

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТОШКЕНТ АВТОМОБИЛ – ЙЎЛЛАР ИНСТИТУТИ

Кафедра: “Олий математика”

Мавзу: Баъзи кўп ноъмалумли тенгламаларни ечиш
усуллари ҳақида.

РЕФЕРАТ

Т. Г. Исанов, Ф. М. Зокиров, С. А. Юлдашев

ТОШКЕНТ – 2010

Баъзи кўп ноъмалумли тенгламаларни ечиш усуллари хақида

Ушбу мақолада $a^x + a^2 = y^2$, $A(x)=B(y)$ ва $\sqrt{p\sqrt{q}-q} = \sqrt{x\sqrt{q}} - \sqrt{y\sqrt{q}}$ кўринишдаги тенгламалар кўрилади.. Бу тенгламаларни натурал, бутун ва рационал сонлар тўпламидаги ечимларини топиш керак бўлади.

1. $a^x + a^2 = y^2$ ($a \geq 1$, a – натурал сон) тенгламани бутун сонларда ечамиз. Бу кўринишдаги тенгламаларни ечиш учун $a^x = (y-a)(y+a)$ кўринишда ёзиб оламиз. Булардан $y-a$ ва $y+a$ лар a^x - нинг бўлувчилари бўлишлиги келиб чиқади.

$y-a = a^p$, $y+a = a^q$ бу ерда $p, q \in \mathbb{Z}^+$, $p < q$. Шунинг учун

$$a^q - a^p = (y+a) - (y-a) = 2a$$

$$a^p(a^{q-p} - 1) = 2a \text{ ёки } a^{p-1}(a^{q-p} - 1) = 2$$

Демак $a^{p-1} = 2$ ёки $a^{q-p} - 1 = 2$ экан. Бундан a нинг 2га ёки 3га тенг бўлиши кераклиги ҳосил бўлади.

$a=2$ бўлса, тенглама $2^x + 4 = y^2$ кўришга келади. Бу тенгламани натурал сонларда ечайлик. $2^x = (y-2)(y+2)$ $y-2 = 2^p$, $y+2 = 2^q$
 $2^q - 2^p = 4$, $2^p(2^{q-p} - 1) = 4$, $2^{p-1}(2^{q-p} - 1) = 2$, $p-1=1$, $p=2 \Rightarrow q=3$
 $2^x = 2^p 2^q$, $x=5 \Rightarrow y=6$.

$a=3$ бўлса, тенглама $3^x + 9 = y^2$ кўришга келади. Бу тенгламани натурал сонларда ечайлик. $3^x = (y-3)(y+3)$ $y-3 = 3^p$, $y+3 = 3^q$
 $3^q - 3^p = 6$, $3^p(3^{q-p} - 1) = 6$, $3^{p-1}(3^{q-p} - 1) = 2$, $p-1=0$, $p=1 \Rightarrow q=2$
 $3^x = 3^p 3^q$, $x=3 \Rightarrow y=6$.

2. $A(x)=B(y)$ кўринишдаги тенгламаларни бутун сонларда ечайлик. Бу каби тенгламаларни ечиш учун $A(x)$ ва $B(y)$ функцияларнинг хусусиятидан фойдаланиб, уларнинг ечимлари тўпламини маълум чекли сохага келтириш зарур. Чекли сохадаги x ва y нинг қийматларини ҳисоблаб, тенгламани ечимларини топиш мумкин бўлади. Шундай мисоллардан бир-нечтасини кўриб ўтайлик.

2.1. $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$ тенгламани бутун сонларда ечинг.

Ечиш: $(x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = y^2$ тенгламада $x^2 + 8x = z$ деб олсак
 $z^2 + 7z = y^2$ тенгламани ҳосил қиламиз. Агар $z > 9$ бўлса
 $z^2 + 6z + 9 < z^2 + 7z = y^2 < z^2 + 8z + 16$
 $(z + 3)^2 < z^2 + 7z = y^2 < (z + 4)^2$

бўлади. y^2 бутун мусбат сон, иккита кетма-кет келувчи сонлар орасида жойлашган бўлиб қолади бу мумкин эмас. Шунинг учун $x^2 + 8x = z \leq 9$ бўлиб, бундан $-9 \leq x \leq 1$ келиб чиқади. x -ларга кетма-кет қийматлар бериб, тенгламанинг барча $(-9; 12)$, $(-9; -12)$, $(-8; 0)$, $(-7; 0)$, $(-4; 12)$, $(-4; -12)$, $(-1; 0)$, $(0; 0)$, $(1; 12)$, $(1; -12)$ ечимларини ҳосил қиламиз.

2.2. $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$ тенгламани бутун сонларда ечинг.

Ечиш: Агар $x > 0$ бўлса,

$$(x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1 < x^6 + 3x^3 + 1 < x^6 + 4x^3 + 4 = (x^3 + 2)^2 \text{ ўринли}$$

бўлади. Бундан y^2 бутун бўлиши мумкин эмас, чунки $x^3 + 1 < y^2 < x^3 + 2$.

Агар $x \leq -2$ бўлса,

$$(x^3 + 2)^2 = x^6 + 4x^3 + 4 < x^6 + 3x^3 + 1 < x^6 + 2x^3 + 1 = (x^3 + 1)^2 \text{ ўринли}$$

бўлади. Бундан y^2 бутун бўлиши мумкин эмас, чунки

$$-(x^3 + 2) = |x^3 + 2| < y^2 < |x^3 + 1| = -(x^3 + 1). \text{ Демак } x = -1 \text{ ёки } x = 0. \text{ Агар}$$

$x = -1$ бўлса, тенглама $-1 = y^4$ га келади бу мумкин эмас.

2.3. $x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2$ тенгламани бутун сонларда ечинг. Агар $x = 0$

бўлса, тенглама $1 = y^4$ га келади. Шунинг қилиб, $x = 0$ да $y = \pm 1$ ни ҳосил қиламиз.

Ечиш: Тенгламани $x^2 + 2xy + y^2 = x^2 y^2 + xy$, $(x + y)^2 = xy(xy + 1)$

кўринишида ёзиб оламиз. Агар $xy > 0$ бўлса, $xy + 1 > \sqrt{xy(xy + 1)} > xy$ келиб

чиқади. Бу ҳолда $|x + y| = \sqrt{xy(xy + 1)}$ сон иккита кетма-кет келувчи

мусбат xy ва $xy + 1$ сонлар орасида ётади. Демак, y бутун эмас. Худди

шундай агар $xy < -1$ бўлса, $-xy - 1 < \sqrt{xy(xy + 1)} < -xy$ келиб чиқади.

Демак, $|x + y|$ яна бутун бўлиши мумкин эмас. y ҳолда $xy = 0$ ёки $xy = -1$.

Иккала ҳолда ҳам $x = y = 0$ ёки $x = -y = \pm 1$, яни ечимлар $(0; 0)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$ бўлади.

2.4. $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$ тенгламани бутун сонларда ечинг.

Ечиш: Тенгламани $y^3 = 8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2)$ кўринишида ёзиб оламиз.

Агар $y = 2z$ деб олсак, тенглама $z^3 = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ кўринишга келади.

$x \geq 0$ бўлса,

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 < x^3 + 3x^2 + 4x + 2 < x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$$

бўлади. Демак $x+1 < z < x+2$ экан. Бу мумкин эмас. Энди $x \leq -2$ деб олсак, у ҳолда $x_1 = -x - 2$ ва $y_1 = -y$ сонлар ҳам берилган тенгламани қаноатлантиради, чунки $(x_1 + 2)^4 - (x_1)^4 = x^4 - (x+2)^4 = -y^3 = (y_1)^3$.

Бироқ $x_1 > 0$ қарама қаршиликка олиб келганди. Шунинг учун $-2 < x < 0$ бўлади. Бундан $x=-1, y=0$ ягона ечим келиб чиқади.

2.5. $x^2 + y^2 = 3z^2$ тенгламани бутун сонларда ечинг.

Ечиш: Ушбу тенгламанинг тривиал ечими $x=y=z=0$ бўлади. Фараз қилайлик тенглама яна бошқа ечимларга эга бўлсин. Улар орасидан

$\alpha = |x| + |y| + |z|$ энг кичик (натурал) қийматга эга бўладиган x, y, z ларни танлаб оламиз. Ҳар қандай натурал сон жуфт $n=2k$ ёки тоқ $n=2k+1$ бўлиб, $n^2 = 4k^2$ ёки $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ бўлади. n^2 ни 4га бўлсак қолдиқ 0 ёки 1 бўлади. Бу ҳолда $3z^2$ сонни 4га бўлсак қолдиқ 0 ёки 3 га тенгдир. Демак тенглама ўринли бўлиши учун x, y, z ларнинг ҳар бири жуфт бўлиши керак. $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$ бунда $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}$.

$x^2 + y^2 = 3z^2$ дан $x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2$ келиб чиқади. Бунда

$\alpha_1 = |x_1| + |y_1| + |z_1|$ ифода $0 < \alpha_1 = \frac{\alpha}{2} < \alpha$ тенгсизликни қаноатлантиради,

лекин бу x, y, z сонларнинг танланишига зиддир. Шунинг учун берилган тенглама ягона $x=y=z=0$ ечимга эга бўлади.

3. $\sqrt{p\sqrt{q}-q} = \sqrt{x\sqrt{q}} - \sqrt{y\sqrt{q}}$ кўринишидаги тенгламаларни рационал сонларда ечайлик. Бу кўринишдаги тенгламаларни ечиш усули

$$\sqrt{3\sqrt{5}-5} = \sqrt{x\sqrt{5}} - \sqrt{y\sqrt{5}} \text{ мисолни ечиш жараёнида кўрсатиб ўтилади.}$$

Тенгламани ҳар иккала томонини квадратга кўтариб

$$3\sqrt{5}-5 = x\sqrt{5} + y\sqrt{5} - 2\sqrt{5xy}$$

$$(x+y-3)\sqrt{5} = 2\sqrt{5xy} - 5$$

$$(x+y-3)^2 \cdot 5 = 25 + 20xy - 20\sqrt{5xy}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламадан $20\sqrt{5xy}$ ифоданинг рационал эканлиги келиб чиқади. Демак, бундан $x+y-3=0$ ва $2\sqrt{5xy}-5=0$

эканлиги келиб чиқади, акс ҳолда $\sqrt{5} = \frac{2\sqrt{5xy} - 5}{x + y - 3}$ нинг рационал сонлиги

келиб чиқарди. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2\sqrt{5xy} - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x + 5 = 0 \\ y = \frac{5}{4x} \end{cases}$

системани ечиб $\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ва $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ ечимларни ҳосил қиламиз. $x > y$ шартдан

$\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ечимга эга бўламиз.

$\sqrt{p\sqrt{q} - q} = \sqrt{x\sqrt{q}} - \sqrt{y\sqrt{q}}$ тенгламада ҳам юқоридаги мисол каби

мулоҳоза юритсак $\sqrt{p^2 - q}$ рационал бўлиш шартида, берилган тенгламанинг рационал ечимларини топиш мумкин бўлади.

Ўз навбатида ўқувчиларга мустақил ечиш учун юқоридаги масалаларга ўхшаш масалаларни тавсия этамиз.

1. $p > 5$ бўлганда (p - туб сон) $x^4 + 4^x = p$ тенглама бутун сонларда ечимга эга бўлмаслигини кўрсатинг.
2. $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y^2$ натурал сонларда (ихтиёрий $n \in \mathbb{N}$ учун) ечимга эга эканлигини кўрсатинг.
3. $x^2 = y^2 + 2y + 13$ тенгламани бутун сонларда ечинг.
4. $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$ тенгламани бутун сонларда ечинг.
5. $\sqrt{4\sqrt{7} - 7} = \sqrt{x\sqrt{7}} - \sqrt{y\sqrt{7}}$ тенгламани рационал ечимларини топинг.

Адабиётлар:

1. Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахар и др. Заочные математические олимпиады. Москва «Наука» 1986 г.
2. Зарубежные математические олимпиады. Под редакцией И. Н. Сергеева. Москва «Наука» 1987 г.