordamida aniqlanadi

$$b_n^{(j)} = \frac{2}{p_j c_n} \sum_{l=0}^{p_j} \frac{1}{c_l} U_j(y_l^{(j)}) T_n(y_l^{(j)}), \quad n = 0, 1, \dots, p_j,$$

$$c_0 = c_{p_j} = 2, \quad c_m = 1 \quad \text{agar} \quad m \neq 0, p_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

3-§. Bosim gradienti musbat bo'lgan hol.

Formparametr β ning manfiy qiymatlari bosim gradientining musbat bo'lgan holatiga mos keladi. Fokker-Sken tenglamalarini bu holda quyidagicha yozish mumkin:

$$g''' + gg'' - 0,19[1 - (g')^2] = 0,$$

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = g_0 = 0,086$$

Bu sistemani ham ikkinchi paragrafda bayon qilingan Runge-Kutta metodi bilan yechiladi va oqim profili $U(\eta)$ ning qiymatlari topiladi va ular yuqorida bayon qilinganidek birinchi turdagi Chebishev ko'phadlari tugunlariga interpolatsiyalanadi.

Endi Orr-Zommerfeld tenglamasi (1)ni chegaraviy shartlari (2) bilan bosim gradienti manfiy, musbat va nolga teng bo'lgan hollarning hammasini umumlashtirib, spektral-to'r metodi bilan yechish algoritmini keltiramiz.

Xos qiymat muammosi (1)-(2) ni yechishga spektral-to'r metodini qo'llash bir qator afzalliklarga ega: birinchidan, Chebishev ko'phadlarini integrallash intervalida yechim gradientiga mos qilib taqsimlash, ikkinchidan yechilishi lozim bo'lgan algebraik sistema matritsalarini tartibini keskin kamaytirish, uchinchidan xos qiymat muammosining barcha xos qiymatlarini yuqori aniqlik bilan topishga imkon beradi.

Spektral-to'r metodi (STM) da to'r elementlari soni N berilganda xos qiymatlarni yetarli aniqlik bilan topish uchun to'r tugunlari o'rnini to'g'ri joylashtirish va p_j sonlarni to'g'ri tanlash lozim. Bu masalalar esa uzviy bog'langan, chunki, to'r elementlari uzunligini kichraytirsak, undagi Chebishev ko'phadlari sonini ham kamaytirish mumkin va aksincha. Amaldi teng oraliqli

to'rni tanlash va ularda turli sondagi ko'phadlarni berish juda qulay. Bu holda u yoki bu to'r elementidagi ko'phadlar soni ulardagi yechim gradientining qiymatlariga bog'liq bo'ladi. Yechim gradientini ko'pincha asimptotik analizdan kelib chiqqan holda baholash mumkin.

Chegaraviy qatlamning turg'unligi masalasida yaxshi ma'lumki [1]-plastinkaga (devorga) yaqin joyda – kritik qatlam deb ataluvchi qatlamda – yechimning tabiati yopishqoq yechimlarning tez o'zgarishi bilan aniqlanadi:

$$\psi \sim e^{-(k\text{Re})^{1/3}y}, \quad k\text{Re} \gg 1.$$

Devordan uzoqda qo'zg'alishlar quyidagi qonuniyat asosida sekin so'nadi

$$\psi \sim e^{-ky}, \quad k \sim 1.$$

Ko'rinib turibdiki, yechim gradientining nisbiy miqdori devorga yaqin joyda, devoddan uzoqdagiga qaraganda $\sqrt[3]{\text{Re}}$ marta ko'p. Shu sababli, tugunlar soni va o'z navbatida ko'phadlar soni devorga yaqin joyda $\sqrt[3]{\text{Re}}$ marta ko'p bo'lishi lozim. Bu ko'phadlarning yana ham aniq qiymatlari sonli hisoblashlar natijasida topiladi. Differensial masala (1)-(2)ni spektral-to'r metodi bilan yechishda olinadigan algebraik sistemaning oxirgi ko'rinishini keltiramiz:

$$\frac{1}{24ik_j \text{Re}_j} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^{p_j} \left[p^3(p^2-4)^2 - 3n^2p^5 + 3n^4p^3 - pn^2(n^2-4)^2 \right] a_p^{(j)} -$$

$$-\frac{2k_j}{i\text{Re}_j} \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^{p_j} p(p^2-n^2) a_p^{(j)} + \frac{k_j^3}{i\text{Re}_j} c_n a_p^{(j)} -$$

$$-\frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=n+2}^{p_j} a_p^{(j)} \sum_{\substack{m \equiv p \pmod{2} \\ |m| < p-2 \\ |n-m| \leq p_j}} p(p^2-n^2) \bar{b}_{n-m}^{(j)} - k_j^2 \sum_{\substack{|p| \leq p_j \\ |n-p| \leq p_j}} \bar{a}_p^{(j)} \bar{b}_{n-m}^{(j)} - \right.$$

$$- \sum_{\substack{|p| \leq p_j \\ |n-p| \leq p_j}} \bar{a}_p^{(j)} \sum_{\substack{p=(n=p)+2 \\ m \equiv p \pmod{2}}} m [m^2 (n-p)^2] \bar{b}_{n-m}^{(j)} \left\} - \lambda \left[k_j^2 c_n a_p^{(j)} - \sum_{\substack{p=n=2 \\ p \equiv n \pmod{2}}} p (p^2 - n^2) a_p^{(j)} \right] = 0,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, p_j - 4, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

bu yerda $a_n^{(j)}, b_n^{(j)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots, p_j$) lar mos ravishda ψ va U funksiyalarning Chebishev koefitsentlari hamda $\bar{a}_n^{(j)} = c_n a_n^{(j)}$, $\bar{b}_n^{(j)} = c_n b_n^{(j)}$ bo'ladi, agar $-p_j \leq n \leq p_j$, $c_0 = 2$, $c_n = 1$ agar $n > 0$ da.

III BOB. Tekis plastinkada laminar oqimning turbulent oqimga aylanishi

1-§. Turg'unlik tenglamalari

Qisilmaydigan yopishqoq suyuqlik harakati matematik modeli Nave-Stok tenglamalari bilan tavsiflanadi [1-5].

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} + u \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

bu yerda u, g - mos ravishda uzunasiga va ko'ndalangiga tezlik komponentalari, p - bosim, $\text{Re} = \rho UL / \mu$ - Reynolds soni, μ - yopishqoqlik, ρ - zichlik, U va L - mos ravishda tezlik va uzunlikning xarakterli masshtablari .

Oqimning turg'unligini tadqiq etish uchun sistema (1)ning yechimini asosiy laminar oqim $U(y)$ va kichik qo'zg'alishlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalaymiz:

$$u(x, y, t) = U(y) + \tilde{u}(x, y, t)$$

$$g(x, y, t) = \tilde{g}(x, y, t), \quad (2)$$

$$p(x, y, t) = P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t),$$

Sistema (1)ni (2) e'tiborga olgan holda yozamiz va eng kichik qo'zg'alishlar metodiga asosan hosil bo'lgan tenglamalarda qo'zg'alishlarga

nisbatan faqat birinchi tartibli bo'lgan hadlar bilan chegaralanamiz va ushbuga ega bo'lamiz:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{dU}{dy} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{d^2 U}{dy^2} + \Delta \tilde{u} \right),$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{v}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Endi asosiy oqimning o'zi Nave-Stoke tenglamalarining yechimi ekanligini e'tiborga olsak, ya'ni

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 U}{dy^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

sistema (3)ni quyidagi ko'rinishga yozib olamiz:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{dU}{dy} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{u}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{v}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Qo'zg'aluvchan harakat uchun tok funksiyasini kiritamiz

$$\Psi(x, y, t) = \psi(y) e^{i(kx - \omega t)} \quad (6)$$

bu yerda $\psi(y) = \psi_2 + i\psi_i$ - qo'zg'alishlarning kompleks amplitudasi, k – haqiqiy miqdor, y – to'lqin uzunligi l bilan quyidagi munosabat orqali bog'langan

$l = 2\pi/k$. Miqdor ω - kompleks, $\omega = \omega_r + i\omega_i$, bu yerda ω_r - alohida olingan tebranishning doiraviy amplitudasi, ω_i - esa o'sish koeffitsienti, ya'ni, tebranishlarning o'sishi yoki so'nishi to'g'risida mulohaza yuritishga imkon beradigan miqdor. Agar $\omega_i < 0$ bo'lsa u holda, tebranishlar so'nadi va laminar oqim turg'un bo'ladi, agarda $\omega_i > 0$ bo'lsa, u holda turg'unmaslik o'rinli bo'ladi. Miqdorlar k va ω dan tashqari ularning nisbati $\lambda = \frac{\omega}{k} = \lambda_r + i\lambda_i$ ni kiritish maqsadga muvofiq. Miqdor λ_i - x yo'nalish bo'yicha to'lqinlarning tarqalish tezligini ifodalaydi (fazoviy tezlik), λ_i - esa yana tebranishlarning so'nishi yoki o'sishi haqida mulohaza yuritishga imkon beradigan miqdor.

Qo'zg'aluvchan harakat amplitudasi $\psi(y)$ ni faqat y o'zgaruvchidan bog'liq deb olish qabul qilingan, chunki asosiy oqim $U(y)$ ham faqat y koordinatadan bog'liq. Tok funksiyasi (6) uchun ushbuga ega bo'lamiz:

$$\tilde{u} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \psi'(y)e^{i(kx - \omega t)}, \quad \tilde{v} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -ik\psi(y)e^{i(kx - \omega t)}, \quad (7)$$

$$\psi(\eta_0) = \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_0) = 0, \quad \psi(\eta_l) = \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_l) = 0 \quad (8)$$

bunda chegaraviy shartlar birjinsli bo'lib, ular chegaradan o'tib ketmaslik va yopishqoqlik shartlarini ifodalaydi. Bu yerda $D = \frac{d^2}{d\eta^2} - k^2$ - differensial operator, $U(\eta)$ - asosiy oqimning tezlik profili, η - asosiy oqimning ko'ndalang yo'naltirilgan koordinata. k - to'lqin soni, Re - Reynolds soni, $\psi(\eta)$ - qo'zg'alishlar uchun tok funksiyasi amplitudasi, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ - masalaning xos qiymatlari, bu yerda λ_r - to'lqinli qo'zg'alishlarning fazoviy tezligi, λ_i - o'sish koeffitsienti. Agar $\lambda_i < 0$ bo'lsa, oqim turg'un, agar $\lambda_i > 0$ bo'lsa, oqim turg'unmas. Agarda $\lambda_i = 0$ bo'lsa, tebranishlar neytral turg'un.

2-§. Xos qiymat muammosi

Ushbu paragrafda, differensial tenglama uchun qo'yilgan qo'yilgan xos qiymat muammosini spektral-to'r metodi yordamida algebraik xos qiymat muammosiga keltirishni qaraymiz. Masala (7), (8) ni spektral-to'r metodi metodi bilan modellashtirishni qaraymiz. Buning uchun integrallash intervali $[\eta_0, \eta_l]$ da to'r kiritamiz $\eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_N = \eta_l$ va shunday qilib N ta turli elementlarga ega bo'lamiz.

$$[\eta_0, \eta_1], [\eta_1, \eta_2], \dots, [\eta_j, \eta_{j+1}], \dots, [\eta_{N-1}, \eta_N], \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Differensial tenglama (7) to'ring har bir elementida quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$D^2\psi_j - ik \operatorname{Re}[(U_j(\eta) - \lambda)D - U_j''(\eta)]\psi_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Chegaraviy shartlar (8) η_0 va η_N nuqtalarda yoziladi:

$$\psi_1(\eta_0) = \frac{d\psi_1}{d\eta}(\eta_0) = 0, \quad \psi_N(\eta_N) = \frac{d\psi_N}{d\eta}(\eta_N) = 0, \quad (10)$$

to'ring ichki tugunlarida tenglama (9) ning yechimi va uning 3-tartibligacha bo'lgan hosilalarining uzluksizligini talab etamiz. Bu shartlar ushbu ko'rinishga ega

$$\psi_j^{(t)}(\eta_j) = \psi_{j+1}^{(t)}(\eta_j), \quad t = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (11)$$

bu yerda t – hosila tartibini ko'rsatadi.

Tenglama (9) ning yechimi ψ_j ni birinchi turdagi Chebishev ko'phadlari qatori ko'rinishida izlaymiz. Buning uchun har bir $[\eta_j, \eta_{j+1}]$ elementni $[-1, 1]$ intervalga quyidagi o'zgaruvchini almashtirish orqali o'tkazamiz:

$$\eta = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} y, \quad m_j = \eta_j + \eta_{j+1}, \quad l_j = \eta_j - \eta_{j+1}.$$

bu yerda l_j – orqali j – to'r elementi uzunligi belgilangan. Ushbu almashtirishdan keyin tenglama (9) quyidagi ko'rinishni oladi.

$$D_j^2 \psi_j - ik_j \operatorname{Re}_j [(U_j(y) - \lambda) D_j - U_j''(y)] \psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (12)$$

bu yerda .

$$D_j = \frac{d^2}{dy_j^2} - k_j^2, \quad k_j = \frac{l_j}{2} k, \quad \operatorname{Re}_j = \frac{l_j}{2} \operatorname{Re}.$$

Shartlar (10), (11) dan

$$\psi_1(-1) = 0, \quad \frac{d\psi_1}{dy}(-1) = 0,$$

$$l_j^{-t} \psi_j^{(t)}(+1) = l_{j+1}^{-t} \psi_{j+1}^{(t)}(-1), \quad t = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (13)$$

$$\psi_N(+1) = 0, \quad \frac{d\psi_N}{dy}(+1) = 0.$$

ni hosil qilamiz.

Masala (12)-(13)ning taqribiy yechimini to'rning har bir elementida ushbu ko'rinishda izlaymiz

$$\psi_j(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n(y),$$

$$U_j(y_l^{(j)}) = \sum_{n=0}^{p_j} b_n^{(j)} T_n(y_l^{(j)}), \quad (14)$$

$$y_l^{(j)} = \cos(\pi l / p_j), \quad l = 0, 1, 2, \dots, p_j; j = 1, 2, \dots, N,$$

bu yerda $T_n(y)$ – birinchi turdagi Chebishev ko'phadlari, $y_l^{(j)}$ – ularning tugunlari, p_j – esa yechimni to'ring j – elementida approksimatsiyalash uchun foydalaniladigan ko'phadlar soni.

Asosiy oqim $U_j(y)$ ning qatorga yoyilmasidagi $b_n^{(j)}$ koeffitsentlar quyidagi teskari Chebishev almashtirishi orqali aniqlanadi.

$$b_n^{(j)} = \frac{2}{p_j c_n} \sum_{l=0}^{p_j} \frac{1}{c_l} U_j(y_l^{(j)}) T_n(y_l^{(j)}), \quad n = 0, 1, \dots, p_j,$$

$$c_0 = c_{p_j} = 2, \quad c_m = 1 \text{ agar } m \neq 0, p_j, j = 1, 2, \dots, N.$$

Spektral-to'r metodining bayon qilinishini yengillashtirish maqsadida tenglama (12)ni operatorli ko'rinishda yozamiz, ya'ni

$$L_j \psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

bu yerda L_j ushbu formula bilan aniqlanadigan differensial operator

$$L_j = D_j^2 - ik_j \operatorname{Re}[(U_j(y) - \lambda) D_j - U_j''(y)].$$

Qatorlar (14)ni tenglama (15)ga qo'yib, tenglamaning chap tarafining har bir to'r elementida dastlabki $((p_j - 4)$ ta Chebishev ko'phadlariga ortogonal bo'lishini talab qilamiz, ya'ni

$$(L_j \psi_j, T_n) = 0, n = 0, 1, \dots, p_j - 4, j = 1, 2, \dots, N, \quad (16)$$

Bu yerda $(f, g) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)(1-x^2)^{-1/2} dx$, $[-1, 1]$ kesmadagi skalyar ko'paytma.

Bundan tashqari, Chebishev ko'phadlari qatori (14) chegaraviy va uzluksizlik shartlarini aniq qanoatlantirsin. Bu shartlar quyidagicha yoziladi:

$$\sum_{n=0}^{p_1} (-1)^n a_n^{(j)} = 0, \sum_{n=0}^{p_1} (-1)^{n-1} n^2 a_n^{(1)} = 0, \sum_{n=0}^{p_1} a_n^{(j)} = \sum_{n=0}^{p_{j+1}} (-1)^n a_n^{(j+1)},$$

$$\frac{1}{l_j} \sum_{n=0}^{p_j} n^2 a_n^{(j)} = \frac{1}{l_{j+1}} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} (-1)^{n-1} n^2 a_n^{(j+1)},$$

$$\frac{1}{l_j^2} \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n''(+1) = \frac{1}{l_{j+1}^2} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} a_n^{(j+1)} T_n''(-1), \quad (17)$$

$$\frac{1}{l_j^2} \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n''(+1) = \frac{1}{l_{j+1}^3} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} a_n^{(j+1)} T_n'''(-1), \quad j = 1, 2, \dots, N = l,$$

$$\sum_{n=0}^{p_N} a_n^{(N)} = 0, \quad \sum_{n=0}^{p_N} n^2 a_n^{(N)} = 0.$$

Formula (17)da Chebishev ko'phadlarining hosilalari quyidagi Rekurrent formulalar bo'yicha hisoblanadi

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$T'_{n+1}(x) = 2xT'_n(x) + 2T_n(x) - T'_{n-1}(x), \quad T'_0(x) = 0, \quad T'_1(x) = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (18)$$

$$T_{n+1}''(x) = 2xT_n''(x) + 4T_n'(x) - T_{n-1}''(x), \quad T_0''(x) = 0, \quad T_1''(x) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$T_{n+1}'''(x) = 2xT_n'''(x) + 6T_n''(x) - T_{n-1}'''(x), \quad T_0'''(x) = 0, \quad T_1'''(x) = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

3-§. Spektal-to'r metodi

Shunday qilib, spektal-to'r metodini qo'llash natijasida, $\bar{m} = N(p_j + 1)$ ta noma'lumlar $a_n^{(j)} (n = 0, 1, 2, \dots, p_j, j = 1, 2, \dots, N)$ ni topish uchun $\bar{m} = N(p_j + 1)$ ta tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamalar sifatida: $N(p_j - 3)$ ta ortogonallik tenglamalari (16) va munosabat (17)dagi $4(N-1)$ ta uzluksizlik shartlari va 4 ta chegaraviy shartlardir. Hosil bo'lgan sistemani matritsali ko'rinishda yozish qulay

$$(A - \lambda B)x = 0 \quad (19)$$

bu almashtirish natijasida sistemada $4N$ ta nol satrlar mavjud. Bu holda sistema (18)ga ustunlar almashtirishlar matritsasi bilan ta'sir qilish mumkin.

$$(AQ - \lambda BQ)(Q^{-1}x) = 0 \quad (20)$$

Bu almashtirish natijasida sistemada $4N$ ta tenglamalar avtonom bo'lib qoladi. Qolgan tenglamalardan ushbu algebraik sistemaga ega bo'lamiz

$$(T - \lambda W)\bar{Y} = 0 \quad (21)$$

$$\bar{Y} = Q_x^{-1}, \quad \bar{Y} = (a_4^{(1)}, \dots, a_{p_1}^{(1)} a_4^{(2)}, \dots, a_{p_2}^{(2)}, \dots, a_4^{(N)}, \dots, a_{p_n}^{(n)})$$

Spektral-to'r metodini qo'llash natijasida hosil bo'lgan T va W matritsalarining o'lchami juda kichik bo'ladi, ya'ni $(\bar{m} - 4N) \times (\bar{m} - 4N)$, bu yerda $\bar{m}$ – spektral-to'r metodida qo'llaniladigan ko'phadlarning umumiy soni, N – esa to'r elementlari soni. $\bar{m} = \sum_{j=1}^N (p_j + 1)$.

Sistema (21)ni chapdan W^{-1} matritsaga ko'paytirib, standart xos qiymat muammosiga kelamiz

$$(D - \lambda E)Y = 0, \quad D = TW^{-1}. \quad (22)$$

Spektral-to'r metodi (STM) samaradorligiga to'xtalamiz.

Q almashtirishni qo'llagandan keyin A va B kompleks matritsalarining satr va ustunlari soni $4N$ ga kamayadi, bu yerda N – to'r elementlar soni. Umumiy tenglamalar soni $\bar{m}$ ning qolgan $\bar{m} - 4N$ ta tenglamalar soniga nisbati

$$q = \frac{\bar{m}}{\bar{m} - 4N}$$

ga teng.

Shunday qilib, integrallash intervalini elementlarga bo'lish natijasida har bir kompleks matritsalar A va B ning tartibi q^2 marta kamaydi. Tartibning kamayishi har bir elementlarda kam sonli ko'phadlar olinganda yana ham sezilarli bo'ladi. Haqiqatdan ham, j – elementdagi ko'phadlar soni $p_j + 1$ ga teng. Bu holda ko'phadlarning umumiy soni va algebraik tenglamalar soni $\bar{m} = \sum_{j=1}^N (p_j + 1)$ ga teng. Ta'kidlash lozimki, p_j differensial tenglamadagi yuqori tartibli hosila tartibidan kam bo'lmasligi lozim, ya'ni $p_j \geq 4$. Agar $p_j \geq 4$ deb olsak, barcha j lar uchun $\bar{m} = 5N$, $q = 5$ bo'ladi. Bu shuni anglatadiki, sistemadagi tenglamalar soni 5 marta kamayadi, har bir A va B kompleks matritsalarining tartibi esa 25 marta kamayadi. Quyidagi 1- jadvalda spektral

metod (SM), bunda integrallash intervalida to'rt kiritilmaydi, hamda spektral-to'rt metodi (STM)da sistema (21) dagi T va W matritsalarining tartibining o'zgarishini kuzatish mumkin.

1-jadval

$\bar{m}$	SM	N	STM
5	1x1	1	1x1
10	6x6	2	2x2
15	11x11	3	3x3
20	16x16	4	4x4
40	36x36	8	8x8
100	96x96	20	20x20

Jadvalda $\bar{m}$ orqali SM va STM yechimni approksimatsiyalash uchun zarur bo'lgan ko'phadlar soni keltirilgan, N esa STM dagi to'rt elementlari sonini ko'rsatadi. Jadvaldan ko'rinib turibdiki, ko'phadlar umumiy soni $\bar{m}$ ning ortib borishi bilan STM samaradorligi juda sezilarli bo'ladi.

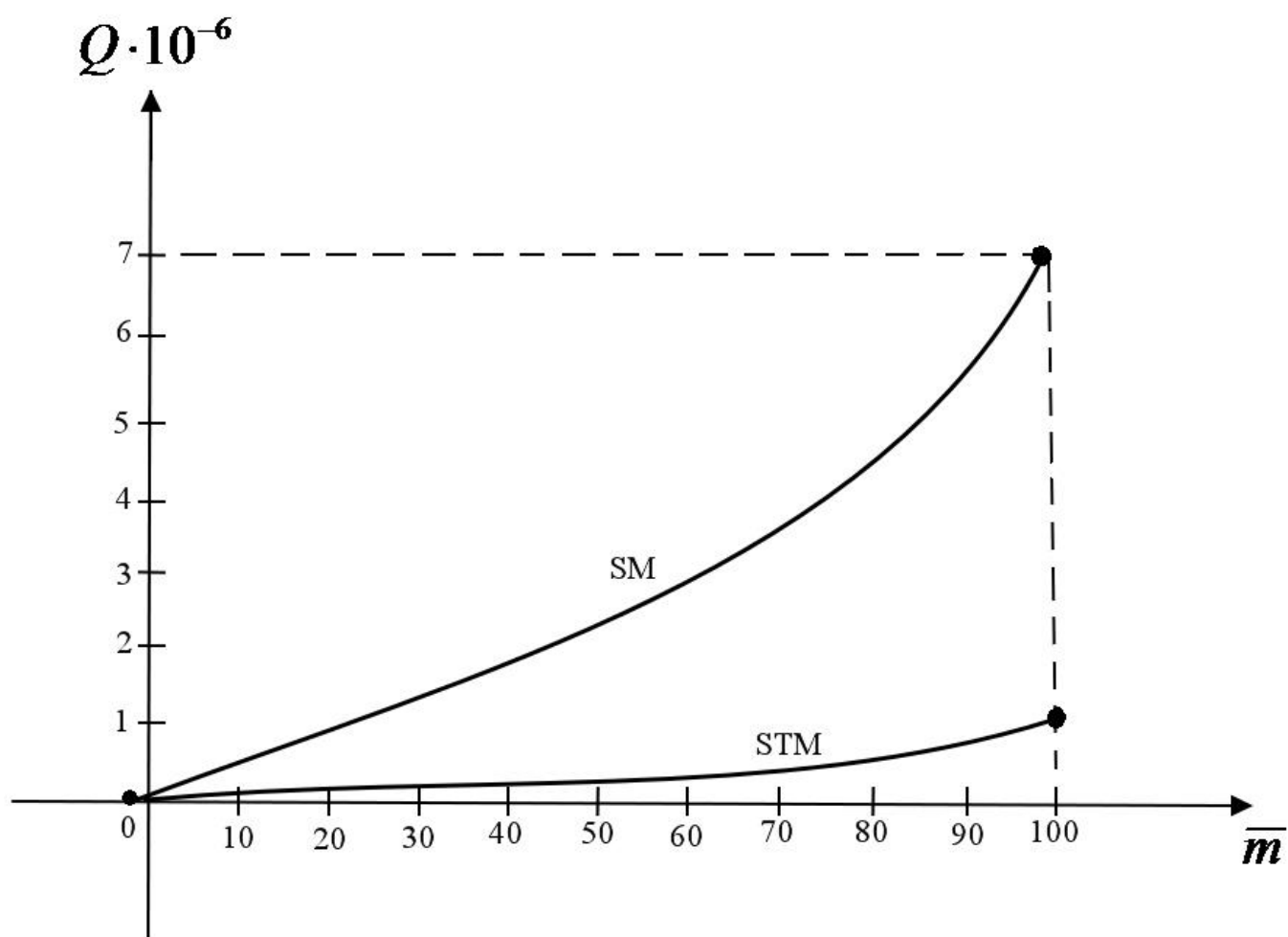
Xos qiymat muammosi (22)ni QR algoritmi bilan yechishda, haqiqiy D matritsa bilan algoritmi bitta qadamini bajarish uchun taxminan $\sim (10/3)n^3$ arifmetik amal talab etiladi, bu yerda n miqdor D matritsa bo'lgan holda QR algoritmi bitta qadamini bajarishga taxminan $\sim \bar{Q} = (20/3)n^3$ arifmetik amal talab etiladi, bu yerda n miqdor D matritsaning tartibini ko'rsatadi.

2-jadvalda QR – algoritmi bitta qadami sarflanadigan arifmetik amallar soni bo'yicha SM va STM taqqoslanadi.

2-jadval

$\bar{m}$	SM	STM	
	$\bar{Q}$	N	$\bar{Q}$
5	6	1	6
10	1440	2	53
20	27306	4	426
30	117173	6	1440
40	311040	8	3413
50	648906	10	6666
60	1170773	12	27306
70	1916640	14	70986
80	2926507	16	1463346
90	4240373	18	262026
100	5898240	20	426666

2-jadvaldan ko'rinadiki, QR algoritmnining bitta qadamida masalan, $\bar{m}=100$ da spektral metod (SM) 5898240 (besh million sakkiz yuz to'qson sakkiz ming ikki yuz qirq) arifmetik amal, spektral-to'r metodi (STM) esa atiga 426666 (to'rt yuz yigirma olti ming olti yuz oltmish olti) amal talab etar ekan. Masalani yechish uchun QR algoritmi bilan o'nlab va yuzlab qadamlar bajarishini e'tiborga olsak STM ning samarali metod ekanligi ko'rinadi. Jadvalda keltirilgan, STM ning samaradorligi 1-rasmda yanada yaqqol ko'rinadi.



IV BOB. Neytral turg'unlik egri chiziqlarini hisoblash natijalari

1-§. Bosim gradienti manfiy holda neytral egri chiziq.

Uchinchi bobda biz xos qiymat muammosini yechish masalasini qarab o'tdik. Xos qiymatlarning $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ ning mavhum qismiga qarab, tadqiq etilayotgan oqimning turg'un yoki turg'un emasligi to'g'risida xulosa qilishimiz mumkin ekanligiga to'xtaldik. Agar $\lambda_i > 0$ bo'lsa oqim turg'unmas, $\lambda_i < 0$ bo'lsa oqim turg'un, agarda $\lambda_i = 0$ bo'lsa tebranishlar neytral turg'un bo'lishi xususida fikr yuritdik. Parametrlar Reynolds soni Re va to'lqin soni k larning tekislikda shunday qiymatlari kombinatsiyasini topishimiz talab qilinadiki, bu qiymatlarda $\lambda_i = 0$ bo'lsin. Ana shu $\lambda_i = 0$ bo'ladigan (Re, k) nuqtalar tutashtirilsa, (Re, k) koordinatalar tekisligida egri chiziq neytral turg'unlik egri chizig'i deyiladi. Chegaraviy qatlamda asosiy oqim $U(\eta)$ Fokker-Sken tenglamasi yechimining birinchi hosilasi sifatida aniqlanadi. Bu tenglamani yechish to'g'risida II bobda batafsil to'xtalib o'tgan edik. Fokker-Sken tenglamasi

$$g''' + gg'' + \beta[1 - (g')^2] = 0, \quad 0 \leq \eta < \infty$$

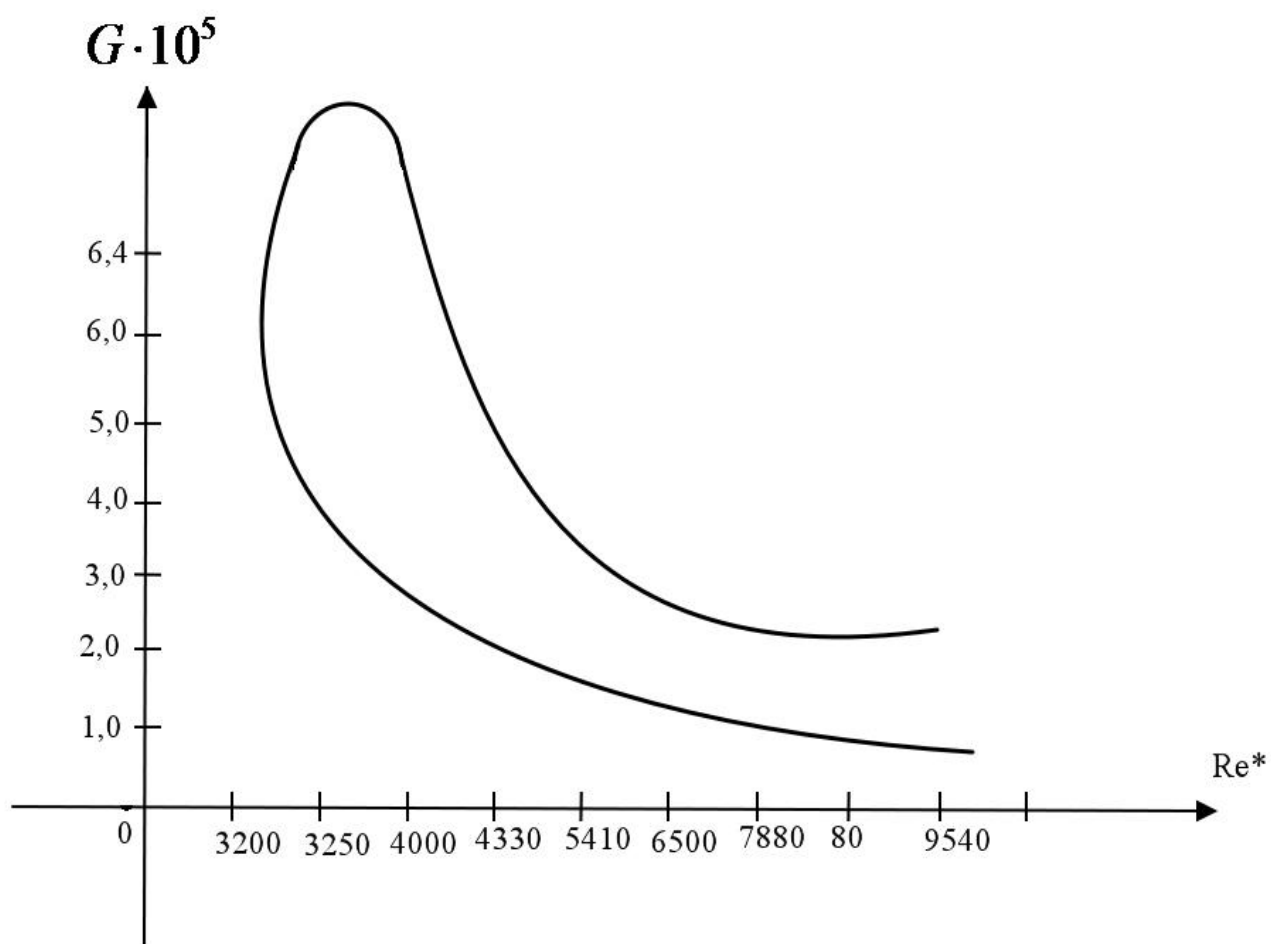
ushbu boshlang'ich shartlar bilan qaraladi

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = g_0$$

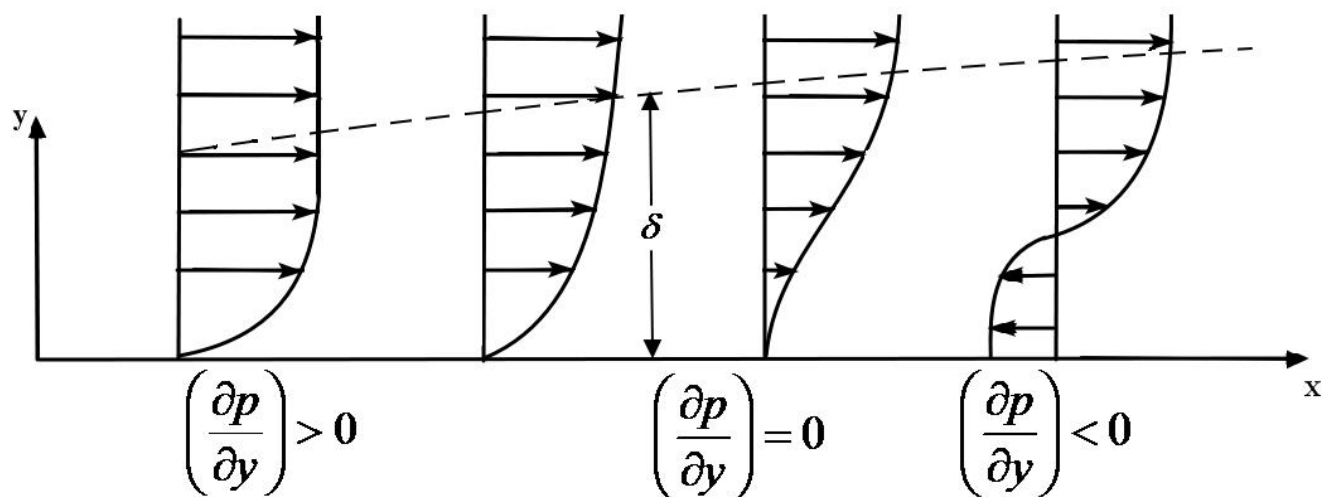
Parametr β ning turli qiymatlariga turli oqim profillari $U(\eta)$ va turli boshlang'ich qiymatlar g_0 mos keladi. Bunda parametr β ning musbat qiymatlariga bosim gradientining manfiy qiymatlari mos keladi. Masalan $\beta = 0,2$; $g_0 = 0,6869$ qiymatda bosim gradienti manfiy bo'ladi. Ana shu holga mos keluvchi neytral turg'unlik egri chizig'ini hisoblash natijalarini keltiramiz.

$G \cdot 10^5$	Re*	λ_r	$\lambda_i \cdot 10^4$
0,7	9540	0,2406	0,4
1,0	7880	0,2449	-0,1
2,0	5410	0,2563	1,5
3,0	4330	0,2658	0,8
4,0	3720	0,2732	1,5
5,0	3340	0,2795	0,6
5,5	3240	0,2817	1,8
6,0	3200	0,2834	1,4
6,4	3250	0,2833	0,1
6,45	3320	0,2824	0,0
6,43	3360	0,2819	0,0
6,4	3490	0,2804	-0,0
6,0	4000	0,2745	1,3
4,0	6500	0,2594	1,1

Endi $(G \cdot 10^5, \text{Re}^*)$ tekisligida neytral turg'unlik egri chizig'i ($\lambda_i = 0$) ning grafigini keltiramiz



Tekis plastinkadagi oqimda bosim gradienti ta'siri ushbu rasmda keltirilgan



Bu yerda δ – chegaraviy qatlam qalinligi

2-§. Bosim gradienti nolga teng holda neytral egri chiziq.

Fokker-Sken tenglamasida parametr β ning nolga teng qiymatida qaralayotgan oqimning bosim gradienti ham nolga teng bo'ladi. Bu holda Fokker-Sken tenglamasi

$$g''' + gg'' = 0, \quad 0 \leq \eta < \infty$$

va boshlang'ich shartlari

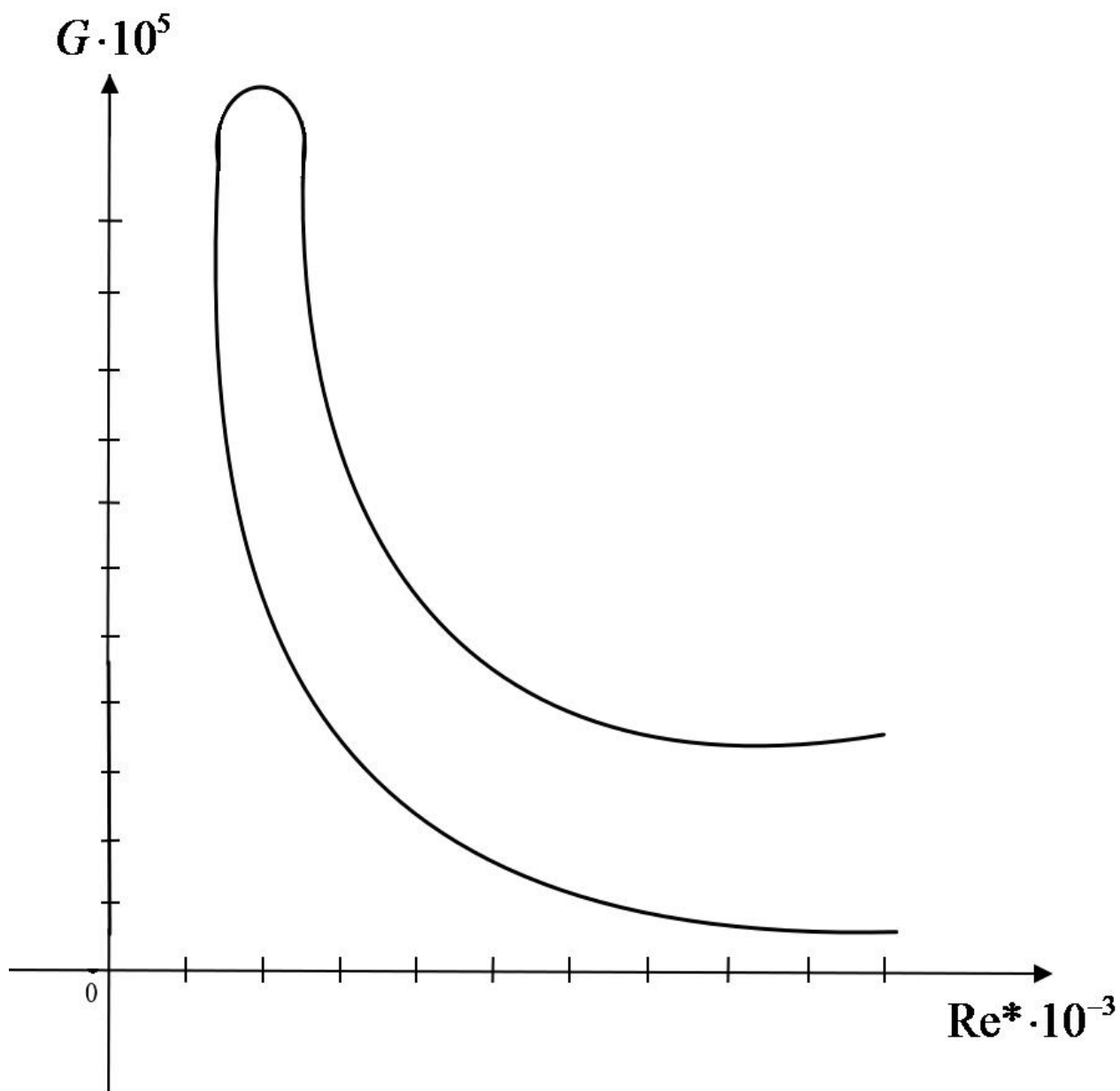
$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = g_0 = 0,4696$$

ko'rinishini oladi. Chegaraviy qatlamda turg'unlik tenglamalarida asosiy oqim $U(\eta) = g'(\eta)$ deb olinadi va turg'unlik tenglamalari spektral-to'r metodi bilan yechiladi. Xos qiymatlar aniqlanadi, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ va xos qiymatlarning mavhum qismi $\lambda_i = 0$ bo'lganda (k, Re^*) topiladi. (k, Re^*) koordinatalar sistemasida $\lambda_i = 0$ bo'lgan nuqtalar ketma-ketligi hisoblanadi. Ushbu nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziq bosim gradienti nolga teng bo'lgandagi neytral turg'unlik egri chizig'ini beradi. Neytral turg'unlik egri chizig'ini hisoblash natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan.

$G \cdot 10^5$	Re^*	λ_r	$\lambda_i \cdot 10^4$
0,1	3650	0,3065	8,3
0,3	2430	0,3135	0,4
0,5	1820	0,3204	3,6
1,1	1210	0,3357	3,2
1,7	970	0,3471	1,9
2,5	760	0,3521	1,5
3,2	670	0,3721	3,2
4,0	600	0,3816	3,0
5,6	530	0,3988	1,1
5,7	560	0,3990	2,7
5,6	580	0,3988	2,7

5,4	630	0,3963	1,2
4,8	730	0,3897	0,7
4,5	780	0,3864	0,1
4,3	800	0,3847	0,1
4,2	830	0,3831	0,1
3,1	1100	0,3663	1,5
1,8	1740	0,3419	1,4
1,2	2430	0,3239	2,4
0,7	3650	0,3022	1,2

Parametr $\beta=0$ bo'lganda, ya'ni chegaraviy qatlamda bosim gradienti $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)=0$ da neytral turg'unlik egri chizig'i ($\lambda_i=0$) quyidagi ko'rinishda bo'ladi



3-§. Bosim gradienti musbat holda neytral egri chiziq.

Fokker-Sken tenglamasida formparametr β ning manfiy qiymatlariga qaralayotgan oqimning bosim gradienti musbat bo'lgan hol to'g'ri keladi. Bu holda Fokker-Sken tenglamasi

$$g'' + gg'' - 0,19[1 - (g')^2] = 0, \quad 0 \leq \eta < \infty$$

va boshlang'ich shartlari

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = 0,086$$

ko'rinishni oladi. Fokker-Sken tenglamasi II-bobda keltirilgan Runge-Kutta metodi yordamida sonli yechiladi va teng qadamlarda asosiy oqim $U(\eta) = g'(\eta)$ qiymatlari aniqlanadi. Ushbu oqimni birinchi turdagi Chebishev ko'phadlari qatori ko'rinishida ifodalash uchun teng qadamlarda berilgan qiymatlarni Chebishev ko'phadlari tugunlari $\cos(\pi l / p_j)$, $l = 0, 1, 2, \dots, p_j$; $j = 1, 2, \dots, N$ ga interpoliyatsiyalaymiz, bu yerda p_j asosiy oqim $U(\eta)$ ni j – to'r elementida approksimatsiyalash uchun zarur bo'lgan Chebishev ko'phadlari soni, ya'ni

$$U_j(y_l^{(j)}) = \sum_{n=0}^{p_j} b_n^{(j)} T_n(y_l^{(j)}),$$

$$y_l^{(j)} = \cos(\pi l / p_j), \quad l = 0, 1, 2, \dots, p_j; \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Qatorga yoyilmadagi $b_n^{(j)}$ koefitsentlar quyidagi teskari Chebishev almashtirishi orqali topiladi:

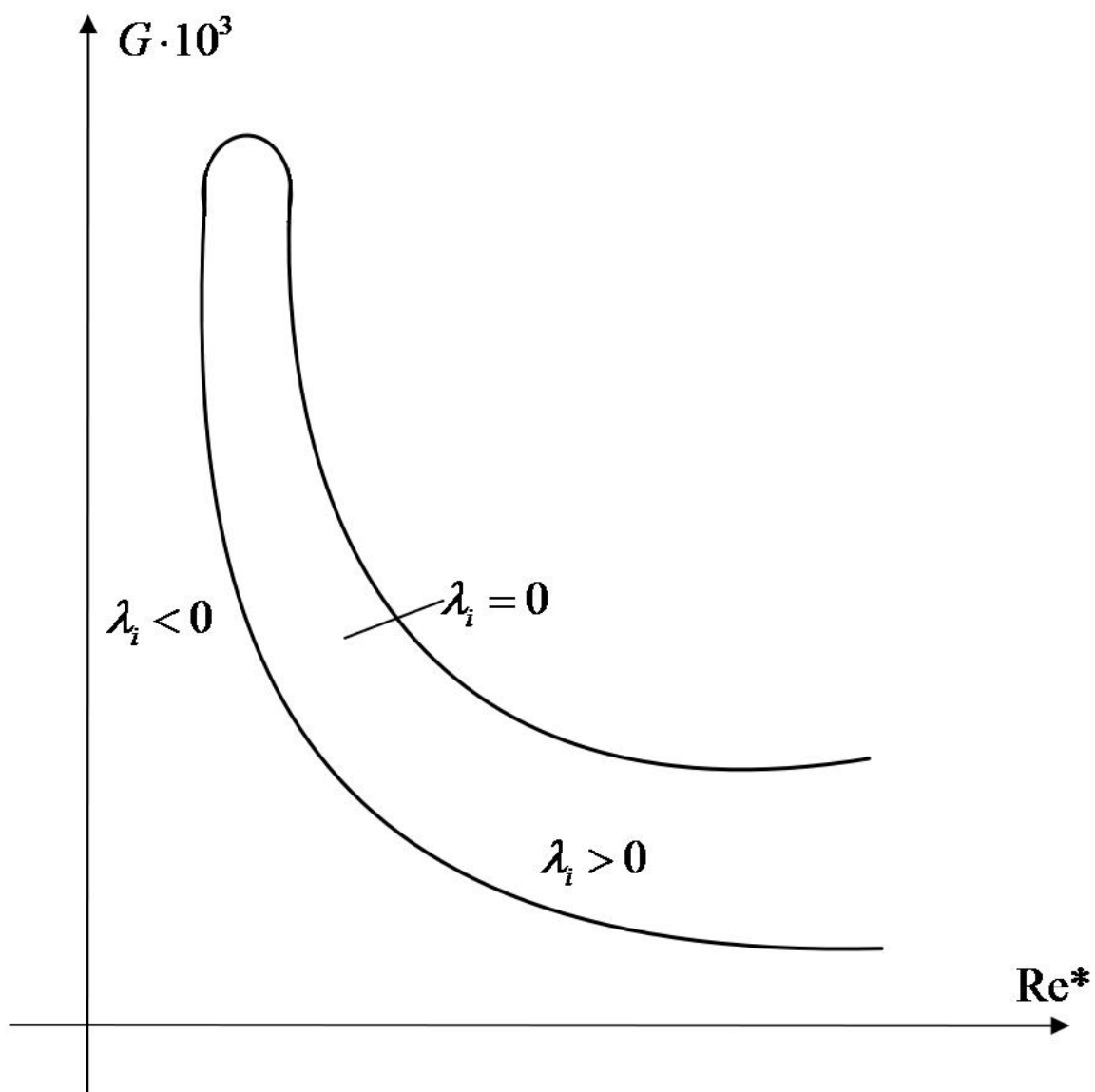
$$b_n^{(j)} = \frac{2}{p_j c_n} \sum_{l=0}^{p_j} \frac{1}{c_l} U_j(y_l^{(j)}) T_n(y_l^{(j)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, p_j,$$

$$c_0 = c_{p_j} = 2, \quad c_m = 1 \quad \text{agar } m \neq 0; \quad p_j, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Ushbu $b_n^{(j)}$ koefitsentlardan spektral-to'r metodida asosiy algebraik tenglamani hosil qilishda foydalaniladi. Endi bosim gradienti musbat bo'lgan holda spektral-to'r metodi bilan hisoblangan neytral turg'unlik egri chizig'ining qiymatlarini keltiramiz.

$G \cdot 10^3$	Re*	λ_r	$\lambda_i \cdot 10^4$
0,02	1500	0,3376	0,3
0,04	1000	0,3382	8,0
0,2	430	0,3442	1,0
0,3	350	0,3472	0,4
0,6	270	0,3548	-0,0
1,3	180	0,3742	-0,1
1,8	150	0,3853	2,0
3,0	120	0,4090	0,5
4,3	100	0,4323	3,0
5,0	95	0,4434	1,0
5,7	90	0,4537	1,0
6,9	86	0,4717	1,0
7,4	85	0,4794	0,4
7,9	86	0,4859	0,3
8,3	95	0,4985	2,0
7,6	115	0,4999	0,1
4,7	200	0,4906	-0,1
3,2	300	0,4883	-0,0
2,4	400	0,4894	0,4
1,0	1000	0,4921	1,3
0,7	1500	0,4914	1,3

Ushbu qiymatlar asosida neytral turg'unlik egri chizig'i ($\lambda_i = 0$) ni chizamiz.



Neytral turg'unlik egri chiziqlari qaralayotgan oqimning turg'unlik sohasi ($\lambda_i < 0$) ni, uning turg'unmaslik sohasi ($\lambda_i > 0$) dan ajratib turadi. Neytral turg'unlik egri chizig'iga qarab, oqimning turg'un yoki turg'un emasligi to'g'risida xulosaga kelishimiz mumkin.

XULOSA

1. Turbulentlikning paydo bo'lishiga oid eksperimental natijalar tahlil qilindi, turbulentlik asosiy oqim yo'nalishiga ko'ndalang yo'nalishda paydo bo'ladigan harakat tufayli yuzaga kelishi aniqlandi.
2. Bosim gradientining turbulentlikning paydo bo'lishiga ta'siri o'rganildi.
3. Tekis plastinkada laminar oqimning turbulent oqimga aylanishi tadqiq etildi, turg'unlik tenglamalari chiqarildi, xos qiymat muammosi qo'yildi, xos qiymat muammosini spektral-to'r metodi bilan yechish algoritmi chiqarildi.
4. Bosim gradienti manfiy, nolga teng va musbat bo'lgan holda asosiy oqim profili aniqlandi, hamda ushbu oqimlar uchun neytral turg'unlik egri chiziqlarini hisoblash natijalari keltirildi, neytral turg'unlik egri chiziqlari chizildi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Лин Ц.Ц. «Теория гидродинамической устойчивости». –М.: Иностранная литература., 1958–195с.
2. Бетчов Р. , Кпиминале В. «Вопросы гидродинамической устойчивости». –М.: Мир, 1971 –350с.
3. Шлихтинг Г. «Теория пограничного слоя» –М.: Наука, 1974 –571с.
4. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. «Гидродинамическая устойчивость и турбулентность». –Новосибирск: Наука, Сиб. отд –ние, 1977 –366с.
5. Дразин Ф. «Введение в теорию гидродинамической устойчивости». –М.:Физматлит, 2005 –88с.
6. Orszag S. A. “Accurate Solution of the Orr–Sommerfeld Stability Equation”//J.fluid mech. –1971.–№4(50).–P.689–701.
7. Grosch C.E., Salwen H. “The Stability of steady and time development plane Poiseuille flow”// J.fluid mech. –1968. –№1(34). –P.177–205.
8. Zebib A. “A Chebyshev Method for the Solution of boundary value problems”//J.comput.phys. –1984. –№3(53). –P.443–455.
9. Абуталиев Ф. Б., Нармурадов Ч. Б. “Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости” – Ташкент, Фан ва техналогия, 2011–188с.
10. Марчук Г. И. “Методы вычислительной математики” –М.: Наука, 1980–536.
11. Самарский А. А. «Теория разностных схем» –М.:Наука, 1977–656.
12. Бахвалов Н. С. «Численные методы». –М.: Наука , 2003–632.
13. Пашковский С. «Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева » –М.: Наука. 1983–384с.
14. Сёге Г. «Ортогональные многочлены» –М.: Физматлит., 1962–500с.
15. Калиткин Н.Н. «Численные методы» –М.: Наука, 1980–426с.
16. Самарский А. А. «Введение в численные методы» –М.: Наука, 2005–288с.
17. Волков Е. А. «Численные методы» –М.: Наука, 2007–256с.

18. Березин И.С., Жидков Н.П. «Методы вычислений. Том 1». – М.: Наука, 1966. – 632 с.
19. Васильев Ф.П. «Численные методы решения экстремальных задач». – М.: Наука, 1980. – 520 с.
20. Годунов С.К., Рябенский В.С. «Разностные схемы (введение в теорию)». – М.: Наука, 1973. – 400 с.
21. Дыхненко Л.М. и др. «Основы моделирования сложных систем: Учебное пособие для втузов». – Киев: Вища школа. 1981. – 359 с.
22. Ибрагимов И.А. и др. «Моделирование систем: Учебное пособие». – Баку: Азинефтехим, 1989. – 83 с.
23. Лебедев А.Н. «Моделирование в научно-технических исследованиях». М.: Радио и связь, 1989. – 224с.
24. Советов Б.Я., Яковлев С.Я. «Моделирование систем: Учебник для вузов». – М.: "Высшая школа", 1998. – 320 с.
25. Хикс Ч.Р. «Основные принципы планирования эксперимента». – М.: Мир, 1967. – 406 с.
26. Шилейко А.В., Кочнев В.Ф., Химушин Ф.Ф. «Введение в информационную теорию систем». – М.: Радио и связь, 1985. – 280 с.
27. Nazirov Sh.A, Musayev M.M., Ne'matov A.N., Qobulov R.V. "Delphi tilida dasturlash asoslari". –Т.: G'ofur G'ulom, 2007 –167b.
28. Файсман А. «Профессиональное программирование на Турбо Паскале». –М.: –Санкт –Петербург. 1992г.
29. G'ulomov S. "Axborot tizimlari va texnologiyalari". –Т.: «Sharq», 2000 у.
30. Oripov M., Haydarov A. "Informatika asoslari". –Т.: «O'qituvchi0», 2002 у.
31. Abduqodirov A., Xaitov A., Rashidov R. "Axborot texnologiyalari". – Т.: «O'qituvchi», 2002 у.
32. Култин М.В. «Програмирование в Турбо Паскале и Делпхи». –М.: –Санкт –Петербург. 2002г

