ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

УМУМИЙ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ

РЕФАРАТ

Топширди: Бекматова Севара

Қабул қилди: доц. Мирзаев Ч.

Гулистон-2010

Мавзу: Комплекс сонлар ва улар устида амаллар

Асосий саволлар.

1. Мавҳум бирлик. Мавҳум бирлик даражалари.
2. Комплекс сонлар устида амаллар.
3. Комплек соннинг геометрик тасвири.
4. Комплекс сонларнинг тригонометрик шакли.
5. Тригонометрик шаклда берилган комплекс сонларни кўпайтириш, бўлиш ва даражага кўтариш.
6. Комплекс сондан илдиз чиқариш.

1-асосий саволнинг баёни.

Мусбат сондан ҳар доим ихтиёрий аниқликда аниқ ёки тақрибий жуфт даражали илдиз чиқариш мумкин:

1) $\sqrt{16} = \pm 4;\ \sqrt[4]{16} = \pm 2;\ \sqrt{25} = \pm 5$

2) $\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41;\ \ \sqrt{3} \approx \pm 1{,}73$ ва ҳоказо.

Агар илдиз аниқ чиқарилган бўлса, олинган жавоб рационал сон бўлади, агар илдиз аниқ чиқмайдиган бўлса, олинган жавоб иррационал сондир. Рационал ва иррационал сонлар итта ҳақиқий сонлар синфига киради.

Ҳақиқий сонлар соҳасида манфий сондан жуфт даражаи илдиз чиқариш мумкин емас, масалан $\sqrt{-4}$ ҳақиқий сонлар соҳасида ечимга ега емас, чунки ҳақиқий сонлар орасида квадрат –4 га тенг бўлган сон йўқ.

Манфий сондан жуфт даражали илдиз чиқариш сон тушунчасини кенгайтириш, яъни янги сонлар синфи-мавҳум сонлар тушунчасини киритишга имкон берди.

$\sqrt{1}$ ни u ҳарфи билан белгилаш ва мавҳум бирлик деб аташ қабул қилинган. Демак, $i^2 = -1$ бўлганда $i = \sqrt{-1}$.

Ҳақиқий соннинг мавҳум бирликка кўпайтмаси мавҳум сон дейилади. Масалан, $5i, \frac{3}{4}i, \sqrt{2i}, -\sqrt{3i}$ ва ҳоказо мавҳум сонлар. Манфий сондан мавҳум сонлар соҳасидагина жуфт даражали илдиз чиқариш мумкин. Масалан,

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25\cdot(-1)} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{(-1)} = \pm 5i;\ \ \sqrt{-\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2}i;\ \sqrt{-16} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{-1} = \pm 4i$$

Демак, манфий соннинг квадрат илдизи мавҳум сондан иборат екан.

Ҳисобланг: $\sqrt{-100}; \sqrt{-625}; \sqrt{-32}; \sqrt{\frac{-9}{4}}; \sqrt{\frac{-36}{25}}$.

Енди мавҳум бирликнинг мусбат даражаларини топамиз:

$i^1 = i$ $\qquad$ $i^5 = i^4 \cdot i = +1 \cdot i = i$

$i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ $\qquad$ $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$ $\qquad$ $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ $\qquad$ $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

Ҳосил бўлган натижалар кўрсатадики, мавҳум бирликнинг бутун мусбат даражаси тўртта ҳар хил қиймат: $i, -1, -i, +1$ ларни қабул қилиши мумкин екан. Тўртинчи даражадан кейин натижалар яна қайтарилади. Агар мавҳум бирликнинг даржа кўрсаткичи 4 га каррали бўлса, бу даража бирга тенг бўлади. Ҳақиқатдан:

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = (+1) \cdot (+1) = +1 \quad i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = (+1) \cdot (+1) \cdot (+1) = +1 \quad i^{4k} = +1$

шунинг учун

$i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = (+1) \cdot i = i; \qquad i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = (+1) \cdot i^3 = -i;$

$i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = (+1) \cdot i^2 = -1; \quad i^{4k+4} = i^{4k} \cdot i^4 = (+1) \cdot (+1) = +1$

Мавҳум бирликнинг кўтарилган даражалари $и$ сонининг ихтиёрий даражасини $\pm i$, ёки ± 1 сон билан кўрсатишга имкон беради.

Мисоллар:

$i^{37} = i^{4 \cdot 9+1} = i^{36} \cdot i = (\pm 1) \cdot i = i;$

$i^{15} = i^{3 \cdot 4+3} = i^{12} \cdot i^3 = (+1)(-i) = -i;$

$i^{101} = i^{100} \cdot i = i^{4 \cdot 25} \cdot i = (+1) \cdot i = i;$

$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1;$

$i^{-31} = i^{-32} \cdot i = (+1) \cdot i = i$

1) $i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1 \cdot i^2}{i^2 \cdot i^2} = \frac{i^2}{+1} = -1;$

2) $i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1 \cdot i}{i^3 \cdot i} = \frac{i}{i^4} = i;$

3) $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i^3}{i \cdot i^3} = \frac{i^3}{i^4} = i^3 = -i$

2-асосий саволнинг баёни.

1-таъриф. Квадрат –1 га тенг бўлган сонни $и$ ҳарфи билан белгилаб, мавҳум бирлик деб аташ қабул қилинган:

$i^2 = -1$

2-таъриф. $a + вi$ кўринишдаги сонни комплекс сон дейилади. Бунда a ва $в$ ҳақиқий сонлар бўлиб, $и$ мавҳум бирликдир. $a + вi$ даги a ни комплекс соннинг ҳақиқий қисми $вi$ ни еса мавҳум қисми, $в$ мавҳум қисмининг коеффицийенти деб аталади.

Ҳар қандай ҳақиқий сонни ҳам комплекс сон деб қараш мумкин. Масалан, 3 ни 3*Қаи* кўринишдаги комплекс сон деб қараш мумкин.

3-таъриф. Иккита комплекс соннинг бир-бирига тенг бўлиши учун ҳақиқий қисми, ҳақиқий қисмига, мавҳум қисми мавҳум қисмига тенг бўлиши керак. Яъни $a + вi = c + di$ бўлиши учун $a = c, \ в = d$ бўлиши керак.

Иккита ҳақиқий сонни бир-бирига солиштириш мумкин. Масалан, $3 < \sqrt{18}, \quad -4 > -7$. Аммо иккита тенг бўлмаган комплекс сонни солиштириб бўлмайди, масалан, 7-2*и* ва 3Қ4*и* сонлардан қайси бири катталигини айтиб бўлмайди.

4-таъриф. $a + вi$ ва $c + di$ комплек сонларнинг йиғиндиси деб $(a + c) + (в + d)i$ комплекс сонини айтилади:

$$(a + вi) + (c + di) = (a + c) + (в + d)i$$

Демак, иккита комплекс сонни қўшиш учун уларнинг ҳақиқий қисмлари ва мавҳум қисмларининг коеффицийентлари қўшилади.

Масалан, $(-5 + 8i) + (3 - 4i) = (-5 + 3) + (8 - 4)i = -2 + 4i$

5-таъриф. $a + вi$ ва $-a - вi$ комплекс сонларини қарама-қарши комплекс сонлар дейилади.

Қарама-қарши комплекс сонларнинг йиғиндиси нолга тенг:

$$(a + вi) + (-a - вi) = (a - a) + (в - в)i = 0 + 0i$$

6-таъриф. Икки комплекс соннинг айирмаси шундай комплекс сонга тенгки, унинг айирилувчи билан йиғиндиси камаювчига тенг бўлади, яъни

$$(a + вi) - (c + di) = (a - c) + (в - d)i$$

Масалан, $(1 - 5i) - (-3 + 2i) = (1 + 3) + (-5 - 2)i = 4 - 7i$.

7-таъриф. $a + вi$ ва $c + di$ комплекс сонларнинг кўпайтмаси деб $(ac - вd) + (ad + вc)i$ комплекс сонига айтилади, яъни

$(a+вi)(c+di)=(ac-вd)+(ad+вc)i$

Масалан, $(3+i)(2-i)=[6-(-1)]+(2-3)i=7-i$.

8-таъриф. Бир комплекс соннинг иккинчи комплекс сонга бўлинмаси (нисбати) деб, бўлувчи билан кўпайтмаси бўлинувчига тенг бўлган учинчи комплекс сона айтилади, яъни агар $(c+di)(x+yi)=a+вi$ бўлса, $(a+вi):(c+di)=x+yi$ бўлади.

Масалан, $(3-4i):(4+2i)$ бўлинмани топиш керак бўлсин. $(3-4i):(4+2i)=x+yi$ бўлсин. У ҳолда $(x+yi)(4+2i)=3-4i$ бўлиши керак. $(x+yi)(4+2i)=(4x-2y)+(2x+4y)i$ бўлгани учун $(4x-2y)+(2x+4y)i=3-4i$.

Бундан:

$\begin{cases} 4x-2y=3 \\ 2x+4y=-4 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} 4x-2y=3 \\ x+2y=-2 \end{cases}$ системани ечсак, $\begin{matrix} x=0{,}2 \\ y=-1{,}1 \end{matrix}$

Демак: $(3-4i):(4+2i)=0{,}2-1{,}1i$

9-таъриф. Фақат мавҳум қисмининг ишораси билангина фарқ қиладиган комплекс сонларни қўшма комплекс сонлар дейилади.

Масалан, $5+2i$ билан $5-2i$, $-3+i$ билан $-3-i$, $a+вi$ билан $a-вi$ қўшма комплекс сонлардир.

Теорема. Ўзаро қўшма комплекс сонларнинг кўпайтмаси ҳақиқий сонга тенг.

Исбот. $a+вi$ ва $a-вi$ қўшма комплекс сонларни кўпайтирайлик. $(a+вi)(a-вi)=(a^2+в^2)+(aв-aв)i=a^2+в^2$ ҳақиқий сон ҳосил бўлади.

Исбот қилинган бу теоремадан комплекс сонни комплекс сонга бўлишда фойдаланиш ишни осонлаштиради.

$\frac{a+вi}{c+di}(c+di\neq 0)$ нисбатни топиш учун касрнинг сурат ва махражини, махражидаги $c+di$ комплекс соннинг қўшмасига кўпайтирилади:

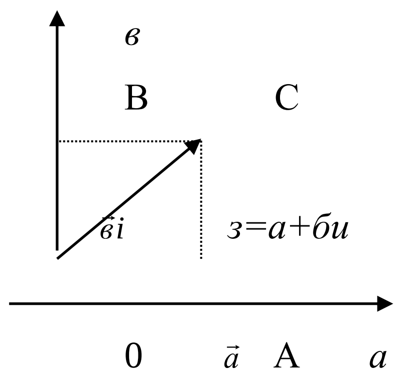
$$\frac{a+вi}{c+di}=\frac{(a+вi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+вd)+(вc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+вd}{c^2+d^2}+\frac{вc-ad}{c^2+d^2}\cdot i$$

Масалан, $\frac{3-4i}{3+2i}=\frac{(3-4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{(9-8)+(-12-6)i}{9-4i^2}=\frac{1-18i}{9+4}=\frac{1}{13}-\frac{18}{13}i$.

3-асосий саволнинг баёни.

$z=a+вi$ комплекс сон берилган бўлсин. АОВ тўғри бурчакли координаталар системасини оламиз ва $\vec{a}$ ўққа ҳақиқий вектор a ни ва $в$ ўққа мавҳум вектор $\vec{в}i$ ни қўямиз. $\vec{a}$ ва $\vec{в}i$ векторни параллелограмм қоидасига асосан қўшамиз. Икки вектор йиғиндисига тенг бўлган вектор йўналиши ва катталиги бўйича шу векторларга ясалган параллелограмм диогоналига тенгдир.

Демак, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ ёки $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{в}i$. Шундай қилиб, $\vec{a}+\vec{в}i$ комплекс соннинг геометрик тасвири боши координаталар бошида, охири еса координаталари A ва B нуқтада бўлган вектордан иборат.



$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{в}i$ векторнинг скаляр қисмини уни ташкил етувчи векторларнинг скаляр қисмини билган ҳолда ҳисоблаш мумкин. ΔAOC дан

$OC^2=OA^2+AC^2$

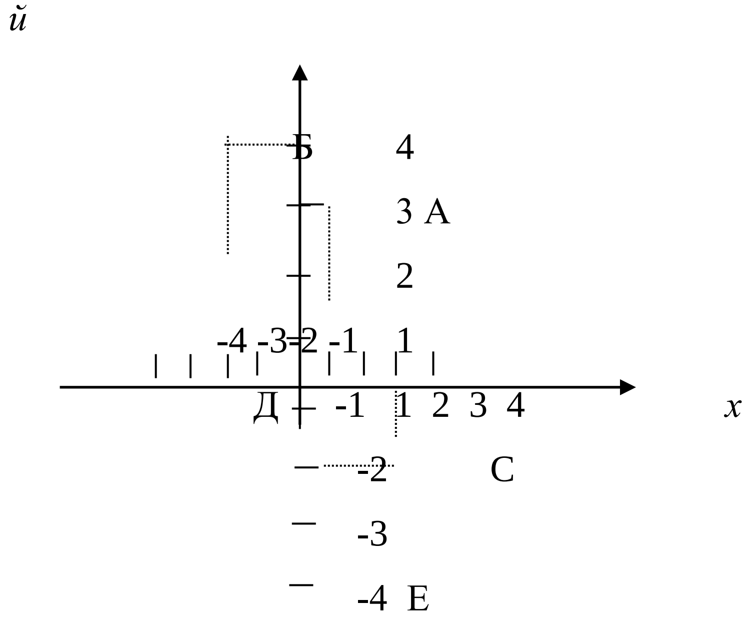
$\overrightarrow{OC}$ векторнинг скаляр қисмини P билан белгилаб, қуйидагини ёзиш мумкин:

$R^2=a^2+в^2$ ёки $R=\sqrt{a^2+в^2}$

яъни $z = a + вi$ комплекс сонни ифодаловчи векторнинг узунлиги $\sqrt{a^2 + в^2}$ га тенг бўлиб, уни векторнинг модули дейилади.

Ҳар бир $a + вi$ комплекс сонга текисликдаги координаталари $(a;в)$ бўлган нуқта мос келади. масалан, $1+3i$ комплекс сонга А(1;3) нуқта, $-2+4i$ комплекс сонга В(-2;4) нуқта, $3-2i$ комплекс сонга С(3;-2) нуқта, $-3+0i$ сонга Д(-3;0) нуқта, $0-4i$ сонга Е(0;-4) нуқта мос келади.

Шундай қилиб, барча комплекс сонлар тўплами билан текисликдаги барча нуқталар тўплами ўзаро бир қийматли мосликда бўлади.



4-асосий саволнинг баёни.

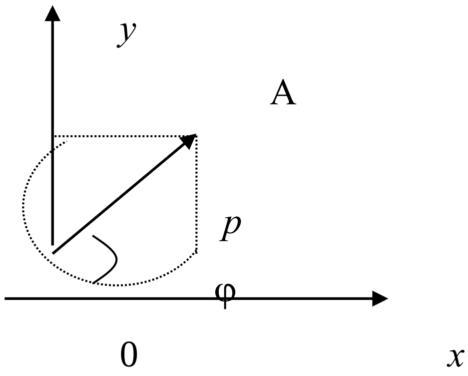
$a + вi$ комплекс сонга координаталари $(a;в)$ бўлган А нуқта мос келсин. Бу сонга $\overrightarrow{OA}$ мос келади десак ҳам бўлади. $\overrightarrow{OA}$ узунлигини r билан, абссиссалар ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил етган бурчагини φ билан белгилайлик.

φ бурчак синуси ва косинусининг таърифига кўра:

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi, \quad \frac{в}{r} = \sin\varphi \quad \text{ёки} \quad \begin{matrix} a = r\cos\varphi \\ в = r\sin\varphi \end{matrix}$$

У ҳолда $a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r^2 = a^2 + b^2$ бўлгани сабабли

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ни $a + вi$ комплекс соннинг тригонометрик шакли, r ни комплекс соннинг модули, φ ни еса комплекс соннинг аргументи дейилади.

Тригонометрик шаклда берилган икки комплекс сон бир-бирига тенг бўлса, модуллари, тенг, аргументлари еса 2π га каррали сон қадар фарқ қилади. Бошқача айтганда

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

бўлса, 1) $r_1 = r_2$, 2) $\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi$.

1-мисол. 3Қ3*и* комплекс сонни тригонометрик шаклда ёзинг:

Ечиш. $r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$; $\sin\varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

бундан $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, у ҳолда $3 + 3i = 3\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right]$, (к-ихтиёрий бутун сон).

Бунда аргумент φ нинг О билан 2π орасидаги қийматини олиш билан чекланилади. У ҳолда $\varphi=\frac{\pi}{4}$ бўлиб, охирги тенгликни бундай ёза оламиз,

$$3+3i=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2-мисол. $1-\sqrt{3}i$ комплекс сонни тригонометрик шаклда ёзинг.

Ечиш. $r=\sqrt{1+3}=2.$ $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлганда $\varphi=\frac{4\pi}{3}$ ёки $\varphi=\frac{5\pi}{3}$ бўлиши, $\cos\varphi=\frac{1}{2}$ бўлганда еса $\varphi=\frac{\pi}{3}$ ёки $\varphi=\frac{5\pi}{3}$ бўлиши мумкин. Ҳар икки ҳолни $\varphi=\frac{5\pi}{3}$ қаноатлантиради. Демак, $1-\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$

5-асосий саволнинг баёни.

1-теорема. Икки комплекс сон кўпайтмасининг модули улар модулларининг кўпайтмасига, аргументи еса улар аргументлари йиғиндисига тенг.

Исбот. $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$ $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ бўлсин у ҳолда:

$$z_1\cdot z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1\cdot r_2(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+$$
$$+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)=r_1\cdot r_2[(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+$$
$$+\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)]=r_1\cdot r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

яъни $r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1\cdot r_2[(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

Мисоллар.

1) $2(\cos 40^0+i\sin 40^0)\cdot 3(\cos 20^0+i\sin 20^0)=6(\cos 60^0+i\sin 60^0)=3(1+i\sqrt{3})$;

2) $\frac{2}{3}\left(\cos 79^0+i\sin 79^0\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos 101^0+i\sin 101^0\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos 180^0+i\sin 180^0\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(-1+0\cdot i)=-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

1-натижа. н та комплекс сонинг кўпайтмаси модули берилган н та комплекс сон модулларининг кўпайтмасига, аргументи еса аргументлари йиғиндисига тенг бўлган комплекс сондир:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)......r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) =$$
$$= r_1\cdot r_2\cdot r_3.......r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+.....+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+.....+\varphi_n)]$$

2-натижа. Комплекс сонни н-даражага кўтариш учун унинг модулини шу даражага кўтариш, аргументини еса даража кўрсаткичик марта орттириш кифоя.

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin\varphi) \qquad (1)$$

Бу формулани Муавр формуласи дейилади. [Муавр (1667-1754)-инглиз математиги].

Мисоллар.

1) $$2\left[\left(\cos 70^0 + i\sin 70^0\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin 65^0 + i\sin 65^0\right)\cdot\frac{3}{4}\left(\cos 15^0 + i\sin 15^0\right)\right] =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos 150^0 + i\sin 150^0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos 30^0 - i\sin 30^0\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+i\right)$$

2) $$\left[\sqrt{2}\left(\cos 10^0 + i\sin 10^0\right)\right]^{12} = 64\left(\cos 120^0 + i\sin 120^0\right) =$$
$$= 64\left(-\sin 30^0 + i\cos 30^0\right) = 64\cdot\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 32\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$$

2-теорема. Бир комплекс соннинг нолга тенг бўлмаган иккинчи комплекс сонга нисбати, модули бўлинувчи ва бўлувчи комплекс сонлар модуллари нсибатига, аргументи еса шу сонларнинг аргументлари айирмасига тенг бўлган комплекс сондир.

Исбот. $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2\right)$; $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$ $\left(z_2 \neq 0\right)$ у ҳолда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)[\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)]}{\cos^2\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos\varphi_1\cdot\cos(-\varphi_2) - \sin\varphi_1\cdot\sin(-\varphi_1) +$$
$$+ i[\cos\varphi_1\cdot\sin(-\varphi_2) + \cos(-\varphi_2)\sin\varphi_1]\} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2),$$

яъни $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2) : r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$.

Мисол.

$$\frac{5\left(\cos 18^0 + i\sin 18^0\right)}{9\left(\cos 48^0 + i\sin 48^0\right)} = \frac{5}{9}\left[\cos(-30^0) + i\sin(-30^0)\right] =$$

$$\frac{5}{9}\left[\cos 30^0 - i\sin 30^0\right] = \frac{5}{9}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right] = \frac{5}{18}\left(\sqrt{3} - i\right)$$

6-асосий саволнинг баёни.

Таъриф. Берилган комплекс соннинг н–даражали илдизи деб, н–даражаси берилган комплекс сонга тенг бўлган ҳар қандай комплекс сонга айтилади.

Теорема. Нолга тенг бўлмаган $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ комплекс соннинг н –даражали илдизи мавжуд бўлиб, н та қийматга ега. Бу н та қиймат $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right)$ формуладан κ га 0,1,2,. . . . . (н-1) қийматларни бериш билан топилади.

Исбот. $z = r(\cos\pi + i\sin\varphi) \neq 0$ комплекс соннинг н –даражали илдизи мавжуд бўлиб, у $\rho(\cos n\theta + i\sin\theta)$ га тенг бўлсин, у ҳолда таърифга кўра: $\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Комплекс сонлар тенг бўлса, уларнинг модуллари тенг, яъни $\rho^n = r$ ва аругментлари тенг ёки 2π га каррали бурчакка фарқ қилгани учун $\rho^n = r,\ n\theta = \varphi + 2k\pi$ ёки $\rho = \sqrt[n]{r}$ ва $\theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$ бунда κ -ихтиёрий бутун сон. Демак:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

z соннинг n-даражали илдизи мавжуд еканини исбот қилиш учун $\rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$ ни n-даражага кўтарамиз. У ҳолда

$$\rho^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right) = r\left[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)\right] = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = \pi$$

Демак, z нинг n-даражали илдизи мавжуд екан.

Мисол. $\sqrt[5]{1+i}$ ни ҳисобланг.

$$\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}\right);\ k=0,1,2,3,4$$

$$\sqrt[5]{1+i}=\begin{cases}\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{20}+i\sin\frac{9\pi}{20}\right)\\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{20}+i\sin\frac{17\pi}{20}\right)\\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{20}+i\sin\frac{25\pi}{20}\right)\\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{33\pi}{20}+i\sin\frac{33\pi}{20}\right)\end{cases}$$

Фойдаланилган адабиётлар

1. Т.Азларов, Х.Мансуров. Математик анализ. 1-2 қисм. Т., Ўқитувчи, 1989.

2. Е.У.Соатов. Олий математика. 1-қисм. Т., 1992.

3. Б.А.Абдуалимов. Олий математика. Т., Ўқитувчи, 1994.

4. В.П.Минорский. Олий математикадан масалалар тўплами. Т. Ўқитувчи, 1984.

5. Ф.Ражабов, А.Нурметов. Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра. Т., Ўқитувчи, 1990.

6. Т.Жўраев ва бошқалар. Олий математика асослари. Т., Ўзбекистон, 1994.

7. Ш.И.Тожиев. Олий математикадан масалалар ечиш. Т., Ўзбекистон. 2002.

8. П.Е.Данко, А.Г.Попов. Высшая математика в упражнениях и задачах. Част 1. М., 1974.

9. Х.Латипов, Ш.Тожиев. Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра. Т., 1995.

10. Ё.У.Соатов. Олий математика. 3-жилд. Т., Ўзбекистон, 1996.