

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY
VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI**

**Qarshi Davlat Universitetining
Umumiy matematika kafedrası,**

Differensial tenglamalar

(o‘quv uslubiy qo‘llanma)

2013 y

Differensial tenglamalar (o'quv uslubiy qo'llanma)

Tuzuvchilar: QDU ning «Umumiy matematika» kafedrasining dotsenti, J.O'ramov .

QDU ning «Umumiy matematika» kafedrasining mudiri, dotsent B.E.Eshmatov
Qarshi shahridagi №34 maktabning oliy toifali matematika fani o'qituvchisi
J.J.O'ramov

Taqrizchilar: QDU ning Umumiy matematika kafedrasini katta o'qituvchisi,
f.m.f.n. O.G'ulomov

QMI institutining oliy matematika kafedrasining dotsenti, f.m.f.n. N.Jurayev

Soʻz boshi

Uslubiy qoʻllanmada differensial tenglamalar nazariyasining sodda tushunchalari, xususan, oddiy differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar, differensial tenglamalar tushunchasiga olib keluvchi masalalar, eng sodda birinchi tartibli differensial tenglamalarning ayrim sinflari, shuningdek, ikkinchi tartibli eng sodda va chiziqli differensial tenglamalar, garmonik tebranishlarning differensial tenglamasi tushunchalari nazariy va konkret misollar asosida bayon etiladi. Uslubiy qoʻllanmani yaratishda mualliflarning QMI.I qoshidagi "Nuriston" akademik-litseyida toʻplagan ish tajribalari asosida yoziladi. Uslubiy qoʻllanmada har bir mavzuni mustahkam oʻrganishda mustaqil yechishga mashqlar berilgan, ayrim tipik misol va masalalar yechib koʻrsatilgan. Qoʻllanma nihoyasida talabalarning oʻz bilimlarini sinash uchun test topshiriqlaridan namunalar berilgandir.

Uslubiy qoʻllanmani qoʻlyozmasini oʻqib chiqib oʻz fikr va mulohazalarini bildirgan f.m.f.n, dotsent K. Muhammadiyev va f.m.f.n. dotsent A.Yusupovga samimiy minnatdorchilik bildiramiz.

Uslubiy qoʻllanma akademik-litseylar, kasb-hunar kollejlari talabalariga moʻljallangan boʻlib undan matematika faniga qiziquvchilar va oliy oʻquv yurtlari talabalari ham foydalanishlari mumkin.

Ikkinchi nashrga soʻz boshi

Uslubiy qoʻllanma ikkinchi nashrida ayrim noaniqlar toʻgʻrilandi, differensial tenglamalarning maxsus yechimlari haqidagi sodda tushunchalar misollar asosida berildi, differensial tenglamalar tushunchasiga olib keluvchi geometrik masalalar shuningdek 2§-3§-larga yangi misollar qoʻshildi.

Ikkinchi nashrini tayyorlashda oʻz fikr va mulohazalarni bildirgan hamkasb doʻstlarimizga minnadorchilik izhor qilamiz.

Mazkur qoʻllanma sifatini yaxshilash toʻgʻrisidagi kitobxonlarning tanqidiy fikr va mulohazalarini mamnuniyat bilan qabul qilamiz.

§1. Differensial tenglamalar.

1⁰. Differensial tenglamalar haqida dastlabki tushunchalar.

Shu paytgacha o'rganilgan tenglamalarda noma'lumlar sonlardan iborat edi. Matematika va uning turli amaliy tadbirlarida noma'lum o'rnida funksiyalar va ularning hosilalari (yoki differensial) qatnashadigan tenglamalarni o'rganishga duch kelamiz. Bunday tenglamalarni differensial tenglamalar deb ataladi. Differensial tenglamada izlanayotgan noma'lum funksiya faqat bitta erkli o'zgaruvchiga (argumentga) bog'lik bo'lsa, bunday tenglamani oddiy differensial tenglama deyiladi. Biz kelgusida asosan oddiy differensial tenglamalar bilan ish ko'ramiz.

Differensial tenglamalardan o'zbek tilida ilk darslik akademik T.N. Qori-Niyoziy tomonidan o'tgan asrning 40-yillarida yozilgan. Hozirgi zamon talablariga javob beradigan differensial tenglamalar nazariyasini amaliy masalalarni yechishga tadbik etilishi ham bayon etilgan darslik akademik M.S.Saloxiddinov va prof. G.N.Nasriddinovlar tomonidan (Toshkent, «O'zbekiston», 1994 y) chop etilgan.

Differensial tenglamaga kirgan hosilaning yuqori tartibiga shu tenglamaning tartibi deyiladi.

Noma'lum funksiyaning birinchi tartibli hosilasini (yoki birinchi tartibli differensialini) o'z ichiga olgan tenglamaga birinchi tartibli differensial tenglama deyiladi, agar differensial tenglama tarkibiga noma'lum funksiyasining ikkinchi tartibli hosilasidan yuqori tartibli hosilasini olmasa, bunday tenglamaga ikkinchi tartibli differensial tenglama deyiladi.

Masalan, $y'=2x$, $xdy+ydx=0$ tenglamalar birinchi tartibli, $y''=\sin x$, $y''-5y=0$ tenglamalar esa ikkinchi tartibli differensial tenglamalar hisoblanadi.

Differensial tenglamaning yechimi deb, uni ayniyatga aylantiruvchi har qanday $y=\varphi(x)$, $x\in X$ funksiyasiga aytiladi, $y=\varphi(x)$ funksiyaning grafigiga shu tenglamaning integral egri chizigi (qisqacha integral chizig'i) deyiladi.

Masalan, $y_1=x^2$, $y_2=x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$ funksiyalar $y'=2x$, (1) tenglamaning yechimlaridan iboratdir, chunki $y_1'=(x^2)'=2x$,

$y_2'=(x^2-1)'=2x$, hosilalar (1) tenglamani $\forall x\in\mathbb{R}$ da ayniyatga aylantiradi. Ravshanki, agar differensial tenglamalar yechimga ega bo'lsa, ular cheksiz ko'p bo'ladi.

Chunonchi, $y=x^2+C$, (2) (C- ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy son) ko'rinishdagi funksiyalar to'plami (ya'ni, parabola egri chiziqlar oilasi) (1) tenglamaning barcha yechimlarini o'z ichiga oladi, (2) ni (1) tenglamaning umumiy yechimi (yoki umumiy integrali) deb ham aytiladi. (2) dan ko'rinadiki, birinchi tartibli differensial tenglamaning (xususan (1) ning) umumiy yechimi bitta ixtiyoriy o'zgarmas miqdorni o'z ichiga oladi. (2) dagi C ga aniq qiymatlar berish natijasida unga mos turli yechimlar hosil qilinadi, bunday yechimlarga (1) ning hususiy yechimlari deb yuritiladi.

Ba'zan hususiy yechimlarni topish uchun ko'shimcha shartlar yoki «boshlangich shartlar» deb ataluvchi shartlar beriladi. Masalan, (1) ni barcha yechimlari (2) parabola egri chiziqlar oilasidan iborat ekanligini ko'rdik, endi shu oiladan A(1;2) nuqtadan o'tuvchisini, ya'ni $x=1$ da

$y=2$ ga teng; $y(1)=2$ yoki $y|_{x=1}=2$ boshlangich shartni qanoatlantiruvchi hususiy yechimni

topish talab etilsa, (2) dan $2=1^2+C$ yoki $C=1$ bo'lib, C ni bu qiymatini (2) ga quysak $y=x^2+1$ parabolani hosil qilamiz. Ravshanki, bu parabola (1) ni yechimi va u A(1;2) nuqtadan o'tadi. $y=x^2+1$ parabola (2) umumiy yechimdan $C=1$ qiymatda hosil bo'ldi, bu (1) ning hususiy yechimi hisoblanadi. Agar boshqa nuqta, masalan:

B(-2;3) dan o'tuvchi yoki $y|_{x=-2}=3$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi hususiy yechim izlansa, $C=-1$ ni topib, (1) ni $y=x^2-1$ boshqa bir hususiy yechimni hosil qilamiz va hokazo.

Differensial tenglamani yechimlarini topish amaliga uni integrallash deyiladi.

2⁰. Differensial tenglamalar tushunchasiga olib keluvchi ba'zi masalalar.

Endi differensial tenglamalar tushunchasiga olib keluvchi ba'zi bir masalalarni qaraymiz.

1.⁰ Agar biror moddiy nuqtaning $v(t)$ tezligi ma'lum bo'lsa, uning bosib o'tgan $S(t)$ yo'lini topish uchun $S'(t) = v(t)$, birinchi tartibli differensial tenglamani yechishga to'g'ri keladi, xususan, agar $v(t) = 3 + 4t$ bo'lsa, $S(t)$ ni topish uchun

$$S'(t) = 3 + 4t \text{ yoki } \frac{ds}{dt} = 3 + 4t, (1)$$

Tenglamani yechish lozim. Ravshanki,

$$S(t) = 3t + 2t^2 + C, (2)$$

ko'rinishdagi funksiyalar (1) tenglamaning yechimidan iborat bo'ladi, bu yerda C - ixtiyoriy haqiqiy o'zgarmas sonidir. Haqiqatan ham (2) dan "t" bo'yicha hosila olsak,

$$S'(t) = v(t) = (3t + 2t^2 + C)' = 3 + 4t$$

(1) tenglikni qanoatlantirilishi kelib chiqadi.

Masala yechimidagi noma'lum C o'zgarmas miqdorni aniqlash uchun qo'shimcha shart,

ya'ni $S|_{t=t_0} = S_0$ (t_0, S_0 - aniq sonlar) ko'rinishdagi boshlangich shart berilishi zarur,

xususan $S|_{t=0} = 24$, (3) shart berilsa, (2) dan $24 = C$, ya'ni $C = 24$ ni aniqlaymiz. Izlangan xususiy yechim esa

$$S(t) = 3t + 2t^2 + 24 (4)$$

dan iborat bo'ladi.

Tekshirib ko'rish osonki, (4) xususiy yechim (1) tenglamani va (3) boshlangich shartni ham qanoatlantiradi.

Fizika, texnika, biologiya va ijtimoiy fanlarning ko'pgina masalalarini yechish

$$f'(x) = kf(x), (k = \text{const}), (5)$$

ko'rsatkichli o'sish ($k > 0$ da) va ko'rsatkichli kamayishning ($k < 0$ da) differensial tenglamasi deb ataluvchi tenglamani qanoatlantiruvchi $f(x)$ funksiyalarni topishga keltiriladi.

Ko'rsatkichli funksiya hosilasining formulasini bilgan holda

$$f(x) = Ce^{kx}, (6)$$

ko'rinishdagi har qanday funksiyalar (5) tenglamaning yechimlari bo'lishini ko'rish oson, bu yerda C - ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy son, shu sababdan ham (5) differensial tenglamasining yechimi cheksiz ko'pdir. (5) tenglama yechimlaridan biri $f(x) \equiv 0$ bo'ladi. Hosil qilingan (6) yechim formulasida aynan nolga teng yechimni hisobga olish uchun C o'zgarmasga 0 qiymatni ham berish kerak. C o'zgarmasni aniqlash uchun esa masalaga qushimcha shartlar beriladi.

2.⁰ Masalan, t vaqt momentdagi bakteriyalarning ko'payish tezligi $m'(t)$, bakteriyalar massasi $m(t)$ bilan quyidagi tenglama orqali bog'langan: $m'(t) = km(t)$, bu yerda k - bakteriyalarning turiga va tashqi shart-sharoitlarga bog'lik bo'lgan musbat son. Bu tenglamaning yechimlari ushbu funksiyalardan iborat bo'ladi:

$$m(t) = Ce^{kt}$$

C o'zgarmasni, masalan $t=0$ momentda bakteriyalar massasi m ma'lum degan shartdan (boshlangich shartdan) topish mumkin, ya'ni $m(0) = m_0 = Ce^{k \cdot 0} = C$, bundan $C = m_0$. Izlangan yechim esa: $m(t) = m_0 e^{kt}$

3.⁰ Radioaktiv yemirilish (yoki parchalanish) masalasi.

Ba'zi bir elementlar atomlarining yadrolari al'fa, beta va gamma nurlar chiqarib boshqa elementlar yadrolariga o'z-o'zidan aylanishi radioaktiv yemirilish deyiladi.

Vaqtning boshlang'ich momentida radioaktiv moddaning massasi $m(0) = m_0$, (1) ga teng bo'lsin. Modda massasi $m(t)$ ning t vaqtga nisbatan kamayish tezligi uning miqdoriga proporsional ekani ma'lum, ya'ni $m'(t) = -km(t)$, bunda $k > 0$ yemirilish doimiysi deyiladi. Yuqorida aniqlanganiga asosan:

$$m(t) = Ce^{-kt}$$

C o'zgarmas (1) shartdan topiladi. $t=0$ da $m_0 = m(0) = Ce^{k \cdot 0} = C$, ya'ni $C = m_0$ Natijada $m(t) = m_0 e^{-kt}$, (2) ni hosil qilamiz.

Radiaktiv moddaning massasining yarmi yemirilishi uchun kerak bo'lgan T vaqt radiaktiv moddaning «yarim yemirilish davri» deyiladi. Turli izotoplar uchun yarim yemirilish davri turlicha. Masalan radiy uchun $T=1590$ yil, uran uchun $T=4,6$ mlrd.yil, radon uchun $T=3,82$ sutka. T va k orasida bog'lanish

mavjud. Haqiqatan, $t=T$ da $m = \frac{m_0}{2}$ bo'lib, $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$ bu yerdan $e^{-kT} = \frac{1}{2}$ va $T = (\ln 2)/k \approx 0,693/k$, $k = (\ln 2)/T \approx 0,693/T$, k ni topilgan qiymatini (2) qo'ysak $m(t) = m_0 2^{-\frac{t}{T}}$ masalan, radiy uchun $T \approx 1590$ yil bo'lib $\kappa = \frac{\ln 2}{1590} \approx 0,000447$

Bir million yildan keyin radiyning m_0 boshlang'ich massasidan faqatgina $m(10^6) \approx m_0 e^{-447 \cdot 0,000447} \approx 0,6 \cdot 10^{-194} m_0$ qoladi.

4⁰. $M_0(1;2)$ nuqtadan o'tuvchi va quyidagi xossaga ega bo'lgan egri chiziq tenglamasini toping: koordinata o'qlari, izlanayotgan egri chiziqning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma hamda M nuqta orqali o'tuvchi va Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziq bilan chegaralangan OAMB trapetsiya yuzi 3 kv. birlikka teng.

Yechiishi: $M(x,y)$ nuqta tenglamasi $y=f(x)$ bo'lgan izlanayotgan egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Ma'lumki, OAMB trapetsiyaning yuzi $S = \frac{OA+BM}{2} OB$ formula bilan aniqlanadi. Chizmadan: $BM=y$, $OB=AC=x$, $OA=BM-CM$, $\frac{CM}{AC} = \tan \alpha$, $CM = AC \tan \alpha = xy'$, chunki, $y' = \tan \alpha$.

Demak, $OA = y - xy'$. Differensial tenglama tuzish uchun OA, BM va OB lar uchun topilgan ifodalarni trapetsiya yuzini ifodalovchi formulaga qo'ysak:

$$\frac{y - xy' + y}{2} x = 3 \quad \text{yoki} \quad 2xy - x^2 y' = 6, \quad y' - \frac{2}{x} y = -\frac{6}{x^2} \quad \text{ko'rinishdagi birinchi tartibli}$$

differensial tenglamaga kelimiz, bu yerda $y=f(x)$ izlanayotgan egri chiziqning tenglamasidir. Bu tenglamaning yechimi: $xy=2$ giperboladan iboratligi §3 ni 4⁰ da ko'rsatiladi.

5⁰ Agar biror jismning to'g'ri chiziqli harakatida uning $a(t)$ tezlanishi ma'lum bo'lsa, jismning bosib o'tgan $S(t)$ yo'lini topish masalasi $S''(t)=a(t)$ ikkinchi tartibli differensial tenglamani yechishga keladi (chunki jismning tezlanishi uning bosib o'tgan yo'lidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilasiga tengdir).

$$\text{Xususan, } a(t) = 2\text{m/sek}^2 \text{ bo'lsa, u holda } S(t) \text{ ni topish uchun } S''(t)=2 \text{ yoki } \frac{d^2 S}{dt^2} = 2, \quad (1)$$

differensial tenglamani yechish kerak bo'ladi. Agar $S'(t)=v(t)$, ya'ni yo'ldan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila tezlikni, shuningdek, $v'(t)=a(t)$ tezlikdan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila tezlanishni aniqlashini e'tiborga olsak, $v'(t)=2$, (2) tenglamadan $v(t)=2t+C_1$, (3) uning umumiy yechimini topamiz, bu yerda C_1 -ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy son. Endi $S'(t)=v(t)=2t+C_1$, (4) tenglamadan esa uning ushbu umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$S(t)=t^2+C_1 t+C_2, \quad (5)$$

bu yerda C_2 - ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy son.

(5) formula (1) differensial tenglamaning barcha yechimlarini o'z ichiga oladi, ravshanki, $S(t)$ funksiya $a(t)=2$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ($v(t)=2t+C_1$) ning boshlang'ich funksiyasidan iborat bo'lar ekan.

Shuningdek, bu masaladan ko'rinadiki, har qanday ikkinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimida ikkita ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlar ishtirok etadi. (5) umumiy yechimdagi C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarni aniqlash uchun qo'shimcha

shartlar, ya'ni $S'|_{t=t_0} = v|_{t=t_0} = v_0$ va $S|_{t=t_0} = S_0$ (6) ko'rinishdagi boshlang'ich

shartlar berilishi zarurdir, bu yerda t_0 , S_0 , v_0 – berilgan aniq sonlardir.

(6) ga asosan (3) dan, hususan $t=0$ da $C_1=v_0$ (5) dan $C_2=S_0$ ni aniqlaymiz va izlangan hususiy yechim $S(t)=t^2+v_0 t+S_0$ ko'rinishida bo'ladi.

Xususan, $S'|_{t=0} = v|_{t=0} = 0$ ($v_0=0$), $S|_{t=0} = 0$ ($S_0=0$) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi hususiy yechim esa $S(t)=t^2$ shaklda bo'ladi.

Mashqlar

1. $y = Cy^{\frac{k}{m}}$ funksiya $my' = -ky$ tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

2. Quyidagilardan qaysilari differensial tenglama va tartibini aniqlang.

1) $\sqrt{y'} + 3y - x = 7$

2) $(y''')^2 + \sin xy = e^x$

3) $\cos y = \ln \sin x + 5$

4) $y''' + 8y' + 6y = \tan x$

3. $y=f(x)$ egri chiziq $A(1; e)$ nuqtadan o'tib, uning har bir nuqtasidan o'tgan urinmaning burchak koeffisienti urinish nuqtasining koordinatalari ko'paytmasining ikkilanganiga teng. Shu egri chiziqni toping.

4. massasi m bo'lgan jism $v|_{t=0} = v_0$ boshlang'ich tezlik bilan biror balandlikdan tashlab yuborilgan. Jism tezligining o'zgarish qonunini toping. (Havoning qarshilik kuchi $F=-kv$, $k>0$ tenglik bilan aniqlanishini e'tiborga oling).

§2. Eng sodda birinchi tartibli differensial tenglamalar.

1⁰. Ushbu

$$y'=f(x), \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamalarga eng sodda birinchi tartibli differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda $f(x)$ $x \in X$ oraliqda aniqlangan, berilgan uzluksiz funksiya.

Agar $y' = \frac{dy}{dx}$ ekanligini e'tiborga olsak, (1) tenglamani $dy=f(x)dx$ ko'rinishda yozib

olamiz. Bu tenglikni har ikkala qismini integrallasak $\int dy = \int f(x)dx$ va aniqmas integralni xossasiga asosan $y = \int f(x)dx$ ga ega bo'lamiz. Agar $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalaridan birini $F(x)$ desak, (1) tenglamani izlanayotgan umumiy yechimi quyidagi shaklda bo'ladi:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C, \quad (2)$$

bu yerda $C=\text{const}$. Demak, (1) tenglamani umumiy yechimi $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang'ich funksiyalaridan iborat bo'lar ekan.

Agar

$$y(x_0)=y_0, \quad (3)$$

boshlang'ich shart berilgan bo'lsa, C o'zgarmasni aniq qiymatini hisoblab (1) tenglamani hususiy yechimini topish mumkin, bu yerda $x_0 \in X$, y_0 - aniq son. (1) tenglamani (3) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi hususiy yechimini ko'pincha aniq integral ko'rinishida yozish qo'lay bo'ladi. Darhaqiqat, boshlang'ich funksiyaning quyi chegarasi tayinlangan, yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integral ko'rinishida

$$y = \int_{x_0}^x f(t)dt + C, \quad (4)$$

yoziish mumkin. $x=x_0$ da bu integral nolga aylanadi va $y(x_0)=y_0=C$ bundan $C=y_0$ bo'lib, (1) ni (3) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi hususiy yechimi ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt \quad (5)$$

(5) dan agar $x=x_0$ bo'lsa, darhol $y(x_0)=y_0$, ya'ni (3) boshlang'ich shartni bajarilishi kelib chiqadi. Agar $(\int_{x_0}^x f(t)dt)'_x = f(x)$ tenglikni o'rinli ekanligini e'tiborga olsak, (5) tenglik bilan aniqlanuvchi y funksiya (1) tenglamani qanoatlantirishini ham ko'rsatish mumkin, ya'ni (5) ni har ikkala tomonidan x bo'yicha hosila olsak:

$$y' = (y_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt)' = (y_0)' + (\int_{x_0}^x f(t)dt)'_x = 0 + f(x) = f(x) \text{ ekanligi kelib chiqadi.}$$

Misol: $y'=3x^2+2x+1$, $x \in \mathbb{R}$, differensial tenglamani $y(1)=3$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish. Avvalo umumiy yechimni topamiz:

$$\begin{aligned} y &= \int_1^x (3t^2 + 2t + 1)dt + C = (t^3 + t^2 + t)|_1^x + C = \\ &= x^3 + x^2 + x - 1 - 1 - 1 + C = x^3 + x^2 + x - 3 + C, \\ y &= x^3 + x^2 + x - 3 + C \end{aligned}$$

Endi xususiy yechimni topish uchun umumiy yechimda $x=1$, $y=3$ deymiz va $C=3$ ni aniqlaymiz. Demak, izlangan xususiy yechim:

$$y = x^3 + x^2 + x;$$

ko'rinishda bo'ladi.

2^0 $y' = g(y)$ ko'rinishdagi tenglamalar ham eng sodda birinchi tartibli tenglama deyiladi, bu yerda $g(y)$, $y \in Y$ oraliqda aniqlangan, uzluksiz va nolga aylanmaydi deb faraz qilamiz. Agar

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \text{ ni e'tiborga olsak, berilgan tenglama o'rniga}$$

$$y' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{g(y)} \text{ tenglamani hosil qilamiz.}$$

Ravshanki, $F(y) = \frac{1}{g(y)}$ funksiya Y oraliqda uzluksiz bo'ladi, chunki $g(y) \neq 0$, $\forall y \in Y$. Shu sababdan ohirgi tenglamaning umumiy yechimi

$$x(y) = \int \frac{dt}{g(t)} + C, \quad (C = \text{const}), \quad (7)$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar $x|_{y=y_0} = x_0$, (8) boshlang'ich shart berilsa, 1^0 –punkt dagidek mulohozalar yuritsak (6) ni (8) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi ushbu ko'rinishda bo'lishiga ishonch hosil qilish mumkin :

$$x(y) = x_0 + \int_{x_0}^x \frac{dt}{g(t)}, \quad y \in Y, \quad y_0 \in Y, \quad (9)$$

Misol. $y' = \sqrt[3]{y^2}$ tenglamani yeching.

Yechilishi : Ravshanki, $y=0$ (ox o'q) berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi. Endi $y \neq 0$ bo'lsin. O'zgaruvchilarni ajratib topamiz:

$$\frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = dx \Rightarrow y^{\frac{2}{3}} dy = dx.$$

integrallab, umumiy yechimini topamiz:

$$\int y^{\frac{2}{3}} dy = \int dx + C \Rightarrow 3y^{\frac{1}{3}} = x + C \text{ yoki } y = \frac{(x+C)^3}{27}, \quad C = \text{const}$$

Topilgan umumiy yechimga mos integral egri chiziqlar oilasi kubik parabolalardan iborat. $y=0$ yechim (ox o'q) ning har bir nuqtasi orqali berilgan tenglamaning yana bitta integral chizig'i (kubik parabola) o'tadi. $y=0$ yechim esa umumiy yechim tarkibida bo'lmayanti va undan C o'zgarmasning hech qanday konkret qiymatida hosil bo'lmashligini alohida qayt etamiz. Bu $y=0$ (ox o'q) yechimga berilgan tenglamaning **maxsus yechimi** deyiladi. $M(a,0)$, $(-\infty < a < \infty)$ nuqtalar esa **maxsus nuqtalar** bo'ladi. Umuman $y = \varphi(x)$ chiziq faqat maxsus nuqtalardan iborat bo'lib, differensial tenglamaning integral chizig'i bo'lsa, u holda $y = \varphi(x)$ funksiya **maxsus yechim** deyiladi.

Mashqlar.

Quyidagi ko'rsatilgan differensial tenglamalarning yechimlarini toping.

(Javoblar.)

$$1. y' = 2 \sin 2x + x^2 - 2; \quad \left(y = -\cos 2x + \frac{x^3}{3} - 2x + C; \right)$$

$$2. y' = 3^{2x} + e^{-x} + 1, \quad y(0) = -1; \quad \left(y = \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} - e^{-x} + x - \frac{1}{2 \ln 3}; \right)$$

$$3. y' = \frac{x^2}{1+x^2} + x\sqrt{1+x}; \quad \left(y = x - \arctg x + \frac{2}{5}(1+x)^2 \cdot \sqrt{1+x} - \frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x} + C; \right)$$

$$4. y' = xe^{2x}; \quad y(0) = 1; \quad \left(y = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{5}{4}; \right)$$

$$5. y' = \sin^2 x; \quad \left(y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C; \right)$$

$$6. y' = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \sin x \cos x; \quad \left(y = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} - \frac{1}{4}\cos 2x + C; \right)$$

§3. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

1^o. O'zgaruvchilari ajralgan tenglamalar.

Ushbu

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \quad (1)$$

tenglamaga o'zgaruvchilari ajralgan tenglama deyiladi. ya'ni dx oldidagi ko'paytuvchi faqat x ga bog'liq funksiya, dy oldidagi ko'paytuvchi esa faqat y ga bog'liq bo'lgan funksiya dan iborat. (1) da $M(x)$ funksiya $x \in X$ da, $N(y)$ funksiya esa $y \in Y$ da aniqlangan, berilgan uzluksiz funksiyalardir.

Agar $y = \varphi(x)$ funksiya bu tenglamaning yechimi bo'lsin deb faraz qilsak, $dy = \varphi'(x)dx$ ni hisoblab (1) tenglamadagi y va dy lar o'rniga $\varphi(x)$ va $\varphi'(x)dx$ ifodalarni qo'ysak, yechimni ta'rifiga ko'ra $M(x)dx + N[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = 0$ ayniyatni hosil qilamiz. Bu ayniyatni integrallab

$$\int M(x)dx + \int N[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = C, \quad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda chap tomonda $M(x)$ va $N[\varphi(x)] \varphi'(x)$ funksiyalarning boshlang'ich funksiyalari, o'ng tomonda esa har ikkala integralning ixtiyoriy o'zgarmlari bir ixtiyoriy o'zgarma qilib yozilgan C turibdi.

Ikkinchi integralda $\varphi(x)=y$ deb o'zgaruvchini almashtirish bajarsak (2) tenglik ushbu ko'rinishga keladi:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \quad (3)$$

(3) tenglik (1) tenglamaning umumiy integralidir.

Agar (1) ni $y(x_0)=y_0$, boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish kerak bo'lsa, (3) umumiy yechimni yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integral shaklda olish qo'laydir, ravshanki $C=0$ bo'ladi:

$$\int_{x_0}^x M(t)dt + \int_{y_0}^y N(s)ds = 0, \quad (4)$$

Misol: $xdx+dy=0$ tenglamani $y(1)=1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

$$\text{Yechish. } \int_1^x tdt + \int_1^y sds = 0$$

$$\frac{t^2}{2} + \frac{s^2}{2} \Big|_1^y = 0, \quad \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad x^2 + y^2 = 2$$

Demak, hususiy yechim markazi $O(0;0)$ nuqtada, radiusi esa $\sqrt{2}$ ga teng aylanadan iborat. Umumiy yechim esa $x^2+y^2=C^2$, (C - ixtiyoriy o'zgarma son) markazi koordinatalar boshida joylashgan konsentrik aylanalardan iborat bo'ladi.

2^o. O'zgaruvchilari ajraladigan tenglamalar.

O'ng tomoni ikkita funksiyaning ko'paytmasidan iborat bo'lib, ulardan biri faqat x ga bog'liq, ikkinchisi esa faqat y ga bog'liq bo'lsa, ya'ni

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad (1)$$

bunday ko'rinishdagi differensial tenglamaga o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama deyiladi. (1) da $f(x)$, $x \in X$ da, $g(y)$ $y \in Y$ da aniqlangan, berilgan uzluksiz funksiyadir, $g(y) \neq 0$, $\forall y \in Y$. (1) tenglama o'zgaruvchilari ajralgan tenglamaga keltirib yechiladi. Buni uchun (1) tenglamaning ikkala tomonini $g(y) \neq 0$ ga bo'lamiz va dx ga ko'paytiramiz,

natijada o'zgaruvchilari ajralgan $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglikni integrallab umumiy yechimini topamiz:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \quad C = \text{const}$$

Agar $y=y_0$ da $g(y_0)=0$ bo'lsa, ($y=y_0 \in Y$), y_0 - (1) ni yechimlaridan biri bo'ladi, chunki $(y_0)'=0$ va $f(x) \cdot g(y_0) = f(x) \cdot 0 = 0$, ya'ni (1) tenglama $0=0$ ayniyatga aylanadi. (1) ni $y(x_0)=y_0$

boshlanag'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi esa $\int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^x f(t)dt$ ko'rinishda

bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

1-misol. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ differensial tenglamani umumiy yechimi topilsin.

Yechish: $g(y)=1+y^2$ $y \in \mathbb{R}$ da hech qayerda nolga aylanmaydi, o'zgaruvchilarni ajratib integrallaymiz.

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} + C_1$$

$\arctg y = \arctg x + \arctg C$, ($C_1 = \arctg C$ deb oldik), oxirgi tenglikni tangenslab $y = \frac{x+C}{1-xC}$ umumiy yechimni hosil qilamiz.

2-misol. $y' = \frac{y}{x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechilishi. O'zgaruvchilarni ajratib: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ ($y \neq 0$), integrallab topamiz.

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|, \quad (C \neq 0) \Rightarrow y = Cx,$$

Agar $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ yoki $y|_{x=1} = 1$ shartga mos xususiy yechimni topish kerak bo'lsa, $y = Cx$ umumiy yechimdan, $C = 1$ ni topamiz. Xususiy yechim esa: $y = x$ bo'ladi.

Endi $x = 0$ da $y = 0$, ya'ni $y|_{x=0} = 0$ shartga mos yechimni

topaylik. Umumiy yechim $y = Cx$ dan $0 = C \cdot 0$, bu tenglik C ning bitta emas, balki har qanday qiymatida o'rinli bo'ladi. Ya'ni, $(0,0)$ nuqtadan cheksiz ko'p $y = Cx$ to'g'ri chiziqlar o'tadi. Shu sababdan ham, $(0,0)$ nuqta $y' = \frac{y}{x}$ differensial tenglamaning maxsus nuqtasidan

iborat. Oy o'qda yotuvchi nuqtalar ham maxsus nuqtalardir. $y = Cx$ umumiy yechim geometrik jihatdan koordinatalar boshidan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar (Oy o'qdan tashqari) to'plamini beradi. Oy o'qda yotmagan har bir nuqta orqali bu to'plamning yagona to'g'ri chizig'i o'tadi. Koordinatalar boshi orqali cheksiz ko'p integral egri chiziqlar o'tadi. Shuni takidlaymizki, Oy o'qda yotgan va koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushmaydigan maxsus nuqtalar orqali birorta ham integral chiziq o'tmaydi.

3-misol. $y' = -\frac{y}{x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechilishi. Tenglamada o'zgaruvchilarni ajratib, integrallaymiz:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow ydy = -x dx, \quad \int ydy = -\int x dx \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C^2}{2}$$

yoki $x^2 + y^2 = C^2$, bu yerda $C > 0$ ixtiyoriy haqiqiy son

Tenglamaning umumiy yechimi markazi $O(0;0)$ koordinata boshida joylashgan radiusi esa $R = C$ ga teng bo'lgan konsentrik aylanalardan iborat (4-chizma) bo'ladi. Xususan, $A(4;-3)$ nuqtadan o'tuvchi yechimni topish uchun $x^2 + y^2 = C^2$, umumiy yechimdan $4^2 + (-3)^2 = C^2$, $C^2 = 16 + 9 = 25$ $C = 5$ ni topamiz, Demak, izlangan xususiy yechim: $x^2 + y^2 = 25$ bo'ladi.

Takidlaymizki, $O(0;0)$ nuqta orqali birorta ham aylana (integral chiziq) o'tmaydi, bu maxsus nuqta hisoblanadi. Shu sababdan ham berilgan tenglamaning umumiy yechimi markazi teshilgan nuqta (markazi $O(0;0)$ nuqta teshib olib tashlangan) bo'lgan aylanalar oilasidan iborat deb tushunish lozim.

Mashqlar.

Differensial tenglamalarni yeching.

(Javoblar)

$$1. \sqrt{1-y^2} dx + \sqrt{1-x^2} dy = 0; \quad \left(y = C\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-C^2} x = 0 \right);$$

$$2. y' = \frac{1+y}{1-x^2}; \quad \left(y - C\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1 = 0 \right);$$

$$3. x(1+y^2)dx = ydy; \quad (y^2 + 1 = Ce^{x^2},)$$

$$\begin{aligned}
4. \frac{dy}{dx} &= \frac{x\sqrt{2+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}}; & (\sqrt{2+y^2} &= \sqrt{1+x^2} + C), \\
5. y' &= 10^{x+y}; & (10^x + 10^{-y} &= C), \\
6. y' &= (1+y^2)(1-x); & \left(\arctg y + \frac{x^2}{2} - x &= C, \right)
\end{aligned}$$

3.0 Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar.

Agarda M ko'phadning barcha hadlari x va y larga nisbatan bir xil darajaga ega bo'lsa, bunday ko'phadga bir jinsli ko'phad deyiladi, masalan: $M_1 = x^2y + xy^2 + y^3$, ko'phad 3-darajali, $M_2 = 2x^2 + 3xy + 5y^2$ ko'phad 2-darajali, $M_3 = 2\sqrt{x^2 - y^2} + 5x - 7y$ ko'phad esa 1-darajali bir jinsli ko'phadlarga misol bo'ladi.

$$Rdx + Qdy = 0, \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamada R va Q x va y ga nisbatan bir xil darajali ko'phaddan iborat bo'lsa, bu tenglamaga bir jinsli differensial tenglama deyiladi.

Bunday tenglamani qanday yechishni aniq misolda ko'rsatamiz.

Misol.

$$y^2 dx + (x^2 - xy) dy = 0, \quad (2)$$

tenglamani yechishni qaraymiz, bu yerda $R = y^2$ va $Q = x^2 - xy$ bo'lib, ular 2-tartibli bir jinsli funksiyalardir, shu sababdan (2) tenglama bir jinslidir. (2) dan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}, \quad (3)$$

$$y = zx \quad (4)$$

almashtirish bajarsak, bu yerda z, x ning yangi funksiyasi, (4) ni differensiallab

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}, \quad (5)$$

$$(4) \text{ va } (5) \text{ dan } y \text{ va } \frac{dy}{dx} \text{ larni qiymatlarini } (3) \text{ tenglamaga qo'ysak: } z + x \frac{dz}{dx} = \frac{z^2 x^2}{zx^2 - x^2},$$

yoki

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{z - 1} \text{ bundan } x \frac{dz}{dx} = \frac{z}{z - 1} \text{ o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga ega bo'lamiz.}$$

$$\text{O'zgaruvchilarni ajratsak } \frac{z-1}{z} dz = \frac{dx}{x}$$

yoki

$$\left(1 - \frac{1}{z}\right) dz = \frac{dx}{x}. \text{ Bu tenglikni integrallab } z - \ln|z| = \ln|x| + \ln|C|, \quad C \neq 0 \text{ o'zgarmas son.}$$

$$z = \ln e^z \text{ ni e'tiborga olib } \ln e^z = \ln|Czx| \text{ yoki } e^z = Czx, (4) \text{ dan } z = \frac{y}{x} \text{ ni ohirgi tenglikka qo'yib,}$$

(2) yoki (3) tenglamani umumiy yechimini topamiz:

$$e^{\frac{y}{x}} = Cy,$$

Mashqlar.

Qo'yidagi tenglamalarni umumiy yechimini toping.

(Javoblar)

$$1. (x+y)dx + xdy = 0; \quad \left(e^{\frac{y}{x}} = Cx \right),$$

$$\begin{array}{ll}
2. y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}; & \left(e^{\frac{y^2}{2x}} = Cx \right), \\
3. (x+y)dx + (y-x)dy = 0; & \left(e^{\arctg \frac{y}{x}} = C\sqrt{x^2 + y^2} \right), \\
4. xdy - ydx = ydy; & \left(e^{\frac{x}{y}} = Cy \right), \\
5. (x^2 - 2y^2)dx + 2xydy = 0; & \left(xe^{\frac{y^2}{x^2}} = C \right).
\end{array}$$

4⁰. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

Ushbu

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x), \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamalarga birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar deyiladi, tenglamani chiziqli deyilishiga sabab, noma'lum y funksiya va uning hosilasi $y' = \frac{dy}{dx}$ birinchi darajada tenglamada qatnashyapti, bu yerda $a(x)$ va $b(x)$ $x \in X$ da berilgan, aniqlangan va uzluksiz funksiyalardir. Xususiyl holda $a(x)$ va $b(x)$ lar o'zgarmas sonlar ham bo'lishi mumkin.

Agar (1) tenglamaning o'ng tomoni $b(x) \neq 0$ bo'lsa, bu tenglama chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglama deyiladi. Agar $b(x) = 0$ bo'lsa (1) tenglama chiziqli o'zgaruvchilari ajralgan tenglama bo'ladi. $b(x) \neq 0$ bo'lsin, ya'ni (1) tenglama bir jinsli bo'lmasin deylik. (1) tenglamani o'rniga qo'yish usuli (Eyler-Bernulli metodi) bilan yechishni qaraymiz. (1) tenglamada erkli o'zgaruvchi x ni o'zicha qoldirib,

$$y = u \cdot v, \quad (2)$$

(bu yerda u va v – o'zgaruvchilar x ning yangi uzluksiz funksiyalari) formula bo'yicha almashtirish bajaramiz. (2) dan x bo'yicha hosila olsak,

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}, \quad (3)$$

(2) va (3) ni (1) ga qo'ysak

$$v \frac{du}{dx} + u \left[\frac{dv}{dx} + a(x)v \right] = b(x), \quad (4)$$

Endi v funksiyani shunday tanlaylikki,

$$\frac{dv}{dx} + a(x)v = 0, \quad (5)$$

tenglik o'rinli bo'lsin. (5) tenglamada o'zgaruvchilarni ajratsak, $\frac{dv}{v} = -a(x)dx$, ($v \neq 0$)

Bu tenglikni integrallab quyidagini topamiz.
 $\ln|v| = -\int a(x)dx + \ln|C|$, ($C \neq 0$ – ixtiyoriy o'zgarmas son) yoki

$$v = Ce^{-\int a(x)dx}, \quad (6)$$

v funksiyaning bu qiymatini (4) ga qo'ysak, u funksiya uchun o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz:

$$Ce^{-\int a(x)dx} \cdot \frac{du}{dx} = b(x), \quad (7)$$

Bu tenglamaning ikkala qismini $e^{\int a(x)dx}$ ga ko'paytiramiz $Cdu = b(x)e^{\int a(x)dx} dx$, bu yerdan

$$u = \frac{1}{C} \left[\int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + C_1 \right], \quad C_1 = \text{const} \quad (8)$$

(7) va (8) ni (2) ga qo'ysak, (1) tenglamani umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$y = e^{-\int a(x)dx} \left[\int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + C_1 \right], \quad (9)$$

Ko'pincha, (5) tenglamani (6) umumiy yechimida $C=1$ deb olish, ya'ni (5) ning noldan farqli birorta xususiy yechimini $v = e^{-\int a(x)dx}$ deb olsa ham bo'ladi. Yuqorida ko'rib chiqilgan o'rni qo'yish usuli bitta (1) chiziqli tenglamani integrallash masalasini o'zgaruvchilari ajraladigan ikkita (5) va (7) tenglamalarning yechimlarini topishga olib keladi.

Agar (1) tenglamaning $y(x_0)=y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish kerak bo'lsa, (9) umumiy yechimdagi aniqmas integrallarni yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integrallar bilan almashtirish qo'laydir. Bunday almashtirishda (9) formula ushbu ko'rinishni oladi:

$$y = e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} \left[\int_{x_0}^x b(t)e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} dt + C_1 \right], \quad (10)$$

bu yerda x_0 –ixtiyoriy tayinlangan son, $x_0 \in X$. (10) tenglikdan $y(x_0)=y_0$ boshlang'ich shartga ko'ra C_1 o'zgarmasni qiymatini aniqlash mumkin:

$$y(x_0) = y_0 = e^{-\int_{x_0}^{x_0} a(t)dt} \left[\int_{x_0}^{x_0} b(t)e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} dt + C_1 \right], \quad \text{chegaralari bir xil bo'lgan aniq}$$

integrallarni qiymati nolga teng bo'lgan aniq integrallarni qiymati nolga teng bo'lgani uchun $C_1=y_0$ ni topamiz. Natijada (1) tenglamani $y(x_0)=y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini qo'yidagi shaklda hosil qilamiz.

$$y = e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} \left[y_0 + \int_{x_0}^x b(t)e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} dt \right],$$

Misol. $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3$ tenglamani yeching.

Yechish : Avvalo berilgan tenglamani (1) chiziqli tenglama shakliga keltirish uchun uni ikkala tomonini $x^2 \neq 0$ ga bo'lamiz:

$$\frac{dy}{dx} - 2 \cdot \frac{y}{x} = \frac{3}{x^2}$$

$y = u \cdot v$ ni va $\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ larni tenglamaga qo'ysak:

$$u \left(\frac{dv}{dx} - 2 \cdot \frac{v}{x} \right) + v \frac{du}{dx} = \frac{3}{x^2} \quad (*)$$

v ni shunday tanlaylikki

$\frac{dv}{dx} - 2 \frac{v}{x} = 0$ bo'lsin. Oxirgi tenglamada o'zgaruvchilarni ajratsak:

$\frac{dv}{v} = 2 \frac{dx}{x}$, ($v \neq 0, x \neq 0$) integrallab $\ln|v| = 2\ln|x|, v=x^2$; v ni bu qiymatini (*) ga qo'yib u ni aniqlaymiz.

$$x^2 \frac{du}{dx} = \frac{3}{x^2},$$

O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$du = \frac{3}{x^4} dx, \int du = 3 \int x^{-4} dx \quad u = -\frac{1}{x^3} + C;$$

u va v ning topilgan qiymatini $y=u \cdot v$ ga qo'ysak, berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = u \cdot v = \left(-\frac{1}{x^3} + C\right)x^2 = -\frac{1}{x} + Cx^2$$

2-usul. Ixtiyoriy o'zgarmasni varitsiyalash usuli (Lagranj usuli).

Bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamaning ($b(x) \neq 0$) yechimini topish uchun dastavval unga mos bir jinsli ($b(x)=0$):

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0, \quad (11)$$

tenglamani yechamiz, bu tenglama esa o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadan iboratdir. Uning umumiy yechimi (5), (6) ga qarang:

$$y = Ce^{-\int a(x)dx}, \quad (12)$$

Ravshanki, C – ixtiyoriy o'zgarmasni o'z ichiga olgan (12) tenglik bilan aniqlanuvchi funksiya (1) tenglamani

yechimi bo'la olmaydi, chunki (1) ni chap tomoniga (12) ni va uni hosilasini qoysak (11) ga asosan nolga aylanadi, ammo o'ng tomoni $b(x)$ nolga teng emas, agarda C o'zgarmasni x ning biror $C=C(x)$ funksiyasi deb qaraydigan bo'lsak,

$$y = C(x)e^{-\int a(x)dx}, \quad (13)$$

funksiya $C(x)$ ni tanlab olish hisobidan (1) tenglamani yechimi bo'lishi mumkin. (13) funksiyani (1) tenglamani yechimiga aylantiruvchi noma'lum $C(x)$ funksiyani topish uchun (13) funksiyani hosilasini hisoblaymiz:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} \cdot e^{-\int a(x)dx} - C(x)e^{-\int a(x)dx}, \quad (14)$$

(13) va (14) ni (1) tenglamaga qo'ysak:

$$\frac{dC(x)}{dx} \cdot e^{-\int a(x)dx} - C(x)a(x)e^{-\int a(x)dx} + a(x)C(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x) \quad \text{yoki}$$

$$\frac{dC(x)}{dx} \cdot e^{-\int a(x)dx} = b(x), \quad (15)$$

o'zgaruvchilari ajraladigan va $C(x)$ noma'lum funksiyali differensial tenglamaga ega bo'lamiz: (15) ni umumiy yechimi:

$$C(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + C_1, \quad C_1 = \text{const} \quad (16)$$

$C(x)$ ning topilgan ifodasini (13) tenglikka qo'yib, (1) tenglamaning izlanayotgan umumiy yechimini yana (9) ko'rinishda hosil qilamiz:

$$y = e^{-\int a(x)dx} \left[\int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + C_1 \right]$$

Bu usulning nomi ixtiyoriy o'zgarmas C ni x o'zgaruvchining $C(x)$ funksiyasi deb o'zgartirganimizdan (ya'ni, uni variatsiyalaganimizdan) kelib chiqqan.

1-misol: $y' - y \cot x = 2 \sin x$ chiziqli tenglamani ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli bilan umumiy yechimini toping.

Yechish: Dastlab, chiziqli bir jinsli $y'-y\cot x=0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz. O'zgaruvchilarni ajratsak:

$$\frac{dy}{y} - \cot x dx = 0, \quad y \neq 0, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Bu tenglamani integrallab:

$\ln|y| - \ln|\sin x| = \ln|C|$ va bundan $y=C \cdot \sin x$. Endi $C=C(x)$ deb, C ni variatsiyalaymiz.

$$y = C(x) \sin x \quad \text{va} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} \sin x + C(x) \cos x.$$

Natijada y va $\frac{dy}{dx}$ larning ifodalarini berilgan tenglamaga qo'ysak:

$$\frac{dC(x)}{dx} \sin x + C(x) \cos x - C(x) \sin x \cot x = 2 \sin x,$$

Yoki $dC(x)=2dx$, bundan esa $C(x)=2x+C_1$, $C_1=\text{const}$. Bir jinsli tenglamaning yechimidagi $C(x)$ ning o'rniga topilgan ifodasini qo'yib, berilgan tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz: $y=(2x+C_1)\sin x$.

2-misol: $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^2$, ($x \neq 0$) tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani yechishda to'g'ridan-to'g'ri (9) formuladan foydalanib yechamiz:

$$a(x) = -\frac{2}{x}, \quad b(x) = x^2$$

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(C_1 + \int x^2 e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx \right) = e^{2\ln|x|} \left(C_1 + \int x^2 e^{-2\ln|x|} dx \right) = \\ &= x^2 \left(C_1 + \int x^2 \cdot \frac{1}{x^2} dx \right) = x^2 (C_1 + \int dx) = x^2 (C_1 + x) = x^3 + C_1 x^2 \end{aligned}$$

Demak, $y = x^3 + C_1 x^2$.

3-misol. §1 ni 2^o-punktida hosil qilingan $y' - \frac{2}{x} y = -\frac{6}{x^2}$ tenglamaning yechini keltiramiz.

Bu tenglama birinchi tartibli chiziqli va uni yuqoridagi usul bilan integrallaymiz. Dastlab ozod hadsiz bir jinsli tenglamani qaraymiz:

$y' = \frac{2}{x} y$. O'zgaruvchilarni ajratib va integrallab

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = Cx^2.$$

Endi $C=C(x)$ deb, C ni variatsiyalaymiz va berilgan tenglamaning yechimini $y=C(x)x^2$ ko'rinishda izlaymiz, bu yerda $C(x)$ hozircha noma'lum funksiya. Natijada $y' = C'(x)x^2 + 2xC(x)$ va y ni berilgan tenglamaga qo'ysak:

$$C'(x)x^2 + 2xC(x) - \frac{2}{x} C(x)x^2 = -\frac{6}{x^2} \quad \text{bundan}$$

$C'(x) = -\frac{6}{x^4}$ bo'ladi. Integrallab $C(x) = \frac{2}{x^3} + C_1$, ($C = \text{const}$) ni hosil qilamiz. $C(x)$ o'rniga topilgan ifodasini qo'yib, umumiy yechimini hosil qilamiz:

$y = C(x)x^2 = \frac{2}{x} + C_1x^2$ yoki $xy = C_1x^3 + 2$ masala shartiga ko'ra, egri chiziq $M_0(1;2)$ nuqta orqali o'tishi kerak bo'ladi, buni e'tiborga olsak: $1 \cdot 2 = C_11^3 + 2$, bundan esa $C_1 = 0$ va izlanayotgan yechim (egri chiziq) $xy=2$ ko'rinishdagi giperboladan iborat bo'ladi.

Mashqlar.

Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping.

(Javoblar)

1. $y' - \frac{2y}{x} = x^3$. $\left(y = \frac{x^4}{2} + Cx^2 \right)$,
2. $y' - \frac{3}{x-1}y = (x-1)^5$ $\left(y = \frac{(x-1)^6}{3} + C(x-1)^3 \right)$,
3. $y' - \frac{3}{x}y = x$ $(y = -x^2 + Cx^3)$,
4. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^{-x^2}}{x}$ $\left(y = -\frac{1}{2x^2}e^{-x^2} + \frac{C}{x^2} \right)$

Qo'yidagi differensial tenglamalarning ko'rsatilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

(Javoblar)

5. $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$; $\left(y = \frac{1+x}{\cos x} \right)$,
6. $y' = \frac{y+1}{x}$, $y(1) = 2$; $(y = 3x - 1)$,

§4. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar.

1^o. Eng sodda ikkinchi tartibli differensial tenglamalar.

$$y'' = f(x), \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamalarga eng sodda, ikkinchi tartibli differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda $f(x)$ funksiya $x \in X$ oraliqda berilgan, uzluksiz funksiya. Bunday tenglamalarni

$$y' = \frac{dy}{dx} = p, \quad (2)$$

ya'ni, x ning yangi noma'lum funksiyasini kiritish usuli bilan yechiladi. (2) tenglikdan hosila olsak,

$$y'' = \frac{dp}{dx} = f(x),$$

Bundan

$$\frac{dp}{dx} = f(x), \quad (3)$$

p noma'lum funksiyaga nisbatan sodda birinchi tartibli tenglamaga ega bo'lamiz. (3) ni integrallasak:

$p = \int f(x)dx = F(x) + C_1$, bo'ladi, bu yerda $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning biror boshlang'ich funksiyasi, C_1 – ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy son.

(2) tenglikka ko'ra

$$\frac{dy}{dx} = F(x) + C_1, \quad (4)$$

yana eng sodda birinchi tartibli tenglamani hosil qilamiz, uni integrallasak:

$$y = \int [F(x) + C_1] dx + C_2 = \int F(x) dx + C_1 \int dx + C_2 = \Phi(x) + C_1 \cdot x + C_2, \quad (5)$$

bu yerda $\Phi(x)$ funksiya $F(x)$ ning boshlangich funksiyalaridan biri, C_2 esa ikkinchi ixtiyoriy o'zgarmas son.

Shunday qilib, (1) differensial tenglamaning umumiy yechimi (5) tenglik bilan aniqlanadi. (1) tenglamaning biror xususiy yechimini topish uchun C_1 va C_2 o'zgarmaslarni qiymatlari aniq bo'lishi lozim, buning uchun boshlangich shartlar qo'yidagicha beriladi: $x=x_0$ da $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, bu yerda $x_0 \in X$, tayin son, y_0, y_0' lar ham berilgan aniq sonlar.

Misol: $y''=1+2x$ tenglamani $y(0)=1$ va $y'(0)=-1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish: (2) ga asosan $p = \int (1+2x) dx + C_1 = x + x^2 + C_1$, yoki $\frac{dy}{dx} = x + x^2 + C_1$.

Bu tenglamani yana bir marta integrallab:

$$y = \int (x + x^2 + C_1) dx + C_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2, \text{ umumiy yechimini topamiz.}$$

Endi xususiy yechimni topish uchun

$$y(0) = 1 = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 \right) \Big|_{x=0} = C_2$$

$$y'(0) = -1 = (x + x^2 + C_1) \Big|_{x=0} = C_1 \text{ tengliklardan } C_2=1 \text{ va } C_1=-1 \text{ larni topib, umumiy}$$

$$\text{yechimdan: } y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x + 1 \text{ izlangan xususiy yechimni hosil qilamiz.}$$

Tekshirish: topilgan xususiy yechimdan $y' = x + x^2 - 1$, $y'' = 1 + 2x$, ya'ni bu yechim berilgan tenglamani va shuningdek $y(0)=1$, $y'(0)=-1$ berilgan boshlang'ich shartlarni ham qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Izoh. Ba'zi bir 2-tartibli tenglamalarni yechishda (2)

$$y' = \frac{dy}{dx} = p \text{ almashtirishdagi } p \text{ yangi no'malum funksiyasi } x \text{ ning funksiyasi emas,}$$

balkim y ning funksiyasi deb olishga to'g'ri keladi: $y' = \frac{dy}{dx} = p = p(y)$. U holda ikkinchi tartibli hosila uchun

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy} \text{ bo'ladi, chunki } \frac{dy}{dx} = p.$$

Endi konkret misolga murojat etamiz.

Misol. $y'' = 2yy$ tenglamani yeching.

Yechilishi: $y' = p$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$, ni e'tiborga olsak: $p \frac{dp}{dy} = 2yp$. Agar $p=0$ bo'lsa, (2) dan

$y' = 0$, $y = C = \text{const}$ yechimini topamiz. $p \neq 0$ bo'lsa

$$\frac{dp}{dy} = 2y \Rightarrow dp = 2y dy, \int dp = 2 \int y dy + C, \quad p = y^2 + C_1^2, \quad (C = C_1^2) \text{ Natijada } y' = p \text{ ga}$$

asosan ushbu birinchi tartibli tenglamaga kalamiz:

$$y' = y^2 + C_1^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 + C_1^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + C_1^2} = dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C_1} \arctg \frac{y}{C_1} = x + C \Rightarrow \arctg \frac{y}{C_1} = C_1 x + C_2, \quad (C_2 = C_1 \cdot C) \text{ umumiy yechimni hosil qilamiz,}$$

bu yerda C_1, C_2 – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Javob. $y=C$ va $\arctg \frac{y}{C_1} = C_1 x + C_2$

Mashqlar.

1. Jism to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. Agar uning tezlanishi 20 m/sek^2 bo'lsa, uni bosib o'tgan S yo'lini t vaqtning funksiyasi sifatida aniqlang, hususan $t=2$ sekundda $S=150\text{m}$ va $S'=v=80\text{m/sek}$ bo'lgan holdachi?

Javob:

$$S(t)=10t^2 + v_0 t + S_0$$

$$S(t)=10t^2 + 40t + 30$$

1. Qo'yidagi tenglamalarni yeching.

(Javoblar)

$$2. \quad y''=\sin 2x, \quad \left(y = -\frac{1}{2} \sin 2x + C_1 x + C_2 \right),$$

$$3. \quad x^2 y''=2, \quad \left(y = -2 \ln|x| + C_1 x + C_2 \right),$$

$$4. \quad y''=e^{-3x}, \quad \left(y = \frac{1}{9} e^{-3x} + C_1 x + C_2 \right),$$

$$5. \quad y''=5^{-x}, \quad \left(y = \frac{5^{-x}}{\ln^2 5} + C_1 x + C_2 \right),$$

$$6. \quad y^2 y''=1, \quad (C_1 y^2 - 1 = (C_1 x - C_2)^2), \quad C_1, C_2 - \text{const.}$$

7. Moddiy nuqta $a(t) = 12\text{m/min}^2$ tezlanish bilan to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. $t = 5$ minutda $S=320\text{m}$ masofani o'tgan va 90m/min tezlikka erishgan bo'lsa, uning harakat tenglamasini aniqlang.

Javob: $S(t)=6t^2 + 30t + 20$

2.0'zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar.

O'zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglama deb

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda p va q lar o'zgarmas haqiqiy sonlar.

(1) tenglamaning yechimlarini sodda xossalari xarakterlovchi ushbu teoremlar bilan tanishamiz.

1-teorema. Agar $y_1=y_1(x)$, $x \in X$, (1) tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda $y=Cy_1$ (C -biror o'zgarmas son) funksiya ham (1) ni yechimi bo'ladi.

Isboti: $y=Cy_1$ ni birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblaymiz:

$y'=(Cy_1)' = Cy_1'$; $y''=(Cy_1)'' = Cy_1''$ y, y' va y'' qiymatlarni (1) tenglamaga qo'ysak,

$$Cy_1'' + pCy_1' + qCy_1 = C(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0, \quad (2)$$

Teorema shartiga ko'ra $y=y_1$ (1) tenglamani yechimi: $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$ bo'lganligi uchun (2) tenglik $0=0$ ayniyatga aylanadi, bundan esa $y=Cy_1$ funksiya (1) ni yechimi ekanligi kelib chiqadi.

2-teorema. Agar $y=y_1(x)$ va $y=y_2(x)$ $x \in X$ funksiyalar (1) tenglamaning yechimlari bo'lsa, u holda $y=y_1 + y_2$ yigindi ham (1) ni yechimi bo'ladi.

2-teoremaning isbotini 1-teoremaniki kabi ko'rsatish mumkin. $y=y_1(x)$ va $y=y_2(x)$ yechimlarga (1) tenglamaning xususiy yechimlari deyiladi. (1) tenglamaning xususiy yechimlari o'zaro chiziqli erkli va o'zaro chiziqli bog'liq yechimlarga ajraladi.

Ta'rif. (1) tenglamaning ikkita xususiy yechimini biri ikkinchisini biror o'zgarmas songa ko'paytirishdan hosil bo'lsa, bunday yechimlar o'zaro chiziqli bog'liq deyiladi, aks holda bu yechimlar o'zaro chiziqli erkli deyiladi. Masalan,

$$y'' - 5y_1' + 6y = 0, \quad (2)$$

tenglama $y_1=e^{2x}$ va $y_2=e^{3x}$ ko'rinishdagi xususiy yechimlarga ega.

Agar $y_1=e^{2x}$ ni 5 ga ko'paytirsak, $y_3=5e^{2x}$ yana xususiy yechimga ega bo'lamiz. (1-teoremaga asosan), Ta'rifga asosan esa $y_1=e^{2x}$ va $y_3=5e^{2x}$ yechimlar o'zaro chiziqli bog'liq xususiy yechimlar bo'ladi, $y_1=e^{2x}$ va $y_2=e^{3x}$ yechimlar esa chiziqli erkli yechimlardir, chunki istalgan C o'zgarmas uchun $e^{2x} \neq Ce^{3x}$ o'rinalidir.

3-teorema. Agar $y=y_1(x)$ va $y=y_2(x)$, $x \in X$ (1) tenglamaning chiziqli erkli xususiy yechimlari bo'lsa, u holda

$$y=C_1y_1+C_2y_2, \quad (3)$$

funksiya (1) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi, bu yerda S_1 va S_2 – ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlardir. 3-teoremaning isboti 1-teorema va 2-teorema isbotidan kelib chiqadi. Haqiqatan, teorema shartiga ko'ra y_1, y_2 (1) ni xususiy yechimlari bo'lsa, C_1y_1 va C_2y_2 xam (1) ni yechimlari (1-teoremaga asosan) bo'ladi, shuningdek bu yechimlarning yigindisi $C_1y_1+C_2y_2$ ham (1) ni yechimi bo'ladi (2-teoremaga asosan).

Ma'lumki, (1) tenglamaning umumiy yechimi ikkita ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarni o'z ichiga oladi. Agar (3) formuladagi y_1 va y_2 xususiy yechimlar chiziqli erkli bo'lgandagina shunday bo'lishi mumkin, agar y_1 va y_2 chiziqli bogliq bo'lsa, (3) yechimda bitta ixtiyoriy o'zgarmas bo'ladi va (3) yechim (1) ni umumiy yechimi emas, hususiy yechimi bo'lib qoladi. Bu holatni (2) differensial tenglama misolida tushuntiramiz. (2) uchun ushbu yechimni olaylik

$$y=C_1e^{2x}+C_2 \cdot Ce^{2x}, \quad (4)$$

ya'ni bu yechimda ikkita chiziqli bog'liq e^{2x} va Ce^{2x} ($C=\text{const}$) yechimlar qatnashyapti. (4) dan

$$y=(C_1+C_2C)e^{2x}=C_3e^{2x}, \quad (C_3=C_1+C_2C), \quad (5)$$

Ravshanki (5) yechim (2) ni umumiy yechimi emas, hususiy yechimidir, unda bitta C_3 o'zgarmas miqdor qatnashadi. (5) yechimda e^{3x} ko'rinishdagi yechimlar qatnashyapti. (2) tenglamani umumiy yechimi esa $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ shaklda bo'ladi.

(1) tenglamani umumiy yechimini topish uchun uning chiziqli erkli yechimlarini topa bilish muhim rol o'ynaydi.

Differensial tenglamalarning to'la umumiy nazariyasida isbotlanadiki, (1) tenglamani chiziqli erkli hususiy yechimlari

$$y=e^{kx}, \quad (6)$$

ko'rinishida bo'ladi, bu yerda k- o'zgarmas son bo'lib, (1) tenglamaga bogliq holda aniqlanadi.

Agar (6) funksiya (1) ni xususiy yechimi bo'lsa, k ni qandaydir qiymatlarida uni qanoatlantirishi kerak bo'ladi. k ning shunday qiymatlarini topish uchun (6) ni differensiallaymiz:

$$y'=ke^{kx}, \quad y''=k^2e^{kx}, \quad (7)$$

(6) va (7) ni (1) ga qo'ysak: $k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0$ yoki

$e^{kx}(k^2+pk+q)=0$, $e^{kx} \neq 0$ ligi sababli, ravshanki

$$k^2+pk+q=0, \quad (8)$$

Demak, k (8) tenglamani qanoatlantirsa, e^{kx} funksiyalar (1) tenglamaning yechimi bo'ladi. (8) tenglamaga (1) tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

(8) xarakteristik tenglamani yechganda quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

a) xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil ($k_1 \neq k_2$). (8) dan

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad (9)$$

Bu holda (1) tenglama ikkita chiziqli erkli xususiy yechimlarga ega: $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ e $k_1 \neq k_2$,
ravshanki $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}$, chunki $(k_1 \neq k_2)$.

(1) tenglamaning umumiy yechimi esa: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ ko'rinishda bo'ladi, bu yerda C_1, C_2 -ixtiyoriy haqiqiy o'zgarmaslar.

Misol. Yuqorida xususiy yechimlaridan foydalanilgan (2) tenglamani qaraylik:
 $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Endi $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$ xususiy yechimlarni qanday topishni ko'rsatamiz. Bu tenglamaning harakteristik tenglamasini tuzamiz: $k^2 - 5k + 6 = 0$.

Xarakteristik tenglama ildizlari $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ ekani ravshan. Ularga mos chiziqli erkli xususiy yechimlar: $y_1 = e^{2x}$ va $y_2 = e^{3x}$ bo'ladi, umumiy yechim esa $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ (C_1, C_2 -ixtiyoriy o'zgarmas sonlar).

b) Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va o'zaro teng ($k_1 = k_2$).

Bu holda (9) dan $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ bo'lib, $2k_1 = -p$ yoki $2k_1 + p = 0$ bo'ladi. (1) tenglamani bitta

xususiy yechimi ma'lum bo'ladi: $y_1 = e^{k_1 x}$. Bu yechim bilan chiziqli erkli bo'ladigan (1)

tenglamaning ikkinchi xususiy yechimini topish kerak, uni $y_2 = u(x)e^{k_1 x}$ ko'rinishida izlaymiz, bu yerda $u(x) = u$ aniqlanishi lozim bo'lgan hozircha noma'lum funksiya. $u(x)$ ni aniqlash uchun y_2' va y_2'' larni hisoblaymiz: $y_2' = u' e^{k_1 x} + u k_1 e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u' + u k_1)$

$y_2'' = k_1 e^{k_1 x} (u' + u k_1) + e^{k_1 x} (u'' + u' k_1) = e^{k_1 x} (u'' + 2u' k_1 + u k_1^2)$ y_2, y_2' va y_2'' larni (1)

tenglamaga quysak: $e^{k_1 x} (u'' + 2u' k_1 + u k_1^2) + p e^{k_1 x} (u' + u k_1) + q e^{k_1 x} = 0$ yoki

$e^{k_1 x} [u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + k_1 p + q)u] = 0$.

k (8) xarakteristik tenglamaning ildizi va $2k_1 + p = 0$ bo'lganligi sababli $e^{k_1 x} u'' = 0$ yoki $u'' = 0$

u ga nisbatan ikkinchi tartibli eng sodda tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamani integrallab $u(x) = Ax + B$, (A, B - o'zgarmaslar) ni topamiz. Xususan, $A = 1$, $B = 0$ desak, $y(x) = x$ bo'ladi.

Shunday qilib, (1) ni ikkinchi xususiy yechimi $y_2 = x e^{k_1 x}$ bo'ladi. Umumiy yechimi esa

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}$ ko'rinishda yoziladi.

Misol. $y'' + 4y' + 4y = 0$. tenglamaning harakteristik tenglamasi $k^2 + 4k + 4 = 0$ bo'lib, uning ildizlari $k_1 = k_2 = -2$ dir, (1) ning chiziqli erkli xususiy yechimlari $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = x e^{-2x}$ bo'lib, umumiy yechimi esa: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$

b) Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks sonlar bo'lgan hol.

Bu holda (8) xarakteristik tenglamaning ildizlari qo'shma kompleks sonlardan iborat

bo'ladi: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, bu yerda $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, i - mavhum birlik, $i = \sqrt{-1}$;

(1) ni hususiy yechimlari

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x};$$

$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x};$$

Agar oliy matematikada isboti keltiriladigan Eyler formulasini $e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$ e'tiborga olsak,

$$y_1 = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \text{ tengliklarga ega bo'lamiz.}$$

Biz qo'yidagi natijadan foydalanamiz: agar haqiqiy koeffitsiyentli bir jinsli chiziqli tenglamaning xususiy yechimi kompleks funksiyadan iborat bo'lsa, u holda uning haqiqiy va mavhum qismlari ham shu tenglamani yechimi bo'ladi.

Binobarin, xususiy yechim

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x, \text{ (ëku } y_2)$$

bo'lgani uchun, uning haqiqiy qismi $y_{11} = e^{\alpha x} \cos \beta x$ va mavhum qismi

$$y_{12} = e^{\alpha x} \sin \beta x \text{ ham (1) tenglamaning yechimi bo'ladi. Ravshanki,}$$

$$y_{11} = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_{12} = e^{\alpha x} \sin \beta x \text{ (1) ni xususiy yechimlari}$$

chiziqli erklidirlar:

$$\frac{y_{11}}{y_{12}} = \operatorname{tg} \beta \neq \operatorname{const.}$$

Shunday qilib, (1) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Ko'rinishida bo'ladi.

Misol. $y'' - 6y' + 13y = 0$. tenglamani $x=0$ da $y=1$ va $y'=-1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish: Xarakteristik tenglama $k^2 - 6k + 13 = 0$ ildizlari $k_1 = 3 + 2i$, $k_2 = 3 - 2i$ bo'lib, $\alpha = 3$, $\beta = 2$. Tenglamalarning umumiy yechimi esa qo'yidagicha bo'ladi:
 $y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Endi $x=0$ da $y=1$, ya'ni $y|_{x=0} = 1$ va $x=0$ da $y'=-1$, ya'ni $y'|_{x=0} = -1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topaylik. Buni uchun umumiy yechimdan y' hosilani hisoblaymiz:

$$y' = 3e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{3x} (-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x) = e^{3x} [(3C_1 + 2C_2) \cos 2x + (3C_2 - 2C_1) \sin 2x].$$

Boshlang'ich shartlarga ko'ra:

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ -1 = 3C_1 + 2C_2 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemadan noma'lum C_1 va C_2 larni topib: $C_1 = 1$ $C_2 = -2$ natijada umumiy yechimdan ushbu izlangan xususiy yechimni aniqlaymiz:

$$y = e^{3x} (\cos 2x - 2 \sin 2x).$$

Hosil qilingan bu yechim berilgan differensial tenglamani va boshlang'ich shartlarni qanoatlantirishini ko'rsatish qiyin emas.

Mashqlar.

1. Ushbu $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$ (C_1, C_2 - ixtiyoriy o'zgarmaslar) $y'' - y' - 6y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi ekanligi ko'rsatilsin.

2. Ushbu $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ (C_1, C_2 -const) funksiya $y'' - 2y' + 2y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi ekanligi ko'rsatilsin.

3. $y'' + 3y' + 2y = 0$ tenglamani $x=0$ da $y=-1$ va $y'=3$ shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

4. $y'' + 4y' + 8y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

5. $y'' + 6y' + 9y = 0$ tenglamani $x=0$ da $y=2$ va $y'=1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Javoblar.

3. $(y = e^{-x} - 2e^{-2x})$,
4. $(y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x})$,
5. $(y = (2 + 7x)e^{-3x})$,

3.0 Garmonik tebranishlarning differensial tenglamasi.

$y(t)=\sin t$ va $y(t)=\cos t$ funksiyalar argumentning barcha qiymatlarida

$$y''(t) = -y(t) \quad , \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantirishi ravshan.

Fizikada, xususan mexanikada

$$y''(t) = -\omega^2 y(t), \quad (2)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi funksiyalar muhim rol' o'ynaydi, bu yerda ω -musbat o'zgarmas. (2) tenglama oldingi paragrafda o'rganilgan.

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (3)$$

tenglamaning xususiy holidir, ya'ni $p=0$, $q=\omega^2$.

Mexanikada (3) tenglamani erkin tebranishlarning, (2) ga esa garmonik tebranishlarning differensial tenglamasi deyiladi. (2) tenglamaning xarakteristik tenglamasini $k^2 + \omega^2 = 0$, ildizlari $k_1 = \omega i$, $k_2 = -\omega i$ bo'lib, umumiy yechimi esa

$$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (C_1, C_2 - \text{const}), \quad (4)$$

Bu yechimning fizikaviy ma'nosini aniqlash uchun yangi ixtiyoriy o'zgarmaslar kiritib, uni qo'lay ko'rinishga keltirish mumkin.

(4) ni o'ng tomonini $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ga ko'paytirib va bo'lib ushbuni hosil qilamiz:

$$y(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \omega t \right)$$

Agar $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\sin \varphi_0 = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$, $\cos \varphi_0 = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$, deb belgilash kiritsak,

yechim

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (5)$$

ko'rinishga keladi, endi $A \geq 0$, $\varphi_0 \in [0; 2\pi]$ ixtiyoriy o'zgarmaslar bo'ladi.

(5) umumiy yechim (integral egri chiziqlar) grafikasi sinusoidadan iboratdir. Sinusning argumenti 2π ga o'zgaradigan T vaqt oraligi tebranish davri deyiladi. $T = \frac{2\pi}{\omega}$; 2π vaqt ichidagi tebranishlar soni tebranishlar chastotasi deyiladi, hozirgi holda chastotasi ω ga teng; muvozanat holatdan eng katta ogish miqdori A -tebranish amplitudasi deyiladi; $\omega t + \varphi_0$ argument tebranish fazasi deyiladi; fazaning $t=0$ dagi qiymati, ya'ni φ_0 kattalik tebranishning boshlang'ich fazasi deyiladi.

Mashqlar.

1. $y = 3\sin(2t + \varphi_0)$ funksiya $y'' = -4y$ tenglamaning yechimi ekanligini tekshiring.
2. Garmonik tebranishlarning differensial tenglamasini yozing.

$$\text{a) } y = 3\sin(2t - 1); \quad \text{b) } y = 3,2\sin(0,5t + \frac{\pi}{6});$$

3. Ushbu yechimlarda, tebranish amplitudasini, boshlang'ich fazasini va tebranish chastotasini ko'rsating.

$$\text{a) } y = 0,9\sin(\frac{1}{7}t + \pi); \quad \text{b) } y = \frac{3}{2}\cos 2t + \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin 2t;$$

§5. Test topshiriqlari.

1. $y' = 4x^3$ tenglamani $y(0)=1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini ko'rsating.

- A) $y = x^4 - 1$; B) $y = x^4$; C) $y = x^2 + 1$; D) $y = x^2 - 1$; E) $y = x^4 + 1$.

2. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ tenglamani umumiy yechimini ko'rsating.

- A) $y = \sqrt{x-1} + C, (x > 1)$; B) $y = \sqrt{x+1} + C$; C) $y = \sqrt{x} + C$;
D) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} + C$; E) $y = \sin x + C$

3. $y' = 1 + y^2$ tenglamani $y(0) = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini ko'rsating.

- A) $y = \sin x$, B) $y = \tan x, (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$; C) $y = \cot x$; D) $y = \cos x$ E) $y = \tan 2x$

4. $x(1-y^2) dx - y(1+x^2) dy = 0$ tenglamaning umumiy yechimini ko'rsating.

- A) $x^2 + y^2 = C$; B) $x^2 - y^2 = C$; C) $(1+x^2)(1-y^2) = C$; D) $y = x^2 + C$;
E) $y = (1+x^2) + C$

5. $y' = \frac{x+y}{x}$ tenglamani umumiy yechimini toping.

- A) $y = \ln|x| + C$; B) $y = x + C$; C) $y = e^x + C$;
D) $y = (\ln|x| + C)x, (x \neq 0)$; E) $y = x \ln|x| + C$.

6. $y' = \cos^2 x$ ni umumiy yechimini toping.

- A) $y = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin 2x) + C$; B) $y = \sin 2x + \cos 2x + C$;

- C) $y = \sin 2x + C$; D) $y = \tan x + C$; E) $y = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

7. $y' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ ($-2 < x < 2$) tenglamani umumiy yechimini toping

- A) $y = \sin 2x + C$, B) $y = \arcsin \frac{x}{2} + C$, C) $y = \arccos x + C$,

- D) $y = \tan 2x + C$, E) $y = \arcsin 2x + C$.

8. Ushbu $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ ($-\infty < x < \infty$) funksiyalar qaysi tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'ladi.

- A) $y'' - y = 0$; B) $y'' + y' = 0$; C) $y'' + y = 0$; D) $y'' + 1 = 0$; Y) $y'' + y' + y = 0$.

9. Ushbu $y'' - 2y' + y = 0$ tenglamaning chiziqli erkli yechimlarini ko'rsating.

- A) $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$; B) $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, (-\infty < x < \infty)$;
C) $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$; D) $y_1 = e^{-x}, y_2 = xe^{-x}$
E) $y_1 = ye^{2x}, y_2 = xe^{2x}$.

10. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ funksiya qaysi differensial tenglamani yechimi bo'ladi.

- A) $y'' - y = 0$; B) $y'' + 2y = 0$; C) $y'' + y = 0$; D) $y'' + y' = 0$; E) $y'' - y' = 0$.

11. $y'' + 2y' = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

- A) $y = C_1 e^{-2x}$; B) $y = x + C_1$; C) $y = C_1 + C_2 e^{2x}$;
D) $y = C_1 + C_2 e^{2x}$; E) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

12. $y_1 = e^{2x}$ va $y_2 = e^{4x}$ qaysi tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'ladi.

- A) $y'' + y' = 0$; B) $y'' - y = 0$; C) $y'' - 6y' + 8y = 0$;
D) $y'' + 6y' - 8y = 0$; E) $y'' - 6y' - 8y = 0$.

13. $y'' - y' + y = 0$ tenglamani umumiy yechimini toping.

A) $y = e^{\frac{x}{2}}(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)$; B) $y = C_1 e^x$;

C) $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$; D) $y = e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x$; E) $y = e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

14. $y_1 = e^x \cos 2x$, $y_2 = e^x \sin 2x$ ko'rinishdagi chiziqli erkli yechimlarga ega bo'lgan tenglamani ko'rsating.

A) $y'' - 2y' + 5y = 0$; B) $y'' + 2y' + 5y = 0$; C) $y'' - 2y' - 5y = 0$; D) $y'' + 2y' - 5y = 0$; E) $y'' + y' = 0$.

15. $y'' = xe^x$ tenglamani $y(0) = y'(0) = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

A) $y = (x-2)e^x$; B) $y = (x-2)e^x + x + 2$; C) $y = x + 2$;

D) $y = 2e^x$; E) $y = (x-2)e^x + x - 2$.

16. $y'' - 4y' + 3y = 0$ tenglamani $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini aniqlang.

A) $y = 4e^x + 2e^{-3x}$; B) $y = 4e^{-x} + 2e^{3x}$;

C) $y = 4e^x + 2e^{3x}$; D) $y = e^{-x} + e^{-3x}$; E) $y = 4e^{3x} + 2e^{2x}$.

17. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ differensial tenglamani umumiy yechimi topilsin.

A) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; B) $y = \ln|\cos x|$; C) $y = x \sin x + C$;

D) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x$;

E) $y = \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x + C_1 x + C_2$.

18. $y'' = 6x + 2$ tenglamani $y(0) = y'(0) = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini ko'rsating.

A) $y = x^3 + x^2$; B) $y = x^3 - x^2$;

C) $y = x^3 + 2x^2$; D) $y = x^3 + x^2 + x + 1$; E) $y = x^3$.

19. $y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ tenglamani $y(0) = 1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi hususiy yechimi topilsin.

A) $y = \sqrt{1-x^2}$; B) $y = 2 - \sqrt{1-x^2}$; C) $y = x^2$; D) $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$;

E) $y = 2 + \sqrt{1-x^2}$.

20. $y' + 1 = y$ tenglamani umumiy yechimini toping.

A) $y = Ce^x$; B) $y = Ce^{-x}$; C) $y = 1 + Ce^x$;

D) $y = 1 - Ce^x$; E) $y = 1 - Ce^{-x}$.

21. $y = 5\sin(3t + \varphi_0)$ funksiya qaysi differensial tenglamaning yechimi?

A) $y'' = -9y$ B) $y'' = 5y$ C) $y'' = -5y$ D) $y'' = 3y$ E) $y'' = y$

22. Ushbu $y = 3\sin(2t + 5)$ tebranishning differensial tenglamasini ko'rsating.

A) $y'' + 3y = 0$ B) $y'' = -4y$ C) $y'' - 2y = 0$ D) $y'' = 4y$ E) $y'' = 5y$

23. Ushbu yechimda tebranish amplitudasini toping.

$$y = 3,2 \sin\left(\frac{2}{3}t + \varphi_0\right)$$

- A) $\frac{2}{3}$ B) 3 C) 3,2 D) -3,2 E) 2,5

24. Ushbu yechimda tebranish boshlang'ich fazasini toping.

$$y = 2,5 \sin\left(3t - \frac{1}{2}\right)$$

- A) 0,5 B) 2 C) -0,5 D) 2,5 Y) -2,5

25. Ushbu yechimda tebranish chastotasini toping.

$$y = \cos \frac{2}{5}t + \sin \frac{2}{5}t$$

- A) 45^0 B) $-\frac{2}{5}$ C) 0 D) 1 E) $\frac{2}{5}$

26. Ushbu $y = \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3x$ tebranish fazasini ko'rsating.

- A) $3x - \frac{\pi}{3}$; B) $3x$ C) $\frac{\pi}{3}$; D) $3x + \frac{\pi}{3}$; E) $3x + \frac{\pi}{6}$.

27. Ushbu $y_1 = e^{-2x}$ va $y_2 = xe^{-2x}$ ($-\infty < x < \infty$) funksiyalar qaysi tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'ladi.

- A) $y'' + 4y' - 4y = 0$, B) $y'' - 4y' + 4y = 0$, C) $y'' = -4y$,
D) $y'' = 4y$, E) $y'' = y$.

28. Moddiy nuqta $a(t) = 8 \text{ m/min}^2$ tezlanish bilan to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. Agar $t = 2$ minutda 50 m masofa o'tgan va 30 m/min tezlikka erishgan bo'lsa, nuqtani harakat tenglamasini aniqlang.

- A) $S(t) = 4t^2$; B) $S(t) = 4t^2 + 14t$; C) $S(t) = 4t^2 + 14t + 6$; D) $S(t) = 4t^2 + 6$; E) $S(t) = 4t^2 + 4t + 6$.

29. Quyidagi differensial tenglamalarning qaysi birlari birinchi tartibli bir jinslidir:

1) $y' = \frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}$, 2) $y' = \frac{x^2 y}{x^4 - y^4}$,

3) $(x^2 + y^2 - xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$, 4) $y' = \sin \frac{y}{x} + x$.

- A) 1;4; B) 2;4; C) 2;3; D) 1;3; E) 1;2;3;

30. Ushbu differensial tenglamalardan qaysi birlari birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalardir:

1) $y' + y \cos x = x$; 2) $y' + x\sqrt{y} = e^x$;
3) $x^2 y' + y = 1$; 4) $(y')^2 + \sin x \cdot y = \cos x$;
5) $y' + 2xy^2 = \sin x$

- A) 1 ;3; B) 2 ;5; C) 1 ;5; D) 2 ;3 ;4; E) 1 ;4.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. M.S.Salahiddinov, G.N.Nasriddinov. Oddiy differensial tenglamalar. Toshkent 'O'zbekiston' 1994-yil.
2. Qori-Niyoziy T.N. Tanlangan asarlar 4-tom, differensial tenglamalar, Toshkent 1968-yil.
3. A.U.Abduhamidov, N.A.Nosirov, U.M.Nosirov, J.H.Husanov. Algebra va matematika analiz asoslari II-qism. Akademik 1 ;itsiyalar uchun darslik, Toshkent 'O'qituvchi 2003-yil'.
4. Sh.I.Tojiyev. Oliy matematikadan masalalar yechish. Toshkent 'O'zbekiston' 2002-yil.
5. X.R.Latipov, F.U.Nosirov, Sh.I.Tojiyev. Differensial tenglamalarning sifat nazariyasi va uning tatbiqlari. Toshkent O'zbekiston' 2002-yil.
6. Y.U.Soatov Oliy matematika III-qism Toshkent 'O'zbekiston' 1996-yil.
7. R.S.Guter, A.R.Yanpolskiy. Differensial tenglamalar. Toshkent 'O'qituvchi' 1978-yil.
8. V.E.Shneyder, A.I.Slutskiy, A.S.Shimov, Oliy matematika kursi Toshkent 'O'qituvchi' 1987-yil.
9. A.M.Самойленко и др Дифференциальные уравнения : примеры и задачи. М.1989 г.
10. Степанов В.В. Курс дифференциальные уравнений, М. 1958г.

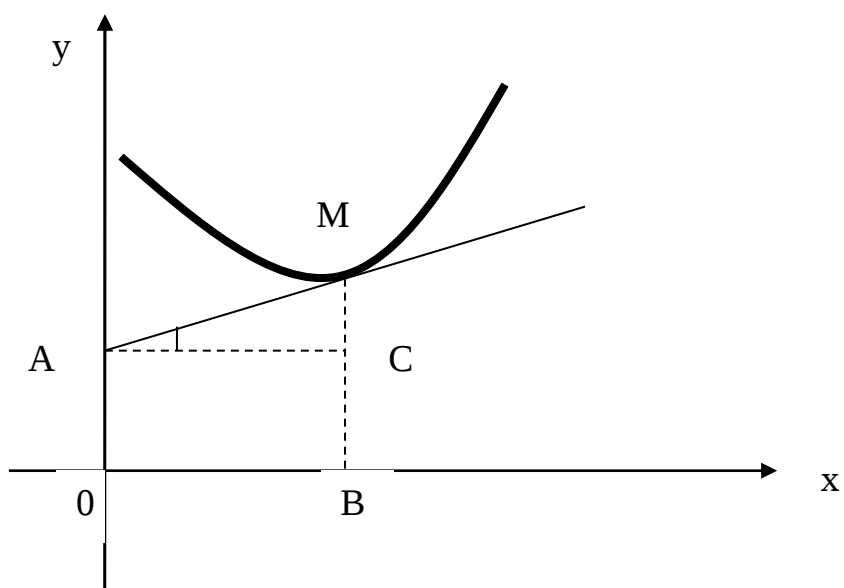
Mundarija .

So'z boshi.....	
§1. Differensial tenglamalar	
1 ⁰ . Differensial tenglamalar haqida dastlabki tushunchalar.....	4
2 ⁰ . Differensial tenglamalar tushunchasiga olib keluvchi ba'zi masalalar.....	6
§2. Eng sodda birinchi tartibli differensial tenglamalar.....	9
§3. Birinchi tartibli differensial tenglamalar	
1 ⁰ . O'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamalar.....	12
2 ⁰ . O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.....	13
3 ⁰ . Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar.....	14
4 ⁰ . Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.....	16
§4. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar	
1 ⁰ . Eng sodda ikkinchi tartibli differensial tenglamalar	22
2 ⁰ . O'zgarmas koeffitsiyentli ikkita tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar	25
3 ⁰ . Garmonik tebranishlarning differensial tenglamasi.....	32
§5. Test topshiriqlari.....	34
Foydalanilgan adabiyotlar.....	

**J.Oramov, B.E.Eshmatov,
J.J.Oramov**

USLUBIY QO'LLANMA

Differensial tenglamalar



1-chizma.

