Априорные оценки для одного модифицированного уравнения навье-стокса

Шодиев Р.Д., Расулов А. (КИЭИ)

В докладе [1] на Международном математическом конгрессе О.А.Ладыженская предложила для детерминированного описания трехмерных нестационарных течений вязких несжимаемых жидкостей при больших градиентах скоростей несколько вариантов «модифицированных уравнений Навье-Стокса», которые по ее мнению, должны регуляризовать уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + grad\rho = f, \; div \;\; v = 0 \tag{1}$$

в том смысле, что для них имеют место однозначная глобальная разрешимость основной начально-краевой задачи и другие глобальные результаты, которые до сих пор не доказаны для трехмерных уравнений Навье-Стокса. К числу таких систем относится следующий вариант «модифицированного уравнения Навье-Стокса с нелинейной вязкостью»

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_к}\left[\left(\nu_0 + \nu_1 v_x^2\right)\frac{\partial v}{\partial x_k}\right] + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + grad\;\rho = f, div\;\; v = 0 \tag{2}$$

в которой $\nu, > 0$. Основная начально-краевая задача для системы (2) ставится так же, как и для уравнений Навье-Стокса (1) , и заключается в решении системы (2) в $Q_T \equiv \Omega x[0,T], \Omega -$ ограниченная область из E^3, $0 < T \le \infty$, при начально-краевых условиях.

$$v\big|_{t=0} = v_0(x), x \in \Omega; \; v\big|_{\partial\Omega} = 0, \; t \in [0,T] \tag{3}$$

Здесь мы докажем глобальную теорему существования достаточно хороших периодических по t с периодом ω решений систем О.АЛадыженской (2) с периодическим по t с периодом ω свободным членом $f(x,t)$ которые для уравнений Навье-Стокса (1) не доказаны до сих пор. Наш подход заключается в том что для достаточно гладких периодических по t с периодом ω решения уравнени (2) с периодическим по t с периодом ω свободным членом $f(x,t)$, удовлетворяющих граничному условию $v/_{\partial\Omega}=0, \forall t\varepsilon R^t$, можно получить определенный набор глобальных оценок решения уравнения (2) в начальный момент времени $t=0$; эти оценки, в свою очередь, позволяют получить определенный набор глобальных оценок для достаточно гладких периодических по t решений уравнени (2) при $0\le t\le\omega$ с любым $\omega>0$ наконец, последние оценки и метод Галеркина [2,] позволяют доказать существование по крайней мере одного достаточно хорошего периодического по t решения уравнени (2).

Следуя [2], обозначим через $\overset{\circ\ 1,1}{\underset{-4,2}{J}}(Q_\omega)$ замыкание в норме

$$|v|_{\overset{\circ 1/1}{\underset{-4?2}{J}}(Q_\omega)} \equiv \sup_{0\le t\le\omega}\|v(t)\|_{2,\Omega}+\|\,|v_x|\,\|_{4,Q_\omega}+\|v_t\|_{2,Q_\omega} \tag{4}$$

множества гладких соленоидальных векторов, равных нулю вблизи ∂Q_ω и удовлетворяющих условию периодичности по t с периодом ω

$$v(\cdot,0)=v(\cdot,\omega) \tag{5}$$

Обобщенное решение уравнений (2), удовлетворяющее греничному условию (3) и условию периодичности по t (5), из класса $\overset{\circ\ 1,1}{\underset{-4,2}{J}}(Q_\omega)$ определяется как элемент $\overset{\circ\ 1,1}{\underset{-4,2}{J}}(Q_\omega)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\iint_{Q_\omega}\left[(v_t+v_k v_{xk})\phi+(\nu_0+\nu_1|v_x|^2)v_{xk}\phi_{xk}\right]dxdt=\iint_{Q_\omega} f\phi\ dxdt \tag{6}$$

при $\forall\phi\in\ \overset{\circ\ 1,1}{\underset{-4,2}{J}}(Q_\omega)$ (ср. [2, § 1])).

Теорема. Пусть Ω-ограниченная область из E^3, и пусть $f(x,t)$ периодичен по t с периодом ω и принадлежит классу $L_2((0,\omega));L_2(\Omega))$. Тогда уравнения (2) имеет по крайней мере одно обобщенное решение $v(x,t)$ из класса $\overset{\circ\ 1,1}{\underset{-4,2}{J}}(Q_\omega)$ и для любого такого решения справедлива оценка:

$$|v|_{\overset{\circ 1/1}{\underset{-4?2}{J}}(Q_\omega)} \le C_1\left(\|f\|_{L_2((0,\omega);L_2(\Omega))};\nu_0^{-1},\nu_1^{-1}\right) \tag{7}$$

В самом деле, для достаточно гладкого периодического по $t \in R^+$ с периодом ω решения v уравнений (2), удовлетворяющего граничному условию (3), справедливо энергетическое неравенство

$$\frac{d}{dt}\|v\|_{2,\Omega}^2 + \nu_0 \int_\Omega v_x^2 dx + 2\nu_1 \int_\Omega |v_x|^4 dx \le C_4(\nu_0^{-1}) \|f\|_{2,\Omega}^2 \le C_4 F \qquad (8)$$

с $F \equiv \|f\|^2_{L_2((0,\omega));L_2(\Omega)}$, из которого, применяя неравенство Фридрихса, получим неравенство:

$$\frac{d}{dt}\|v\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\nu_0 \lambda_1^{+1} \|v\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\nu_0}{2}\|v_x\|_{2,\Omega}^2 + \nu_1 \int_\Omega |v_x|^4 dx \le C_2 F, t \in R^+ \quad , \qquad (9)$$

а тем самым и неравенство

$$\frac{d}{dt}(e^{C_3 t}\|v\|_{2,\Omega}^2) + \frac{\nu_0}{2}\|v_x\|_{2,\Omega}^2 e^{C_3 t} + \nu_1 e^{C_3 t} \int_\Omega |v_x|^4 dx \le C_2 e^{C_3 t} F, t \in R^+ \qquad (10)$$

в котором $C_3 = \dfrac{1}{2}\nu_0 \lambda_1^{+1}$.

Интегрируя неравенство (10) по t от 0 до ω и используя периодичность решения v по t с периодом ω, получим оценку:

$$\left\| v|_{t=0} \right\|_{2,\Omega}^2 + C_4 \|v_x\|_{2,Q_\omega}^2 + C_5 \iint_{Q_\omega} |v_x|^4 dxdt \le C_6(C_{2,} C_3, F) \qquad (11)$$

интегрируя далее, неравенство (10) по t от 0 до $t \le \omega$ используя уже доказанную оценку (11) и применяя операцию максимизации по $t \in (0,\omega)$, получим оценку:

$$\|v\|^2_{L_\infty(R^+;L_2(\Omega))} + C_4 \|v_x\|_{2,Q_\omega}^2 + C_5 \|v_x\|_{4,Q_\omega}^4 \le C_7(F, C_6) \qquad (12)$$

Далее, для рассматриваемого нами решения v уравнений (2) из равенства

$$\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{4\nu_1}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega (\nu_0 + \nu_1 |v_x|^2)^2 dx = \int_\Omega f\, v_t dx - \int_\Omega v_k v_{xk} v_t dx, \forall t \in R^+ \qquad (13)$$

и оценки

$$\int_\Omega v_k v_{xk} v_t dx \le \frac{1}{2}\|v_t\|_{2,\Omega}^2 + C_7(\Omega)\|v_x\|_{4,\Omega}^4 \qquad (14)$$

следует неравенство:

$$\|v_t\|^2_{2,\Omega} + \frac{1}{4\nu_1}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} (v_0 + v_1|v_x|^2)^2\,dx \le C_8 F + C_9\|v_x\|^4_{4,\Omega}, \forall t \in R^+ \qquad (15)$$

из которого, интегрируя по t от 0 до ω, используя условие периодичности $v_x\big|_{t=0} = v_x\big|_{t=\omega}$ и уже доказанную оценку (12), получим оценку:

$$\|v_t\|^2_{2,Q_\omega} \le C_{10}(C_7, F) \qquad (16)$$

оценки (12) и (15) в совокупности дают априорную оценку (7). Теорема доказана.

Литература

1. Ладыженская О.А. О некоторых нелинейных задачах теории сплошных сред.-В кн.: Тезисы докл. по приглаш. Межд. Матем.конгр., М., 1966.с 149.
2. Ладыженская О.А. О новых уравнениях для описания движения вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач.-Тр.Мат. ин-та АН СССР, 1967, т.102 с 85-104.