

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ZAHIRIDDIN MUHAMMAD BOBUR NOMIDAGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI**

Musayeva ZIYODA ALLAYAROVNA

**Lagranj formasidagi L.S. Pontryagin maksimum
prinsipi va uning tadbirlari**

**5A460102- "Differensial tenglamalar" ixtisosligi bo'yicha
magistrlik ilmiy darajasini olish uchun taqdim etilgan dissertatsiya**

ANDIJON-2010

MUNDARIJA

Kirish.....	2-4
1-bob: Asosiy yordamchi tushunchalar.....	4-21
1.1-§: Oddiy differentsial tenglamalar zaruriy ma'lumotlar.....	4-12
1.2-§: Haqiqiy o'zgaruvchili funksialar nazariyasidan zaruriy ma'lumotlar.....	12-21
a) o'lchovli to'plamlar;.....	12-15
b) o'lchovli funksiyalar;.....	15-17
c) Lebeg integrali;.....	17-21
2-bob: Optimal boshqaruv masalasining qo'yilishi va maksimum prinsipi.....	22-76
2.1-§: Optimal boshqaruv masalalarini qo'yilishi.....	22- 31
2.2-§: O'ng cheti erkin bo'lgan optimal boshqaruv masalasi uchun L.S. Pontryagin maksimum prinsipi.....	31-36
2.3-§: Optimal boshqarish umumiy masalasi uchun L.S. Pontryagin maksimum prinsipi.....	37-46
2.4-§: Optimal boshqarish nazariyasining masalalar yechishga tadbiqlari.....	46-76
X U L O S A.....	77
A D A B I Y O T L A R.....	78

Kirish

O'tgan asrning 50-yillarida amaliyotdagi texnika, iqtisodiyot kabi mutaxassisliklar ehtiyoji, talabi asosida ekstremal masalalar sinfining *optimal boshqaruv nazariyasi* deb nomlangan yangi sohasi yuzaga keldi. Bu masalalar sinfi uchun ekstremumning zaruriy sharti- "Maksimum prinsipi" 1956 yilda akademik L.S.Pontryagin tomonidan ifodalandi va keyinchalik uning hamkasbalari, shogirdlari tomonidan isbotlandi. Bu zaruriy shart mohiyati jixatidan variatsion hisobning Eyler va Lagranj tenglamalari bilan taqqoslash natijasida boshqa ko'rinishni oladi: Optimal boshqaruv masalasini yechishda asosiy qadam bo'lib maksimumga oid yordamchi masalani yechish (bundan maksimum prinsipi deb nomlanishi namoyon bo'ladi) talab qilinadi.

Optimal boshqaruv nazariyasi ustida olib borilgan tadqiqotlari bo'yicha Pontryagin va uning hamkasblari V.G. Boltyanskiy, R.V.Gamkrelidze va E.F.Mishenkolar 1962 yilda Lenin mukofotiga sazovor bo'lishdi.

Pontryagin maksimum prinsipini Lagranj ko'paytuvchilari formasidagi zaruriy shartini ifodalash uchun minimum masalasi va unga mos optimallik sharti keltirib chiqariladi.

Lagranj formasidagi masaladan farqli optimal boshqaruv masalasida boshqaruv funksiyasi uchun qo'shimcha cheklanish $u \in U$ mansublikni bajarilishi talab qilinadi. U to'plam sodir bo'layotgan jarayonga inson tomonidan ta'sir ko'rsatish imkoniyatini yaratadi.

Biz dastlab umumiy holda qo'yilgan masala uchun Pontryagin maksimum prinsipini ifodalaymiz va uning isbotini keltiramiz. Keyin esa umumiy masalaning xususiy holi bo'lgan o'ng cheti erkin bo'lgan optimallashtirish masalasi uchun Pontryagin maksimum prinsipini ifodalaymiz va isbotlaymiz.

Ma'lumki, Vatanimiz istiqlol g'alabasidan so'ng shahdam odimlar bilan olg'a bormoqda, ilm-fan va texnikaning zamonaviy sohalari rivojlanmoqda va bu rivojlanish ilm ahli oldiga ko'plab zamonaviy muammolarni hal etishni ko'ndalang qilib qo'ymoqda. Ushbu fikrimizni prezidentimiz Islom Abdug'aniyevich Karimovning «O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida: havfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari» nomli kitoblarida keltirilgan. Quyidagi so'zlardan ham bilib olsak bo'ladi:

«Respublikamizda quyidagi yo'nalishlar bo'yicha jahon darajasidagi ilmiy maktablar yaratilgan bo'lib, ularda tadqiqotlar muvoffaqiyatli olib borilmoqda. Jumladan, matematika, ehtimollar nazariyasi, tabiiy va ijtimoiy jarayonlarni matematik modellash, informatika va hisoblash texnikasi sohasidagi tadqiqotlar.

Matematika fanining ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, differensial tenglamalar va matematik fizika, funksional tahlil sohasidagi yutuqlari respublikadan ancha uzoqda ham mashxur».

Magistrlik ishining maqsad va vazifalari: Magistrlik ishining asosiy maqsadi optimallashtirish masalalarining asosi bo'lgan L.S.Pontryagin maksimum prinsipini Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi asosida isbotlash va optimalashtirishga doir misol va masalalar yechishga tadbiq etishdan iborat.

Magistrlik ishining amaliy ahamiyati: Tabiat, fan va texnikada matematik modellashtirish natijasida hosil bo'lgan oddiy variatsion usullar bilan yechilmaydigan ekstremal masalalarni yechilishining umumiy zaruriy shartlarini hosil qilish, misollar yechishga oid ko'rsatmalar keltirish.

Magistrlik ishining ilmiy yangiligi: Lagranj ko'paytuvchilari usulini qo'llab optimal boshqaruvning asosiy prinsipi bo'lgan L.S.Pontryagin maksimum prinsipini isbotlash va masalalar yechishga qo'llashdan iborat.

Tadqiqot ob'yekti va predmeti: Magistrlik dissertatsiyasi matematik taxlilning Lagranj ko'paytuvchilari qoidasiga asoslangan holda optimal boshqaruv nazariyasiga oid ilmiy izlanishlarni davom ettirish.

Magistrlik dissertatsiyasi Kirish, Asosiy qism, Hulosa va Foydalanilgan adabiyotlarni o'z ichiga olgan.

Kirish qismida, mavzu to'g'risida umumiy ma'lumotlar uning rivojlanishi, dolzarbligi, amaliy ahamiyati haqida to'xtalgan.

Asosiy qism ikki bobdan tashkil topgan bo'lib, birinchi bobda differensial tenglamalar nazariyasidan, funksional analizdan zaruriy tushunchalar va teoremlar keltirilgan. Ikkinchi bobda optimal boshqaruv masalalarining qo'yilishi, maksimum prinsipi va uning isboti hamda masalalar yechishga tadbirlarini ko'rsatishga bag'ishlangan.

1-bob: Asosiy yordamchi tushunchalar.

1.1-§: Oddiy differentsial tenglamalar nazariyasidan zaruriy ma'lumotlar

$u(t)$ boshqariladigan ob'ektning $I=[t_0, t_1]$ vaqt oraligida berilgan qandaydir joiz boshqaruvi bo'lsin.

$$\dot{x} = Ax + u(t) \quad (1.1)$$

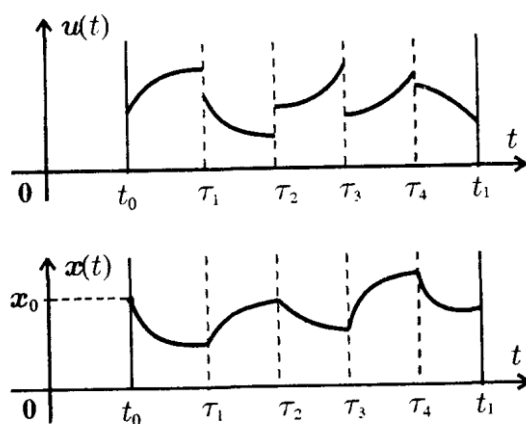
differentensial tenglamani qaraymiz. Bu tenglamaning o'ng tomoni $t \in I$ va $x \in R^n$ ning barcha qiymatlarida aniqlangan.

Agar bu tenglamadagi $u(t)$ funksiya $I=[t_0, t_1]$ vaqt oraligida uzluksiz funksiya bo'lsa, uholda oddiy differensial tenglamalar kursidan ma'lumki, har qanday $x(t_0) = x_0$ boshlang'ich shart uchun (1.1) tenglamani qanoatlantiruvchi yagona yechim mavjud bo'lib, bu yechim ixtiyoriy $t \in [t_0, t_1]$ uchun

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} u(s) ds \quad (1.2)$$

Koshi formulasi bilan beriladi, shu bilan birga bu yerda integral Riman ma'nosida bo'lib, $x(t)$ yechimning o'zi uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'ladi.

Ammo oddiy chiziqli tezkorlik masalasidagi $u(t)$ optimal boshqaruv ham uzluksiz funksiya bo'lmasligi mumkin. $u(t)$ optimal boshqaruv bo'lakli uzluksiz funksiya bo'lishi mumkin. $u(t)$ bo'lakli uzluksiz funksiya uchun (1.2) formuladan $u(t)$ funksiya uzluksizligi saqlangan har bir kesmada foydalanish mumkin. Natijada bo'lakli silliq $x(t)$ yechimni hosil qilamiz, ya'ni $x(t)$ funksiyaning o'zi uzluksiz, ammo uning hosilasi $\dot{x}(t)$ bo'lakli silliq (1.1-chizma).



1.1-chizma.

Ammo optimal boshqaruv bo'lakli uzluksiz funksiya bo'lmasligi mumkin. Shuning uchun optimal boshqaruv nazariyasining chiziqli tezkorlik masalasida joiz boshqaruvlar sifatida o'lchovli funksiyalar qaraladi. Umumiy holda, har qanday $u(t)$ joiz boshqaruv

$$\|u(t)\| \leq |U|$$

bahoni qanoatlantiradi. Lebeg integralining xossasiga ko'ra $u(t)$ funksiya Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'ladi.

Agar $x(t)$ funksiyaning $I=[t_0, t_1]$ vaqt oralg'ida deyarli barcha $t \in I$ lar uchun uning Lebeg ma'nosida integrallanuvchi $\dot{x}(t)$ hosilasi mavjud va barcha $t \in I$ lar uchun

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{x}(s) ds$$

shart bajarilsa, ya'ni $x(t)$ funksiya o'zining $\dot{x}(t)$ hosilasi bilan bir qiymatli tiklansa, $x(t)$ funksiya $I=[t_0, t_1]$ vaqt oralg'ida *absolyut uzluksiz* deyiladi. Har qanday bo'lakli silliq funksiya absolyut uzluksiz funksiya bo'ladi. Har qanday $u(t)$ joiz boshqaruv, ya'ni Lebeg ma'nosida integrallanuvchi $u(t)$ funksiya, va ixtiyoriy $x(t_0) = x_0$ boshlang'ich shart uchun (1.1) differensial tenglamaning $x(t)$ yechimini aniqlash mumkin. Ammo bu holda $x(t)$ yechim uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lmasdan faqatgina absolyut uzluksiz funksiya bo'ladi.

1-teorema. (1.1) differensial tenglamadagi $u(t)$ funksiya $I=[t_0, t_1]$ kesmada Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lsin. U holda har qanday $x(t_0) = x_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi (1.1) tenglamaning yagona absolyut uzluksiz $x(t)$ yechimi mavjud bo'lib, bu yechim ixtiyoriy $t \in [t_0, t_1]$ uchun (1.2) Koshi formulasi bilan aniqlanadi va bu formulada integral Lebeg ma'nosida tushuniladi.

Isboti. Bevosita tekshirish bilan (1.2) formula bilan berilgan $x(t)$ funksiya (1.1) differensial tenglamani qanoatlantirishini ko'rish mumkin. Haqiqatdan ham $t = t_0$ bo'lganda $x(t_0) = x_0$ boshlang'ich shart bajarilishi ravshan. Keyin eksponensialning xossasidan foydalanib, $x(t)$ funksiyaning hosilasini hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ae^{(t-t_0)A}x_0 + u(t) + \int Ae^{(t-s)A}u(s)ds = \\ &= A \left[e^{(t-t_0)A}x_0 + \int e^{(t-s)A}u(s)ds \right] + u(t) = Ax(t) + u(t). \end{aligned}$$

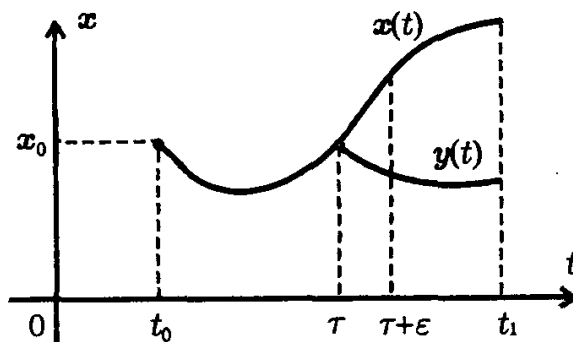
Bu ifoda (1.1) differensial tenglamanining o'ng tomoni bilan ustma-ust tushishi ko'rinib turibdi. Shuning uchun $x(t)$ funksiyani (1.1) differensial tenglamanining o'ng tomoniga qo'yilganda

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \quad (1.3)$$

tenglikni hosil qilamiz. Hosil qilingan tenglik deyarli barcha $t \in [t_0, t_1]$ lar uchun bajariladi, chunki absolyut uzluksiz $x(t)$ funksiya-ning $\dot{x}(t)$ hosilasi deyarli barcha $t \in [t_0, t_1]$ lar uchun mavjud. Uzluksiz differensiallanuvchi $x(t)$ klassik yechim (1.1) tenglamani barcha t lar uchun ayniyatga aylantiradi. Biroq (1.3) tenglik deyarli barcha $t \in [t_0, t_1]$ lar uchun bajarilsa, absolyut uzluksiz $x(t)$ funksiya (1.1) *differensial tenglamanining yechimi* deyiladi.

Agar $u(t)$ joiz boshqaruvni ayrim olingan nuqtalarda yoki o'lchovi nolga teng bo'lgan to'plamda o'zgartirsak, u holda (1.3) tenglik saqlanadi va $x(t)$ funksiya (1.1) differensial tenglamanining yechimi bo'ladi. Umuman (1.3) tenglik saqlanadi, chunki $u(t)$ funksiya (1.2) formulada integral belgisi ostida bo'lganligi uchun, integral belgisi ostidagi funksiyani o'lchovi nolga teng bo'lgan to'plamda o'zgartirish natijasida Lebeg integrali o'zgarmaydi.

$x(t)$ yechimni yagonaligini ko'rsatishimiz qoldi. Teskaridan faraz qilamiz, ya'ni ikkita $x(t)$ va $y(t)$ absolyut uzluksiz yechimlar bir xil $x(t_0) = y(t_0) = x_0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantirsin. τ vaqtning shunday birinchi momentiki, bu nuqtada $x(t)$ va $y(t)$ yechimlar ajralsin (1.2-chizma).



1.2-chizma.

$\varepsilon \|A\| < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ sonini tanlaymiz va $[\tau, \tau + \varepsilon]$ vaqt oraligida $z(t) = x(t) - y(t)$ funksiyani qaraymiz. $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar (1.3) tenglikni qanoatlantirganligi sababli deyarli barcha $t \in [t_0, t_1]$ lar uchun

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{y}(t) = Ax(t) - Ay(t) = A(x(t) - y(t)) = Az(t)$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu munosabatni $[\tau, t]$ kesmada integrallab,

$$z(t) = \int_{\tau}^t Az(s)ds$$

tenglikni hosil qilamiz, chunki $z(\tau) = 0$.

shu sababli $\tau \leq t \leq \tau + \varepsilon$ kesmada

$$\|z(t)\| = \left\| \int_{\tau}^t Az(s)ds \right\| \leq \int_{\tau}^t \|Az(s)\|ds \leq \int_{\tau}^t \|A\| \cdot \|z(s)\|ds \leq \varepsilon \cdot \|A\| \max_{r \leq t \leq r+\varepsilon} \|z(t)\| < \max_{r \leq t \leq r+\varepsilon} \|z(t)\|.$$

munosabat o'rinli. $z(t)$ funksiya $[\tau, \tau + \varepsilon]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi uchun, u bu kesmaning qandaydir $t^* \in [\tau, \tau + \varepsilon]$ nuqtasida o'zining maksimumiga erishadi. Hosil qilingan munosabatda $t = t^*$ deb olsak

$$\|z(t^*)\| < \|z(t^*)\|$$

ziddiyat hosil bo'ladi. Shu bilan $x(t)$ yechimning yagonaligi o'rnatildi. Teorema isbotlandi.

Eslatma. 1-teoremada (1.1) tenglamaning $x(t)$ yechimi uchun boshlang'ich shart $[t_0, t_1]$, kesmaning chap qismida berilgan bo'lsa, ya'ni t_0 nuqtada $x(t_0) = x_0$, bo'lib $x(t)$ yechim (1.2) Koshi formulasi bilan beriladi. Agar boshlang'ich shart $[t_0, t_1]$, kesmaning o'ng qismida berilgan, ya'ni t_1 nuqtada $x(t_1) = x_1$, bo'lishi mumkin. Shuning uchun bu holda ham $x(t)$ yechim mavjud va yagona bo'lib, u yana

$$x(t) = e^{(t-t_1)A}x_1 + \int_{t_1}^t e^{(t-s)A}u(s)ds \quad (1.4)$$

Koshi formulasi bilan beriladi.

1-misol. $n = 2$ bo'sin

$$\dot{x} = u(t)$$

tenglamalar sistemasining $[0, 2]$ vaqt oraligida boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping, bu yerda $u(t)$ funksiya

$$u(t) = \begin{cases} (1, 1), & \text{agar } 0 \leq t \leq 1, \text{ bo'lsa} \\ (1, 1), & \text{agar } 1 < t \leq 2, \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

formula bilan berilgan.

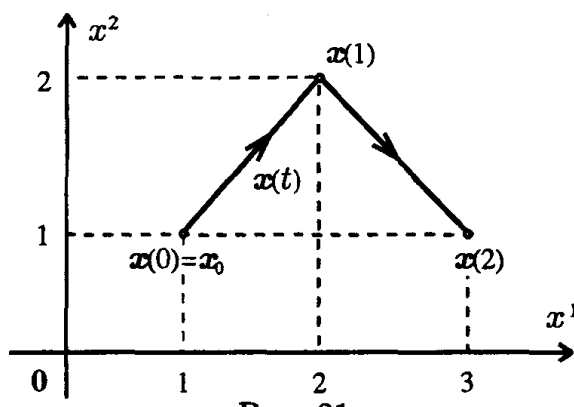
Berilgan holda $A = 0$ bo'lib, $e^{tA} = E$ bo'ladi va (1.2) Koshi formulasi

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t u(s) ds$$

ko'rinishni oladi. $u(t)$ funksiyani integrallab,

$$x(t) = \begin{cases} (1+t, 1+t), & \text{agar } 0 \leq t \leq 1, \text{ bo'lsa} \\ (1+t, 3-t), & \text{agar } 1 < t \leq 2, \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

yechimni hosil qilamiz. Bu yechim bo'lakli silliq bo'lib, uning hosilasi $t = 1$ nuqtada uzilishga ega. Bu yechim $x = (x^1, x^2) \in R^2$ o'zgaruvchining holatlar tekisligida 1.3-chizmada ta'svirlangan.



1.3-chizma.

2-misol. $u(t)$ bo'lakli uzluksiz bo'lib, $[0, \pi]$ vaqt oraligida

$$u(t) = (u^1(t), u^2(t)) = \begin{cases} (0, 1), & \text{agar } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \\ (-1, 0), & \text{agar } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

shart bilan berilgan ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1(t), \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

tenglamalar sistemasining $x(0) = (1, 0)$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

(1.5) tenglamada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ekanligi ravshan. Bu matritsaning eksponensial

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Bu ifodani, $t_0 = 0$, $x(0) = (1, 0)$ boshlang'ich shartlarni va $u(t)$ funksiyani Koshi

formulasiga qo'yib, barcha $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ lar uchun

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \sin(t-s) \\ \cos(t-s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Xuddi shu kabi $u(t)$ funksiyani va $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1,0)$ boshlang'ich shartni (1.2) Koshi formulasiga

qo'yib $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ uchun

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{\frac{\pi}{2}}^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} + \int_{\frac{\pi}{2}}^t \begin{pmatrix} -\cos(t-s) \\ \sin(t-s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ 1 + \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

yechimni hosil qilamiz. Nihoyat

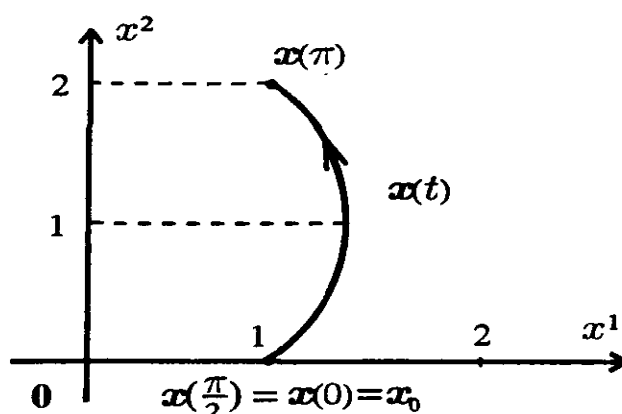
$$x(t) = \begin{cases} (1,0), & \text{agar } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \text{ bo'lsa,} \\ (\sin t + \cos t, 1 + \cos t - \sin t), & \text{agar } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

yechimga ega bo'lamiz.

Bu yechim absolyut uzluksiz funksiya bo'lib, u bo'lakli silliq ammo uzluksiz

differensiallanuvchi funksiya emas. Uning $\dot{x}(t)$ hosilasi $t = \frac{\pi}{2}$ nuqtada uzulishga ega. $x(t)$

yechimning tasviri $(x^1, x^2) \in R^2$ holatlar tekisligida 1.4-chizmada berilgan.



1.4-chizma.

3-misol $u(t)$ bo'lakli uzluksiz bo'lib,

$$u(t) = (u^1(t), u^2(t)) = \begin{cases} (0,0), & \text{agar } 0 \leq t \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ (0,1), & \text{agar } 1 < t \leq 2 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

shart bilan berilganda

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u^2 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining $[0,2]$ vaqt oraligining o'ng qismida $x(2) = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ matritsaning eksponensial } e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ko'rinishga ega. Bu ifodani va}$$

$x(2) = 0$ shartni (1.5) formulaga qo'yib,

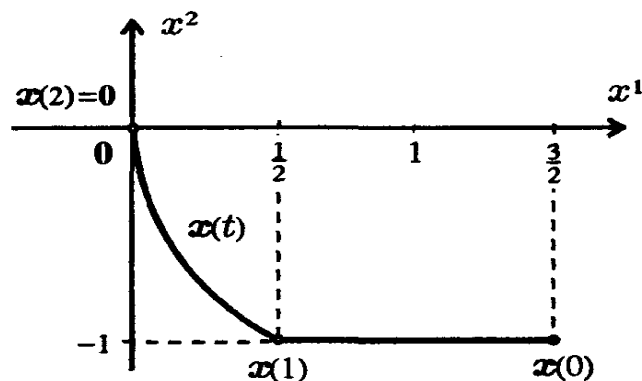
$$x(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1(s) \\ u^2(s) \end{pmatrix} ds$$

ifodani hosil qilamiz. Bu ifodaga $u(t)$ funksiyani qo'yib, integrallashdan so'ng,

$$1 < t \leq 2 \text{ bo'lganda } x(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 2t + 2, t - 2 \right) \text{ va}$$

$$0 \leq t \leq 1 \text{ bo'lganda } x(t) = \left(-t + \frac{3}{2}, -1 \right)$$

yechimni hosil qilamiz. $x(t)$ yechimning tasviri $(x^1, x^2) \in R^2$ holatlar tekisligida 1.5-chizmada berilgan.



1.5-chizma.

1.2-§: Funktsional analizdan zaruriy ma'lumotlar

O'lchovli to'plamlar

R^n fazoda o'lchov tushunchasini kiritamiz. Ko'rgazmalilik uchun $n=1$ holni, yani R^1 son o'qini qaraymiz. Qandaydir $I=[t_0, t_1]$ kesmani va bu kesmada uzunlik tushunchasini yoki *to'plamning o'lchovi* tushunchasini kiritish uchun zarur bo'lgan $A \subset I$ qism to'plamlarning $\sum$ sistemasini qaraymiz. $\sum$ sistemaning har bir A to'plami o'lchovli to'plam deyilib, unga Lebeg o'lchovi deb nomlangan qandaydir μ soni mos qo'yiladi, ya'ni $\mu: \sum \rightarrow R^1$ funksiya aniqlanadi. Olchovli to'plamlarning $\sum$ sistemasini va ularga mos Lebegning μ o'lchovini aniqlashni bir necha bosqichlarda amalga oshiramiz.

$\sum$ sistemaga dastlab $I=[t_0, t_1]$ kesmadagi barcha

$$(a,b), [a,b], (a,b], [a,b) \quad (2.1)$$

oraliqlarni kiritamiz. Bunday oraliqlarning Lebeg o'lchovini $\mu=b-a$ deb qabul qilamiz.

Demak, xususiy holda $I=[t_0, t_1]$ kesmaning o'lchovi

$\mu(I)=t_1-t_0$, bitta $t \in I$ nuqtaning o'lchovi $\mu(\{t\})=0$, shuningdek $\emptyset$ - bo'sh to'plamning o'lchovi $\mu(\emptyset)=0$.

Kelgusida $\sum$ sistemaga chekli yoki sanoqli sondagi o'zaro kesishmaydigan (2.1) ko'rinishdagi P_i oraliqlarning birlashmasi bo'lgan ixtiyoriy $A \subset I$, ya'ni

$$A=\bigcup_i P_i, \quad P_i \cap P_j = \emptyset, \quad i \neq j \quad (2.2)$$

ko'rinishdagi to'plamlarni kiritamiz va bu $A \subset I$ to'plamning Lebeg o'lchovini $\mu(A)=\sum_i \mu(P_i)$ tenglik bilan aniqlaymiz. Demak, $\sum$ sistemaga $I=[t_0, t_1]$ kesmadagi barcha ochiq to'plamlar ham kiradi, chunki har qanday ochiq to'plamni chekli yoki sanoqli sondagi o'zaro kesishmaydigan ochiq oraliqlar birlashmasi sifatida ifodalash mumkin.

$\sum$ sistemaga $I=[t_0, t_1]$ kesmagacha to'ldiruvchi to'plam bo'lgan

barcha chekli yoki sanoqli sondagi o'zaro kesishmaydigan turli (2.2) ko'rinishdagi P_i oraliqlarning birlashmasidan iborat bo'lgan $A \subset I$ ya'ni

$$A = I \setminus \bigcup_i P_i, P_i \cap P_j = \emptyset, i \neq j \quad (2.3)$$

to'plamlarni kiritamiz. Bunday to'plamlarning Lebeg o'lchovini $\mu(A) = \mu(I) - \sum_i \mu(P_i)$ ko'rinishda aniqlaymiz. Har qanday yopiq to'plamni butun kesmagacha to'ldiruvchisi chekli yoki sanoqli sondagi o'zaro kesishmaydigan ochiq oraliqlar birlashmasi sifatida ifodalash mumkinligidan $\sum$ sistemaga $I = [t_0, t_1]$ kesmadagi barcha yopiq to'plamlar ham kiradi. Demak $\sum$ sistema barcha mumkin bo'lgan (2.1) ko'rinishdagi oraliqlarni hamda (2.2) va (2.3) ko'rinishdagi to'plamlarni o'zida saqlangani uchun etarlicha katta to'plamni tashkil etadi. Ammo buning o'zi ham etarli emas va biz $\sum$ sistemaga yana qandaydir to'plamlarni kiritamiz. Bu ishni quyidagicha amalga oshiramiz.

Ihtiyoriy $A \subset I$ to'plam uchun uning (2.2) ko'rinishdagi chekli yoki sanoqli sondagi P_i oraliqlardan tashkil topgan barcha qoplamalarni qaraymiz. Natijada $A \subset \bigcup_i P_i$ munosabatga ega bo'lamiz. A to'plamning *yuqori o'lchovi* deb $\mu^*(A) = \inf \sum_i \mu(P_i)$ tenglik bilan aniqlangan $\mu^*(A)$ soniga aytiladi. Bu erda quyi chegara A to'plamning barcha mumkin bo'lgan qoplamalari boyicha olinadi.

Keyin $\mu_*(A) = \mu(I) - \mu^*(I \setminus A)$ tenglik bilam aniqlangan $\mu_*(A)$ soniga A to'plamning *quyi o'lchovi* deyiladi. Agar A to'plamning quyi va yuqqorti o'lchovlari ustma-ust tushib μ soniga teng, ya'ni $\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu$ bo'lsa bunday to'plamlarni ham $\sum$ sistemaga kiritamiz va μ sonini bu to'plamning *Lebeg o'lchovi* deb nomlaymiz. Albatta bunday qabul qilishning, ya'ni (2.1), (2.2) yoki (2.3) ko'rinishdagi $A \subset I$ to'plamlar uchun qurilgan yuqori va quyi o'lchovlari oldin kiritilgan Lebeg o'lchovi bilan ustma-ust tushishini isbotlash zarur.

Sunday qilib, biz har qanday $I = [t_0, t_1]$ kesmadagi o'lchovli to'plamlarning $\sum$ sistemasini qurdik va har qanday o'lchovli A to'plam uchun uning $\mu(A)$ Lebeg o'lchovini aniqladik. Shu bilan birga $I = [t_0, t_1]$ kesmada o'lchovsiz to'plamlar mavjudligini ya'ni $I = [t_0, t_1]$ kesmaning $\sum$ sistemaga tushmaydigan qism to'plamlari borligini e'tiborga olamiz.

Agar barcha $A \cap [i, i+1]$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ to'plamlar o'lchovli bo'lsa, u holda, ixtiyoriy $A \in R^1$ to'plam o'lchovli deyiladi. Bunda $A \in R^1$ to'plamning o'lchovi deb

$$\mu(A) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mu(A \cap [i, i+1])$$

soniga aytamiz. Shunday qilib, son to'g'ri chizig'ida to'plamning o'lchovli tushunchasi kiritildi.

Agar qandaydir xossa $t \in [t_0, t_1] \setminus A$ nuqtalar uchun bajarilib, $A \in R^1$ to'plamning o'lchovi nolga teng, ya'ni $\mu(A) = 0$ bo'lsa, bu xossa $[t_0, t_1]$ kesmaning deyarli barcha nuqtasida bajariladi deyiladi.

O'lchovli funksiyalar

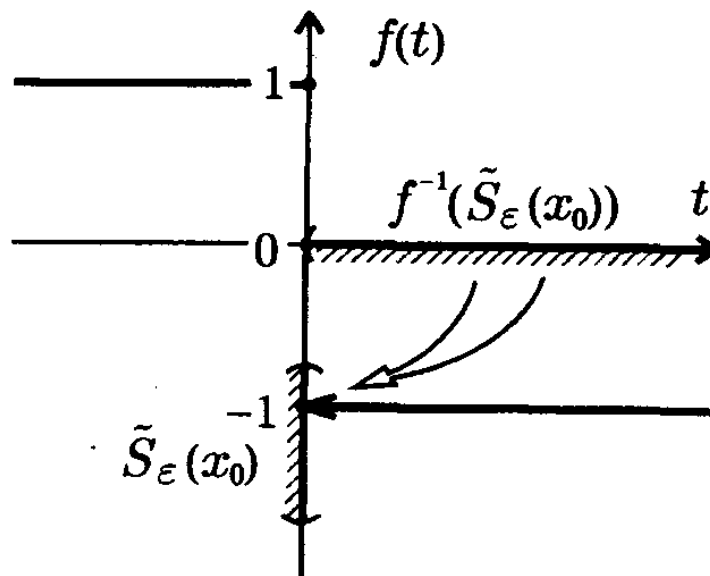
Agar R^n fazodagi ixtiyoriy $\tilde{S}_\varepsilon(x_0) = \{x \in R^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ ochiq sharning asli (proobrazi) $f : R^n \rightarrow R^n$ akslantirishda o'lchovli to'plam, ya'ni $\sum$ to'plamlar sistemasiga tegishli bo'lsa, u holda $f : R^n \rightarrow R^n$ funksiyaga *o'lchovli funksiya* deyiladi. Demak, har qanday $\varepsilon > 0$ soni va ixtiyoriy $x_0 \in R^n$ nuqta uchun $f^{-1}(\tilde{S}_\varepsilon(x_0)) = \{t : \|f(t) - x_0\| < \varepsilon\} \in \sum$ munosabat bajarilsa $f(t)$ funksiya o'lchovli bo'ladi.

Shuning ichun ixtiyoriy uzliksiz $f(t)$ funksiya o'lchovli funksiyadir, chunki, uning uchun ixtoyori ochiq sharninh poobrazi ochiq to'plam bo'lib, $\sum$ sisremaga tegishli.

1-misol.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{agar } -\infty < t \leq 0, \\ -1, & \text{agar } 0 < t < +\infty \end{cases}$$

munosabat bilan aniqlangan (Q.7-chizma) $f : R^1 \rightarrow R^1$ funksiyani qaraymiz.



2.1-chizma.

Bu funksiyani o'lchovli ekanligini ko'rsatamiz. Berilgan holda R^1 fazodagi ixtiyoriy ochiq shar uchun, ya'ni ixtiyoriy ochiq oraliq uchun quyidagi to'rtta: bu oraliq -1 va 1 nuqtalarni o'zida saqlamaydi; faqat 1 nuqtani saqlaydi; faqat -1 nuqtani saqlaydi; -1 va 1 nuqtalarni o'zida saqlaydi; hollar bo'lishi mumkin (2.1-chizmani qarang). Birinchi holda bu oraliqning proobrazi bo'sh to'plam, ikkinchi holda $(-\infty, 0]$ oraliq, uchinchi holda $(0, +\infty)$ bilan va nihoyat to'rtinchi holda butun R^1 son o'qi bilan ustma-ust tushadi. Ammo, bu to'plamlarning hammasi R^1 to'g'ri chiziq uchun qurilgan $\sum$ sistemaga kiradi. Demak $f(t)$ o'lchovli funksiya.

Biz kelgusida fodalanadigan o'lchovli funksiyalarning ba'zi xossalari-nini qarab chiqamiz. C uzluksiz funksiyalar sinfi L o'lchovli funksiyalar sinfiga kiradi, ya'ni biz uzluksiz funksiyalar sinfini o'lchovli funksiyalar sinfigacha kengaytirdik.

1-xossa. Agar $[t_0, t_1]$ kesmada uzluksiz $f_k(t)$ funksiyalar ketma-ketligi mavjud bo'lib, har bir $t \in [t_0, t_1]$ uchun

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t)$$

munosabatning bajarilishi $f: R^1 \rightarrow R^n$ funksiyaning $[t_0, t_1]$ kesmada o'lchovli bo'lishi uchun zarur va yetarli.

2-xossa. $f_k : R^1 \rightarrow R^n$ - o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi bo'lib, har bir t uchun $\{f_k(t)\}$ ketma-ketlik $f(t)$ funksiyaga yaqinlashsin. U holda $f(t)$ limit funksiya o'lchovli funksiya bo'ladi.

Shuning uchun o'lchovli funksiyalar sinfi nuqtali yaqinlashishga nisbatan yopiq bo'ladi.

3-xossa. Agar $f : R^1 \rightarrow R^n$ o'lchovli, $g : R^n \rightarrow R^m$ esa uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda ularning $g(f(t)) : R^1 \rightarrow R^m$ superpozitsiyasi ham o'lchovli funksiya bo'ladi.

4-xossa. $f_1, f_2 : R^1 \rightarrow R^n$ va $\lambda : R^1 \rightarrow R^1$ o'lchovli funksiyalar bo'lsin.

U holda $f_1(t) \pm f_2(t), \lambda(t)f_1(t)$ va $\frac{f_1(t)}{\lambda(t)}$ ($\lambda(t) \neq 0$) funksiyalar ham o'lchovli bo'ladi.

Agar $f : R^1 \rightarrow R^n$ funksiya sanoqlidan ko'p bo'lmagan $x_1, x_2, \dots \in R^n$ qiymatlar qabul qilsa bu funksiya oddiy funksiya deyiladi.

5-xossa. $f : R^1 \rightarrow R^n$ oddiy funksiya bo'lib $x_1, x_2, \dots \in R^n$ uning qiymatlar to'plami bo'lsin. Bu holda $f(t)$ o'lchovli funksiya bo'lishi uchun barcha $A_i = \{t \in R^1 : f(t) = x_i\}$ to'plamlar o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli

6-xossa. $f : R^1 \rightarrow R^n$ funksiya o'lchovli bo'lishi uchun u oddiy funksiyalar ketma-ketligining tekkis limiti bo'lishi, ya'ni, barcha $t \in R^1$ lar uchun $f(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(t)$ tekkis yaqinlashishni qanoatlantiruvchi $f_k(t)$ sodda o'lchovli funksiyalar ketma ketligining mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

Lebeg integrali

Integral tushunchasini o'lchovli funksiyalar sinfiga ham tadbqiq etish mumkin. Dastlab bu ishni sodda o'lchovli funksiyalar uchun amalga oshiramiz.

$I = [t_0, t_1] \subset R^1$ kesma, $f : I \rightarrow R^n$ sodda o'lchovli funksiya va uning $x_1, x_2, \dots \in R^n$ qiymatlari to'plami berilgan bo'lsin. U holda o'lchovli funksiyalarning 5-xossa bo'yicha barcha $\{t : x_i = f(t)\}$ to'plamlar o'lchovlidir.

Agar $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{t: f(t) = x_i\})x_i$ qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning

yig'indisiga $f(t)$ funksiyadan olingan Lebeg integrali deyiladi va $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ kabi belgilanadi.

$$\text{Shuning uchun } \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{t: f(t) = x_i\})x_i$$

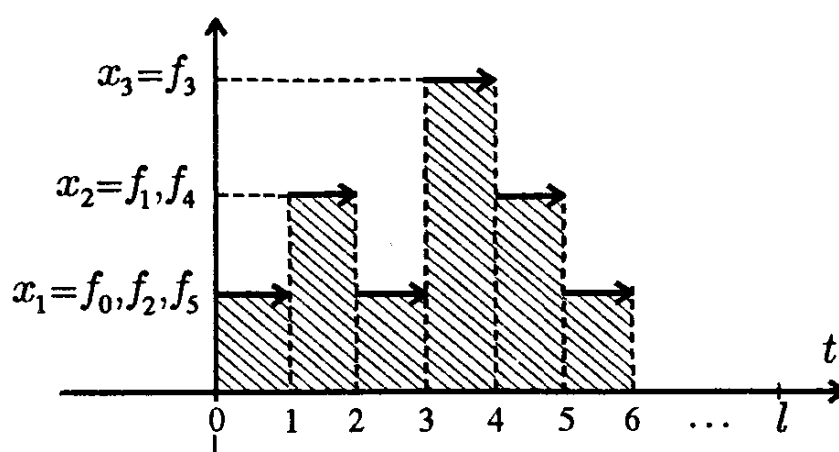
2-misol. $f: R^1 \rightarrow R^1$ funksiya $[0, l]$ kesmada bo'lakli o'zgarmas bo'lsin, bu erda l butun soni quyidagi ko'rinishda aniqlangan: $i \leq t < i+1$ ($i=0,1,\dots,l-1$) bo'lganda $f(t) = f_i$ (2.1-chizma). f_i sonlari orasida ustma-ust tushadiganlari ham bo'lishi mumkin. $x_j, j=0,1,\dots,m \leq l-1$ orqali $\{f_i\}$ barcha turli nuqtalarni belgilaymiz. Bu funksiyaning Lebeg integrali

$$\int_0^l f(t)dt = \sum_{i=0}^m \mu(\{t: f(t) = x_j\}) \quad (2.4)$$

ko'rinishga ega $f(t)$ funksiya $[0, l]$ kesmada bo'lakli o'zgarmas. Shuning uchun $f(t)$ funksiyaning odatdagi Riman integrali mavjud bo'lib, u

$$\int_0^l f(t)dt = \sum_{i=0}^{l-1} f_i \quad (2.5)$$

ko'rinishga ega. Bu integral qiymat bo'yicha chizmada belgilangan (2.2-chizma).



2.2-chizma.

Bu integrallarning ustma tushishi tushinarli. Bu integral Riman va Lebeg bo'yicha qanday hisoblanishini tushuntiramiz. Riman bo'yicha ((2.4) formulaga qarang) barcha f_i sonlarini

ketma-ket yig'ish zarur, Lebeg bo'yicha ((2.5) formulaga qarang). $f(t)$ funksiya bir hil x_j qiymatlar qabul qiluvchi kesmalarning umumiy $\mu(\{t: f(t) = x_j\})$ uzunligini uning x_j nuqtadagi qiymatlariga ko'paytirib qoshish kerak. Bu integrallar orasidagi farqni Lebegga tegishli bo'lgan ko'rgazmalilik orqali quyidagicha taqqoslash mumkin: bizda qop haltada tanga pullar bo'lib ularni umumiy yig'indisini to'pish kerak. Riman bo'yicha haltadan bittadan tangalar olib tangalarda yozilgan raqamlarni qo'shib umumiy summani topish, Lebeg bo'yicha dastlab tangalarni bir xil qiymat bo'yicha guruhxarga ajratish va har bir guruxlardagi tangalar qiymatlarini qo'shib umumiy summani topish kerak.

$f: I \rightarrow R^n$ ixtiyoriy o'lchovli funksiya berilgan bo'lsin. U holda o'lchovli funksiyalarning 6-xossasiga ko'ra , shunday sodda o'lchovli $f_k(t)$ funksiyalar ketma-ketligi mavjudki, barcha $t \in I$ lar uchun $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = f(t)$ munosabat bajariladi. Agarda

$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} f_k(t) dt$ mavjud bo'lsa, bu limitga $f(t)$ funksiyaning Lebeg integrali deyiladi va

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt \text{ orqali belgilanadi. Shuning uchun } \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} f_k(t) dt$$

tenglikka ega bo'lamiz. Albatta Lebeg integralining bunday ta'riflanishini to'g'riligini, ya'ni $f(t)$ funksiyaning Lebeg integrali $f_k(t)$ sodda funksiyalar ketma-ketligining tanlanishiga bog'liq emasligini isbotlash kerak.

Lebeg integralining ba'zi xossalarini keltiramiz.

1-xossa. Agar $f: I \rightarrow R^n$ funksiya Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya Lebeg bo'yicha ham integrallanuvchi bo'lib, bu integrallar teng bo'ladi.

Shuning uchun, Lebeg integrali Riman integralining o'lchovli funksiyalarga kengaytirilishidir.

2-xossa. $f: I \rightarrow R^n$ funksiya Lebeg bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi uchun, $f(t)$ o'lchovli funksiya va barcha $t \in I$ larda $\|f(t)\| \leq k(t)$ tensizlikni qanoatlantiruvchi, Lebeg bo'yicha integrallanuvchi $k: I \rightarrow R^1$ skalyar funksiyaning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

Chegaralangan $f : I \rightarrow R^n$ funksiya Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi uchun, bu funksiya I kesmaning deyarli barcha nuqtasida uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli ekanligini eslatamiz.

Lebeg integrali uchun Riman integralining odatdagi barcha xossalari bajariladi. Bu yerda ulardan ba'zilarini keltiramiz.

3-xossa. Agar $f, f_1, f_2 : R^1 \rightarrow R^n$ funksiyalar integrallanuvchi bo'lib, λ qandaydir son bo'lsa, u holda

$$\int_{t_0}^{t_1} [f_1(t) \pm f_2(t)] dt = \int_{t_0}^{t_1} f_1(t) dt \pm \int_{t_0}^{t_1} f_2(t) dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda f(t) dt = \lambda \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$$

$$\int_{t_0}^{\tau} f(t) dt + \int_{\tau}^{t_1} f(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt, \quad \tau \in I$$

$$\left\| \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt \right\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \|f(t)\| dt$$

munosabatlar o'rinli.

4-xossa. $f : I \rightarrow R^n$ funksiya integrallanuvchi bo'lib, $\tau \in I$ bo'lsin. U holda

$g(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} f(t) dt$ integral integrallashning yuqori chegarasi τ ga uzluksiz bog'liq, ya'ni

$g : I \rightarrow R^n$ funksiya uzluksiz.

$n=1$ bo'lgan hol uchun Lebeg integralining quyidagi ikkita xossasini keltiramiz.

5-xossa. Agar $f : I \rightarrow R^1$ funksiya integrallanuvchi va $f(t) \geq 0$ bo'lsa, u holda

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt \geq 0 \text{ bo'ladi.}$$

6-xossa. Agar $f : I \rightarrow R^1$ funksiya integrallanuvchi bo'lib, $f(t) \geq 0$ va $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = 0$ bo'lsa, u holda $f(t)$ funksiya I kesmaning deyarli barcha nuqtasida nolga teng.

2-bob: Optimal boshqarish umumiy masalasi uchun Lagranj formasidagi L.S. Pontryagin maksimum prinsipi

2.1-§: Optimal boshqaruv masalalarini qo'yilishi

Ob'ektning harakat dinamikasi. Optimal boshqaruv masalasi uchun vaqt mobaynida harakati o'zgarib turuvchi ob'ektning mavjudligi xarakterlidir. Faraz qilaylik vaqtning har bir t momentida ob'ektning holati $x^1(t), \dots, x^n(t)$ parametrlarning tanlanishi bilan to'la aniqlansin. Bu parametrlar qandaydir koordinatalar sistemasida ob'ektning holatining koordinatalari, tezlik koordinatalari va hokazolar bo'lishi mumkin.

$x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ vektorga ob'ektning *holat vektori* deyiladi. Ob'ekt harakatini boshqarish, ya'ni ob'ektning holati qandaydir rullar vositasida o'zgartirilishi mumkin deb faraz qilamiz. Aytaylik rullarning holati vaqtning har bir t momentida $u^1(t), \dots, u^m(t)$ parametrlarni tanlanishi bilan harakterlansin.

$u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t))$ vektorga ob'ektning *boshqaruv vektori* yoki *boshqaruv* deyiladi. Vaqtning berilgan t momentida ob'ektning holati $u(t)$ boshqaruv vaqtining t momentigacha qanday qiymatlar qabul qilganligiga bog'liq ammo boshqaruvning kelgusi holatiga bog'liq emas. Ob'ektning $x(t)$ holat vektori $u(t)$ boshqaruvning qiymatiga bog'liq tarzda turli hil dinamik ob'ektlar qaraladi. Masalan, bu bog'liqlikni

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (1.1)$$

differensial tenglamalar sistemasi bilan yozish mumkin. Bu holda vaqtning har bir t momentida $u(t)$ boshqaruvning qiymatini bilgan holda

$$\dot{x} = f(t, x, u(t))$$

differentzial tenglamani yechib, ob'ektning $x(t)$ traektoriyasini aniqlashimiz mumkin.

Qandaydir tarzda ob'ektning harakat dinamikasi berilgan, ya'ni $u(t)$ boshqaruv vektorining o'zgarishiga bog'liq ravishda $x(t)$ holat vektorining o'zgarish qonuni berilgan deb hisoblaymiz.

Joiz boshqaruvlar sinfi. Muayan (konkret) fizik ob'ektlar uchun $u(t)$ boshqaruv ihtiyoriy bo'lmaydi. Bu boshqaruvga boshqaruvning fizik ma'nosidan kelib chiqadigan qandaydir cheklanishlar qo'yiladi. Masalan, agar $u^1(t)$ dvigatelning quvvati bo'lsa, u holda vaqtning har bir momentida u

$$u_{\min} \leq u^1(t) \leq u_{\max}$$

cheklanishlarni qanoatlantiradi. Bunda $u^1(t)$ $u_{\min}$ va $u_{\max}$ chetki qiymatlarni ham qabul qilishi mumkin. Odatda $u(t)$ vektor boshqaruv vaqtining har bir t momentida

$$u(t) \in U \quad (1.2)$$

cheklanishni qanoatlantiradi, bu erda U qandaydir berilgan to'plam. Qonuniyatga ko'ra muayyan fizik ob'ektlarda U yopiq to'plamdir. Bu yopiqlik boshqariladigan ob'ektning holatini umuman klassik variatsion hisob usullari bilan tekshirishga imkoniyat bermaydi. (1.2) ko'rinishdagi cheklanishlardan tashqari $u(t)$ boshqaruvning vaqtga bog'liqligi bo'yicha cheklanishlar qo'yilishi mumkin. Masalan, joiz boshqaruvning fizik ma'nosidan bu boshqaruv yo silliq, yo uzluksiz, yoki bolakli uzluksiz va hokazo bo'lishi mumkin. Qandaydir usulda $u(t)$ joiz boshqaruvlar sinfi berilgan deb hisoblaymiz.

Ob'ektning boshlang'ich va so'nggi holati. Faraz qilaylik vaqtning boshlang'ich momenti t_0 va ob'ektning joiz boshlang'ich holatlarining M_0 to'plami berilgan bo'lsin.

Bundan tashqari vaqtning qandaydir so'nggi t_1 momentida ob'yekt qandaydir joiz so'nggi holatlarining to'plami M_1 ga kelib tushsin. Agar $u(t)$ boshqaruvga mos ob'ektning $x(t)$ holati

$$x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1 \quad - \quad (1.3)$$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda $[t_0, t_1]$ vaqt oraligida $u(t)$ joiz boshqaruv joiz boshlang'ich holatlarining M_0 to'plamini joiz so'nggi holatlarining M_1 to'plamiga olib o'tadi deb aytamiz. Vaqtning har bir so'nggi momenti t_1 umuman aytganda mahkamlangan bo'lib, $x(t)$ vektorining so'nggi M_1 to'plamga tushish shartidan aniqlanadi. Shunday qilib M_0, M_1 joiz to'plamlar berilgan deb hisoblaymiz.

Sifat kriteriysi. Boshqariladigan ob'ektni M_0 to'plamdan M_1 to'plamga turli hil usullar bilan o'tkazish mumkin. Amaliyotda bunday o'tishlardan qandaydir ma'noda eng yaxshisini tanlash maqsadga muvofiqdir. Odatda $[t_0, t_1]$ kesmada aniqlangan har bir $u(t)$ joiz boshqaruvga mos ob'ektning $x(t)$ trayektoriyasiga $u(t)$, $x(t)$ juftlikni baholovchi J soni, ya'ni $J(u(t), x(t))$ funksional, yoki sifat kriteriysi beriladi. Masalan, bu funksional

$$J(u(t), x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(s, x(s), u(s)) ds \quad (1.4)$$

ko'rinishda bo'lishi mumkin.

Endi *optimal boshqaruv masalasini* ifodalashimiz mumkin. Bu masala ob'ektni boshlang'ich holatlarning M_0 to'plamidan so'nggi holatlarning M_1 to'plamiga tushuruvchi shunday $u^*(t)$ boshqaruv va unga mos $x^*(t)$ traektoriyani topish lozimki, bunda $J(u(t), x(t))$ funksional o'zining minimal qiymatiga erishsin, ya'ni

$$J(u^*(t), x^*(t)) = \min J(u(t), x(t))$$

tenglik bajarilsin. Bu yerda minimum ob'ektni boshlang'ich holatlarning M_0 to'plamidan so'nggi holatlarning M_1 to'plamiga o'tkazuvchi barcha joiz $u(t)$ boshqaruv va unga mos ob'ektning $x(t)$ trayektoriylari bo'yicha olinadi.

Optimal boshqaruv masalalaridan misollar keltiramiz.

1-misol. Kosmik kema Yer atrofidagi qandaydir doiraviy orbita bo'ylab harakatlansin. Etarlicha aniqlikda kosmik kema holatini (1.1) ko'rinishdagi differensial tenglamalar sistemasi bilan yozishimiz mumkin. Bunda $x(t)$ holat vektorining koordinatalari Yer bilan bog'langan qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan kosmik kemaning holati, vektor tezligining koordinatasi, kema orientatsiyasini beruvchi burchaklar, burchak tezliklar va hokozolar bo'lishi mumkin. $u(t)$ vektor boshqaruvning koordinatalari bo'lib reaktiv dvigatel o'qining burish burchagi, birlik vaqt ichida yonilg'i sarfi va hokozolar bo'lishi mumkin. $u(t)$ vektor boshqaruv koordinatalarini u yoki bu ko'rinishda tanlab, kosmik kemani $x(t)$ trayektoriyaning biror qismida u yoki bu ko'rinishda harakatlanishiga majbur qilish mumkin.

Faraz qilaylik, kosmik kemani yangi orbitaga o'tkazish talab qilinsin, ya'ni $u(t)$ vektor boshqaruvning shunday qiymatini topish talab qilinadiki, kemandi unga mos $x(t)$ trayektoriyasi vaqtning t_0 momentida birinchi doiraviy orbitadan boshlanib, vaqtning qandaydir t_1 momentida ikkinchi doiraviy orbitada tugallansin. Bunda boshlang'ich holatlarning M_0 to'plami sifatida kemandi birinchi orbitadagi koordinatalarini, joiz boshlang'ich tezliklarini, va hakoza ya'ni $x(t_0)$ vektorning qiymatlarini olish mumkin. Huddi shu kabi mulohazalarni so'nggi holatlarning M_1 to'plamiga nisbatan ham aytilishi mumkin.

Sifat kriteriyasi bo'lib, kemandi birinchi orbitadan ikkinchi orbitaga olib o'tishda sarflanadigan umumiy yonilg'ich miqdori bo'lishi mumkin.

Shunday qilib, optimal boshqaruv masalasi, shunday $u(t)$ vektor boshqaruvning qiymatini topish talab qilinadiki, unga mos vaqtning t_0 momentida boshlangan $x(t)$ trayektoriyasi birinchi doiraviy orbitada boshlanib, eng oz yonilg'ich sarfi bilan vaqtning qandaydir t_1 momentida ikkinchi doiraviy orbitada tugallansin.

2-masala. Muvozanat holatida turgan fizik mayatnikni qaraymiz. Agar y mayatnikning muvozanat holatidan chetlanishi bo'lsa, u holda kichik amplitudalar bo'yicha mayatnikning tebranish tenglamasi

$$\ddot{y} + y = 0$$

ko'rinishga ega. Faraz qilaylik mayatnikka miqdori bir birlik cheklangan $|u(t)| \leq 1$ tensizlikni qanoatlantiruvchi tashqi u kuch qo'yish mumkin bo'lsin. U holda boshqariladigan mayatnikning tenglamasi

$$\ddot{y} + y = u$$

ko'rinishga ega. $x^1 = y$, $x^2 = \dot{y}$ belgilashlar bilan bu tenglamani (1.1) sistema ko'rinishiga keltiramiz. U holda

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= -x^1 + u \end{aligned} \quad (1.5)$$

Bu holda $x = (x^1, x^2)$ holat vektori hammasi bo'lib ikkita: $x^1 = y$ - mayatnikning muvozanat holatidan chetlanishi va $x^2 = \dot{y}$ - tezlikning chetlanishi. O'chirilgan boshqaruvda, ya'ni $u = 0$ bo'lganda muvozanat holati $x^1 = 0, x^2 = 0$ shartlar bilan

beriladi. Faraz qilaylik, qandaydir tashqi kuchlar ta'siri ostida mayatnik muvozanat holatidan ixtiyoriy $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ holatga chetlangan bo'lsin. Mayatnikning bu holatda bo'lishi fizik nuqtai nazardan bu holatda bo'lishi maqsadga muvofiq emas, shuning uchun mos ravishda $u(t)$ tashqi kuchni tanlab mayatnikni muvozanat holatiga qaytarish lozim. Yana bu holda fizik nuqtai nazardan $u(t)$ boshqaruv bo'lakli uzluksiz bo'lishi talab qilinadi.

Shunday qilib biz quyidagi optimal boshqaruv masalasiga keldik. $|u(t)| \leq 1$ tensizlikni qanoatlantiruvchi shunday bo'lakli uzluksiz $u(t)$ tashqi kuchni tanlash lozimki, mos ravishda mayatnikning $x(t)$ trayektoriyasi, ya'ni (1.5) tenglamaning yechimi boshlang'ich $M_0 = \{x_0\} = \{(x_0^1, x_0^2)\}$ holatdan songgi $M_1 = \{(0,0)\}$ holatga eng qisqa vaqt ichida o'tsin.

1.2. Optimal boshqaruv matematik nazariyasining asosiy masalalari

Yuqorida biz optimal boshqaruv masalasining umumiy tarzda qo'yilishini hamda ikkita misolni tahlil qildik. Optimal boshqaruv masalalarini matematik tekshirishdan avval *optimal boshqaruvning matematik nazariyasi* qanday masalalarni o'z ichiga olishuini qaraymiz.

Boshqariluvchanlik. Dastlab quyidagicha savol tug'ilishi tabiiy, harakatlanayotgan dinamik ob'ektni boshlang'ich holatlarning M_0 to'plamidan so'nggi holatlarning M_1 holatiga olib o'tuvchi hech bo'lmaganda bitta $u(t)$ joiz boshqaruv mavjudmi, ya'ni $x(t)$ holat vektorining trayektoriyasi (1.3) shartni qanoatlantirishi uchun unga mos $u(t)$ joiz boshqaruv mavjudmi? Agar bu masala ijobiy hal etilsa, biz qaralayotgan ob'ekt M_0 to'plamidan M_1 to'plamga *boshqariluvchan* deb aytamiz. Aks holda optimal boshqaruv masalasining qo'yilishi ma'nosini yo'qotadi.

Optimal boshqaruvning mavjudligi. Agar boshqaruvchanlik masalasi ijobiy hal etilsa, ya'ni dinamik ob'ektni boshlang'ich M_0 to'plamidan so'nggi M_1 to'plamga olib o'tuvchi qandaydir $u(t)$ joiz boshqaruv mavjud bo'lsa, u holda *optimal boshqaruvning mavjudligini* aniqlash zarurdir.

Muxandislar muayan masalalarni yechishda bunday masala qo'ymaydilar, imkoniyatlar bo'yicha eng maqbul boshqaruvni tanlaydilar. Matematik nuqtai nazardan bu masala o'ta muhim bo'lib, agar optimal boshqaruv mavjud bo'lmasa, u holda kelgusida uni izlash ma'noga ega emas. Matematikada biz qandaydir haqiqiy fizik ob'ektning modeliga ega

bo'lamiz , va modelda optimal boshqaruvning mavjud emasligi model noto'g'ri tuzilganligidan dalolat beradi.

Optimallikning zaruriy sharti. Agar qaralayotgan masalada optimal boshqaruv mavjud bo'lsa, bu optimal boshqaruvni topishning usullarini rivojlantirishimiz kerak. Eng sodda masalalarda ham berilgan ob'ektni boshlang'ich holatlarning M_0 to'plamidan so'nggi holatlarning M_1 holatiga olib o'tuvchi ko'plab $u(t)$ joiz boshqaruvlar mavjud bo'liishi mumkin. Shuning uchun oddiy tanlash bilan barcha joiz boshqaruvlarni optimallikka tekshirib chiqish qiyin. Optimallikka da'vogar bo'lgan barcha boshqaruvlarni qanday tanlash mumkin mavzusida masala yuzaga keladi. Bu masalani yechishda *optimallikning etarli sharti* imkoniyat beradi. Shuning uchun optimal boshqaruvni optimallikning zaruriy shartini qanoatlantiruvchi barcha joiz boshqaruvlar orasidan izlash kerak. Bunday optimallikning zaruriy sharti *Pontryagin maksimum prinsipidir*. Dastlab harakat dinamikasi (1.1) ko'rinishdagi tenglamalar bilan berilgan boshqaruv sistemalari uchun bu birinchi bor 1953 yilda akademik Lev Semenovich Pontryagin tomonidan gipoteza ko'rinishida aytilgan, keyin uning o'quvchilari tomonidan isbotlangan. Mohiyatiga ko'ra optimal boshqaruvning matematik nazariyasi optimallikning zaruriy shartidan boshlangan. Ba'zi masalalarda maksimum prinsipini chekli sondagi boshqaruvlar qanoatlantirganligi sababli ularning orasidan optimalini tanlash qiyin emas. Maksimum prinsipining to'la isboti 1961 yilda L.S.Pontryagin va uning o'quvchilari tomonidan [1] kitobda e'lon qilingan. Maksimum prinsipini qo'llash darhol ko'plab qiziqarli muxandislik masalalarini yechish imkoniyatini hamda ko'plab boshqa masalalarida optimal boshqaruvni topishga yaqinlashtirdi. Shu sababli 1962 yilda bu kitob Lenin mukofoti bilan taqdirlangan-ligi bejiz emas.

Optimallikning yetarli sharti. Ko'plab masalalarda optimallikning zaruriy sharti optimallika talabgor bo'lgan boshqaruvlar sinfini qisqartirish imkoniyatini bersada bu sinf etarlicha keng bo'lib qolaveradi. Bu sinfdagi haqiqiy optimal boshqaruvini tanlash imkoniyatini optimallikning etarli sharti beradi. Bu sinfdagi qandaydir $u(t)$ boshqaruv optimallikning yetarli shartini qanoatlantirsa, bu bilan uning optimalligi garantiyalanadi. Albatta optimallikning yetarli shartini bir emas bir nechta boshqaruvlar qanoatlantirishi mumkin. Bu bilan bu boshqaruvlarning hammasi optimaldir, ya'ni sifat kriteriyasini ifodolovchi funksional bu boshqaruvlarda bir hil, shu bilan birga minimal qiymat qabul qiladi.

Optimal boshqaruvining yagonaligi. Muhandislar uchun optimal boshqaruvining yagonaligini bilish juda muhimdir. Agar u yagona bolsa, u holda muayan boshqariladigan

ob'ektlarda yagona optimal boshqaruvini qo'llash oson kechadi. Shuning uchun optimal boshqaruvining yagonalik masalasi ham optimal boshqaruv matematik nazariyasining asosiy masalalari qatoriga kiradi.

Albatta biz optimal boshqaruv masalasini echishda yuzaga keladigan barcha muammolarni sanab chiqmadik faqat asosiylarini keltirdik. Bu muammolarni muayyan boshqaradigan ob'ekt uchun ko'rsatilgan savollarni ketma-ketlikda tekshirish shart emas. Masalan, dastlab optimal boshqaruvning mavjudligi aniqlangan bo'lsa va biz boshlang'ich holatlarning M_0 to'plamini so'nggi M_1 holatiga olib o'tuvchi va optimallikning zaruriy shartini qanoatlantiruvchi yagona $u(t)$ boshqaruvni topgan bo'lsak, u holda $u(t)$ boshqaruvning optimalligi garantiyalanadi.

Tezkorlikning chiziqli masalasi. Shunday qilib biz optimal boshqaruv masalasining umumiy ko'rinishda qo'yilishini va bu masalani echishda yuzaga keladigan ba'zi asosiy muamolarini qarab chiqdik. Bu kitobda biz asosan optimal boshqaruv matematik nazariyasining soddaroq masalasi bo'lgan chiziqli tezkorlik masalasini o'rganamiz.

Bu ob'ektning harakat dinamikasi

$$\dot{x} = Ax + u, \quad (1.6)$$

Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi bilan yoziladi, bu yerda x -ob'ektning n o'lchamli holat vektori, u - n o'lchamli boshqaruv vektori bo'lib, boshqaruvqa $u(t) \in U$ cheklanish qo'yilgan, A - $n \times n$ o'lchamli o'zgarmas matritsa. Qandaydir $u(t)$ joiz boshqaruvni va ob'ektning $x(t_0) = x_0$ boshlang'ich holatini bilgan holda, ob'ektning $x(t)$ holat vektorini (1.6) differensial tenglamalar sistemasining yagona yechimi sifatida hosil qilish mumkin. Joiz boshqaruvlar sinfi, keyinroq yordamchi matematik tushunchalar o'rganilgandan keyin aniqlanadi.

O'bektning boshlang'ich va so'nggi holatlari bo'lgan M_0 va M_1 to'plamlar n o'lchamli vektor fazoning qandaydir bo'sh bo'lmagan kompakt qism to'plamlari sifatida olinadi. Sifat kriteriysi bo'lib, M_0 to'plamdan M_1 to'plamga o'tish uchun sarflangan vaqt, ya'ni

$$J(u(t), x(t)) = t_1 - t_0$$

bo'ladi. Bunday sifat kriteriysi (1.4) sifat kriteriysidan integral ostidagi funksiya

$$f^0(t, x(t), u(t)) \equiv 1$$

bo'lganda hosil bo'ladi.

Shunday qilib, biz *chiziqli tezkorlik masalasining* qo'yilishiga keldik. Bu masala obektni boshlang'ich holatlarning M_0 to'plamida holatlarning so'nggi M_1 to'plamiga eng qisqa vaqt ichida olib o'tuvchi $u^*(t)$ joiz boshqaruvni va unga mos (1.6) tenglamaning $x^*(t)$ yechimini topishdan iborat. Yuqorida keltirilgan 2-misol chiziqli tezkorlik masalasi bo'ladi.

Optimal boshqaruv nazariyasi bilan birinchi tanishish uchun chiziqli tezkorlik masalasining tanlanilishi bejiz emas. Bu masala ko'proq ustunlikka ega.

Birinchidan, (1.6) chiziqli differensial tenglamalar uchun $x(t)$ trayektoriyani $u(t)$ boshqaruvga nisbatan oshkor ko'rinishda yozish mumkin. Bu esa optimal boshqaruv matematik nazariyasining asosiy masalalarini effektiv tekshirish imkoniyatini beradi.

Ikkinchidan, chiziqli tezkorlik masalalarida optimal boshqaruvning umumiy masalasidagi barcha harakterli qiyinchiliklar yaqqol namayon bo'ladi.

2.2-§ O'ng cheti erkin bo'lgan optimal boshqaruv masalasi uchun maksimum prinsipining isboti.

Mahkamlangan vaqt bo'yicha o'ng cheti erkin bo'lgan quyidagi optimal boshqaruv masalasini qaraymiz.

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u) dt \rightarrow \inf \quad (1)$$

$$(2)$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u) \quad (3)$$

$$u \in U \quad (4)$$

$$x(t_0) = x_0$$

Bu erda $f : R \times R^n \times R^r \rightarrow R, \varphi : R \times R^n \times R^r \rightarrow R^n$ funksiyalar

$(t, x_x(t), u_x(t)), t \in [t_0, t_1]$ nuqtani o'zida saqllovchi $G \subset R \times R^n \times R^r$ sohada

argumentlari bo'yicha uzluksiz differentsiallanuvchi funksiyalar, $U \subset R^r$ berilgan to'plam.

Bunday masala uchun optimal boshqaruv bo'lakli uzluksiz bo'lsa maksimum prinsipi oson isbotlanadi.

Dastlab biz qanday tasdiqni isbotlashni mulohaza qilaylik.

$(x_x(t), u_x(t))$ optimal boshqariladigan jarayon bo'lib, $u_x(t)$ boshqaruv bo'lakli uzluksiz bo'lsin. U holda biz bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\psi_0 \geq 0$ soni va $\psi(t)$ vektor funksiyasi mavjud bo'lib, ular uchun:

A) $\psi(t)$ vektor funksiya $\Psi(t_1) = 0$ boshlanqich shart bo'yicha

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \psi_0 \frac{\partial f(t, x_x(t), u_x(t))}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(t, x_x(t), u_x(t))}{\partial x} \cdot \psi$$

tenglamani qanoatantirilishini

B) deyarli barcha $t \in [t_0, t_1]$ lar uchun

$$\max_{u \in U} H(t, x_x(t), u, \psi(t), \psi_0) = H(t, x_x(t), u_x(t), \psi(t), \psi_0)$$

munosabat bajarilishi kerak, bu erda

$$H(t, x_x(t), u, \psi(t), \psi_0) = -\psi_0 f(t, x, u) + \psi \cdot \varphi(t, x, u)$$

Agarda $\psi_0 = 0$ bo'lsa, u holda $\psi(t)$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \varphi(t, x_x(t), u_x(t))}{\partial x} \cdot \psi$$

Tenglamaning $\psi(t_1) = 0$ shart bo'yicha yechimi bo'ladi.

Shuning uchun, $\psi_0 = 0$ shartni e'tibordan chetda qoldiramiz va $\varphi_0 = 1$ deb olamiz.

Demak biz $\psi(t)$ funksiya

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \varphi(t, x_x(t), u_x(t))}{\partial x} \cdot \psi + \frac{\partial f(t, x_x(t), u_x(t))}{\partial x} \quad \text{tenglamaning } \psi(t_1) = 0 \quad \text{shartni}$$

qanoatlantiruvchi echimi bo'lsa, u holda

$$\max_{u \in U} [-f(t, x_x(t), u) + \psi \cdot \varphi(t, x_x(t), u)] = -f(t, x_x(t), u_x(t)) + \psi \cdot \varphi(t, x_x(t), u_x(t))$$

Tenglik deyarli barcha $t \in [t_0, t_1]$ larda bajarilishini ko'rsatishimiz kerak.

Biz $u_x(t)$ boshqaruvining har bir (t_0, t_1) oraliqdagi uzluksizlik nuqtasi uchun (6) tenglik bajarilishini isbotlaymiz. Isbot $u_x(t)$ boshqaruvni "ignasi" variatsiyalash orqali aniqlanadi.

τ nuqta $u_x(t)$ boshqaruvining uzluksizlik nuqtasi bo'lsin. Qandaydir $v \in U$ elementni mahkamlaymiz va

$$u(t; \tau, \lambda) = u_x(t) = \begin{cases} u_x(t), & t \notin [\tau - \lambda, \tau) \\ v, & t \in [\tau - \lambda, \tau) \end{cases} \quad (7)$$

"ignali" boshqaruvni qaraymiz.

$x_\lambda(t) = x(t; \tau; \lambda)$ bilan (2) tenglamaning $x(t_0) = x_0$ boshlanqich shartni qanoatlantiruvchi $u_\lambda(t)$ boshqaruvga mos yechimi bo'lsin.

Shartga ko'ra agar $t_0 \leq t \leq \tau - \lambda$ bo'lsa $x_\lambda(t) = x_x(t)$

Bundan tashqari $\dot{x} = \varphi(t, x, v)$ tenglama uchun Koshi masalasi $(\tau, x_x(\tau))$ nuqta atrofida yechimga ega bo'lib, yetarlicha kichik λ sonlari uchun $x_\lambda(t)$ yechim bu atrofda uzluksiz.

Demak,

$$x_x(\tau) = x_x(\tau - \lambda) + \lambda \dot{x}_x(\tau - \lambda) + O(\lambda) = x_x(\tau - \lambda) + \lambda \varphi(\tau - \lambda, x_x(\tau - \lambda), u_x(\tau - \lambda)) + O(\lambda)$$

Xuddi shu kabi

$$x_\lambda(\tau) = x_x(\tau - \lambda) + \lambda \varphi(\tau - \lambda, x_x(\tau - \lambda), v) + O(\lambda)$$

Bundan

$$y(\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{x_\lambda(\tau) - x_x(\tau)}{\lambda}$$

limit mavjud va u

$$y(\tau) = \varphi(\tau, x_x(\tau), v) - \varphi(\tau, x_x(\tau), u_x(\tau))$$

ko'rinishga ega.

$[\tau, t_1]$ kesmada $x_x(\cdot)$ va $x_\lambda(\cdot)$ yechimlar

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u_x(t))$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Differensial tenglama yechimining boshlanqich shartlar bo'yicha uzluksizligi va differentsiallanuvchanliidan yetarlicha kichik $\lambda > 0$ soni uchun $x_\lambda(t)$ vektor funksiya $[\tau, t_1]$

kesmada aniqlangan bo'lib, $x_x(t)$ vektor funksiyaga tekis yaqinlashadi, hamda

$$y = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{x_\lambda(t) - x_x(t)}{\lambda}$$

limit har qanday $t \in [\tau, t_1]$ uchun mavjud.

$t > \tau$ bo'lganda

$$x_\lambda(t) = x_\lambda(\tau) + \int_{\tau}^t \varphi(s, x_\lambda(s), u_x(s)) ds,$$

$$x_x(t) = x_x(\tau) + \int_{\tau}^t \varphi(s, x_\lambda(s), u_x(s)) ds,$$

bo'lgani uchun

$$\frac{x_\lambda(t) - x_x(t)}{\lambda} = \frac{x_\lambda(\tau) - x_x(\tau)}{\lambda} + \int_{\tau}^t \frac{\varphi(s, x_\lambda(s), u_x(s)) - \varphi(s, x_x(s), u_x(s))}{\lambda} ds$$

Bu tenglikdan $\lambda \downarrow 0$ da limitga o'tilsa,

$$y(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{x_\lambda(t) - x_x(t)}{\lambda} = y(\tau) + \int_{\tau}^t \frac{\partial \varphi(s, x_\lambda(s), u_x(s))}{\partial x} \cdot y(s) ds$$

tenglik hosil bo'ladi.

Bu erda integral ostida limitga o'tish mumkin, chunki, φ funksiya x bo'yicha uzluksiz differentsiallanuvchi, $u_x(t)$ esa chegralangan vektor funksiya.

Demak, $y(t)$
 $[\tau, t_1]$ kesmada

$$y(\tau) = \varphi(\tau, x_x(\tau), v) - \varphi(\tau, x_x(\tau), u_x(\tau))$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \varphi(t, x_x(t), u_x(t))}{\partial x} \cdot y$$

tenglamaning

(8)

boshlanqich shartni qanoatlantiruvchi yechimi $t \geq \tau$ bo'lganda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\langle \psi(t), y(t) \rangle) &= \langle \dot{\psi}(t), y(t) \rangle + \langle \psi(t), \dot{y}(t) \rangle = \\ &= - \langle \frac{\partial \varphi(t, x_x(t), u_x(t))}{\partial x} \cdot \psi(t), y(t) \rangle + \langle \frac{\partial f(t, x_x(t), u_x(t))}{\partial x}, y(t) \rangle \\ &+ \langle \psi(t), \frac{\partial f(t, x_x(t), u_x(t))}{\partial x}, y(t) \rangle = \langle \frac{\partial f(t, x_x(t), u_x(t))}{\partial x}, y(t) \rangle \end{aligned}$$

$\psi(t_1) = 0$ bo'lgani uchun bu tenglikni integrallab,

$$\langle \psi(t), y(t) \rangle = - \int_t^{t_1} \langle \frac{\partial f(s, x_x(s), u_x(s))}{\partial x}, y(s) \rangle ds$$

$$\langle \psi(\tau), \varphi(\tau, x_x(\tau), u_x(\tau)) - \varphi(\tau, x_x(\tau), v) \rangle = \int_\tau^t \langle \frac{\partial f(s, x_x(s), u_x(s))}{\partial x}, y(s) \rangle ds$$

tenglikni hosil qilamiz.

Xususiy	holda	(8)ga	ko'ra
(9) tenglik o'rinli. $(x_x(t), u_x(t))$	juftlik	optimal	jarayon bo'lgani uchun
$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{J(x_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot)) - J(x_x(\cdot), u_x(\cdot))}{\lambda} \geq 0$			

Bu limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{J(x_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot)) - J(x_x(\cdot), u_x(\cdot))}{\lambda} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau-1}^{\tau} [f(t, x_\lambda(t), v) - f(t, x_\lambda(t), u_x(t))] dt +$$

$$+ \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\tau}^{t_1} [f(t, x_\lambda(t), u_x(t)) - f(t, x_x(t), u_x(t))] dt = f(\tau, x_x(\tau), v) - f(\tau, x_x(\tau), u_x(\tau)) +$$

$$+ \int_{\tau}^{t_1} \left\langle \frac{\partial f(t, x_x(t), u_x(t))}{\partial x}, y(t) \right\rangle dt$$

bundan (9) tenglik e'tiborga olinsa

$$\langle \psi(\tau), \varphi(\tau, x_x(\tau), u_x(\tau)) \rangle - f(\tau, x_x(\tau), u_x(\tau)) \geq \langle \psi(\tau), \varphi(\tau, x_x(\tau), v) \rangle - f(\tau, x_x(\tau), v)$$

tenglik hosil bo'ladi.

Ammo τ $u_x(t)$ boshqaruvning ixtiyoriy uzluksizlik nuqtasi bo'lgani uchun (6)

tenglik, ya'ni

$$\max_{u \in U} H(t, x_x(t), u, \psi(t), \psi_0) = H(t, x_x(t), u(t), \psi(t), \psi_0)$$

Pontryagin maksimum prinsipi $u_x(t)$ boshqaruvning barcha uzluksizlik nuqtalarida bajariladi. Teorema isbotlandi.

2.3-§. Umumiy ko'rinishdagi optimal boshqaruv masalasi uchun Pontryagin maksimum prinsipi

2.3.1 Masalaning qo'yilishi.

Pontryagin formasidagi optimal boshqaruvning umumiy masalasini

$$J_0(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t)) dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned}
J_i(\xi) &= \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t)) dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \leq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m'; \\
J_i(\xi) &= \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t)) dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0; \quad i = m' + 1, \dots, m; \\
\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) &= 0, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{8}$$

$$u(t) \in U, \quad \forall t \in \Delta \tag{9}$$

ko'rinishida ifodalash mumkin, bu erda $\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, $x(\cdot) \in BC'(\Delta, R^n) - \Delta$ kesmada bo'lakli silliq, qiymatlarni R^n fazodan qabul qiluvchi vektor funktsiyalar fazosi; mos ravishda $x(\cdot) \in BC(\Delta, R^r)$ - qiymatlarni R^r fazodan qabul qiluvchi, Δ kesmada bo'lakli uzluksiz vektor funktsiyalar fazosi. $t_0, t_1 \in \Delta$ - berilgan kesma, $T \subset \Delta - u(\cdot)$ boshqaruv funktsiyasining uzluksizlik nuqtalari to'plami.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorga holat vektori, $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ vektorga boshqaruv vektori deb qaraymiz. (9) differentsial tenglama differentsial cheklanish deyilib, tenglik $u(\cdot)$ boshqaruv funktsiyasining barcha uzluksizlik nuqtalarida bajariladi.

Masalada bayon etilgan barcha cheklanishlarni qanoatlantiruvchi

$\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ elementga joiz boshqaruv jarayoni deyiladi.

Agar

$\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ joiz boshqaruv jarayoni uchun

$\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ joiz jarayon mavjud bo'lib, $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\| < \delta$, $|t_0 - \hat{t}_0| < \delta$, $|t_1 - \hat{t}_1| < \delta$ shartlar

bajarilganda

$J_0(\xi) \geq J_0(\hat{\xi})$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ joiz jarayonga lokal optimal yoki kuchli ma'nodagi optimal jarayon deyiladi.

Kuchli ma'nodagi optimal jarayonni izlashda quyidagi Lagranj

formasidagi L.S.Pontryaginn teoremasidan foydalaniladi.

2.3.2 .Optimallikning zaruriy sharti bo'lgan maksimum prinsipi

haqidagi teoremaning ifodalanishi

Teorema.

$\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ - berilgan masalaning kuchli ma'nodagi optimal jarayoni bo'lsin.

$f_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$ va φ funktsiyalar hamda ularning x bo'yicha xususiy hosilalari

$\{(t, \hat{x}(t)) | t \in \Delta\} \times U$ to'plamning qandaydir atrofida uzluksiz funktsiyalar,

$\psi_i(\hat{t}_0, \hat{x}(t_0), \hat{t}_1, \hat{x}(t_1)), i = 0, 1, 2, \dots, m$ funktsiyalar esa

$(\hat{t}_0, \hat{x}(t_0), \hat{t}_1, \hat{x}(t_1))$ nuqta atrofida uzluksiz differentsiallanuvchi (silliqlik sharti) bo'lsin.

$$\Lambda = \int_{t_0}^{t_1} (f(t, x, u) + \psi(t)(\dot{x} - g(t, x, u)))dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \quad \text{qaralayotgan}$$

masalaning Lagranj funktsiyasi bo'lib, bu erda mos ravishda

Lagranj funktsiyasining

$$f(t, x, u) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, x, u), \quad l = \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \quad \text{integral va terminal hadlari bo'lsin.}$$

U holda shunday

$(\lambda, \psi) \in R^{m+1} \times BC'(\Delta, R^n) \quad (\lambda, \psi(\cdot)) \neq 0$ Lagranj ko'paytuvchilari topiladiki, bunda quyidagi shartlar bajariladi:

a) $L(t, x, \dot{x}, u) = f(t, x, u) + \psi(\dot{x} - g(t, x, u))$ Lagranj funktsionalining integral hadi uchun x bo'yicha statsionarlik sharti bo'lgan Eyler tenglamasi:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0, \quad \forall t \in T \Leftrightarrow -\dot{\psi}(t) + \hat{f}_x(t) - \psi(t) \hat{g}_x(t) = 0;$$

b) Lagranj funktsionalining

$$l = \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \quad \text{terminal hadi va} \quad L(t, x, \dot{x}, u) = f(t, x, u) + \psi(\dot{x} - g(t, x, u))$$

integral hadi uchun x bo'yicha transversallikning

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{L}_x(t_0) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_0) = \hat{L}_{x(t_0)}, \quad \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{L}_x(t_1) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_1) = -\hat{L}_{x(t_1)} \quad \text{шартлари};$$

c) u bo'yicha

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \Leftrightarrow \min_{u \in U} \{f(t, \hat{x}(t), u) - \psi(t)g(t, \hat{x}(t), u)\} = \hat{f}(t) - \psi(t)\hat{g}(t), \quad \forall t \in T$$

optimallik sharti;

d) chetlari qo'zg'aluvchi bo'lgan holatlar uchun statsionarlikning

$$\hat{\Lambda}_{t_0}(\hat{t}_0) = 0 \Leftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)}\hat{x}(t_0) = 0$$

$$\hat{\Lambda}_{t_1}(\hat{t}_1) = 0 \Leftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)}\hat{x}(t_1) = 0$$

shartlari;

e) $\lambda_i J_i(\hat{\xi}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m' - \text{yumshoqlik sharti};$

f) $\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m' - \text{nomanfiylik shartlari bajariladi.}$

2.3.3. Teoremaning isboti. A) *Ignali varansiyalash, ignalar paketi.* $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ lokal optimal yoki kuchli ma'nodagi optimal jarayonni

ignali varantsiyalar to'plamida (u boshqaruvning ignali variantsiyalari to'plamida) aniqlangan chekli parametric oilaga kiritib bu jarayonni variantsiyalaymiz. Buning uchun N natural sonini, $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N), \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_N$ nuqtalar to'plamini, $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ boshqaruvlarni, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ uzunliklarni ifodalovchi sonlarni maxkamlamiz, bunda $\tau_i \in T, v_i \in U, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$.

$$\Delta_i = [\tau_i - (N-i)|\alpha| - \alpha_i, \tau_i - (N-i)|\alpha|) |\alpha| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_N^2}$$

oraliqlar yordamida qurilgan qurilgan

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} \hat{u}(t), & t \in \Delta \setminus \bigcup_{i=1}^N \Delta_i, \\ v_i, & t \in \Delta_i \end{cases}$$

boshqaruvga (τ, v, α) ignalar paketida aniqlangan $\hat{u}$ boshqaruvning ignali variantsiyasi deyiladi. Ba'zi τ_i nuqtalar ustma-ust tushishlari mumkin. Biroq α_i uzunlikka ega bo'lgan T to'plamda joylashgan Δ_i yarim ochiq oraliqlar shunday tuzilganki, ularning hech biri yetarlicha kichik $|\alpha|$ larda o'zaro kesishmaydilar.

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u_\alpha), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

tenglamaning yechimi bo'lgan (t_0, x_0) nuqta va (τ, v) maxkamlangan ignalar paketi bo'yicha aniqlangan $x(t; t_0, x_0, \alpha)$ funksiyaga $\hat{x}$ funksiyaning ignali variantsiyasi deyiladi. Agar (t_0, x_0) nuqta $(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$ ($\hat{x}_0 = \hat{x}(\hat{t}_0)$) nuqtaning atrofida joylashsa, u holda yetarlicha kichik $|\alpha|$ larda differensial tenglamaning yechimi butun Δ krsmada aniqlangan va mavjud bo'lishini keyinroq ko'rsatamiz.

B) Yechim mavjudligi haqidagi teorema

Teorema. Ushbu

$$\dot{x} = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (t_0 \in \text{int } \Delta)$$

tenglama bilan yozilgan Koshi masalasi chekli Δ kesmada aniqlangan $\hat{x} \in BC^1(\Delta, R^n)$ yechimga ega bo'lib, bunda F funksiya

$$\Gamma_{\hat{x}} = \{(t, \hat{x}(t)): t \in \Delta\}$$

trayektoriyaning qandaydir G atrofida uzluksiz va x bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin.

U holda $\Gamma_{\hat{x}} = \{(t, \hat{x}(t)): t \in \Delta\}$ trayektoriyaning shunday $G' \subset G$ atrofi mavjudki, ixtiyoriy $(t_0, x_0) \in G'$ nuqta uchun Koshi masalasining Δ kesmada aniqlangan yagona $x(\cdot; t_0, x_0)$ mavjud bo'lib, bunda $x(t; t_0, x_0)$ funksiya $\Delta \times G'$ to'plamda uzluksiz differensiallanuvchi va

$$x_{z_0}(t; t_0, x_0) \Big|_{z_0=\hat{x}(t_0)} = \Omega(t, t_0),$$

$$x_{t_0}(t; t_0, x_0) \Big|_{z_0=\hat{x}(t_0)} = -\Omega(t, t_0)F(t_0, \hat{x}(t_0)),$$

tengliklar bajariladi, bu yerda $\Omega(t, t_0)$ matritsa

$$\dot{\Omega}(t, t_0) = F_x(t, \hat{x}(t))\Omega(t, t_0), \quad \Omega(t_0, t_0) = I (\text{birlikmatritsa})$$

tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi.

Bu differensial tenglama yechimining boshlang'ich shart va parametrlarga nisbatan uzluksizligi va differensiallanuvchanligi haqidagi klassik teoremadir.

Ignali variantsiyalash haqidagi lemma. (τ, v, α) ignalar paketida τ va v to'plamlar maxkamlangan bo'lsin. U holda agar

$$0 < |\alpha| \leq \varepsilon, \|x_0 - \hat{x}_0\| < \varepsilon, |t - \hat{t}_0| < \varepsilon$$

bo'lsa $\Delta_i \subset T$ mansublik bajariladigan $\varepsilon > 0$ soni mavjud. bundan tashqari (1) differensial tenglama Δ kesmada aniqlangan yagona $x(t; t_0, x_0, \alpha)$ yechimga ega bo'lib, bu yechim $(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, 0)$ nuqtaning qandaydir atrofida uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib,

$$(t_0, x_0, \alpha) \rightarrow (\hat{t}_0, \hat{x}_0, 0) \text{ bo'lganda } \|x(\cdot, t_0, x_0, \alpha) - \hat{x}(\cdot)\|_{C(\Delta, R^n)} \rightarrow 0$$

va

$$x_{z_0}(t; \hat{t}_0, \hat{x}_0, 0) = \Omega(t, t_0),$$

$$x_{t_0}(t; \hat{t}_0, \hat{x}_0, 0) \big|_{z_0=\hat{x}(t_0)} = -\Omega(t, t_0)\hat{\phi}(t_0)$$

tengliklar bajariladi, bu yerda $\Omega(t, t_0)$ matritsa

$$\dot{\Omega}(t, t_0) = \hat{\phi}_x(t)\Omega(t, t_0), \quad \Omega(t_0, t_0) = I(\text{birlikmatritsa})$$

tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi.

Lemmani isbotlash yo'li haqida fikrlashamiz.

Agarda $\hat{u}$ boshqaruv uzluksiz bo'lsa, u holda lemmaning isboti differensial tenglama yechimining boshlang'ich shart va parametrlarga nisbatan uzluksizligi va differensiallanuvchanligi haqidagi klassik teoremdan darhol kelib chiqadi.

Agarda $\hat{u}$ boshqaruv bo'lakli uzluksiz bo'lsa, u holda lemmaning isboti differensial tenglama yechimining boshlang'ich shart va parametrlarga nisbatan uzluksizligi va differensiallanuvchanligi haqidagi klassik teoremani har bir uzluksizlik oralig'ida qo'llash bilan keltirib chiqarish mumkin.

C) *Chekli o'lchamli masalaga keltirish.*

Yana N soni va (τ, ν, α) ignalar paketida τ va ν to'plamlar mahkamlangan bo'lsin.

$$z := (t_1, t_0, x_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N) \in R^{2+n+N}$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_i(z) &:= J_i(x(\cdot, t_0, x_0, \alpha), u_\alpha, t_0, t_1) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t; t_0, x_0, u_\alpha), u_\alpha(t)) dt + \psi_i(t_0, x_0, t_1, x(t_1, t_0, x_0, \alpha)) \end{aligned}$$

belgilashlar kiritamiz, hamda tenglik va tengsizliklar ko'rinishidagi cheklanishlar bilan chekli o'lchamli

$$\begin{aligned} \bar{J}_0(z) \rightarrow \min; \quad \bar{J}_i(z) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m'; \quad \bar{J}_i(z) = 0, \quad i = m' + 1, \dots, m; \\ \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (P_{\tau, \nu})$$

masalani qaraymiz. Ignali variatsiyalash haqidagi lemmaga ko'ra $\bar{J}_i$ funksiyalar qandaydir

$\hat{z} := (\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, 0) \in R^{2+n+N}$ nuqta atrofida uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, $C(\Delta, R^n)$ fazo metrikasida $z \rightarrow \hat{z}$ bo'lganda $\hat{x}(\cdot, t_0, x_0, \alpha), t_0, t_1 \rightarrow (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_1, \hat{t}_0)$. $\hat{\xi}$ element (P) masalaning local minimumi bo'lgani uchun, u holda $\hat{z} \in \text{lok min}(P_{\tau, \nu})$. Shuning uchun $(P_{\tau, \nu})$ masalaga tenglik va tengsizliklar ko'rinishidagi cheklanishlar bilan chekli o'lchamli

masalalarga Lagranj prinsipini qo'llash mumkin. Bu prinsipga ko'ra ($P_{\tau, \nu}$) masala uchun bir vaqtda nolga teng bo'lmagan

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N \quad (\lambda_i = \lambda_i(\tau, \nu), \mu_j = \mu_j(\tau, \nu))$$

Lagranj ko'paytuvchilari mavjudki, bunda

$$\bar{\Lambda} = \sum_{i=0}^m \lambda_i \bar{J}_i(z) - \sum_{j=1}^N \mu_j \alpha_j = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t; t_0, x_0, \alpha), u_\alpha(t)) dt + l(t_0, x_0, t_1, x(t_1; t_0, x_0, \alpha)) - \sum_{j=1}^n \mu_j \alpha_j,$$

bu yerda Lagranj funksionalining $l = \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ terminal va

$L(t, x, \dot{x}, u) = f(t, x, u) + \psi(\dot{x} - g(t, x, u))$ integral hadlari учун quyidagi shartlar bajariladi:

$$\text{statsionarlik: } \bar{\Lambda}_z = 0;$$

yumshoqlik

sharti:

$$\lambda_i \bar{J}_i(\hat{z}) = 0 \Leftrightarrow (\lambda_i J_i(\hat{\xi}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m' (\Leftrightarrow e)), \mu_j \alpha_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N;$$

$$\text{nomanfiylik: } \lambda_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m' (\Leftrightarrow f)), \mu_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

D) chekli o'lchamli masalada zaruriy shartlarni almashtirish.

ψ bilan

$$\dot{\psi} + \psi \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \quad (a)$$

$$\text{tenglamaning} \quad \psi(\hat{t}_1) = -\frac{\partial l}{\partial x_1} \quad (b_1)$$

shartni qanoatlantiruvchi yechimini belgilaymiz. (a) tenglamaning (b₁) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimining mavjudligi va yagonaligi chiziqli sistemalar uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremdan kelib chiqadi. ψ va Ω funksiyalarning aniqlanishiga ko'ra

$$\frac{d}{dt}(\psi \Omega) = \dot{\psi} \Omega + \psi \dot{\Omega} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \Omega - \psi \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \Omega + \psi \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \Omega = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \Omega$$

tenglik kelib chiqadi. Bundan

$$\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \Omega dt = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \frac{d}{dt} (\psi \Omega) dt = \psi(\hat{t}_1) \Omega(\hat{t}_1) - \psi(\hat{t}_0) \Omega(\hat{t}_0) = (b_1) = -\frac{\partial \hat{l}}{\partial x_1} \Omega(\hat{t}_1) - \psi(\hat{t}_0). \quad (*)$$

Endi argument orttirmasi haqidagi lemmadan va ignali variatsiyalar haqidagi lemmada keltirilgan formuladan foydalanib, $\bar{\Lambda}$ Lagranj funksiyasining $\hat{x}$ nuqtadagi statsionarlik shartini yozamiz.

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{\alpha_j}(\hat{z}) &= f(\tau_j, \hat{x}(\tau_j), v_j) - \hat{f}(\tau_j) - \psi(\tau_j)(\varphi(\tau_j, \hat{x}(\tau_j), v_j) - \hat{\varphi}(\tau_j)) - \mu_j = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(\tau_j, \hat{x}(\tau_j), v_j) - \hat{f}(\tau_j) - \psi(\tau_j)(\varphi(\tau_j), \hat{x}(\tau_j), v_j) - \hat{\varphi}(\tau_j) = \mu_j \geq 0, \quad (c_{\tau, v}) \\ j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

$$\bar{\Lambda}_{z_0}(\hat{z}) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \hat{f}}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial z_0}(t; \hat{t}_0, \hat{x}_0, 0) dt + \frac{\partial \hat{l}}{\partial x_0} + \frac{\partial \hat{l}}{\partial x_1} \frac{\partial x}{\partial z_0}(\hat{t}_1; \hat{t}_0, \hat{x}_0, 0).$$

Endi (2) va (*) munosabatlarni ketma-ket qo'llash bilan bu munosabatni ko'rinishini o'zgartiramiz.

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{z_0}(\hat{z}) &= \int \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \Omega dt + \frac{\partial \hat{l}}{\partial z_0} + \frac{\partial \hat{l}}{\partial z_1} \Omega(\hat{t}_1) = -\frac{\partial \hat{l}}{\partial x_1} \Omega(\hat{t}_1) - \psi(\hat{t}_0) + \frac{\partial \hat{l}}{\partial z_0} + \frac{\partial \hat{l}}{\partial x_1} \Omega(\hat{t}_1) = \\ &= -\psi(\hat{t}_0) + \frac{\partial \hat{l}}{\partial z_0} = 0; \end{aligned} \quad (b_0)$$

$$\bar{\Lambda}_{t_0}(\hat{z}) = -\hat{f}(\hat{t}_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \hat{f}(t)}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial t_0}(t; \hat{t}_0, \hat{x}_0, 0) dt + \frac{\partial \hat{l}}{\partial t_0} + \frac{\partial \hat{l}}{\partial x_1} \frac{\partial x}{\partial t_0}(\hat{t}_1; \hat{t}_0, \hat{x}_0, 0).$$

Endi (3) va (*) munosabatlarni ketma-ket qo'llash bilan bu munosabatni ko'rinishini o'zgartiramiz.

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{t_0}(\hat{z}) &= -\hat{f}(\hat{t}_0) - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \hat{f}(t)}{\partial z} \Omega(t) \hat{\varphi}(\hat{t}_0) dt + \frac{\partial \hat{l}}{\partial t_0} - \frac{\partial \hat{l}}{\partial x_1} \Omega(\hat{t}_1) \hat{\varphi}(\hat{t}_0) = -\hat{f}(\hat{t}_0) + \frac{\partial \hat{l}}{\partial x_1} \Omega(\hat{t}_1) \hat{\varphi}(\hat{t}_0) + \\ &+ \psi(\hat{t}_0) \hat{\varphi}(\hat{t}_0) + \frac{\partial \hat{l}}{\partial t_0} - \frac{\partial \hat{l}}{\partial x_1} \Omega(\hat{t}_1) \hat{\varphi}(\hat{t}_0) = -\hat{f}(\hat{t}_0) + \psi(\hat{t}_0) \dot{x}(t) + \hat{l}_{t_0} = \hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{t_0} \dot{x}(\hat{t}_0) = 0(d_0) \end{aligned}$$

$$\bar{\Lambda}_{t_1}(\hat{z}) = \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{t_1} \dot{x}(\hat{t}_1) = 0 \quad (d_1)$$

$\lambda \neq 0$ ekanligi ravshan, aks holda f, t va p larning aniqlanishiga ko'ra $p \equiv 0$ kelib chiqadi, u holda $(c_{\tau, v})$ munosabatdan $\mu = 0$ kelib chiqadi. Ammo Lagranj

ko'paytuvchilari uchun $(\lambda, \mu) \neq 0$ bo'lishi kerak. λ sonini musbat o'zgarmas songa ko'paytirish bilan $|\lambda|=1$ tenglik bajariladigan qilib normallaymiz.

Demak $\tau_1, \dots, \tau_N \in T$ nuqtalar va $v_1, \dots, v_N \in U$ boshqaruvlar uchun $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $|\lambda|=1$ vektor mavjudki, ular uchun L.S.Pontryagin maksimum prinsipinig teorema shartidagi a)-f) bandlari hamda chekli sondagi τ_i nuqtalari va u_i boshqaruvlar uchun optimallikning c) sharti bajariladi.

E) isbotning yakuni. R^{m+1} fazoda $K(\tau, v)$, $\tau \in T, v \in U$ to'plamni va L.S.Pontryagin maksimum prinsipi haqidagi teorema shartidagi a)-f) bandlari bajariladigan λ vektorlarning $K = \{\lambda \in R^{m+1} : |\lambda|=1\}$ sferasini qaraymiz, shu bilan birga c) bandda $t = \tau, u = v$ deb olingan. K sfera kompakt, $K(\tau, v) \subset K$ yopiq to'plam, chekli kesishma

$$\bigcap_{j=1,2,\dots,N} K_{\tau_j, v_j} \neq \emptyset.$$

Markazlashgan sistemalar haqidagi lemma. K kompakt, $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ esa K to'plamning yopiq qism to'plamlari sistemasi bo'lib, ixtiyoriy chekli sondagi sistemasi (markazlashgan sistema) bo'sh bo'lmagan kesishmaga ega bo'lsin. U holda $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sistemaning barcha to'plamlarining kesishmasi bo'sh to'plam emas, ya'ni $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha \neq \emptyset$.

Isboti. K kompakt to'plamdagi K_α to'plamning to'ldiruvchisini Q_α ($Q_\alpha = K \setminus K_\alpha$) bilan belgilaymiz. Agar $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha = \emptyset$ bo'lsa, u holda

$$\bigcup_{\alpha \in A} Q_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (K \setminus K_\alpha) = K \setminus \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha = K, \text{ ya'ni } \{Q_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ sistema } K \text{ kompakt ochiq}$$

qoplamasidir. Kompakt ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy ochiq qoplamadan chekli sondagi qoplamani ajratish mumkin, ya'ni $\bigcup_{j=1}^N Q_{\alpha_j} = K$ tenglik bajariladigan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ sohalarini topish

mumkin. U holda $\bigcap_{j=1}^N K_{\alpha_j} = \bigcap_{j=1}^N (K \setminus Q_{\alpha_j}) = K \setminus \bigcup_{j=1}^N Q_{\alpha_j} = \emptyset$ bo'lib, bu sistemaning

markazlashganiga zid. Demak barcha to'plamlar sistemasining kesishmasi $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha \neq \emptyset$.

lemma isbotlandi.

Markazlashgan sistemalar haqidagi lemmaga ko'ra barcha $K(\tau, v) \subset K$ to'plamlarning kesishmasi bo'sh to'plam emas. Demak, noldan farqli $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $|\lambda| = 1$ vektor va $\psi(\cdot) \in BC(\Delta, R^n)$ funksiya mavjudki, ular uchun L.S.Pontryagin maksimum prinsipinig teorema shartidagi a)-f) bandlari hamda $\tau \in T$ nuqta va $v \in U$ boshqaruv uchun optimallikning c) sharti ham bajariladi. Teorema isbotlandi.

2.4-§: Optimal boshqarish nazariyasining masalalar yechishga tadbirlari

Biz Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi asosida isbotlangan L.S.Pontryagin maksimum prinsipi haqidagi teoremasidan foydalanib misollar yechisdan na'munalar keltiramiz

Pontryagin formasidagi optimal boshqaruv masalasining umumiy ko'rinishi:

$$J_0(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t)) dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \rightarrow \min$$

$$J_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t)) dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \leq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m';$$

$$J_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t)) dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0; \quad i = m' + 1, \dots, m;$$

$$\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0, \quad \forall t \in T$$

$$u(t) \in U, \quad \forall t \in \Delta$$

kabi ifodalanadi, bu yerda $\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ va $x(\cdot) \in BC'(\Delta, R^n)$ funksiyalar Δ kesmada bo'lakli silliq, qiymatlarini R^n fazodan qabul qiluvchi vektor funksiyalar bo'lib, $x(\cdot) \in BC(\Delta, R^n)$. Bu yerda $BC(\Delta, R^n)$ - qiymatlarini R^n fazodan qabul qiluvchi, Δ kesmada bo'lakli uzluksiz vektor funksiyalar fazosi. $t_0, t_1 \in \Delta$ -berilgan kesma, $T \subset \Delta - u(\cdot)$ boshqaruv funksiyalarining uzluksizlik nuqtalari to'plami.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorga holat vektori, $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ vektorga boshqaruv deb qaraymiz. Shu bilan birga

$$\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0$$

differensial tenglama $u(\cdot)$ boshqaruvning barcha uzluksizlik nuqtalari to'plamida bajariladi.

Masalada bayon etilgan barcha shartlarni qanoatlantiruvchi $\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ elementga joiz boshqaruv jarayoni deyiladi.

Agar $\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ joiz boshqaruv jarayoni uchun $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ joiz jarayon mavjud bo'lib, $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\| < \delta$, $|t_0 - \hat{t}_0| < \delta$, $|t_1 - \hat{t}_1| < \delta$ shartlar bajarilganda $J_0(\xi) \geq J_0(\hat{\xi})$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ joiz jarayonga lokal optimal yoki kuchli ma'nodagi optimal jarayon deyiladi.

Kuchli ma'nodagi optimal jarayonni izlashda Lagranj formasidagi L.S.Pontryagin maksimum prinsipi deb nomlangan quyidagi teoremdan foydalanamiz.

Teorema. $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ - berilgan masalaning kuchli ma'nodagi optimal jarayoni bo'lsin. f_i , $i = 0, 1, 2, \dots, m$ va φ funksiyalar hamda ularning x bo'yicha xususiy hosilalari $\{(t, \hat{x}(t)) | t \in \Delta\} \times U$ to'plamning qandaydir atrofida uzluksiz funksiyalar, $\psi_i(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$ funksiyalar esa $(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$ nuqta atrofida uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin.

$$\tilde{L} = \int_{t_0}^{t_1} (f(t, x, u) + \psi(t)(\dot{x} - g(t, x, u)))dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \quad \text{qaralayotgan masalaning}$$

Lagranj funksiyasi bo'lib, mos ravishda

$L = f(t, x, u) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, x, u)$, $l = \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ Lagranj funksiyasining integral va terminal hadlari bo'lsin.

U holda shunday $(\lambda, \psi) \in R^{m+1} \times BC'(\Delta, R^n)$ $(\lambda, \psi(\cdot)) \neq 0$ Lagranj ko'paytuvchilari topiladiki, bunda quyidagi shartlar bajariladi:

a) Lagranj funksionalining

$L(t, x, \dot{x}, u) = f(t, x, u) + \psi(\dot{x} - g(t, x, u))$ integral hadi uchun x bo'yicha statsionarlik sharti bo'lgan Eyler tenglamasi:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_x(t) + \hat{L}_x(t) = 0, \quad \forall t \in T \Leftrightarrow -\dot{\psi}(t) + \hat{f}_x(t) - \psi(t) \hat{g}_x(t) = 0;$$

b) Lagranj funksionalining $I = \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ terminal hadi va

$L(t, x, \dot{x}, u) = f(t, x, u) + \psi(\dot{x} - g(t, x, u))$ integral hadi uchun x bo'yicha transversallikning

$\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{L}_x(t_0) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_0) = \hat{L}_{x(t_0)}, \quad \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{L}_x(t_1) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_1) = -\hat{L}_{x(t_1)}$ shartlari;

c) u bo'yicha

$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \Leftrightarrow \min_{u \in U} \{f(t, \hat{x}(t), u) - \psi(t)g(t, \hat{x}(t), u)\} = \hat{f}(t) - \psi(t)\hat{g}(t), \quad \forall t \in T$

optimallik sharti;

d) chetlari qo'zg'aluvchan holatlar uchun statsionarlikning

$\hat{\Lambda}_{t_0}(\hat{t}_0) = 0 \Leftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{L}_{t_0} + \hat{L}_{x(t_0)}\hat{x}(t_0) = 0$

$\hat{\Lambda}_{t_1}(\hat{t}_1) = 0 \Leftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{L}_{t_1} + \hat{L}_{x(t_1)}\hat{x}(t_1) = 0$

Shartlari;

e) $\lambda_i J_i(\hat{\xi}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m' - \text{yumshoqlik sharti};$

f) $\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m' - \text{nomanfiylik shartlari bajariladi.}$

Endi ushbu teoremdan foydalanib, misollar yechishdan namunalar keltiramiz.

1-masala. Quyidagi optimallashtirish masalasini yeching:

$$J(x(\cdot)) = \int_0^4 (\dot{x}^2 + x) dt \rightarrow \text{extr}; \quad |\dot{x}| \leq 1, \quad x(0) = 0.$$

Yechilishi. Dastlab berilgan masalani optimal boshqaruv masalasi shaklida ifodalaymiz, so'ng esa maksimum prinsipini tadbqiq etib optimalikka davogar bo'lgan ekstremal boshqaruvlarni va trayektoriyalarni aniqlaymiz.

1) $\dot{x} = u$ belgilash kiritib, berilgan masalani optimal tezkorlikning

$$J(x(\cdot)) = \int_0^4 (u^2 + x) dt \rightarrow \text{extr}; \quad |u| \leq 1, \quad x(0) = 0$$

masalasi ko'rinishida ifodalaymiz va unga mos

$$\tilde{L} = \int_0^4 [\lambda_0(u^2 + x) + \psi(\dot{x} - u)] dt + \lambda_1 x(0)$$

Lagranj funksiyasini yozamiz

2. Ekstremumning zaruriy shartlarini yozamiz:

a) Lagranj funksiyasining $L = \lambda_0(u^2 + x) + \psi(\dot{x} - u)$ integral hadi uchun Eyler tenglamasi

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \text{ formulaga ko'ra } -\dot{\psi} + \lambda_0 = 0;$$

b) Lagranj funksiyasining $l = \lambda_1 x(0)$ terminal hadi uchun x bo'yicha transversallik sharti

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_x(t_0) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)}, \quad \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_x(t_1) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}$$

formulalarga ko'ra $\psi(0) = \lambda_1, \quad \psi(4) = 0;$

c) u bo'yicha optimallik sharti:

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \quad \forall t \in T$$

formulaga ko'ra, biz u ga bog'liq bo'lmagan hadlarni tushurib qoldirsak

$$\min_{-1 \leq u \leq 1} \{\lambda_0 u^2 - \psi u\} = \lambda_0 \hat{u}^2 - \psi \hat{u};$$

d) nomanfiylik sharti: minimum masalasida $\lambda_0 \geq 0;$

maksimum masalasida $\lambda_0 \leq 0;$

3. Zaruriy shartlarni taxlil qilamiz:

Agar $\lambda_0 = 0$ bo'lsa, u holda a) shartdan $\dot{\psi} = 0$, b) shartdan $\psi(t) = \lambda_1 = 0$ bo'lib, barcha Lagranj ko'paytuvchilari nolga teng. Demak $\lambda_0 \neq 0$. Minimum masalasida agar $\lambda_0 = 1$ deb olsak, a) shartdan $\dot{\psi} = 1$, b) shartga ko'ra $\psi(t) = t - 4$ bo'ladi. Endi c) shartni e'tiborga olsak optimal boshqaruv

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \psi(t), & \text{agar } \left| \frac{\psi}{2} \right| \geq 1 \text{ bo'lsa,} \\ \frac{\psi}{2}, & \text{agar } \left| \frac{\psi}{2} \right| \leq 1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishda, $\dot{x} = u$ belgilashga ko'ra unga mos optimal trayektoriya esa

$$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} -1, & \text{agar } 0 \leq t < 2 \text{ bo'lsa,} \\ \frac{t}{2} - 2, & \text{agar } 2 \leq t \leq 4 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan aniqlanadi. Bu sistemani integrallab,

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -t, & \text{agar } 0 \leq t \leq 2 \text{ bo'lsa,} \\ \frac{t^2}{4} - 2t + 1, & \text{agar } 2 \leq t \leq 4 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

yechimni hosil qilamiz. Bevosita tekshirish usuli bilan bu funksiya masala shartidagi funksionalni absolyut minimumga erishtiruvchi funksiya bo'lishini ko'rsatamiz. Buning

uchun masala shartiga joiz ixtiyoriy $h(\cdot) \in BC^1[0,4]$ funksiyani olamizki, bunda $|\dot{\hat{x}} + \dot{h}| \leq 1$, $h(0) = 0$ shartlar bajarilsin. Natijada

$$\begin{aligned} J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) &= \int_0^4 ((\dot{\hat{x}} + \dot{h})^2 + \hat{x} + h) dt - \int_0^4 (\dot{\hat{x}}^2 + \hat{x}) dt = 2 \int_0^4 ((\dot{\hat{x}} + \dot{h})^2 + \hat{x} + h) + \\ &+ \int_0^4 \dot{h}^2 dt + \int_0^4 h dt = 2\dot{\hat{x}}h \Big|_0^4 - 2 \int_0^4 \ddot{\hat{x}} h dt + \int_0^4 \dot{h}^2 dt + \int_0^4 h dt \geq \int_0^4 (-2\ddot{\hat{x}} + 1) h dt. \end{aligned}$$

yuqorida topilgan $\hat{x}(t)$ funksiyani oxirgi integralga qo'yib, integrallash oralig'ini ikkiga ajratib,

$$J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) \geq \int_0^2 h dt \geq 0$$

munosabatni hosil qilamiz, chunki $0 \leq t \leq 2$ bo'lganda $h(0) = 0, \dot{h} \geq 0$ munosabatlardan $h(t)$ funksiya $0 \leq t \leq 2$ kesmada o'suvchi ekanligidan $h(t) \geq 0$.

Demak, $\hat{x}(t) \in \text{abs min}$ bo'lib,

$$S_{\min} = J(\hat{x}(t)) = \int_0^4 (\dot{\hat{x}}^2 + \hat{x}) dt = \int_0^2 (1-t) dt + \int_2^4 \left[\left(\frac{t}{2} - 2 \right)^2 + \frac{t^2}{4} - 2t + 1 \right] dt = -4\frac{2}{3}.$$

Maksimum masalasida agar $\lambda_0 = -1$ deb olsak, a) shartdan $\dot{\psi} = -1$, b) shartga ko'ra $\psi(t) = 4 - t$ bo'ladi. Endi c) shartni e'tiborga olsak optimal boshqaruv uchun

$$\min_{-1 \leq u \leq 1} \{ \lambda_0 u^2 - \psi u \} = \lambda_0 \hat{u}^2 - \psi \hat{u}$$

tenglikdan

$$\hat{u}(t) = \dot{\hat{x}}(t) = \text{sgn } \psi(t) = \text{sgn}(4-t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 4$$

kelib chiqadi. $x(0) = 0$ boshlang'ich shart bo'yicha integrallashdan so'ng optimal trayektoriyaga da'vogar funksiya $\hat{x}(t) = t$ ekanligini aniqlaymiz.

Bevosita tekshirish usuli bilan bu funksiya masala shartidagi funksionalni absolyut maksimumga erishtiruvchi funksiya bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun masala shartiga joiz ixtiyoriy $h(\cdot) \in BC^1[0,4]$ funksiyani olamizki, bunda $|\dot{\hat{x}} + \dot{h}| \leq 1$, $h(0) = 0$ shartlar bajarilsin. Oxirgi tensizlikni $|1 + \dot{h}| \leq 1$ yoki $-2 \leq \dot{h} \leq 0$ ko'rinishda yozib, yuqorida masalani minimumga tekshiganimizdek

$$\begin{aligned}
J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) &= \int_0^4 ((\dot{\hat{x}} + \dot{h})^2 + \hat{x} + h) dt - \int_0^4 (\dot{\hat{x}}^2 + \hat{x}) dt = \\
&= 2 \int_0^4 \dot{\hat{x}} \dot{h} dt + \int_0^4 \dot{h}^2 dt + \int_0^4 h dt = \int_0^4 (2 + \dot{h}) \dot{h} dt + \int_0^4 h dt
\end{aligned}$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi har ikkala integral ham musbat emas, chunki $h(0) = 0$, $\dot{h} \leq 0$ bo'lgani uchun $\dot{h} \leq 0$ va $2 + \dot{h} \geq 0$.

Demak,

$$J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) \leq 0,$$

ya'ni $\hat{x}(t) = t \in \text{abs max}$ bo'lib,

$$S_{\max} = J(\hat{x}(t)) = \int_0^4 (\dot{\hat{x}}^2 + \hat{x}) dt = \int_0^4 (1 + t) dt = 12.$$

Javob:

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) &= \begin{cases} -t, & \text{agar } 0 \leq t \leq 2 \text{ bo'lsa,} \\ \frac{t^2}{4} - 2t + 1, & \text{agar } 2 \leq t \leq 4 \text{ bo'lsa} \end{cases} \in \text{abs min}, S_{\min} = -4\frac{2}{3}, \\
\hat{x}(t) &= t \in \text{abs max}, S_{\max} = 12.
\end{aligned}$$

2-masala. Quyidagi optimallashtirish masalasini yeching:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin t dt \rightarrow \text{extr}; \quad |\dot{x}| \leq 1, \quad x(\pm \pi) = 0$$

Yechilishi. Dastlab berilgan masalani optimal boshqaruv masalasi shaklida ifodalaymiz, so'ng esa maksimum prinsipini tadbqiq etib optimalikka davogar bo'lgan ekstremal boshqaruvlarni va trayektoriyalarni aniqlaymiz.

1. $\dot{x} = u$ belgilash kiritib, berilgan masalani optimal tezkorlikning

$$J(x(\cdot)) = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin t dt \rightarrow \text{extr}; \quad |u| \leq 1, \quad x(-\pi) = x(\pi) = 0$$

masalasi ko'rinishida ifodalaymiz va unga mos

$$\tilde{L} = \int_{-\pi}^{\pi} [\lambda_0 x \sin t + \psi(\dot{x} - u)] dt + \lambda x(-\pi) + \mu x(\pi)$$

Lagranj funksiyasini yozamiz.

2. Ekstremumning zaruriy shartlarini yozamiz:

a) Lagranj funksiyasining $L = \lambda_0 x \sin t + \psi(\dot{x} - u)$ integral hadi uchun Eyler tenglamasi

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \text{ formulaga ko'ra } -\dot{\psi} + \lambda_0 \sin t = 0;$$

b) Lagranj funksiyasining $l = \lambda x(-\pi) + \mu x(\pi)$ terminal hadi uchun x bo'yicha transversallik sharti

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_x(t_0) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)}, \quad \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_x(t_1) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}$$

formulalarga ko'ra $\psi(-\pi) = \lambda_1, \quad \psi(\pi) = -\mu;$

c) u bo'yicha optimallik sharti:

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \quad \forall t \in T$$

formulaga ko'ra, biz u ga bog'liq bo'lmagan hadlarni tushurib qoldirsak

$$\min_{-1 \leq u \leq 1} \{\lambda_0 u^2 - \psi u\} = \lambda_0 \hat{u}^2 - \psi \hat{u};$$

3. Zaruriy shartlarni taxlil qilamiz:

Agar $\lambda_0 = 0$ bo'lsa, u holda a) shartdan $\dot{\psi} = 0$, b) shartdan va $\psi(\pm\pi) = 0$ chegaraviy shartlardan $\psi(t) = \lambda = -\mu = 0$ bo'lib, barcha Lagranj ko'paytuvchilari nolga teng. Demak $\lambda_0 \neq 0$.

Minimum masalasida agar $\lambda_0 = 1$ deb olsak, a) shartdan $\dot{\psi} = \sin t$,

b) shartga ko'ra $\psi(t) = -\cos t$ bo'ladi.

Endi c) shartni e'tiborga olsak $\dot{x} = u$ belgilashga ko'ra optimal boshqaruv va unga mos optimal trayektoriya

$$\hat{u}(t) = \dot{\hat{x}}(t) = \begin{cases} +1, \text{ agar } -\pi \leq t < -\frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \\ -1, \text{ agar } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \\ +1, \text{ agar } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlanadi. bu tenglamani integrallab, berilgan funksionalni minimumga erishtiruvchi

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} t + \pi, \text{ agar } -\pi \leq t < -\frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \\ -t, \text{ agar } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \\ t - \pi, \text{ agar } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

optimal trayektoriyani topamiz. Endi bevosita tekshirish usuli bilan bu funksiya masala shartidagi funksionalni absolyut maksimumga erishtiruvchi funksiya bo'lishini ko'rsatamiz.

Buning uchun masala shartiga joiz ixtiyoriy $h(\cdot) \in BC^1[-\pi, \pi]$ funksiyani olamizki, bunda

$|\dot{\hat{x}} + \dot{h}| \leq 1$, $h(-\pi) = h(\pi) = 0$ shartlar bajarilsin.

$$\begin{aligned} J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) &= \int_{-\pi}^{\pi} (\hat{x} + h) \sin t dt - \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x} \sin t dt = \int_{-\pi}^{\pi} h \sin t dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} h d(-\cos t) = -h(t) \cos t \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \dot{h} \cos t dt = \left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) \cos t dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = -4, \end{aligned}$$

Demak,

$$J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) \leq 0,$$

ya'ni

$\hat{x}(t) \in \text{abs min}$ bo'lib,

$$S_{\min} = J(\hat{x}(t)) = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}(t) \sin t dt = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (t + \pi) \sin t dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-t) \sin t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (t - \pi) \sin t dt = -4.$$

Endi berilgan funksional uchun maksimum masalasini qaraymiz. Yuqoridagidek mulohazalar yuritib, $\psi_2(t) = \cos t$ ekanligini va optimal boshqaruv va unga mos optimal trayektoriya

$$\hat{u}(t) = \dot{\hat{y}}(t) = \begin{cases} -1, \text{ agar } -\pi \leq t < -\frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \\ +1, \text{ agar } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \\ -1, \text{ agar } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlanishini topamiz. Bu tenglamani integrallab, berilgan funksionalni maksimumga erishtiruvchi

$$\hat{y}(t) = \begin{cases} -t - \pi, \text{ agar } -\pi \leq t < -\frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \\ t, \text{ agar } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \\ \pi - t, \text{ agar } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ekanligini aniqlaymiz. Demak, $\hat{y}(t) = -\hat{x}(t) \in \text{abs max}$ va $S_{\max} = 4$.

$$\text{Javob: } \hat{x}(t) = \begin{cases} t + \pi, \text{ agar } -\pi \leq t < -\frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \\ -t, \text{ agar } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \\ t - \pi, \text{ agar } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \text{ bo'lsa} \end{cases} \in \text{abs min}; S_{\min} = -4;$$

$$\hat{y}(t) = -\hat{x}(t) \in \text{abs max} ; S_{\max} = 4.$$

3-masala. Quyidagi optimallashtirish masalasini yeching:

$$T \rightarrow \inf; |\ddot{x}| \leq 2, \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0, x(0) = 1, x(T) = 3.$$

Yechilishi. Dastlab berilgan masalani optimal boshqaruv masalasi shaklida ifodalaymiz, so'ng esa maksimum prinsipini tadbqiq etib optimalikka davogar bo'lgan ekstremal boshqaruvlarni va trayektoriyalarni aniqlaymiz.

1. $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ belgilash kiritib, berilgan masalani optimal tezkorlik masalasining kanonik shaklini va unga mos Lagranj funksiyasini yozamiz.

$$T \rightarrow \inf; \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, |u| \leq 2, x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x_1(T) = 3, x_2(T) = 0$$

$$\tilde{L} = \int_0^T [\psi_1(\dot{x}_1 - x_2) + \psi_2(\dot{x}_2 - u)] dt + \lambda_0 T + \lambda_1(x_1(0) - 1) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3(x_1(T) - 3) + \lambda_4 x_2(T).$$

2. Zaruriy shartlarni ifodalaymiz:

a) $\dot{L} = \psi_1(\dot{x}_1 - x_2) + \psi_2(\dot{x}_2 - u)$ integral had uchun Eyler tenglamasi:

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} + L_{x_i} = 0 : \Leftrightarrow \dot{\psi}_1 = 0, \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \Rightarrow \psi_2(t) = c_1 t + c_2;$$

b) $l = \lambda_0 T + \lambda_1(x_1(0) - 1) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3(x_1(T) - 3) + \lambda_4(x_2(T))$ terminal had uchun

x bo'yicha transversallik sharti:

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{L}_x(t_0) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_0) = \hat{L}_{x(t_0)}, \quad \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{L}_x(t_1) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_1) = -\hat{L}_{x(t_1)}$$

formulalarga ko'ra

$$\psi_1(0) = \lambda_1, \psi_2(0) = \lambda_2, \psi_1(T) = -\lambda_3, \psi_2(T) = -\lambda_4;$$

c) u bo'yicha optimallik sharti:

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \quad \forall t \in T$$

formulaga ko'ra

$$\min_{|u| \leq 2} (-\psi_2(t)u) = -\psi_2(t)\hat{u}(t) \Leftrightarrow \hat{u}(t) = 2 \operatorname{sgn} \psi_2(t), \psi_2(t) \neq 0$$

d) T bo'yicha statsionarlik sharti:

$$\hat{L}_T = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_3 \dot{x}_1(T) + \lambda_4 \dot{x}_2(T) = 0$$

ko'rinishda bo'lib, $\dot{x}_1(T) = 0, x_1(T) = 3$ chegaraviy shartlar e'tiborga olinsa,

$\lambda_0 + \lambda_4 \dot{x}_2(T) = 0$ ko'rinishni oladi. Ammo $\lambda_4 = -\psi_2(T)$ bo'lgani uchun

$$\lambda_0 = \psi_2(T)\dot{x}_2(T) = \psi_2(T)u_2(T) = 2|\psi_2(T)|. \text{ Demak } \lambda_0 = 2|\psi_2(T)|.$$

e) homanfiylik sharti: $\lambda_0 \geq 0$.

3.Olingan zaruriy shartlarni taxlil qilamiz.

Agar $\lambda_0 = 0$ bo'lsa, u holda $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \psi_2(T) = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 0$ ekanligidan barcha Lagranj ko'paytuvchilari nolga teng bo'ladi. Shuning uchun $\lambda_0 \neq 0$. Agar $\lambda_0 = 1$ deb qabul qilsak, $\psi_2 \equiv 0$ bo'lmaganligi uchun $\psi_2(T) = 0$ bo'lganda a) shartdan $\psi_2(T) = cT + c_1 = 0$, ya'ni $c_1 = -cT$ bo'lib, $\psi_2(t) = c(t - T)$, $c \neq 0$ hulosaga kelamiz. Shuning uchun b) shartdan $\hat{u}(t) \equiv +2$ yoki $\hat{u}(t) \equiv -2$ bo'lishi kerak. Bu holda ularga mos trayektoriyalar

$$\ddot{\hat{x}}(t) \equiv +2 \text{ yoki } \ddot{\hat{x}}(t) \equiv -2$$

tenglamalarning berilgan

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x(T) = 3$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlari bolishi lozim.

Bu yechimlar mos ravishda

$$x(t) = -t^2 + A_1 t + A_2 \text{ va } x(t) = t^2 + B_1 t + B_2.$$

Ammo har ikkala yechim orasida

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x(T) = 3$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya mavjud emas.

Demak $\lambda_0 = 0$ bo'lganda joiz ekstremallar mavjud emas.

Shuning uchun $\lambda_0 = 1$ deb qabul qilamiz., agar $\psi_2(t)$ funksiya $[0, T]$ kesmada ishorasini o'zgartirmasa $\ddot{x}(t) \equiv -2$, yoki $\ddot{x}(t) \equiv 2$ tenglamalar hosil bo'lib, bu holda masalaning joiz ekstremallari mavjud bo'lmashligini yuqorida ko'rib o'tdik. Shuning uchun $\psi_2(t)$ funksiya $[0, T]$ kesmada faqat bir marta o'z ishorasini o'zgartirishi lozim. Ikki xil imkoniyat mavjud:

$$\hat{u}(t) = \ddot{\hat{x}} = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq \tau, \\ -2, & \tau < t \leq T. \end{cases} \text{ yoki, } \hat{u}(t) = \ddot{\hat{x}} = \begin{cases} -2, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 2, & \tau < t \leq T. \end{cases}$$

ikkinchi hol mumkin emas, chunki berilgan chegaraviy shartlar bo'yicha hosil bo'lgan parabolalar kesishmaydi. Birinchi sistemani integrallab

$$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} 2t + C_1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ -2t + C_2, & \tau < t \leq T. \end{cases} \text{ yoki, } \dot{\hat{x}} = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 2(T - t), & \tau < t \leq T. \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Ammo $\hat{x}(\cdot) \in BC^2[0, T]$ bo'lgani uchun $\dot{\hat{x}}(t)$ funksita $t = \tau$ nuqtada

uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun $\tau = T - \tau$ tenglik o'rinli. Bundan $\tau = \frac{T}{2}$. Demak,

$$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ 2(T-t), & \frac{T}{2} \leq t \leq T. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga egamiz. Bu sistemani integrallab,

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} t^2 + C, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ -(T-t)^2 + D, & \frac{T}{2} \leq t \leq T. \end{cases}$$

funksiyaga kelamiz. $x(0)=1, x(T)=3$ chegaraviy shartlardan $C=1, D=3$

va $\hat{x}(t)$ yechimning $\tau = \frac{T}{2}$ nuqtada uzluksizligidan $\frac{T^2}{4} + 1 = -\frac{T^2}{4} + 3$ tenglikni yozamiz.

Bundan $T=2$. Demak berilgan optimallashtirish masalasi yagona

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} t^2 + 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ -(t-2)^2 + 3, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

joiz ekstremalga ega.

$$\text{Javob: } \hat{x}(t) = \begin{cases} t^2 + 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ -(t-2)^2 + 3, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases} \in \text{abs min}; T=2.$$

4-masala. Quyidagi optimallashtirish masalasini yeching:

$$\int_0^1 x dt \rightarrow \text{extr}; |\ddot{x}| \leq 2, x(0) + x(1) = 0, \dot{x}(0) + \dot{x}(1) = 0$$

Yechilishi: 1. Dastlab berilgan masalani optimal boshqaruv masalasi shaklida ifodalaymiz, so'ng esa optimallikning zaruriy sharti bo'lgan maksimum prinsipini tadbiq etib optimalikka davog'ar bo'lgan ekstremal boshqaruvlarni va trayektoriyalarni aniqlaymiz.

1. $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ belgilashlar kiritib, berilgan masalani optimal boshqaruv masalasining kanonik shakli ko'rinishida yozamiz va unga mos

Optimal boshqaruv masalasining kanonik ko'rinishi:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, |u| \leq 2, x_1(0) + x_2(1) = 0, x_2(0) + x_2(1) = 0$$

$$\int_0^1 x_1(t) dt \rightarrow \text{extr};$$

Bu masalaning Lagranj funksiyasi:

$$\tilde{L} = \int_0^1 [\lambda_0 x_1 + \psi_1(\dot{x}_1 - x_2) + \psi_2(\dot{x}_2 - u)] dt + \lambda_2(x_1(0) + x_2(1)) + \lambda_2(x_2(0) + x_2(1))$$

ko'rinishga ega.

2. Zaruriy shartlarni ifodalaymiz:

a) $\dot{L} = \lambda_0 x_1 + \psi_1(\dot{x}_1 - x_2) + \psi_2(\dot{x}_2 - u)$ integral had uchun Eyler tenglamasi:

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} + L_{x_i} = 0 : \Leftrightarrow \dot{\psi}_1 = \lambda_0, \dot{\psi}_2 = -\psi_1;$$

b) $l = \lambda_1(x_1(0) + x_1(1)) + \lambda_2(x_2(0) + x_2(1))$ terminal had uchun x bo'yicha transversallik sharti:

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{L}_x(t_0) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_0) = \hat{L}_{x(t_0)}, \quad \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{L}_x(t_1) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_1) = -\hat{L}_{x(t_1)}$$

formulalarga ko'ra $\psi_1(0) = \lambda_1, \psi_2(0) = \lambda_2, \psi_1(1) = -\lambda_1, \psi_2(1) = -\lambda_2$ bo'lgani uchun

$$\psi_1(0) + \psi_1(1) = 0, \quad \psi_2(0) + \psi_2(1) = 0;$$

ko'rinishga ega.

c) u bo'yicha optimallik sharti:

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \quad \forall t \in T$$

formulaga ko'ra $|u| \leq 2$ bo'lgani uchun

$$\min_{|u| \leq 2} (-\psi_2(t)u) = -\psi_2(t)\hat{u}(t)$$

tenglikka ko'ra

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 2 \operatorname{sgn} \psi_2(t), & \text{agar } \psi_2(t) \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ [-2, 2] & \text{oraliqdagi ixtiyoriy son, agar } \psi_2(t) = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishga ega.

3. Endi zaruriy shartlarni taxlil qilamiz. Agar $\lambda_0 = 0$ bo'lsa, u holda $\psi_1(t) = \psi_0 = \text{const}$; bo'lib, bunga ko'ra $\psi_2(t) = -\psi_0 t + c$ bo'ladi. $\psi_1(0) + \psi_1(1) = 0$ chegaraviy shartdan $\psi_0 = 0$, $\psi_2(0) + \psi_2(1) = 0$ chegaraviy shartdan esa $c = 0$ bo'lib, $\psi_2(t) \equiv 0$. Bu holda optimal boshqaruv mavjud emas. Demak, $\lambda_0 \neq 0$.

$$\lambda_0 = 1 \Rightarrow \ddot{\psi}_2 = -1; \psi_2(t) = -\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2; \Rightarrow u = 2 \operatorname{sgn} \psi_2(t)$$

$$\text{Demak, } \hat{u}(t) = \begin{cases} -2, 0 \leq t \leq \tau; \\ 2, \tau < t \leq 1 \end{cases} \quad \text{yoki } \hat{u}(t) = \begin{cases} 2, 0 \leq t \leq \tau; \\ -2, \tau < t \leq 1 \end{cases}$$

korinishga ega. Shuning uchun

$$\ddot{\hat{x}}(t) = \begin{cases} -2t + c_1, 0 \leq t \leq \tau; \\ 2t + c_3, \tau \leq t \leq 1; \end{cases}$$

Bu sistemani ketma ket integrallab,

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -t^2 + c_1 t + c_2, 0 \leq t \leq \tau; \\ t^2 + c_3 t + c_4, \tau \leq t \leq 1; \end{cases}$$

trayektoriyani hosil qilamiz. Endi masaladagi chegaraviy shartlardan foydalanib, noma'lum o'zgarmaslarni topamiz.

$$\hat{x}(0) + \hat{x}(1) = 0 \Rightarrow c_2 + c_3 + c_4 + 1 = 0$$

$$\dot{\hat{x}}(0) + \dot{\hat{x}}(1) = 0 \Rightarrow c_1 + 2 + c_3 = 0$$

Biroq $\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t) \in C[0,1]$ bo'lgani uchun qandaydir $\tau \in [0,1]$ nuqta uchun

$$-\tau^2 + c_1 \tau + c_2 = \tau^2 + c_3 \tau + c_4, \quad -2\tau + c_1 = 2\tau + c_3$$

tengliklarni yozamiz. Bu tengliklardan

$$c_3 = c_1 - 4\tau; \quad c_1 = 2\tau - 1; \quad c_3 = -2\tau - 1; \quad c_4 = c_2 + 2\tau^2 \quad \text{bo'lgani uchun}$$

$c_2 = \tau - \tau^2, c_4 = \tau + \tau^2$ ekanligini aniqlaymiz. Shuning uchun optimal trayektoriya

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} \tau - t - (\tau - t)^2, 0 \leq t \leq \tau \\ (t - \tau)^2 - (t - \tau), \tau \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ko'rinishga ega. Bu yerda boshqaruvning almashlash vaqtini $\hat{x}(0) + \hat{x}(1) = 0$ tenglikdan aniqlashimiz mumkin. Bu yerda $\tau = 0$ bo'lib, $\hat{x}(t) = t^2 - t, 0 \leq t \leq 1$ bo'lgani uchun

$$\Delta J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^1 x dt = - \int_1^1 \psi \dot{x} dt = (-\psi x + \psi \dot{x}) \Big|_0^1 - \int_0^1 \psi \ddot{x} = -2 \int_0^1 |\psi| dt < 0. \text{ Shuning uchun}$$

$$\hat{x}(t) \in \text{abs min}; \quad -\hat{x}(t) \in \text{abs max}.$$

5-masala Quyidagi optimallashtirish masalasini yeching:

$$\int_0^2 x dt \rightarrow \text{extr}; |\ddot{x}| \leq 2; x(0) = \dot{x}(0) = x(2) = 0$$

Yechilishi: 1. . Dastlab berilgan masalani optimal boshqaruv masalasi shaklida ifodalaymiz, so'ng esa optimallikning zaruriy sharti bo'lgan maksimum prinsipini tadbqiq etib optimalikka davogar bo'lgan ekstremal boshqaruvlarni va trayektoriyalarni aniqlaymiz.

1. $x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}$ belgilashlar kiritib, berilgan masalani optimal boshqaruv masalasining kanonik shaklini va unga mos Lagranj funksiyasini yozamiz.

Optimal boshqaruv masalasi:

$$\int_0^2 x dt \rightarrow \text{extr};$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, |u| \leq 2, x_1(0) = x_2(0) = x_1(2)$$

Lagranj funksiyasi:

$$\tilde{L} = \int_0^2 [-\lambda_0 x_1 + \psi_1(\dot{x}_1 - x_2) + \psi_2(\dot{x}_2 - u)] dt + \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_1(2);$$

2. Zaruriy shartlar:

a) Lagranj funksiyasining $\dot{L} = -\lambda_0 x_1 + \psi_1(\dot{x}_1 - x_2) + \psi_2(\dot{x}_2 - u)$ integral hadi uchun Eyler tenglamasi:

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} + L_{x_i} = 0 : \Leftrightarrow \dot{\psi}_1 = \lambda_0, \dot{\psi}_2 = -\psi_1;$$

b) Lagranj funksiyasining $l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_1(2)$ terminal hadi uchun x bo'yicha transversallik sharti:

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_{\dot{x}}(t_0) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)}, \quad \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_{\dot{x}}(t_1) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}$$

formulalarga ko'ra

$$\psi_1(0) = \lambda_1, \psi_2(0) = \lambda_2, \psi_1(2) = -\lambda_3, \psi_2(2) = 0$$

ko'rinishda bo'ladi;

c) u bo'yicha optimallik sharti:

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \quad \forall t \in T$$

formulaga ko'ra $|u| \leq 2$ bo'lgani uchun

$$\min_{|u| \leq 2} (-\psi_2(t)u) = -\psi_2(t)\hat{u}(t)$$

munosabatga ko'ra

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 2 \operatorname{sgn} \psi_2(t), & \text{agar } \psi_2(t) \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ [-2, 2] \text{ oraliqdagi ixtiyoriy son,} & \text{agar } \psi_2(t) = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi.

3. Endi yuqorida keltirilgan zaruriy shartlarni taxlil qilamiz.

Agar $\lambda_0 = 0$ bo'lsa, u holda a) shartdan $\psi_2(t) = \text{const} \neq 0$ bo'lgani uchun b) shartga ko'ra $\hat{u}(t) = \pm 2$ bo'lib, berilgan masalaning trayektoriyasi $\hat{x}(t) = \pm t^2 + c_1 t + c_2$ ko'rinishga ega. Chegaraviy shartlarga ko'ra $c_1 = c_2 = 0$ bo'lib, $\hat{x}(t) = \pm t^2 \Rightarrow \hat{x}(2) \neq 0$. Demak bu holda ekstremallar yo'q. Shuning uchun $\lambda_0 \neq 0$. $\lambda_0 = 1$ olsak,

$$\dot{\psi}_1 = 1 \Rightarrow \ddot{\psi}_2 + 1 \Rightarrow \psi_2(t) = -\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2;$$

$$\psi_2(2) = 0 \Rightarrow \psi_2(t) = -\frac{t^2}{2} + c_1(t-2) + 2 \quad \text{bo'lgani} \quad \text{uchun}$$

$$\hat{u}(t) = 2 \operatorname{sgn} \psi_2(t) \quad \text{Demak,} \quad \hat{u}(t) = \begin{cases} -2, & \text{agar } 0 \leq t \leq \tau \text{ bo'lsa,} \\ 2, & \text{agar } \tau < t \leq 2 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Agar $\ddot{x} = -2$ bo'lsa ketrma ket integrallash bilan $\dot{x} = \dot{x}(0) - 2t$; $x(t) = -t^2$ ni topamiz. Bundan

$$x(\tau) = -\tau^2, \dot{x}(\tau) = -2\tau.$$

Agar $\ddot{x} = +2$ bo'lsa ketrma ket integrallash bilan

$$\dot{x}(t) = -2\tau + 2t; x(t) = -\tau^2 - 2\tau t + t^2$$

ekanligini aniqlaymiz. $x(2) = 0$ shartga ko'ra $\tau^2 + 4\tau - 4 = 0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi.

Bu tenglamaning musbat ildizi $\tau = -2 + \sqrt{4+4} = 2(\sqrt{2}-1)$ bo'lgani uchun optimal boshqaruv

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -2, & \text{agar } 0 \leq t \leq 2(\sqrt{2}-1) \text{ bo'lsa,} \\ 2, & \text{agar } 2(\sqrt{2}-1) < t \leq 2 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishga ega. Bu boshqaruvga mos optimal trayektoriya esa

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -t^2, & \text{agar } 0 \leq t \leq 2(\sqrt{2}-1) \text{ bo'lsa,} \\ t^2 - 4(\sqrt{2}-1)t + 12 - 8\sqrt{2}, & \text{agar } 2(\sqrt{2}-1) \leq t \leq 2 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

4. $\psi_2(2) = 0, \dot{\psi}_2 = -1, x(0) = x(2) = 0$ shartlarga va

$$\int_0^2 -\psi_2 \ddot{x} dt = (-\psi_2 \dot{x} + \dot{\psi}_2 x)|_0^2 - \int_0^2 \dot{\psi}_2 \dot{x} dt = \int_0^2 x dt$$

ayniyatga ko'ra

$$J(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^2 x(t)dt = \int_0^2 \psi_2 \ddot{x} dt = \int_0^{2(\sqrt{2}-1)} \psi_2 \ddot{x} dt = \int_{2(\sqrt{2}-1)}^2 \dot{\psi}_2 \ddot{x} dt$$

$\psi_2 \ddot{x} \geq 0, t \in [0, 2]$ munosabatdan $J(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) \leq 0$, ya'ni

$$J(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^2 x(t)dt = \int_0^2 \psi_2 \ddot{x} dt = \int_0^{2(\sqrt{2}-1)} \psi_2 \ddot{x} dt = \int_{2(\sqrt{2}-1)}^2 \dot{\psi}_2 \ddot{x} dt$$

$$u = 2 \operatorname{sgn} \psi_2(t) \quad 0 \begin{cases} \psi_2(t) \leq 0, \ddot{x}(t) \leq 0, t \in [0, 2(\sqrt{2}-1)] \\ \psi_2(t) \geq 0, \ddot{x}(t) \geq 0, t \in [2(\sqrt{2}-1), 2] \end{cases}$$

$\hat{x}(t) \in \operatorname{obs} \max$ ekanligi ravshan.

6-masala. Quyidagi optimallashtirish masalasini yeching:

$$\int_0^{7\pi/4} x \sin t dt \rightarrow \operatorname{extr}; |\dot{x}| \leq 1, x(0) = 0$$

Yechilishi. Dastlab berilgan masalani optimal boshqaruv masalasi shaklida ifodalaymiz, so'ng esa maksimum prinsipini tadbqiq etib optimalikka davogar bo'lgan ekstremal boshqaruvlarni va trayektoriyalarni aniqlaymiz.

1. $\dot{x} = u$ belgilash kiritib, berilgan masalani optimal boshqarishning

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{7\pi/4} x \sin t dt \rightarrow \operatorname{extr}; |u| \leq 1, x(0) = 0$$

masalasi ko'rinishida ifodalaymiz va unga mos

$$\tilde{L} = \int_0^{7\pi/4} [\lambda_0 x \sin t + \psi(\dot{x} - u)] dt + \lambda x(0)$$

Lagrang funksiyasini yozamiz.

2. Zaruriy shartlarni ifodalaymiz:

a) Lagranj funksiyasining $L = \lambda_0 x \sin t + \psi(\dot{x} - u)$ integral hadi uchun Eyler tenglamasi

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0 \text{ formulaga ko'ra } -\dot{\psi} + \lambda_0 \sin t = 0;$$

b) Lagranj funksiyasining $l = \lambda x(0)$ terminal hadi uchun x bo'yicha transversallik sharti :

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_x(t_0) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)}, \quad \hat{L}_x(t_1) = -\hat{l}_x(t_1) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}$$

formulalarga ko'ra $\psi(0) = \lambda$, $\psi(7\pi/4) = 0$;

c) u bo'yicha optimallik sharti:

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \quad \forall t \in T$$

formulaga ko'ra, biz u ga bog'liq bo'lmagan hadlarni tushurib qoldirsak

$$\min_{-1 \leq u \leq 1} \{\lambda_0 u^2 - \psi u\} = \lambda_0 \hat{u}^2 - \psi \hat{u};$$

3. Zaruriy shartlarni taxlil qilamiz:

Agar $\lambda_0 = 0$ bo'lsa, u holda a) shartdan $\dot{\psi} = 0$, b) shartdan $\psi(7\pi/4) = 0$ chegaraviy shartga ko'ra $\psi(t) = \lambda = 0$ bo'lib, barcha Lagranj ko'paytuvchilari nolga teng. Demak $\lambda_0 \neq 0$.

Minimum masalasida agar $\lambda_0 = 1$ deb olsak, a) shartdan $\dot{\psi} = \sin t$, $\psi(t) = c + \cos t$, ammo $0 = \psi(\frac{7\pi}{4}) = c - \cos \frac{7\pi}{4}$ tenglikdan $c = \cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Demak, $\psi(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos t$ bo'lib, $\dot{x} = u$ belgilashga ko'ra optimal boshqaruv va unga mos optimal trayektoriya

$$\hat{u}(t) = \dot{\hat{x}}(t) = \operatorname{sgn} \psi(t) = \operatorname{sgn}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos t) = \begin{cases} -1, \text{ agar } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \text{ bo'lsa,} \\ 1, \text{ agar } \frac{\pi}{4} < t \leq \frac{7\pi}{4} \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlanadi. Bu tenglamani integrallash natijasida optimallikka davogar bo'lgan

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -t, \text{ agar } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \text{ bo'lsa} \\ t - \frac{\pi}{2}, \text{ agar } \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{7\pi}{4} \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

yechimni yosil qilamiz.

Endi bevosita tekshirish usuli bilan bu funksiya masala shartidagi funksionalni absolyut maksimumga erishtiruvchi funksiya bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun masala shartiga joiz ixtiyoriy $h(\cdot) \in BC^1[-\pi, \pi]$ funksiyani olamizki, bunda $|\dot{\hat{x}} + \dot{h}| \leq 1$, $h(0) = 0$ shartlar bajarilsin.

$$J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^{\frac{7\pi}{4}} x \sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-t) \sin t dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin t dt \geq 0$$

Demak, $\hat{x}(t) \in \text{abs min}$. Xuddi shu kabi $-\hat{x}(t) \in \text{abs max}$ ekanligini ko'rsatishimiz mumkin.

$$\text{Javob: } \hat{x}(t) = \begin{cases} -t, \text{ agar } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \text{ bo'lsa} \\ t - \frac{\pi}{2}, \text{ agar } \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{7\pi}{4} \text{ bo'lsa} \end{cases} \in \text{abs min}; -\hat{x}(t) \in \text{abs max}.$$

7-masala. Quyidagi optimallashtirish masalasini yeching:

$$\int_0^{T_0} |\dot{x}| dt \rightarrow \inf; \dot{x} \geq A, x(0) = 0, x(T_0) = \xi; (A < 0)$$

Yechilishi. Dastlab berilgan masalani optimal boshqaruv masalasi shaklida ifodalaymiz, so'ng esa maksimum prinsipini tadbiq etib optimalikka davogar bo'lgan ekstremal boshqaruvlarni va trayektoriyalarni aniqlaymiz.

1. $\dot{x} = u$ belgilash kiritib, berilgan masalani optimal boshqarishning

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{T_0} |u| dt \rightarrow \inf; \dot{x} = u, u \geq A, x(0) = 0, x(T_0) = \xi; (A < 0)$$

masalasi ko'rinishida ifodalaymiz va unga mos

$$\tilde{L} = \int_0^{T_0} (\lambda_0 |u| + \psi(\dot{x} - u)) dt + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 (x(T_0) - \xi)$$

Lagranj funksiyasini tuzamiz.

2. Optimalashtirish masalasi uchun zaruriy shartlarni yozamiz:

a) Lagranj funksiyasining $L = \lambda_0 |u| + \psi(\dot{x} - u)$ integral hadi uchun Eyler tenglamasi

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0 \text{ formulaga ko'ra } -\dot{\psi} = 0. \text{ Bundan } \psi(t) = \psi_0 = \text{const.}$$

b) Lagranj funksiyasining $l = \lambda_1 x(0) + \lambda_2 (x(T_0) - \xi)$ terminal hadi uchun x bo'yicha transversallik sharti :

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_x(t_0) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)}, \quad \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_x(t_1) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}$$

formulalarga ko'ra $\psi(0) = \lambda_1, \quad \psi(T_0) = -\lambda_2$.

c) u bo'yicha optimallik sharti:

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \quad \forall t \in T$$

formulaga ko'ra, biz u ga bog'liq bo'lmagan hadlarni tushurib qoldirsak

$$\min_{u \geq A} (\lambda_0 |u| - \psi u) = \lambda_0 |\hat{u}| - \psi \hat{u}$$

ko'rinishga ega.

3. Zaruriy shartlarni taxlil qilamiz.

Agar $\lambda_0 = 0$ bo'lsa, u holda $\psi_0 \neq 0$ (aks holda barcha Lagranj ko'paytuvchilari nolga teng).

Agar $\psi_0 > 0$ bo'lsa, u holda $\min_{u \geq A} (-\psi u) = -\infty$ bo'lib, u bo'yicha optimallik bajarilmaydi.

Agar $\psi_0 < 0$ bo'lsa, u holda a) shartdan $u \equiv A$, ya'ni $x = At$ va $AT_0 = \xi$ bo'lsa joiz ekstremal mavjud.

Agar $\xi < AT_0$ bo'lsa, birorta ham joiz ekstremal mavjud emas.

Agar $\xi > AT_0$ bo'lsa, $\lambda_0 = 0$ bo'lgan holda birorta ham ekstremal yoq.

Endi $\lambda_0 = 1$ bo'lsin. U holda u bo'yicha optimallikdan:

agar $\psi_0 > 1$ bo'lsa, u holda b) shart bajarilmaydi, chunki $\min_{u \geq A} (-\psi u) = -\infty$;

agar $\psi_0 = 1$ bo'lsa, $\hat{u}$ sifatida har qanday nomanfiy funksiyani olish mumkin.

agar $-1 < \psi_0 < 1$ bo'lsa, u holda $\hat{u} \equiv 0$;

agar $\psi_0 = -1$ bo'lsa, u holda $\hat{u}(\cdot)$ boshqaruv sifatida $A \leq \hat{u}(t) \leq 0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya;

agar $\psi_0 < -1$ bo'lsa, $\hat{u} \equiv A$.

Shunday qilib, $\xi < AT_0$ da joiz ekstremallar yo'q.

$\xi = AT_0$ uchun yagona $\hat{x} = At$ ekstremal mavjud.

$AT_0 < \xi < 0$ bo'lsa joiz ekstremal ixtiyoriy monoton kamayuvchi funksiya; agar $\xi = 0$ bo'lsa, $\hat{x} = 0$; nixoyat $\xi > 0$ bo'lsa ixtiyoriy monoton o'suvchi funksiya ekstremal bo'ladi.

4. $\int_0^T \hat{x} dt = \xi$ shartdan $|\xi| \leq \int_0^T |\hat{x}| dt$ bo'lib, tenglik ixtiyoriy joiz ekstremalda

amalgam oshadi. Demak, ixtiyoriy joiz ekstremalda absolyut minimumni beradi.

8-masala. Quyidagi optimallashtirish masalasini yeching:

$$\int_0^4 (\dot{x}^2 + x) dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 1, x(4) = 0$$

Yechilishi. $\dot{x} = u$ belgilash kiritib, berilgan masalani optimal boshqarishning

$$\int_0^4 (u^2 + x) dt \rightarrow \text{extr}; \dot{x} = u, |u| \leq 1, x(4) = 0$$

masalasi ko'rinishida ifodalaymiz va unga mos

$$\tilde{L} = \int_0^4 [\lambda_0(u^2 + x) + \psi(t)(\dot{x} - u)] dt + \lambda x(4)$$

Lagranj funksiyasini tuzamiz.

2. Optimalashtirish masalasi uchun zaruriy shartlarni yozamiz:

a) Lagranj funksiyasining $L = \lambda_0(u^2 + x) + \psi(\dot{x} - u)$ integral hadi uchun Eyler tenglamasi

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0 \text{ formulaga ko'ra } -\dot{\psi} + \lambda_0 = 0.$$

b) Lagranj funksiyasining $l = \lambda x(4)$ terminal hadi uchun x bo'yicha transversallik sharti :

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_x(t_0) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)}, \quad \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_x(t_1) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}$$

formulalarga ko'ra $\psi(0) = 0; \psi(4) = -\lambda$

c) u bo'yicha optimallik sharti:

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \quad \forall t \in T$$

formulaga ko'ra, biz u ga bog'liq bo'lmagan hadlarni tushurib qoldirsak

$$\min_{-1 \leq u \leq 1} \{\lambda_0 u^2 - \psi u\} = \lambda_0 \hat{u}^2 - \psi \hat{u},$$

3. Zaruriy shartlarni taxlil qilamiz. Agar $\lambda_0 = 0$ bo'lsa a) shartdan $\dot{\psi} = 0 \Rightarrow \psi(t) = \psi_0 = \text{const}$, b) shartdan esa $\psi(0) = 0$ bo'lgani uchun $\psi(t) \equiv 0$ bo'lib, barcha Lagranj ko'paytuvchilari nolga teng.

Demak $\lambda_0 \neq 0$ bo'lishi kerak, $\lambda_0 = 1$ deb o'lamiz. Natijada a) shartdan $\psi(t) = t$ hamda c)

optimallik shartidan $\min_{-1 \leq u \leq 1} \{\lambda_0 \hat{u}^2 - \psi \hat{u}\} = \lambda_0 \hat{u}^2 - \psi \hat{u} = \hat{u}^2 - t \hat{u}$ ifoda

$$\hat{u}^2 - t \hat{u} = \left(\hat{u} - \frac{t}{2} \right)^2 - \frac{t^2}{4}$$

bo'lgani uchun optimal boshqaruv

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & \text{agar } 0 \leq t \leq 2 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } 2 \leq t \leq 4 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Demak, optimal trayektoriya

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & \text{agar } 0 \leq t \leq 2 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } 2 \leq t \leq 4 \text{ bo'lsa} \end{cases} \quad \text{tenglamalar sistemasini berilgan}$$

boshlang'ich shartlar bo'yicha integrallash natijasida

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} - 3, & \text{agar } 0 \leq t \leq 2 \text{ bo'lsa,} \\ t - 4, & \text{agar } 2 \leq t \leq 4 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyani beradi. Bevosita tekshirish natijasida

$$\hat{x}(t) \in \text{abs max}; -\hat{x}(t) \in \text{abs min}$$

ekanligini aniqlash qiyin emas.

9-masala. Quyidagi optimallashtirish masalasini yeching:

$$T \rightarrow \min; -1 \leq \ddot{x} \leq 3, \quad x(0) = 1, x(T) = -1, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0$$

Yechilishi. 1. x funksiya o'rniga (x_1, x_2) vector funksiyanini va u boshqaruvni $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, u = \ddot{x}$ belgilashlar bilan kiritib berilgan masalani

$$T \rightarrow \min; \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad -1 \leq u \leq 3, \quad x_1(0) = 1, x_1(T) = -1, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_2(T) = 0$$

kanonik ko'rinishini va bu ko'rinishga mos

$$\begin{aligned} \tilde{L} = & \int_0^T [\psi_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + \psi_2(t)(\dot{x}_2 - u)] dt + \\ & + \lambda_0 T + \lambda_1(x_1(0) - 1) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3(x_1(T) + 1) + \lambda_4 x_2(T) \end{aligned}$$

Lagranj funksiyanini yozamiz.

1. Lagranj funksiya yordamida ekstremumning zaruriy shartlarini ifodalaymiz:

a) Lagranj funksiyanining $L = \psi_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + \psi_2(t)(\dot{x}_2 - u)$ integral hadi uchun Eyler tenglamalar sistemasi

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_1} + L_{x_1} &= 0, \\ -\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_2} + L_{x_2} &= 0 \end{aligned} \quad \text{formulalarga ko'ra} \quad \begin{aligned} -\dot{\psi}_1 &= 0, \\ -\dot{\psi}_2 - \psi_1 &= 0 \end{aligned}$$

ko'rinishga ega.

Bu sistemadan $\psi_2(t) = C_1 t + C_2$ ekanligi ravshan.

a) Lagranj funksiyasining

$$I = \lambda_0 T + \lambda_1(x_1(0) - 1) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3(x_1(T) + 1) + \lambda_4 x_2(T)$$

terminal hadi uchun x bo'yicha transversallik sharti

$$\hat{L}_{\dot{x}_i}(t_0) = \hat{l}_{x_i}(t_0) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_i(t_0)}, \quad \hat{L}_{\dot{x}_i}(t_1) = -\hat{l}_{x_i}(t_1) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_i(t_1)}, i = 1, 2$$

formulalarga ko'ra

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \lambda_1, & \psi_1(T) &= -\lambda_3, \\ \psi_2(0) &= \lambda_2, & \psi_2(T) &= -\lambda_4 \end{aligned}$$

dan iborat;

c) u bo'yicha optimallik sharti:

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \quad \forall t \in T$$

formulaga ko'ra, biz u ga bog'liq bo'lmagan hadlarni tushurib qoldirsak

$$\min_{-1 \leq u \leq 3} \{-\psi_2(t)u\} = -\psi_2(t)\hat{u};$$

Shuning uchun boshqaruv funksiyasi

$$\hat{u}(t) = \ddot{\hat{x}} = \begin{cases} -1, & \text{agar } \psi_2(t) < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 3, & \text{agar } \psi_2(t) > 0 \text{ bo'lsa,} \\ [-1, 3] \text{ dan ixtiyoriy son, } & \psi_2(t) = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishga ega.

d) T bo'yicha statsionarlik sharti: $\tilde{L}_T = 0$ tenglikka ko'ra

$$\lambda_0 + \lambda_3 \dot{x}_1(T) + \lambda_4 \dot{x}_2(T) = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

e) nomanfiylik sharti: minimum masalasi uchun $\lambda_0 \geq 0$;

3. Yuqorida yozilgan zaruriy shartlarni taxlil qilamiz.

Boshlang'ich shartlardan $\dot{x}_1(T) = x_2(T) = 0$ bo'lgani uchun

b) shartdan $\lambda_4 = -\psi_2(T)$ bo'lib, d) shartga ko'ra $\lambda_0 = \hat{u}(T)\psi_2(T)$ munosabatga ega bo'lamiz. Shuning uchun agar $\lambda_0 = 0$ bo'lsa, $\hat{u}(t) = 0$ yoki, $\psi_2(T) = 0$ bo'lishi kerak. Ammo c) shartga ko'ra $\psi_2(T) = 0$ bo'lishi kerak, biroq $\psi_2(T) \equiv 0$ bo'lishi mumkin emas, chunki aks holda barcha Lagranj ko'paytuvchilari nolga teng. $\psi_2(T) = 0$ bo'lgani uchun, $t = T$ bo'lganda a) shartdan $C_2 = -C_1 T$ bo'lgani uchun

$$\psi_2(t) = C(t - T); C \neq 0.$$

u holda c) optimallik shartiga ko'ra $\hat{u}(t) \equiv -1$, yoki $\hat{u}(t) \equiv 3$ bo'lishi kerak. Shuning uchun optimalikka da'vogar ekstremallar $\ddot{x}(t) \equiv -1$, yoki $\ddot{x}(t) \equiv 3$ tenglamaning yechimlaridan iborat bo'lishi kerak.

Bu tenglamalardan mos ravishda $x(t) = -\frac{t^2}{2} + A_1 t + A_2$ va

$x(t) = \frac{3t^2}{2} + B_1 t + B_2$ yechimlarni yozsmiz. Ammo har ikkala yechim uchun ham

$$x(0) = 1, x(T) = -1, \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya mavjud emas. Demak $\lambda_0 = 0$ bo'lgand joiz ekstremallar mavjud emas. Shuning uchun $\lambda_0 = 1$ deb qabul qilamiz. A) shartga ko'ra $\psi_2(t)$ funksiya $[0, T]$ kesmada faqat bir marta o'z ishorasini o'zgartirishi kerak, agar ishorasini o'zgartirmasa $\ddot{x}(t) \equiv -1$, yoki $\ddot{x}(t) \equiv 3$ tenglamalar hosil bo'lib, bu holda masalaning joiz ekstremallari mavjud bo'lmasligini yuqorida ko'rib o'tdik. Shuning uchun $\psi_2(t)$ funksiya $[0, T]$ kesmada faqat bir marta o'z ishorasini o'zgartirishi lozim. Ikki xil imkoniyat mavjud:

$$\hat{u}(t) = \ddot{x} = \begin{cases} 3, & 0 \leq t \leq \tau, \\ -1, & \tau < t \leq T. \end{cases} \text{ yoki, } \hat{u}(t) = \ddot{x} = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 3, & \tau < t \leq T. \end{cases}$$

birinchi hol mumkin emas, chunki berilgan chegaraviy shartlar bo'yicha hosil bo'lgan parabolalar kesishmaydi. Ikkinchi tenglamalar sistemasini integrallab

$$\dot{x} = \begin{cases} -t + C_1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 3t + C_2, & \tau < t \leq T. \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Ammo $\hat{x}(\cdot) \in BC^2[0, T]$ bo'lgani uchun $\hat{x}(t)$ funksita $t = \tau$ nuqtada uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun $-\tau = 3(\tau - T)$ tenglik o'rinli. Bundan $\tau = \frac{3T}{4}$. Demak,

$$\dot{x} = \begin{cases} -t, & 0 \leq t \leq \frac{3T}{4}, \\ 3(t - T), & \frac{3T}{4} \leq t \leq T. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga egamiz. Bu sistemani integrallab,

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + C, & 0 \leq t \leq \frac{3T}{4}, \\ \frac{3(t - T)^2}{2} + D, & \frac{3T}{4} \leq t \leq T. \end{cases}$$

funksiyaga kelamiz. $x(0) = 1, x(T) = -1$ chegaraviy shartlardan $C = 1, D = -1$

va $\hat{x}(t)$ yechimning $\tau = \frac{3T}{4}$ nuqtada uzluksizligidan $-\frac{9T^2}{32} + 1 = \frac{27T^2}{32} - 1$ tenglikni yozamiz. Bundan $T = \frac{4}{\sqrt{3}}$. demak berilgan optimallashtirish masalasi yagona

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{4} + 1, & 0 \leq t \leq \sqrt{3}, \\ \frac{3(t - 4/\sqrt{3})^2}{2} - 3, & \sqrt{3} \leq t \leq \frac{4}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

joiz ekstremalga ega.

$$\text{Javob: } \hat{x}(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{4} + 1, & 0 \leq t \leq \sqrt{3}, \\ \frac{3(t - 4/\sqrt{3})^2}{2} - 3, & \sqrt{3} \leq t \leq \frac{4}{\sqrt{3}} \end{cases} \in \text{abs min}; T = \frac{4}{\sqrt{3}}. \quad 10-$$

masala.Quyidagi optimallashtirish masalasini yeching:

$$T \rightarrow \min; |\ddot{x}| \leq 2, \quad x(-1) = 1, x(T) = -1, \quad \dot{x}(-1) = \dot{x}(T) = 0$$

Yechilishi. 1. x funksiya o'rniga (x_1, x_2) vector funksiyani va u boshqaruvni $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, u = \ddot{x}$ belgilashlar bilan kiritib berilgan masalani

$$T \rightarrow \min; \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad -2 \leq u \leq 2, \quad x_1(-1) = 1, x_1(T) = -1, \quad x_2(-1) = x_2(T) = 0$$

kanonik ko'rinishini va bu ko'rinishga mos masalaning

$$\begin{aligned} \tilde{L} = \int_{-1}^T [\psi_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + \psi_2(t)(\dot{x}_2 - u)] dt + \\ + \lambda_0 T + \lambda_1(x_1(-1) - 1) + \lambda_2 x_2(-1) + \lambda_3(x_1(T) + 1) + \lambda_4 x_2(T) \end{aligned}$$

Lagranj funksiyasini yozamiz.

2. Lagranj funksiyasi yordamida ekstremumning zaruriy shartlarini ifodalaymiz:

a) Lagranj funksiyasining $L = \psi_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + \psi_2(t)(\dot{x}_2 - u)$ integral hadi uchun Eyler tenglamalar sistemasi

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_1} + L_{x_1} &= 0, & -\dot{\psi}_1 &= 0, \\ -\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_2} + L_{x_2} &= 0, & -\dot{\psi}_2 - \psi_1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{formulalarga ko'ra}$$

ko'rinishga ega.

Bu sistemadan $\psi_2(t) = C_1 t + C_2$ ekanligi ravshan.

b) Lagranj funksiyasining

$$I = \lambda_0 T + \lambda_1(x_1(-1) - 1) + \lambda_2 x_2(-1) + \lambda_3(x_1(T) + 1) + \lambda_4 x_2(T)$$

terminal hadi uchun x bo'yicha transversallik sharti

$$\hat{L}_{\dot{x}_i}(t_0) = \hat{L}_{\dot{x}_i}(t_0) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_0) = \hat{L}_{\dot{x}_i(t_0)}, \quad \hat{L}_{\dot{x}_i}(t_1) = -\hat{L}_{\dot{x}_i}(t_1) \Leftrightarrow \psi(\hat{t}_1) = -\hat{L}_{\dot{x}_i(t_1)}, i=1,2$$

formulalarga ko'ra

$$\begin{aligned} \psi_1(-1) &= \lambda_1, & \psi_1(T) &= -\lambda_3, \\ \psi_2(-1) &= \lambda_2, & \psi_2(T) &= -\lambda_4 \end{aligned}$$

dan iborat;

c) u bo'yicha optimallik sharti:

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \quad \forall t \in T$$

formulaga ko'ra, biz u ga bog'liq bo'lmagan hadlarni tushurib qoldirsak

$$\min_{-2 \leq u \leq 2} \{-\psi_2(t)u\} = -\psi_2(t)\hat{u};$$

Shuning uchun boshqaruv funksiyasi

$$\hat{u}(t) = \hat{\ddot{x}} = \begin{cases} -2, & \text{agar } \psi_2(t) < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 2, & \text{agar } \psi_2(t) > 0 \text{ bo'lsa,} \\ [-2, 2] \text{ dan ixtiyoriy son, } & \psi_2(t) = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishga ega.

d) T bo'yicha statsionarlik sharti: $\tilde{L}_T = 0$ tenglikka ko'ra

$$\lambda_0 + \lambda_3 \dot{x}_1(T) + \lambda_4 \dot{x}_2(T) = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

e) nomanfiylik sharti: minimum masalasi uchun $\lambda_0 \geq 0$;

3. Yuqorida yozilgan zaruriy shartlarni taxlil qilamiz.

Boshlang'ich shartlardan $\dot{x}_1(T) = x_2(T) = 0$ bo'lgani uchun

c) shartdan $\lambda_4 = -\psi_2(T)$ bo'lib, d) shartga ko'ra $\lambda_0 = \hat{u}(T)\psi_2(T)$ munosabatga ega bo'lamiz. Shuning uchun agar $\lambda_0 = 0$ bo'lsa, $\hat{u}(t) = 0$ yoki, $\psi_2(T) = 0$ bo'lishi kerak. Ammo c) shartga ko'ra $\psi_2(T) = 0$ bo'lishi kerak, biroq $\psi_2(T) \equiv 0$ bo'lishi mumkin emas, chunki aks holda barcha Lagranj ko'paytuvchilari nolga teng. $\psi_2(T) = 0$ bo'lgani uchun, $t = T$ bo'lganda a) shartdan $C_2 = -C_1 T$ bo'lgani uchun

$$\psi_2(t) = C(t - T); C \neq 0.$$

Shuning uchun c) optimallik shartiga ko'ra $\hat{u}(t) \equiv -2$, yoki $\hat{u}(t) \equiv 2$ bo'lishi kerak. Demak optimalikka da'vogar ekstremallar $\ddot{x}(t) \equiv -2$, yoki $\ddot{x}(t) \equiv 2$ tenglamaning yechimlaridan iborat bo'lishi kerak.

Bu tenglamalardan mos ravishda $x(t) = -t^2 + A_1 t + A_2$ va $x(t) = t^2 + B_1 t + B_2$ yechimlarni yozamiz. Ammo har ikkala yechim uchun ham

$$x(-1) = 1, x(T) = -1, \dot{x}(-1) = \dot{x}(T) = 0$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya mavjud emas. Demak $\lambda_0 = 0$ bo'lganda joiz ekstremallar mavjud emas. Shuning uchun $\lambda_0 = 1$ deb qabul qilamiz., agar $\psi_2(t)$ funksiya $[-1, T]$ kesmada ishorasini o'zgartirmasa $\ddot{x}(t) \equiv -2$, yoki $\ddot{x}(t) \equiv 2$ tenglamalar hosil bo'lib, bu holda masalaning joiz ekstremallari mavjud bo'lmasligini yuqorida ko'rib o'tdik. Shuning uchun $\psi_2(t)$ funksiya $[-1, T]$ kesmada faqat bir marta o'z ishorasini o'zgartirishi lozim. Ikki xil imkoniyat mavjud:

$$\hat{u}(t) = \ddot{x} = \begin{cases} 2, & -1 \leq t \leq \tau, \\ -2, & \tau < t \leq T. \end{cases} \quad \text{yoki,} \quad \hat{u}(t) = \ddot{x} = \begin{cases} -2, & -1 \leq t \leq \tau, \\ 2, & \tau < t \leq T. \end{cases}$$

birinchi hol mumkin emas, chunki berilgan chegaraviy shartlar bo'yicha hosil bo'lgan parabolalar kesishmaydi. Ikkinchi tenglamalar sistemasini integrallab

$$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} -2t + C_1, & -1 \leq t \leq \tau, \\ 2t + C_2, & \tau < t \leq T. \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Ammo $\hat{x}(\cdot) \in BC^2[0, T]$ bo'lgani uchun $\dot{\hat{x}}(t)$ funksita $t = \tau$ nuqtada uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun $\tau + 1 = \tau - T$ tenglik o'rinli. Bundan $\tau = \frac{T-1}{2}$. Demak,

$$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} -2(t+1), & -1 \leq t \leq \frac{T-1}{2}, \\ 2(t-T), & \frac{T-1}{2} \leq t \leq T. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga egamiz. Bu sistemani integrallab,

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -(t+1)^2 + C, & -1 \leq t \leq \frac{T-1}{2}, \\ (t-T)^2 + D, & \frac{T-1}{2} \leq t \leq T. \end{cases}$$

funksiyaga kelamiz. $x(-1) = 1, x(T) = -1$ chegaraviy shartlardan $C = 1, D = -1$

va $\hat{x}(t)$ yechimning $\tau = \frac{T-1}{2}$ nuqtada uzluksizligidan $-\left(\frac{T+1}{2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{T+1}{2}\right)^2 - 1$

tenglikni yozamiz. Bundan $T=1$. Demak berilgan optimallashtirish masalasi yagona

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -(t+1)^2 + 1, & -1 \leq t \leq 0, \\ (t-1)^2 - 1, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

joiz ekstremalga ega.

$$\text{Javob: } \hat{x}(t) = \begin{cases} -(t+1)^2 + 1, & -1 \leq t \leq 0, \\ (t-1)^2 - 1, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \in \text{abs min}; T=1.$$

X U L O S A

Mazkur ishning asosiy maqsadi hozirgi zamon matematikasining so'ngi yutuqlaridan biri optimal boshqaruv nazariyasi fanining asosiy quroli hisoblangan L.S.Pontryagin maksimum prinsipini Lagranj ko'paytuvchilari qoidasiga asoslangan isbotini berish va misollar yechishga tadbiq etishdir. Ishning birinchi bobida optimal boshqaruv nazariyasini bayon etishda zarur bo'lgan klassik matematikaning differensial tenglamalar va haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining bir qator tushunchalari keltirildi. Isning ikkinchi bobida o'ng cheti erkli bo'lgan optimallashtirish masalasi va optimal boshqaruvning umumiy masalasi uchun Lagranj ko'paytuvchilari qoidasiga asoslangan L.S.Pontryagin maksimum prinsipining isboti amalga oshirildi. Nihoyat so'nggi bobda maksimum prinsipini qo'llab misollar yechishdan na'munalar kiritildi. Ish materiallari bilan matematika ta'lim yo'nalishida va differensial tenglamalar ixtisosligi bo'yicha ta'lim olayotgan magistrilar uchun maxsus kurs va maxsus seminar mashg'ulotlarida qo'llanma sifatida foydalanish mumkin deb hisoblaymiz.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. 1. Благодатских В.И Введение в оптимальное управление. Москва, Высшая школа. 2001г, 299 с.
2. Силин Д.Б. Задания по спецсеминару оптимальное управление для студентов 3 курса (методическая разработка) МГУ 1986. 32 с.
3. Галеев. Э.М. , Тихомиров В.М. Оптимизация. Теория, примеры, задачи Москва. Эдиториал УРСС, 2000 г, 312с
4. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования.// Вест. МГУ.Сер.матем.и.др. №2 1959.25-32 с.
5. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление М.1979.
6. Иоффе А.Д.,Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.1974
7. Алексеев В.М.,Галеев.Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизаций. М.1984.
8. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Том 2. Москва 1988 г
9. von Dr.E. KAMKE “DIFFERENTIALGLEICHUNGEN LOSUNGSMETHODEN UND LOSUNGEN” Leipzig 1959