

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

УМУМИЙ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ

РЕФФАРАТ

Топширди: Дўстназаров Сардор.

Қабул қилди: ўқ. Гаймназаров О.

Гулистон-2010

Мавзу: Векторлар ва улар устида амаллар.
Вектор координаталари.

РЕЖА:

1. Кириш.
2. Вектор ҳақида тушунча.
3. Векторлар устида чизиқли амаллар.
4. Икки вектор орасидаги бурчак.
5. Векторнинг ўқдаги проекцияси.
6. Вектор фазо. Вектор фазонинг базиси ва ўлчови.
7. Векторнинг координаталари.

Аналитик геометрия олий математиканинг асосий бўлимларидан бири бўлиб, бу бўлимда геометрик шакллар алгебраик таҳлил ёрдамида текширилади. Аналитик геометриянинг вазифаси: биринчидан, геометрик образларни нуқталарнинг геометрик ўрни деб қараб, шу образларнинг хоссаларига асосан уларнинг тенгламаларини тузиш ва иккинчидан, тенгламаларнинг геометрик маъносини аниқлаб, бу тенгламалар билан ифодаланган геометрик образларнинг шаклини, хоссаларини ҳам текисликда ҳам фазода жойланишини ўрганишдан иборат.

Аналитик геометрияда нуқтанинг чизикдаги, текисликдаги ва фазодаги ўрни сонлар ёрдамида аниқланади. Нуқтанинг ўрнини аниқловчи сонлар унинг **координаталари** дейилади. Геометрик шаклларнинг ўрнини аниқлаш усули ёки методи координаталар методи дейилади.

Математика, физика, механика, астрономия каби тадбиқий фанларни ўрганишдан икки хил миқдор билан ишлашга тўғри келади:

1) ўзининг сон қиймати билангина аниқланувчи миқдорлар, бундай миқдорларни одатда скаляр миқдорлар деб аталади; 2) сон қийматидан ташқари яна фазодаги жойлашиши ҳамда йўналиши билан аниқланган миқдорлар-вектор миқдорлар. Вектор миқдорлар векторлар ёрдамида тасвирланади.

Вектор деб фазодаги тайин узунликка ва йўналишга эга бўлган кесмага айтилади.

Вектор кўпинча унинг боши ва охири билдирувчи иккита ҳарф ёрдамида (масалан $\overline{AB}$) ёки биргина (масалан, $\vec{a}$) ҳарф орқали белгиланади.

Вектор узунлигига унинг **модули** дейилади ва $|\overline{AB}| = |\vec{a}|$ кўринишда белгиланади.

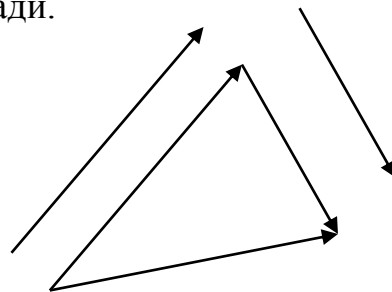
Агар векторнинг узунлиги бир бирликка тенг бўлса, у бирлик вектор ёки **орт** орт дейилади.

Модули нолга тенг $|\vec{a}|=0$ бўлган вектор нолр вектор дейилади.

Нолдан фарқли иккита вектор бир тўғри чизикда ёки параллел тўғри чизикларда ётса, бундай векторлар коллинеар векторлар, битта текисликда ётувчи ёки шу текисликка параллел бўлган векторлар эса компланар векторлар дейилади.

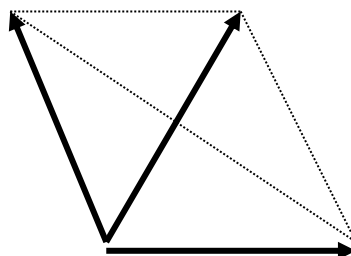
Узунликлари тенг бўлган ва бир хил йўналишга эга бўлган векторлар тенг векторлар дейилади.

Узунликлари тенг бўлиб, йўналишлари қарама-қарши бўлган икки векторни қарама-қарши векторлар дейилади.



Коллинеар бўлмаган икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг йиғиндиси $\vec{c}$ векторни топишни кўрайлик. Бунинг учун $\vec{a}$ векторнинг бошини исталган O нуқтага қўйиб унинг учини A нуқта деб, бу нуқтадан иккинчи $\vec{b}$ векторни келтириб қўйилса, бу векторнинг учи B нуқтага жойлашади. O ва B нуқталарни бирлаштирсак, изланган $\overline{OB}$ векторни ҳосил қиламиз.

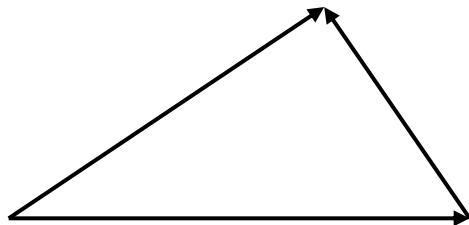
Бу вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг изланган йиғиндиси $\vec{c}$ вектор дан иборат бўлади.



Йиғиндини бу усулда топишни учбурчак қондаси дейилади. Бундан ташқари икки вектор йиғиндисини топиш учун параллограм усулидан фойдаланилади ва қуйидаги ТАЪРИФга асосланади.

ТАЪРИФ. Бошлари бирор А нуктада ётган икки $\overline{AB}$ ва $\overline{AD}$ векторнинг йиғиндиси деб шу вектордан ясалган

ABCD параллелограмнинг А учидан С учига йўналган ва узунлиги AC диагоналниң узунлигига тенг бўлган $\overline{AC}$ векторга айтилади, яъни $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$.



Берилган $\overline{a}$ вектордан $\overline{b}$ векторни айириш учун ихтиёрий 0 нуктадан бошлаб $\overline{AB} = \overline{a}$ ва $\overline{AD} = \overline{b}$ векторлар ясалади, сўнгра $\overline{OB}$ векторнинг В учидан $\overline{OA}$ вектор А учига йўналган $\overline{BA}$ вектор ясалади. Кейинги вектор-изланган айирма вектор бўлади.

$\overline{a}$ вектор ва скаляр $\lambda \neq 0$ сон берилган бўлса, $\overline{a}$ векторнинг λ сонга кўпайтмаси деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\overline{b}$ векторга айтилади.

а) агар $\lambda > 0$ бўлса, $\overline{b}$ вектор $\overline{a}$ вектор билан бир хил йўналишда ($\overline{a} \neq 0$), акс ҳолда $\lambda < 0$ бўлса, $\overline{b}$ ва $\overline{a}$ векторлар қарама-қарши йўналишда бўлади.

б) $\overline{b}$ векторнинг узунлиги (модули) $|\overline{b}| = |\lambda| |\overline{a}|$ формула асосида топилади.

Векторларни қўшишнинг хоссалари.

1⁰. $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$ (ассоциативлик)

2⁰. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (коммутативлик)

3⁰. Ҳар қандай $\overline{a}$ векторга нол вектор қўшилса, $\overline{a}$ вектор ҳосил бўлади.

4⁰. Ҳар қандай $\overline{a}$ вектор учун шундай $\overline{a}$ вектор мавжудки, унинг учун $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$ бўлади.

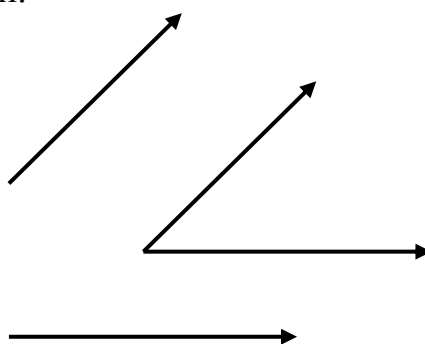
Векторларни сонга кўпайтиришнинг хоссалари.

1⁰. $\forall \bar{a}$ вектор учун $0\bar{a} = \bar{0}$.

2⁰. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ учун $\alpha \bar{0} = \bar{0}$.

3⁰. $\forall \bar{a}$ вектор ва ҳар қандай $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сонлар учун $\alpha(\beta)\bar{a} = (\alpha\beta)\bar{a}$.

$\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар берилган бўлсин. Бу векторларнинг бошларини бирор умумий 0 нуктага келтирамиз ёки $\overline{OA} = \bar{a}$ ва $\overline{OB} = \bar{b}$ векторни ясаймиз. У ҳолда AOB бурчак ($\bar{a}$ векторни $\bar{b}$ вектор билан устма-уст тушгунча айлантириш лозим бўлган иккита бурчакнинг кичиги) $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар орасидаги бурчак дейилади ва $(\bar{a} \wedge \bar{b})$ кўринишда ёки α, φ, γ - харфлардан бири орқали белгиланади.



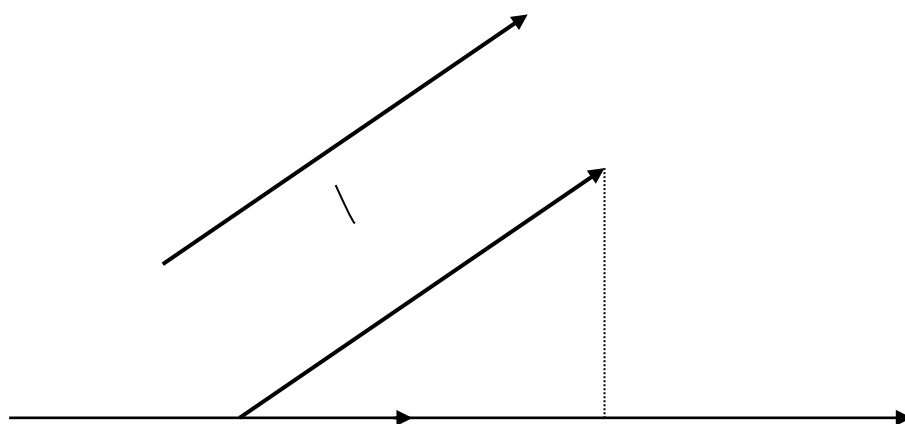
Демак, ТАЪРИФга кўра икки вектор орасидаги бурчак, 0° дан 180° гача оралиқда бўлади. Бундан кўринадикки, бир хил йўналишдаги коллинеар векторлар орасидаги бурчак 0° га, қарама-қарши йўналишдани векторлар орасидаги бурчак 180° га тенг бўлади. Агар векторлар орасидаги бурчак 90° га тенг бўлса улар перпендикуляр ёки ортогонал векторлар дейилади ва бу $\bar{a} \perp \bar{b}$ каби белгиланади.

L ўқ ва унинг бирлик вектори $\bar{e}$ берилган бўлсин. Ихтиёрий $\bar{a} \neq 0$ векторнинг бирлик вектори $\bar{a}_o$ қуйидагича аниқланади: $\bar{a}_o = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$, чунки

$$|\bar{a}_o| = \left| \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \right| = \left| \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a} \right| = \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot |\bar{a}| = 1$$

$\bar{a} \neq 0$ текисликдаги ихтиёрий вектор бўлсин. $\bar{a}$ вектор билан L ўқ орасидаги бурчак деганда L ўқнинг бирлик вектори $\bar{e}$ билан $\bar{a}$ вектор

орасидаги бурчак тушунилади, $\vec{a}$ вектор L ўқ билан φ бурчак ташкил қилади.



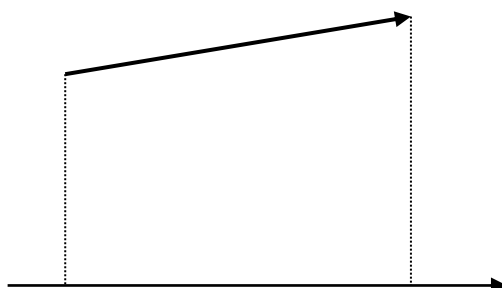
φ

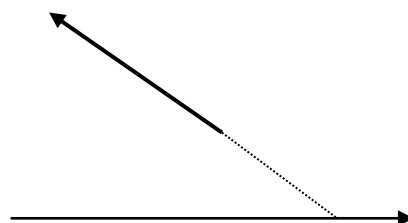
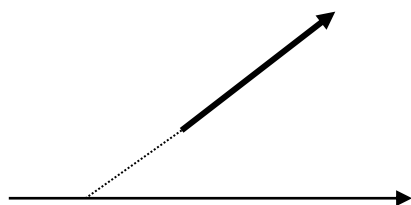
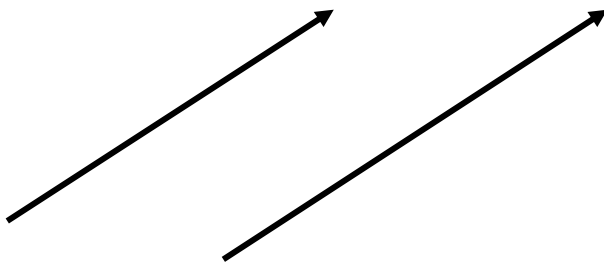
Текисликдаги ихтиёрий жойлашган бирор L ўқ ва $\vec{a}$ берилган бўлсин. Бу $\vec{a}$ векторнинг боши A ва охири B нинг L ўққа проекциялари мос равишда A_1 ва B_1 нуқталар бўлади. L ўқда A_1 нуқта x_1 координатага B_1 нуқта x_2 координатага эга бўлсин.

вектор охири ва бошининг L ўқдаги проекциялари координаталарнинг айирмаси $x_2 - x_1$ га $\vec{a}$ векторнинг шу ўққа проекцияси деб аталади ва қуйидагича ёзилади:

$$P_{p_1} \vec{a} = x_2 - x_1.$$

Агар $\vec{a}$ вектор L ўқ билан уткир бурчак ташкил этса у ҳолда $x_2 > x_1$ бўлиб, $x_2 - x_1$ проекция мусбат; агар $\vec{a}$ вектор L ўқ билан утмас бурчак ташкил этса у ҳолда $x_2 < x_1$ бўлиб, $x_2 - x_1$ проекция манфий бўлади.

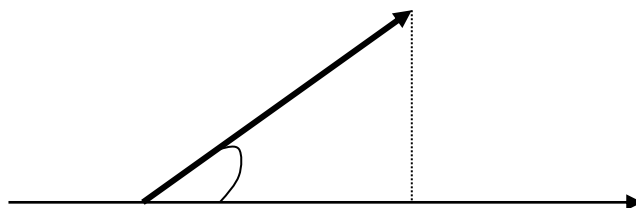




Агар $\vec{a}$ вектор L ўқ билан 90° бурчак ташкил этса у ҳолда $x_2=x_1$ бўлиб, x_2 - x_1 проекция нолга тенг бўлади.

ТЕОРЕМА. $\vec{a}$ векторнинг L ўққа проекцияси $\vec{a}$ вектор модулининг шу вектор билан ўқ орасидаги φ бурчак косинусига кўпайтмасига тенг.

$$P_{p_1} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$$



ИСБОТ. $\vec{a}$ векторнинг L ўқдаги проекцияси x_2-x_1 бўлсин. $\vec{a}$ векторни параллел кўчирсак, унинг бу ўқдаги (x_2-x_1) проекцияси ўзгармас миқдор бўлади. Шунинг учун векторнинг боши L ўқнинг санок боши O билан устма-уст тушадиган ҳолни қараш кифоядир. Санок бошининг координатаси нолга тенг бўлгани учун

$$\Pi_{p_1} \vec{a} = x - 0 = x$$

бунда $x - \vec{a}$ вектор охири проекциясининг координатаси.

Косинуснинг ТАЪРИФИга кўра

$$\cos \varphi = \frac{x}{|\vec{a}|} \quad \text{бундан} \quad x = |\vec{a}| \cos \varphi$$

ёки

$$\Pi_{p_1} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$$

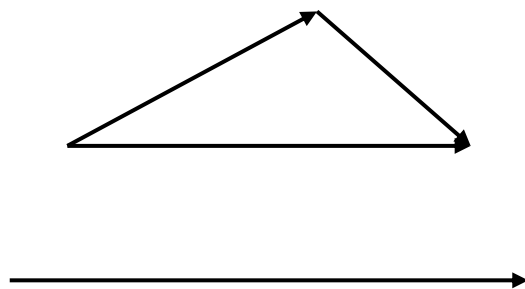
теорема исботланди.

ТЕОРЕМА. Икки вектор йиғиндисининг L ўқдаги проекцияси қўшилувчи векторларнинг шу ўқдаги проекциялари йиғиндисига тенг.

ИСБОТ. $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ A, B ва C нуқталарнинг L ўқдаги проекциялари A, B ва C нинг x_1, x_2 ва x_3 билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\Pi_{p_1} \vec{a} = x_2 - x_1; \quad \Pi_{p_1} \vec{b} = x_3 - x_2;$$

$$\Pi_{p_1} \vec{c} = x_3 - x_1$$



Бироқ $x_3 - x_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)$ деб ёзиш мумкинлилиги туфайли

$$\Pi_{p_1} \overline{AC} = \Pi_{p_1} \overline{AB} + \Pi_{p_1} \overline{BC}$$

Бу теоремани n та векторлар йиғиндисининг бирор L ўқдаги проекцияси векторлар проекцияларининг йиғиндисига тенг.

ТЕОРЕМА. $\bar{a}$ векторни λ сонга кўпайтирилса, унинг L ўқдаги проекцияси ҳам шу λ сонга кўпаяди:

$$\Pi_{p_1}(\lambda \bar{a}) = \lambda \Pi_{p_1} \bar{a}$$

Элементлари вектор деб аталувчи бўш бўлмаган V тўплам берилган бўлсин. Шунингдек, $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$ учун $(\bar{a} + \bar{b}) \in V$ ва $\forall k \in R, \bar{a} \in V$ учун $k\bar{a} \in V$ муносабатлар ўрнатилган бўлсин. Киритилган бу икки амал қуйидаги 8 та аксиомани қаноатлантирсин.

1. $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$ учун $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.
2. $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$ учун $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$
3. V да нол вектор деган $\bar{0}$ элемент мавжуд бўлиб, $\forall \bar{a} \in V$ учун $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.
4. V нинг ихтиёрий $\bar{a}$ вектори учун V да шундай $\bar{a}$ вектор мавжудки, $\bar{a} + \bar{a}' = \bar{0}$. Бу $\bar{a}$ векторки одатда $\bar{a}$ векторга қарама-қарши вектор деб аталади ва $-\bar{a}$ кўринишда белгиланади, яъни $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$.
5. $\forall k \in R$ ва $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$ учун $k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$
6. $\forall k, t \in R$ ва $\forall \bar{a} \in V$ учун $(k+t)\bar{a} = k\bar{a} + t\bar{a}$
7. $\forall k, t \in R$ ва $\forall \bar{a} \in V$ учун $k(t\bar{a}) = (kt)\bar{a}$
8. $\forall \bar{a} \in V$ учун $1\bar{a} = \bar{a}$

Бу тўртта аксиомани эса векторни сонга кўпайтириш аксиомалари деб киритилади.

ТАЪРИФ. Элементлари шу 8 та аксиома шартларини қаноатлантирувчи V тўплам вектор (ёки чизикли) фазо дейилади.

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ векторлар ҳамда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ҳақиқий сонлар берилган бўлсин. Улардан ҳосил қилинган $\bar{a} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n$ ифода $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ векторларнинг $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ коэффициентли **чизикли** комбинацияси дейилади. Агар бирор $\bar{a}$ вектор $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ векторларнинг чизикли комбинацияси шаклида ифодаланган бўлса, $\bar{a}$ вектор шу векторлар бўйича ёйилган дейилади, яъни қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n \quad (1)$$

Агар камида биттаси нолдан фарқли $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ сонлар танлаб олинганда

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = 0 \quad (2)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ лар чизикли боғлиқ дейилади. Агар (2) муносабат фақат $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ бўлгандагина ўринли бўлса, у ҳолда $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ вектор **чизикли бўлмаган** чизикли боғланмаган ёки чизикли эрки **чизикли эрки** деб аталади.

Чизикли боғлиқли векторлар учун қуйидаги тоеремалар ўринли бўлади.

ТЕОРЕМА. Агар $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ векторлар системасининг бир вектори нол бўлса, у ҳолда бу векторлар системаси чизикли боғлиқ бўлади.

ИСБОТ. $\bar{a}_k = \bar{0}$ бўлсин, у ҳолда $\lambda_k \neq 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = \lambda_{k+1} = \lambda_n = 0$ сонлар учун (2) муносабат ўринли бўлади. Демак, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ векторлар чизикли боғлиқ бўлади.

ТЕОРЕМА. Иккита вектор чизикли боғлиқ бўлиши учун уларнинг коллинеар бўлиши зарур ва етарли.

ТЕОРЕМА. Уч вектор чизикли боғлиқ бўлиши учун уларнинг компланар бўлини зарур ва етарли.

ТАЪРИФ. Вектор фазонинг маолум тартибда олинган $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ векторлар системаси чизикли эрки бўлиб, шу фазонинг ҳар бир вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ лар орқали чизикли ифодаланса, бу векторлар системаси вектор фазонинг **базиси** базиси дейилади ва у $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ орқали белгиланади.

ТАЪРИФ. Агар базиснинг ҳар бир вектори бирлик вектор бўлиб, уларнинг ҳар икkitаси ўзаро перпендикуляр бўлса, бундай базис ортонормалланган базис дейилади. Базиснинг векторлари сони вектор фазонинг **ўлчови** ўлчами дейилади.

$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, V_3 вектор фазонинг бирор тайин базиси бўлсин. Ихтиёрий $\forall \bar{a} \in V_3$ векторни оламиз. У ҳолда шундай $x, y, z \in \mathbb{R}$ сонлар мавжудки $\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$ (1) бўлади.

Агар $\bar{a}$ вектор (1) кўринишда ифодаланса, $\bar{a}$ вектор B базиснинг векторлари бўйича ёйилган дейилади.

ТЕОРЕМА. V_3 вектор фазода ҳар қандай вектор танланган $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ базис векторлари бўйича биргина ёйилмага эга.

ИСБОТ. Фараз қилайли $\bar{a}$ вектор $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ базис векторлари бўйича

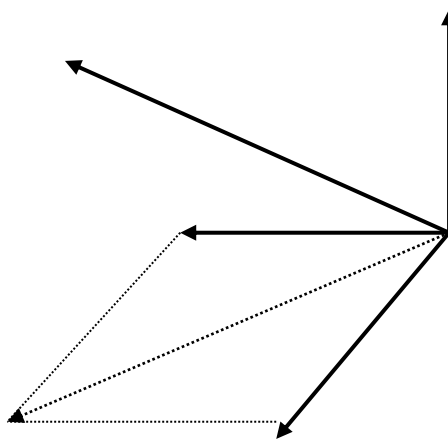
$$\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 \quad (2)$$

ёйилмадан бошқа яна

$$\bar{a} = x'\bar{e}_1 + y'\bar{e}_2 + z'\bar{e}_3 \quad (3)$$

ёйилмага эга бўлсин. (3) тенгликдан (2) тенгликни ҳадлаб айириб, ушбу муносабатга эга бўламиз

$$(x' - x)\bar{e}_1 + (y' - y)\bar{e}_2 + (z' - z)\bar{e}_3 = 0.$$



Бу тенгликда $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ векторлар чизикли эркин бўлганлиги учун:

$x' - x = 0$, $y' - y = 0$, $z' - z = 0$. Бундан $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$. Демак, $\bar{a}$ вектор учун танланган базисда (2) ёйилмадан бошқа кўринишдаги ёйилма мавжуд эмас. (2) ёйилмадаги x, y, z сонлар $\bar{a}$ векторнинг $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ базисга нисбатан координаталари дейилади ва $\bar{a} = \{x, y, z\}$ билан белгиланади. Шундай қилиб, $\bar{a} = \{x, y, z\}$ дан

$$\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3.$$

НАТИЖА. Нолр вектор ҳар қандай базисга нисбатан координаталари нолга тенг: $\bar{0} = \{0,0,0\}$.

Фойдаланилган адабиётлар.

1. А.В Погорелов «Аналитик геометрия» Т. «Ўқитувчи», 1983й.
2. Ражабов Ф., Нурматов А., «Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра» Т., Ўқитувчи 1990й.
3. Н.Д.Дадажонов, М.Ш.Жўраева «Геометрия» I қисм Т. Ўқитувчи 1982й.