ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ЗАҲИРИДДИН МУҲАММАД БОБУР НОМИДАГИ АНДИЖОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ

Қўлёзма ҳуқуқида

Нематжонова Муштарий

АЛ ва КҲК математика курсида логарифмик тенгламаларни ўқитиш

5130100–математика таълим йўналиши бўйича бакалавр академик даражасини олиш учун ёзилган

БИТИРУВ МАЛАКАВИЙ ИШИ

Илмий рахбар: кат.ўқит. Б.Бахритдинов

Андижон 2015

К и р и ш

Таълим тўғрисида” ҳамда “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури” тўғрисидаги Ўзбекистон Республикаси Қонунлари асосида мамлакатимизда таълим соҳасида туб ўзгаришлар амалга оширила бошлади. Бу ўзгаришлар асосида таълимнинг узлуксизлиги ва узвийлигини таъминлашга алоҳида эътибор берилди.

“Таълим тўғрисида” ги Қонуннинг 10-моддаси “Таълим турлари” деб номланиб, “Ўзбекистон Республикасида таълим қуйидаги турларда амалга оширилади:

- Мактабгача таълим
- Умумий ўрта таълим
- Ўрта махсус, касб-ҳунар таълими
- Олий таълим
- Кадрлар малакасини ошириш ва уларни қайта тайёрлаш
- “Мактабдан ташқари таълим” деб белгилаб қўйилган.

Ушбу битирув малакавий иш логарифмик тенгламалар мавзусига бағишланган бўлиб, бу мавзу таълимнинг ўрта махсус, касб - ҳунар таълими бўғинида ўқитилади.

Логарифмик тенгламалар мавзуси кўрсаткичли тенглама, кўрсаткичли функция ва унинг хоссалари, сонни логарифмлаш, логарифмик функция ва унинг хоссалари каби мавзулар билан узвий боғлиқдир. Академик литцей ва касб - ҳунар коллежлари математика дастурида ҳам ушбу мавзулар кетма - кет берилган бўлиб, улар учун жаъми 30 соат вақт ажратилган ва бу вақт ичида қуйидаги мавзулар ўтилиши кўзда тутилган:

5. Кўрсаткичли функциялар. (10 соат)

Кўрсаткичли тенглама ва тенгсизликларни ечишнинг асосий усуллари. Кўрсаткичли функция, унинг аниқланиш ва ўзгариш соҳалари. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқлари. Кўрсаткичли функциянинг графиги.

6. Логарифмик функциялар. (20 соат)

Соннинг логарифми. Асосий логарифмик айниятлар. Кўпайтма, бўлинма ва даражанинг логарифми. Бир асосдан бошқа асосга ўтиш формуласи. Ўнли ва натурал логарифмлар. Кўрсаткичли ва логарифмик ифодаларни айний алмаштиришлар. Логарифмик тенглама ва тенгсизликларни ечиш усуллари. Логарифмик функция, унинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаси. Логарифмик функциянинг графиги. Тескари функция, ўзаро тескари функциялар.

Битирув малакавий иш кириш, иккита боб, бешта параграфдан иборат.

“Кўрсаткичли ва логарифмик функциялар” деб номланган биринчи бобда кўрсаткичли ва логарифмик функциялар, уларнинг хоссалари ҳақидаги маълумотлар, турли мисоллар берилган. “Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар” номли иккинчи бобнинг биринчи параграфи энг содда кўрсаткичли ва логарифмик тенгламаларга, иккинчи параграфи кўрсаткичли тенгламалар ва уларнинг турларга ажратиш ҳамда уларни ечиш кўникма ва малакаларини шакллантиришга, учинчи параграфи эса логарифмик тенгламаларни турларга ажратиш ҳамда уларни ечиш кўникма ва малакаларини шакллантириш масалаларига бағишланган.

I-боб. Кўрсаткичли ва логарифмик функциялар

1–§. Кўрсаткичли функция ва унинг хоссалари

–

Таъриф. $y=a^x$ кўринишдаги функцияга кўрсаткичли функция дейилади (бу ерда $a>0$ ва $a\neq 1$).

$y=2^x$, $y=3^x$, $y=10^x$, $y=(\frac{1}{2})^x$, $y=(0,1)^x$ ва ҳоказолар кўрсаткичли функциялардир. Кўрсаткичли функция қуйидаги хоссаларга эга.

1-хосса. Кўрсаткичли функциянинг аниқланиш соҳаси ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат.

2-хосса. Кўрсаткичли функциянинг қийматлар соҳаси барча мусбат сонлар тўпламидан иборат.

3-хосса. $a>1$ бўлганда $x>0$ лар учун $a^x>1$ ва $x<0$ лар учун $a^x<1$ бўлади.

4-хосса. $0<a<1$ бўлганда $x>0$ лар учун $a^x<1$ ва $x<0$ лар учун $a^x>1$ бўлади.

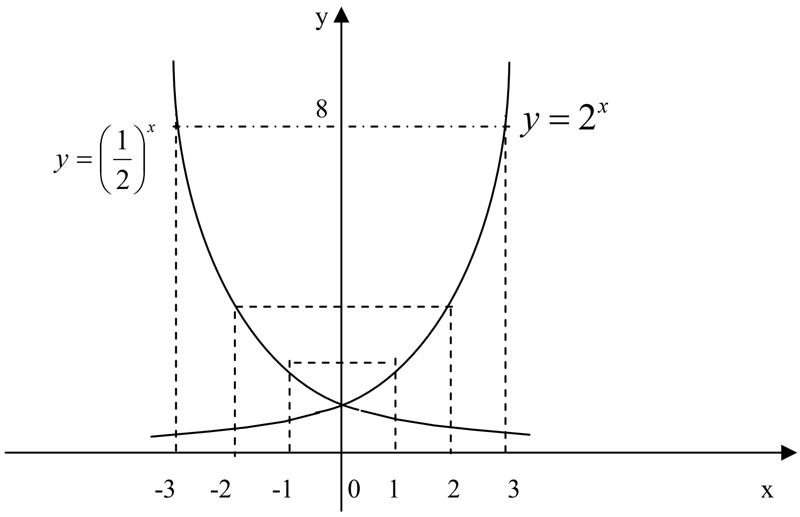
5-хосса. $a>1$ бўлганда $y=a^x$ функция монотон ўсувчи ва $0<a<1$ бўлганда монотон камаювчи бўлади.

6-хосса. функциянинг ноллари мавжуд эмас.

7-хосса. функция экстремумларга эга эмас.

Кўрсаткичли функциянинг графиги. $y=a^x$ функциянинг графиги ҳақида тасаввур ҳосил қилиш учун $y=2^x$ ва $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларни графикларини ясаймиз. Бунинг учун дастлаб қуйидаги жадвални тузамиз:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



1-чизма

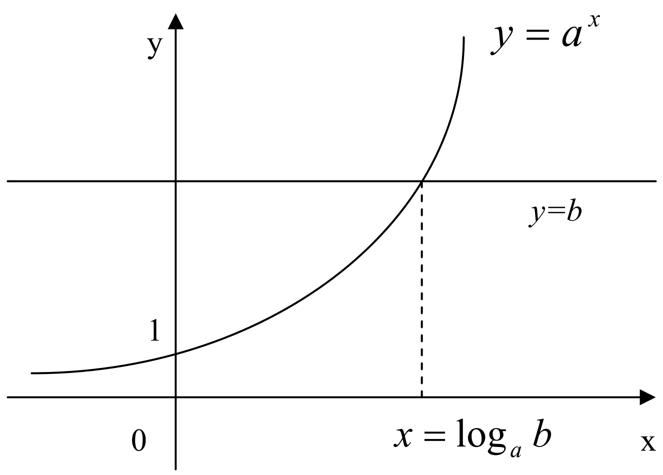
$y=2^x$ ва $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларнинг графикларидан ҳам кўрсаткичли функция учун юқорида келтирилган хоссаларни тўғрилигини кўриш мумкин (1-чизма). Бундан ташқари графиклардан x аргумент $-\infty$ дан $+\infty$ гача ортганда $y=2^x$ функциянинг қийматлари 0 дан $+\infty$ гача ўсишини, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциянинг қийматлари эса $+\infty$ дан 0 гача камайишини кузатиш мумкин. Бу хулосалар ҳар қандай $a>1$ ва $0<a<1$ лар учун ўринлидир.

Шундай қилиб ҳар қандай бирдан фарқли мусбат a сон учун $y=a^x$ функциянинг қийматлар соҳаси барча мусбат ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат эканлиги ҳақида хулоса қилиш мумкин.

2–§. Логарифмик функция ва унинг хоссалари

1. Логарифмнинг таърифи. Асосий логарифмик айниятлар. $a^x=b$ тенгламани қараймиз. Бу ерда a–асос, x–даража кўрсаткич, b–даража.

Берилган асос ва берилган даражага кўра даража кўрсаткични топиш, яъни $a^x=b$ тенгламани илдизини топиш талаб қилинган бўлсин. Бу тенгламани график усулда ечамиз. Бунинг учун битта чизмада $y=a^x$, $y=b$ функцияларнинг графикларини ясаймиз ва уларни кесишиш нуқтасини абциссасини топамиз. $b>0$ да бу тенглама $log_a b$ билан белгиланувчи битта ечимга эга бўлиши равшан. (2-чизма) Демак тенглама илдизини таърифига асосан $a^{\log_a b}=b$ (1) айниятга эга бўламиз.



2–чизма

Таъриф. Берилган b соннинг берилган a асосли логарифми деб, берилган b сонни ҳосил қилиш учун a асосни кўтариш керак бўлган даража кўрсаткичга айтилади.

Шундай қилиб биз, $a^x=b$ ($a>0$, $a\neq 1$, $b>0$) тенгламани ўрганиш жараёнида логарифмни таърифига эга бўлдик.

(1) айният асосий логарифмик айният деб аталади.

Логарифмнинг таърифига асосан $a^x=b$ тенгликдан $x=log_a b$ тенгликни ва $x=log_a b$ дан эса $a^x=b$ тенгликни ёзиш мумкинлиги келиб чиқади.

Таъриф. Берилган асосга ва берилган даражага кўра, даража кўрсаткични топиш амалига логарифмлаш дейилади. Шундай қилиб $a^x=b$ тенглама логарифмлаш орқали ечилади. (Бу ерда b ни a асосли даража қилиб ёзиб бўлмайди деб қаралади).

2. Тескари функция тушунчаси. Айтайлик y=f(x) функция ўзининг аниқланиш соҳаси D да монотон бўлсин. У ҳолда x нинг D соҳадан олинган ҳар бир қийматига y нинг E соҳадаги ягона қиймати мос келади ва аксинча: y нинг E соҳадан олинган ҳар бир қийматига x нинг D соҳадаги ягона қиймати мос келади. Демак бу ҳолда E соҳада аниқланган шундай янги функцияни тузиш мумкинки, унда у нинг E дан олинган ҳар бир қийматига y=f(x) тенгламани қаноатлантирувчи x нинг D соҳадаги ягона қиймати мос келади. Ҳосил қилинган янги функция берилган $y=f(x)$ функцияга нисбатан тескари функция дейилади. Бундан берилган функцияга тескари функцияни топишнинг қуйидаги қоидаси келиб чиқади.

$y=f(x)$ функцияга тескари функцияни топиш учун ундаги x ни y орқали $x=g(y)$ ифодаси топилиб сўнгра бу ифодадаги x ва y ларни ўринларини алмаштирилади. Шундай қилиб, $y=f(x)$ функцияга тескари $y=g(x)$ функция ҳосил қилинади.

Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси тескари функция учун қийматлар соҳаси, қийматлар соҳаси эса тескари функция учун аниқланиш соҳаси бўлади. Яъни $D(f)=E(g)$ ва $D(g)=E(f)$.

Ўзаро тескари функцияларнинг графиклари $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик жойлашган бўлади.

3. Логарифмик функция ва унинг хоссалари. $y=log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$) га логарифмик функция дейилади.

Масалан, $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$, $y=\log_{0,1} x$, $y=\log_{0,2} x$ ва ҳоказолар логарифмик функциялардир.

$y=a^x$ тенглик x ва y орасида қандай боғлиқлик борлигини ифодаласа, $y=log_a x$ ҳам шундай боғлиқликни ифодалайди.

$y=a^x$ тенгликда x даража кўрсаткич, y даража бўлса, $y=log_a x$ да x даража y эса даража кўрсаткич бўлади.

Кўрсаткичли функция даража кўрсаткични ўзгаришига қараб даражани ўзгаришини характерлайди. Логарифмик функция эса даражани ўзгаришига қараб даража кўрсактични ўзгаришини характерлайди. Шунинг учун ҳам улар ўзаро тескари функциялар дейилади. Бундан кўрсаткичли функциянинг хоссаларига асосланиб, логарифмик функциянинг хоссаларини келтириб чиқариш мумкинлиги келиб чиқади. Қуйида бу хоссаларни келтирамиз.

1. Логарифмик функциянинг аниқланиш соҳаси мусбат сонлар тўпламидан иборат.

2. Логарифмик функциянинг қийматлар соҳаси ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат.

3. Бирнинг ҳар қандай асосли логарифми нолга тенг.

4. $a>1$ бўлганда логарифмик функция монотон ўсувчи ва $0<a<1$ да монотон камаювчи бўлади.

5. $a>1$ бўлганда х нинг $(0;1)$ оралиқдаги қийматларида $y=log_a x$ функциянинг қийматлари манфий, x нинг $(1;+\infty)$ даги қийматларида $y=log_a x$ функциянинг қийматлари мусбат бўлади.

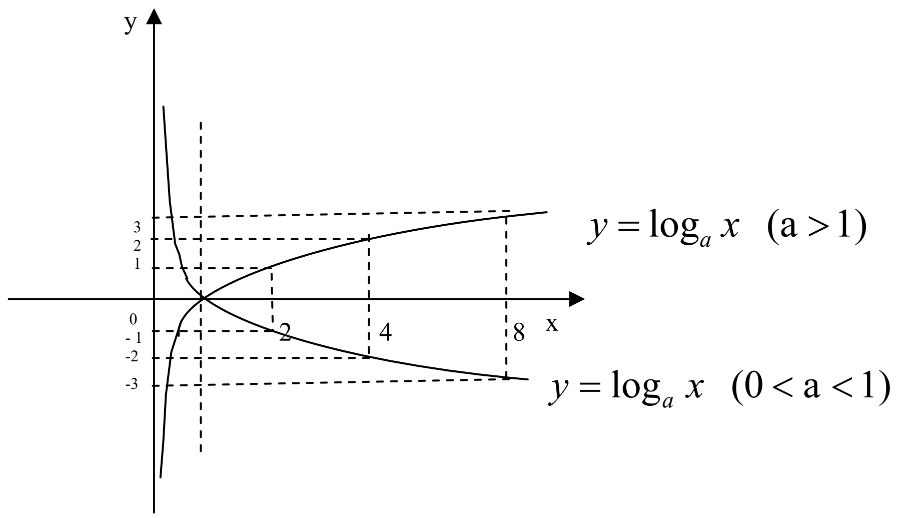
6. $0<a<1$ бўлганда x нинг $(0;1)$ оралиқдаги қийматларида $y=log_a x$ функциянинг қийматлари мусбат, x нинг $(1;+\infty)$ даги қийматларида $y=log_a x$ функциянинг қийматлари манфий бўлади.

7. $y=log_a x$ функция экстремумларга эга эмас.

Қуйида логарифмик функциянинг хоссаларини қўллашга доир бир нечта мисоллар кўрамиз.

4. Логарифмик функциянинг графиги. $y=log_a x$ функция графиги ҳақида тасаввур ҳосил қилиш учун дастлаб $y=log_2 x$ ва $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ функцияларни графикларини битта чизмада ясаймиз. Бунинг учун эса қуйидаги жадвалдан фойдаланамиз.

X	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3



3-чизма

Ясалган графиклардан ҳам логарифмик функциянинг юқорида келтирилган ҳоссаларини тўғрилигини кузатиш мумкин.

II–боб. Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар

–

1–§ . Энг содда кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар

1.Таърифлар. ***1.Номаълум ўзгарувчи миқдор даража кўрсаткичида ёки даража асосида қатнашган тенгламага <u>кўрсаткичли тенглама</u> дейилади.***

Масалан: $2^x=8$, $3^{x+1}+3^x=12$, $3^{2x-3}=2^{6x-9}$, $x^{3x+2}=1$ ва ҳоказолар кўрсаткичли тенгламалардир. Кўрсаткичли тенгламаларни ечиш кўпинча қуйидаги теоремага асосланади.

Теорема. Бирдан фарқли мусбат соннинг 2 та даражаси ўзаро тенг бўлса, у ҳолда уларнинг даража кўрсаткичлари ҳам тенг бўлади. Яъни, агар $a^m=a^n$ бўлса, у ҳолда $m=n$ бўлади (бу ерда $a>0$, $a\neq 1$).

Энг содда кўрсаткичли тенглама $a^x=b$ кўринишда бўлади.

Кўрсаткичли функциянинг 2-хосасига асосан ҳар доим $a^x>0$. Шунинг учун $a^x=b$ тенглама фақат $b>0$ бўлгандагина ечимга эга.

Қуйида бундай тенгламага доир бир қанча мисоллар кўрамиз:

Агар $a^x=b$ тенгламадаги b ни a асосли даража қилиб ёзиб бўлмаса, у ҳолда уни график усулда ечиш мумкин. Бунинг учун битта чизмада $y_1=a^x$ ва $y_2=b$ ларни графиклари ясалади. Бу графиклар кесишиш нуқтасининг абциссаси берилган тенгламанинг ечимидан иборат бўлади. Бу ечим ҳақида кейинги параграфларда алоҳида тўхталамиз.

2. ***Номаълум миқдор логарифм белгиси остида ёки логарифм асосида қатнашган тенгламага <u>логарифмик тенглама</u> дейилади.***

Логарифмик тенгламаларни ечиш қуйидаги теоремага асосланади.

Теорема. Иккита мусбат соннинг бир ҳил асосли логарифмлари тенг бўлса, у ҳолда уларнинг ўзлари ҳам тенг бўлади. Яъни $\log_a N_1=\log_a N_2$ бўлса, $N_1=N_2$ бўлади.

Мисоллар:

1. $\log_3(2x-5)=\log_3(x+4)$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Юқоридаги торемага асосан $2x-5=x+4$. Бундан эса $x=9$ келиб чиқади.

Текшириш: $\log_3(2\bullet 9-5)=\log_3 13$; $\log_3(9+4)=\log_3 13$. Демак, $x=9$ берилган тенгламанинг ечими экан.

Жавоб: {9}

2. $\log_{0,5}(x^2-3x-2)=\log_{0,5}(2x+4)$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Юқоридаги теоремага асосан $x^2-3x-2=2x+4$ ёки $x^2-5x-6=0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама квадрат тенглама бўлиб, уни ечимлари , $x_1=-1$ ва $x_2=6$ дан иборат. Буларни берилган тенгламага қўйиб, ҳар иккаласи берилган тенгламани қаноатлантиришини кўриш мумкин.

Жавоб: {-1;6}

3. $\log_2(x^2-x-2)=\log_2(x+1)$ тенглама ечилсин.

Ечиш: $x^2-x-2=x+1$ ёки $x^2-2x-3=0$. Бундан эса $x_1=3$ ва $x_2=-1$ ларни ҳосил қиламиз.

Текшириш: $\log_2(3^2-3-2)=\log_2 4=2$; $\log_2(3+1)=\log_2 4=2$. $\log_2((-1)^2-(-1)-2)=\log_2(1+1-2)=\log_2 0$. Бу ифода маънога эга эмас. Худди шундай $\log_2(-1+1)=\log_2 0$. Демак, берилган тенгламани фақат $x_1=3$ қаноатлантиради.

Жавоб: {3}

4. $\log_x 64=3$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Логарифмнинг таърифига асосан $x^3=64$ бўлиб ундан $x=4$ келиб чиқади.

Жавоб: {4}.

2. Логарифмлаш. Логарифмлар ҳақида теоремалар. Логарифмлар ҳақидаги бир қатор теоремаларни исботлашда $N = a^{\log_a N}$ асосий логарифмик айниятдан ва $\log_a a^k = k$ тенгликдан фойдаланилади. Қуйида биз уларни исботсиз келтирамиз.

1-теорема. Кўпайтманинг логарифми кўпайтувчилар логарифмларининг кўпайтмасига тенг. Яъни,

$\log_a(N_1N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2$ ($a>0$, $a\neq 1$, $N_1>0$, $N_2>0$).

2-теорема. Бўлинманинг логарифми бўлинувчи ва бўлувчилар логарифмларининг айирмасига тенг. Яъни,

$\log_a \frac{N_1}{N_2}=\log_a N_1-\log_a N_2$ ($a>0$, $a\neq 1$, $N_1>0$, $N_2>0$).

3-теорема. Даражанинг логарифми даража кўрсаткични асоснинг логарифмига кўпайтмасига тенг. Яъни,

$\log_a N^k=k\log_a N$ ($a>0$, $a\neq 1$, $N>0$).

4-теорема. Илдизнинг логарифми илдиз остидаги соннинг логарифмини илдиз кўрсаткичига бўлинмасига тенг. Яъни,

$\log_a \sqrt[k]{N} = \frac{1}{k}\log_a N$ ($a>0$, $a\neq 1$, $N>0$, $k\in N$).

5-теорема. Бир сонининг ҳар қандай асосли логарифми нолга тенг. Яъни, $\log_a 1=0$, ($a>0$, $a\neq 1$). Масалан, $\log_7 1=0$; $\log_3 1=0$; $\log_{0,7} 1=0$

6-теорема. а сонининг а асосли логарифми 1 га тенг. Яъни,

$\log_a a=1$, ($a>0$, $a\neq 1$). Масалан, $\log_4 4=1$; $\log_7 7=1$; $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}=1$.

Бу теоремаларга логарифмлаш қоидалари дейилади.

Логарифмлашда, логарифмик тенгламалар ва тенгсизликларни ечишда кўпинча қуйидаги муносабатлардан фойдаланиш қулай бўлади.

1. $\log_a b\bullet\log_b a=1$. Бундан $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ ёки $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$;

2. $\frac{\log_a n_1}{\log_a n_2}=\frac{\log_b n_1}{\log_b n_2}$. Масалан $\frac{\log_4 5}{\log_4 10}=\frac{\lg 5}{\lg 10}=\frac{\lg 5}{1}=\lg 5$;

3. $\log_{a^n} b^n=\log_a b$. Масалан $\log_{3^5} 8^5=\log_3 8$;

4. $\log_{a^k} n=\frac{1}{k}\log_a n$. (a>0, $a\neq 1$). Масалан $\log_8 5=\log_{2^3} 5=\frac{1}{3}\log_2 5$;

5. $\log_{ab}N=\frac{\log_{|a|} N}{1+\log_{|a|}|b|}$ (ab>0)

6. $a^{\log_c b}=b^{\log_a a}$

Мисоллар.

1. $x=2a^3b$ ни логарифмланг.

Ечиш: $\log_c x=\log_c 2a^3b=\log_c 2+3\log_c a+\log_c b$.

2. $x=\frac{abc}{mn}$ ни логарифмланг.

Ечиш: $\log_p x=\log_p\frac{abc}{mn}=\log_p(abc)-\log_p mn=\log_p a+\log_p b+\log_p c-\log_p m-$
$-\log_p n$.

3. Потенцирлаш. Агар логарифмлаш қоидаларини ифодаловчи тенгликларни чап ва ўнг томонларини ўринларини алмаштирилса, у ҳолда потенцирлаш қоидалари деб аталувчи янги тенгликларни ҳосил қиламиз. Улар қуйидагича бўлади:

$\log_a N_1+\log_a N_2=\log_a(N_1N_2)$; $\log_a N_1-\log_a N_2=\log_a\frac{N_1}{N_2}$;

$k\log_a N=\log_a N^k$; $\frac{1}{k}\log_a N=\log_a\sqrt[k]{N}$.

Буларда a>0, $a\neq 1$, N>0, $N_1>0$, $N_2>0$, $k\neq 0$

Мисоллар:

1. $3\log_a m+2\log_a n-\frac{1}{3}\log_a p$ ифодани потенцирланг.

Ечиш: $3\log_a m+2\log_a n-\frac{1}{3}\log_a p=\log_a m^3+\log_a n^2-\log_a\sqrt[3]{p}=\log_a(m^3n^2)-$
$-\log_a\sqrt[3]{p}=\log_a\frac{m^3n^2}{\sqrt[3]{p}}$.

2. $\log_a x=\frac{1}{5}\log_a m-2\log_a n-\frac{2}{3}\log_a p+\log_a q$ дан х топилсин.

Ечиш: Тенгликнинг ўнг томонига потенцирлаш қоидаларини қўллаймиз.

$$\frac{1}{5}\log_a m-2\log_a n-\frac{2}{3}\log_a p+\log_a q=\log_a\sqrt[5]{m}-\log_a n^2-\log_a\sqrt[3]{p^2}+\log_a q=$$

$=\log_a(\sqrt[5]{m}\bullet q)-\log_a(n^2\sqrt[3]{p^2})=\log_a\frac{\sqrt[5]{m}\bullet q}{n^2\sqrt[3]{p^2}}$. Демак, биз $\log_a x=\log_a\frac{\sqrt[5]{m}\bullet q}{n^2\sqrt[3]{p^2}}$ тенгликка эга бўлдик. Ундан эса $x=\frac{\sqrt[5]{m}\bullet q}{n^2\sqrt[3]{p^2}}$ келиб чиқади.

4. Логарифмнинг бир асосидан бошқасига ўтиш. Турли асосли логарифмлар қатнашган ифодаларни соддалаштиришда ва турли асосли логарифмик тенглама ва тенгсизликларни ечишда логарифмларни бир хил асосга келтиришга тўғри келади. Бунда қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b};\ \ b>0,\ \ b\neq 1,\ \ N>0,\ \ a>0,\ \ a\neq 1.$$

Бу формуланинг тўғрилиги $b^{\log_b N}=N$ асосий логарифмик айниятдан осонгина келтириб чиқарилади.

Мисоллар:

1. $\log_{16}N=p$ бўлса $\log_2 N$; $\log_4 N$ ва $\log_8 N$ лар топилсин.

Ечиш: $\log_{16}N=\frac{\log_2 N}{\log_2 16}=\frac{\log_2 N}{4}$; Демак, $\frac{\log_2 N}{4}=p$. Бундан эса $\log_2 N=4p$ келиб чиқади.

$\log_{16}N=\frac{\log_4 N}{\log_4 16}=\frac{\log_4 N}{2}$; Демак, $\frac{\log_4 N}{2}=p$ бўлиб, ундан $\log_4 N=2p$ келиб чиқади.

$$\log_{16}N=\frac{\log_8 N}{\log_8 16}=\frac{\log_8 N}{\log_{2^3}2^4}=\frac{\log_8 N}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}\log_8 N.$$

Демак, $\frac{3}{4}\log_8 N=p$ бўлиб, ундан $\log_8 N=\frac{4p}{3}$ келиб чиқади.

2. $\log_5 4=a$ ва $\log_5 3=b$ бўлса, $\log_{25}12$ топилсин.

Ечиш: $\log_{25}12=\frac{\log_5 12}{\log_5 25}=\frac{\log_5(3\bullet 4)}{2}=\frac{1}{2}(\log_5 3+\log_5 4)=\frac{1}{2}(a+b)$.

Демак, $\log_{25}12=\frac{1}{2}(a+b)$

3. $\lg 5=a$ ва $\lg 3=c$ бўлса, $\log_{30}8$ топилсин

Ечиш: 1) $\log_{30}8=\log_{30}2^3=3\log_{30}2=3\bullet\frac{\lg 2}{\lg 30}=3\bullet\frac{\lg\frac{10}{5}}{\lg(3\bullet 10)}=$

$=3\bullet\frac{\lg 10-\lg 5}{\lg 3+\lg 10}=3\bullet\frac{1-a}{c+1}=\frac{3-3a}{1+c}$

Жавоб: $\log_{30}c=\frac{3-3a}{1+c}$

3. $\log_2 x+\log_8 x+\log_{32}x=4,6$ бўлса, x топилсин.

Ечиш: $\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 8}+\frac{\log_2 x}{\log_2 32}=4,6$, $\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x+\frac{1}{5}\log_2 x=4,6$;

$\frac{23}{15}\log_2 x=4,6$; $\log_2 x=\frac{4,6\bullet 15}{23}$; $\log_2 x=3$. Бундан эса $x=2^3=8$ келиб чиқади.

Жавоб: 8

4. $\log_7 12=a$ ва $\log_{12}24=c$ бўлса $\log_{54}168$ топилсин

Ечиш: $\log_7 12=\frac{\log_2 12}{\log_2 7}=\frac{\log_2(3\bullet 4)}{\log_2 7}=\frac{\log_2 3+2}{\log_2 7}=\frac{x+2}{y}$; Бу ерда биз $\log_2 3=x$ ва $\log_2 7=y$ деб олдик

$\log_{12}24=\frac{\log_2 24}{\log_2 12}=\frac{\log_2(3\bullet 8)}{\log_2(3\bullet 4)}=\frac{\log_2 3+\log_2 8}{\log_2 3+\log_2 4}=\frac{3+x}{2+x}$;

$\log_{54}168=\frac{\log_2 168}{\log_2 54}=\frac{\log_2(2^3\bullet 3\bullet 7)}{\log_2 2\bullet 3^3}=\frac{\log_2 2^3+\log_2 3+\log_2 7}{\log_2 2+\log_2 3^3}=\frac{3+x+y}{1+3x}$

Демак, биз x ва y ларни топиш учун қуйидаги системани ҳосил қилдик:

$$\begin{cases}\frac{2+x}{y}=a\\ \frac{3+x+y}{2+x}=c\end{cases}$$

Бу системани ечиб $x=\frac{3-2a}{c-1}$ ва $y=\frac{1}{a(c-1)}$ ларни ҳосил қиламиз. Буларни $\log_{54}168$ нинг х ва у орқали ифодасига қўйиб $\log_{54}168=\frac{1+ac}{a(8-5c)}$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб: $\frac{1+ac}{a(8-5c)}$.

2–§ . Кўрсаткичли тенгламалар ва уларнинг турлари

Биз юқорида кўрсаткичли тенгламага таъриф берганмиз ҳамда энг содда кўрсаткичли тенглама ва уни ечиш усулларини баён қилган эдик. Бу параграфда эса кўрсаткичли тенгламаларнинг баъзи бир турлари ва уларни ечиш усуллари ҳақида фикр юритамиз. Математика курсида ўрганиладиган кўрсаткичли тенгламаларни шартли равишда қуйидаги турларга бўлиш мумкин:

1) $a^{f(x)}=1$;

2) $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$ ва унга келтириладиган тенгламалар;

3) $a^{f(x)}=b^{\varphi(x)}$;

4) $A_0 a^{mx+k_0}+A_1 a^{mx+k_1}+....+A_n a^{mx+k_n}=B$;

5) $A_0 a^{2x}+A_1 a^x+A_2=0$; 6) $A_0 a^x+A_1 a^{\frac{x}{2}} b^{\frac{x}{2}}+A_2 b^{\frac{x}{2}}=0$;

7) $f(x)^{\varphi(x)}=k$ кўринишдаги тенгламалар;

8) $f(x)^{\varphi x}=f(x)^{g(x)}$ кўринишдаги тенгламалар.

1. $a^{f(x)}=1$ кўринишдаги тенгламалар. Бундай тенгламалар нолинчи кўрсаткичли даражанинг таърифига асосан $f(x)=0$ кўринишдаги тенгламани ечишга келтирилади. Бу ерда $f(x)$ ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган функция. $f(x)=0$ тенгламанинг ечими берилган тенгламанинг ечимидан иборат бўлади. Қуйида бундай тенгламага оид бир қанча мисоллар кўрамиз.

Қуйидаги кўрсаткичли тенгламалар ечилсин.

1. $2^{2x-3}=1$.

Ечиш: Нолинчи кўрсаткичли даражанинг таърифига асосан $2x-3=0$ бўлиб, ундан $x=1,5$ келиб чиқади.

Жавоб: $\{1,5\}$

2. $2^{x^2-5x+6}=1$.

Ечиш: Нолинчи кўрсаткичли даражанинг таърифига асосан

$x^2 - 5x + 6 = 0$ бўлиб, ундан $x_1 = 2$ ва $x_2 = 3$

келиб чиқади.

Жавоб: {2; 3}.

3. $2^{x^2-40x+300} = 1$

Ечиш: Нолинчи кўрсаткичли даражанинг таърифига асосан

$x^2 - 40x + 300 = 0$ бўлиб, ундан $x_1 = 10$ ва $x_2 = 30$

келиб чиқади.

Жавоб: {10; 30}.

4. $0{,}4^{x^2-x-20} = 1$.

Ечиш: Нолинчи кўрсаткичли даражанинг таърифига асосан $x^2 - x - 20 = 0$ бўлиб, ундан $x_1 = -4$ ва $x_2 = 5$ келиб чиқади.

Жавоб: {–4; 5}.

5. $8^{\cos^2 x - \sin^2 x - 0{,}5} = 1$.

Ечиш: Нолинчи кўрсаткичли даражанинг таърифига асосан $\cos^2 x - \sin^2 x - 0{,}5 = 0$ бўлиб, ундан $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ энг содда тригонометрик тенглама келиб чиқади. Уни ечиб $2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ёки $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$.

2. $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ **(1) кўринишдаги тенгламалар.** Бу каби тенгламанинг чап ва ўнг томонлари бир хил асосли бўлиб, уни ечими $f(x) = \varphi(x)$ тенгламанинг ечимидан иборат. Ҳақиқатдан ҳам (1) тенгламани ўнг ва чап томонини $a^{\varphi(x)}$ $(a^{\varphi(x)} \neq 0)$ га бўлиб,

$\frac{a^{f(x)}}{a^{\varphi(x)}}=1$ ёки $a^{f(x)-\varphi(x)}=1$ ни ҳосил қиламиз. Ундан $f(x)-\varphi(x)=0$ ёки $f(x)=\varphi(x)$ келиб чиқади.

Қуйида $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$ кўринишдаги тенгламаларга доир бир нечта мисоллар кўрамиз.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин.

1. $16^{\frac{1}{x}}=2^x$.

Ечиш: $16=2^4$ бўлганлиги учун берилган тенгламани $2^{\frac{4}{x}}=2^x$ кўринишда ёзиш мумкин. Бундан эса $\frac{4}{x}=x$ ёки $x^2=4$ тенглама келиб чиқади. Уни ечиб $x_1=2$ ва $x_2=-2$ ларни топамиз.

Жавоб: {2; -2}

2. $(0,1)^{2x+3}=100^{x-1}$. Бу тенгламани ечиш учун унинг ҳар иккала қисмини 10 асосли даражага келтирамиз.

$(10^{-1})^{2x+3}=(10^2)^{x-1}$, $10^{-2x-3}=10^{2x-2}$. Бундан $-2x-3=2x-2$ бўлади. Ундан эса $x=-\frac{1}{4}$ келиб чиқади.

Жавоб: $\{-\frac{1}{4}\}$

3. $2{,}56^{\sqrt{x}-1}=\left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{x}+1}$. Бу тенгламани ечиш учун унинг ҳар иккала қисмини бир хил асосли даража кўринишига келтирамиз. $2{,}56=1{,}6^2$, $\left(\frac{5}{8}\right)=\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}=(1{,}6)^{-1}$ бўлганлиги учун берилган тенглама $(1{,}6^2)^{\sqrt{x}-1}=((1{,}6)^{-1})^{4\sqrt{x}+1}$ ёки $2\sqrt{x}-2=-4\sqrt{x}-1$ кўринишга келади. Бундан $6\sqrt{x}=1$ иррационал тенглама ҳосил бўлиб, унинг ечими $x=\frac{1}{36}$ дан иборат бўлади.

Жавоб: $\{\frac{1}{36}\}$.

4. $4^{x^2+3x}=\frac{1}{16}$ тенгламанинг ўнг томони $\frac{1}{16}=4^{-2}$ бўлганлиги учун берилган тенгламани $4^{x^2+3x}=4^{-2}$ кўринишда ёзиш мумкин. Ундан эса $x^2+3x+2=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу квадрат тенглама бўлиб, унинг илдизлари $x_1=-1$ ва $x_2=-2$ лардан иборат.

Жавоб: {-2;-1}

3. $a^{f(x)}=b^{\varphi(x)}$ кўринишдаги тенглама. $a^{f(x)}=b^{\varphi(x)}$ тенгламанинг чап ва ўнг томонларидаги a ва b ларни бир хил асосли даража қилиб ёзиш мумкин бўлмасин. Бу тенгламанинг чап ва ўнг томонлари мусбат ва ўзаро тенглигидан ундан берилган тенгламага тенг кучли бўлган $f(x)\lg a=\varphi(x)\lg b$ тенгламани ҳосил қиламиз ва уни x га нисбатан ечамиз.

Қуйида бундай турга кирувчи тенгламаларга доир бир нечта мисоллар кўрамиз.

1. $3^{2x-1}=5^{3-x}$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Тенгламани ҳар иккала қисмини 10 асосга кўра логарифмлаймиз. $(2x-1)\lg 3=(3-x)\lg 5$; $2x\lg 3-\lg 3=3\lg 5-x\lg 5$;

$2x\lg 3+x\lg 5=3\lg 5+\lg 3$; $x(2\lg 3+\lg 5)=3\lg 5+\lg 3$.

Бундан $x=\frac{3\lg 5+\lg 3}{2\lg 3+\lg 5}=\frac{\lg 125+\lg 3}{\lg 9+\lg 5}=\frac{\lg 375}{\lg 45}$ келиб чиқади.

Жавоб: $\{\frac{\lg 375}{\lg 45}\}$

2) $5^{x-3}=7^{3-x}$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Тенгламани ҳар иккала қисмини 10 асосга кўра логарифмлаймиз.

$(x-3)\lg 5=(3-x)\lg 7$; $x\lg 5-3\lg 5=3\lg 7-x\lg 7$; $x\lg 5+x\lg 7=3\lg 5+3\lg 7$;

$x(\lg 5+\lg 7)=3(\lg 5+\lg 7)$ бўлиб, ундан $x=3$ келиб чиқади.

Жавоб: {3}

4. $A_0a^{mx+k_0}+A_1a^{mx+k_1}+...+A_na^{mx+k_n}=B$ **кўринишдаги тенгламалар.** Баъзан $A_0a^{mx+k_0}+A_1a^{mx+k_1}+A_2a^{mx+k_2}+...+A_na^{mx+k_n}=B$ кўринишдаги тенгламалар ҳам учраб туради. Бу тенгламадаги $A_0,A_1,A_2,...,A_n,a,m$, $k_0,k_1,k_2,...,k_n$ лар ўзгармас сонлар. Бундай кўринишдаги тенгламани ечиш учун унинг чап томонидан умумий кўпайтувчи a^{mx+k_i} ни қавсдан чиқарамиз. (бу ерда k_i сон $k_0,k_1,k_2,...,k_n$ ларнинг энг кичигидир). Натижада берилган тенглама $a^{mx+k_i}(A_0a^{k_0-k_i}+A_1a^{k_1-k_i}+A_2a^{k_2-k_i}+...+A_na^{k_n-k_i})=B$ кўринишга келади. Бу тенгламанинг чап томонидаги қавс ичидаги ифода ўзгармас сондан иборат бўлгани учун уни N билан белгилаймиз. У ҳолда биз $a^{mx+k_i}\bullet N=B$ кўринишдаги тенгламага эга бўламиз. Ундан эса $a^{mx+k_i}=\frac{B}{N}$ келиб чиқади. Бу эса $\frac{B}{N}$ нинг қийматига қараб юқорида кўриб ўтилган тенгламалардан бири бўлади. Масалан, $\frac{B}{N}=1$ бўлса, $a^{f(x)}=1$ кўринишдаги тенгламага $\frac{B}{N}=a^k$ бўлса, $a^{f(x)}=a^k$ кўринишдаги тенгламага ва $\frac{B}{N}=b$ бўлса, $a^{f(x)}=b$ кўринишдаги тенгламага келади. Уларни ечиш усуллари эса бизга маълум. Агар $\frac{B}{N}\leq 0$ бўлса, у ҳолда берилган тенглама ечимга эга бўлмайди.

Қуйида бундай турга кирувчи тенгламаларга доир бир қанча мисоллар кўрамиз.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

1. $3^{x+2}-3^x=72$;   2. $3^{2x+2}+3^{2x}=30$;

Ечиш: 1. Бу тенгламани ечиш учун 3^xни қавсдан чиқарамиз. $3^x(3^2-1)=72$; $3^x\bullet 8=72$; $3^x=9$; $x=2$.

Жавоб: $\{2\}$.

2. Бу тенгламани ечиш учун унинг чап томонидаги умумий кўпайтувчи 3^{2x}ни қавсдан чиқарамиз.

$3^{2x}(3^2+1)=30$; $3^{2x}\bullet 10=30$; $3^{2x}=3$; $2x=1$; $x=\frac{1}{2}$.

Жавоб: $\{\frac{1}{2}\}$

5. $A_0a^{2x}+A_1a^x+A_2=0$ кўринишдаги тенглама. $A_0a^{2x}+A_1a^x+A_2=0$ (1) кўринишдаги тенглама кўпинча уч ҳадли кўрсаткичли тенглама деб ҳам аталади. Бу тенглама $a^x=y$ алмаштириш билан $A_0y^2+A_1y+A_2=0$ квадрат тенгламага келтирилади. Бу тенгламани ечиб y_1 ва y_2 лар топилади. Сўнгра y_1 ва y_2 ларни топилган қийматларини $a^x=y$ га қўйиб қуйидаги иккита 1) $a^x=y_1$ ва 2) $a^x=y_2$ тенгламалар ҳосил қилинади ва улар ечилади. Агар бир вақтда $y_1\le 0$ ва $y_2\le 0$ бўлса, у ҳолда берилган тенглама ечимга эга бўлмайди. Қуйида бундай турга кирувчи бир нечта мисоллар кўрамиз:

1. $3^{x+1}+18\bullet 3^{-x}=29$ тенглама ечилсин.

Ечиш: $3\cdot 3^x+\frac{18}{3^x}=29$; $3\bullet 3^{2x}-29\bullet 3^x+18=0$; $3^x=y$ деб оламиз. Натижада $3y^2-29y+18=0$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз ва уни ечамиз $y_{1,2}=\frac{29\pm\sqrt{841-216}}{6}=\frac{29\pm\sqrt{625}}{6}=\frac{29\pm 25}{6}$; $y_1=9$, $y_2=\frac{2}{3}$

а) $3^x=9$, $x_1=2$

б) $3^x=\frac{2}{3}$, $x\lg 3=\lg 2-\lg 3$; $x=\frac{\lg 2-\lg 3}{\lg 3}=\frac{\lg 2}{\lg 3}-1$

Жавоб: $\{2;\ \frac{\lg 2}{\lg 3}-1\}$

6. $A_0a^x+A_1a^{\frac{x}{2}}b^{\frac{x}{2}}+A_2b^x=0$ кўринишдаги тенглама. $A_0a^x+A_1a^{\frac{x}{2}}b^{\frac{x}{2}}+A_2b^x=0$ тенгламанинг барча ҳадлари турли асосли даражалардан иборат ва унинг четки ҳадларининг даража кўрсаткичлари ўрта ҳадининг даража кўрсаткичидан икки марта катта. Бу тенгламани ҳар иккала қисмини $b^x\neq 0$ га бўлиб.

$$A_0\left(\frac{a}{b}\right)^x + A_1\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} + A_2 = 0$$

кўринишдаги тенгламани ҳосил қиламиз. Ҳосил бўлган тенгламада $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y$ алмаштириш қилсак, натижада $A_0y^2+A_1y+A_2=0$ квадрат тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламани ечиб y_1 ва y_2 лар топилгандан сўнг қуйидаги иккита $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y_1$ ва $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y_2$ тенгламаларга эга бўламиз. Бу тенгламаларни ечиш усуллари бизга маълум. Агар бу тенгламаларда $y_1 \leq 0$ ва $y_2 \leq 0$ бўлса, берилган тенглама ечимга эга бўлмайди.

Қуйида бу турга кирувчи тенгламаларга доир бир нечта мисоллар кўрамиз.

Ечиш:

1. $2^{2x+1}-5 \bullet 6^x+3^{2x+1}=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш: $2 \bullet 2^{2x}-5 \bullet 2^x \bullet 3^x+3 \bullet 3^{2x}=0$; Бу тенгламани ҳар иккала қисмини ҳадма ҳад 3^{2x} га бўламиз. $2\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0$ бу тенгламада $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ алмаштириш қилиб $2y^2-5y+3=0$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз ва уни ечамиз. $y_{1,2}=\frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$; $y_1=\frac{3}{2}$. $y_2=1$ y_1 ва y_2 ларни бу қийматларини $(\frac{2}{3})^x=y$ га қўйиб қуйидаги иккита: а) $(\frac{2}{3})^x=\frac{3}{2}$ ва b) $(\frac{2}{3})^x=1$ тенгламаларга эга бўламиз.

а) $(\frac{2}{3})^x=\frac{3}{2}$; $(\frac{2}{3})^x=(\frac{2}{3})^{-1}$; $x=-1$

б) $(\frac{2}{3})^x=1$; $x_2=0$

Жавоб: $\{-1; 0\}$

2. $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}$ тенглама ечилсин.

$4^{-\frac{1}{x}}=2^{-\frac{2}{x}}$; $6^{-\frac{1}{x}}=2^{-\frac{1}{x}}\bullet 3^{-\frac{1}{x}}$; $9^{-\frac{1}{x}}=3^{-\frac{2}{x}}$ бўлганлиги учун берилган тенгламани $2^{-\frac{2}{x}}+2^{-\frac{1}{x}}\bullet 3^{-\frac{1}{x}}-3^{-\frac{2}{x}}=0$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламани ҳар иккала қисмини ҳадма ҳад $3^{-\frac{2}{x}}\neq 0$ га бўлсак $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{x}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}-1=0$ ёки $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}-1=0$ тенглама келиб чиқади. Бу тенгламада $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=y$ алмаштириш қиламиз. Натижада $y^2+y-1=0$ квадрат тенглама ҳосил бўлади. Уни ечиб $y_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ва $y_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ларни топамиз. $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=y$ даги y ни ўрнига топилган қийматларни қўйиб қуйидаги иккита а) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ва б) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ тенгламаларни ҳосил қиламиз.

Уларни ҳар бирини ечамиз:

а) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ тенглама ечимга эга эмас. Чунки $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}<0$

б) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\frac{1}{x}(\lg 3-\lg 2)=\lg(\sqrt{5}-1)-\lg 2$; $x=\frac{\lg 3-\lg 2}{\lg(\sqrt{5}-1)-\lg 2}$

Жавоб: $\left\{\frac{\lg 3-\lg 2}{\lg(\sqrt{5}-1)-\lg 2}\right\}$

3–§. Логарифмик тенгламалар ва уларнинг турлари

Номаълум миқдор логарифм белгиси остида ёки логарифм асосида қатнашган тенгламаларга логарифмик тенгламалар дейилади.

Масалан, $\log_3\left(x^2-5x+6\right)=2$, $\log_2(x-7)=\frac{1}{2}\log_2(3x-4)$, $\mathrm{xlgx}=0$,

$\log_{x-1}\left(x^2-3x-4\right)=1$ ва хоказолар логарифмик тенгламалардир.

Энг содда логарифмик тенгламалар $\log_a x=b$ ва $\log_x m=n$ кўринишда бўлиб, уларни ечиш усуллари билан олдинги параграфларда қисман танишганмиз.

Логарифмик тенгламаларни ечишда логарифмни таърифидан, турли логарифмик айниятлардан ва логарифмларнинг хоссаларидан фойдаланилади. Логарифмик тенгламаларни шартли равишда қуйидаги турларга ажратиш мумкин.

1. Логарифмнинг таърифидан фойдаланиб ечиладиган тенгламалар.
2. Потенцирлаб ечиладиган тенгламалар.
3. Ёрдамчи номаълум киритиш усули билан ечиладиган тенгламалар.
4. Турли асосли логарифмлар қатнашган тенгламалар.
5. Ҳар иккала томонини логарифмлаш орқали ечиладиган тенгламалар.
6. Номаълум миқдор логарифм остида ва асосида қатнашган тенгламалар.

Логарифмик тенгламаларни ечишда дастлаб номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари тўплами топилади ва сўнгра тенгламанинг ечимларидан номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари тўпламига тегишли бўлганлари текширилади. Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари тўпламини топиш қийин бўлган холларда дастлаб тенглама ечилади ва хосил қилинган барча ечимлар текшириб кўрилади.

Қуйида биз хар бир турга кирувчи тенгламаларни ечиш билан шуғулланамиз.

1. Логарифмнинг таърифидан фойдаланиб ечиладиган тенгламалар. $log_a x=b$ кўринишдаги тенглама энг содда логарифмик тенглама бўлиб, у логарифмни таърифидан фойдаланиб ечилади. Яъни, таърифга асосан $log_a x=b$ дан $x=a^b$ келиб чиқади. Баъзи ҳолларда логарифм белгиси остида x га боғлиқ ифода қатнашиши ҳам мумкин. Масалан: $log_a f(x)=b$ шундай тенгламалардир. Бу тенглама ҳам логарифм таърифидан фойдаланиб, $f(x)=a^b$ кўринишга келтирилади ва сўнгра ундан x топилади. Бунда $f(x)>0$ бўлиши кераклиги инобатга олинади. Яна тез – тез учраб турадиган энг содда тенгламалардан бири $log_x a=b$ ёки $log_{f(x)} a=b$ бўлиб, улар ҳам логарифм таърифидан фойдаланиб ечилади.

$log_x a=b$ дан $a=x^b$ ҳосил қилинади ва ундан x топилади (бу ерда $x>0$, $x\neq 1$).

$log_{f(x)} a=b$ дан $a=(f(x))^b$ ҳосил қилинади ва ундан дастлаб $f(x)$ топилади ва сўнгра ундан x топилади (бу ерда $f(x)>0$ ва $f(x)\neq 1$).

Қуйида бундай тенгламаларга доир бир қанча мисоллар қараймиз.

1. $\log_3(x^2-1)=1$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Логарифм таърифидан фойдаланиб берилган тенгламадан $x^2-1=3^1$ ёки $x^2=4$ тенглама келиб чиқади. Ундан $x_{1,2}=\pm 2$.

Текшириш: а) $\log_3((-2)^2-1)=\log_3(4-1)=\log_3 3=1;$ б) $\log_3(2^2-1)=\log_3 3=1.$

Жавоб: {-2; 2}.

2. $\log_9(\cos^2 x+2{,}5)=0{,}5$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Логарифмнинг таърифидан фойдаланамиз. У ҳолда $\cos^2 x + 2{,}5 = 9^{0{,}5}$, $\cos^2 x + 2{,}5 = 3$, ёки $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ ҳосил бўлади.

Ҳосил бўлган тенглама тригонометрик тенглама бўлиб, ундан $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ва $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$лардан иборат 2 та энг содда тригонометрик тенгламалар келиб чиқади. Уларни ечамиз:

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_1 = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z}.$

Бу ечимларни умулаштириб, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z}.$ечимни ҳосил иламиз.

Жавоб: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z}.$

3. $\log_7 \log_3 \log_2 \log_2 x = 0$тенглама ечилсин.

Ечиш: $\log_3 \log_2 \log_2 x = t$деб олсак, у ҳолда берилган тенгламадан $\log_7 t = 0$кўринишдаги тенглама келиб чиқади. Ундан эса $t=7^0=1$ ни топамиз. Демак, $\log_3 \log_2 \log_2 x = 1$. Бу тенгламада $\log_2 \log_2 x = u$ белгилаш қилсак, у ҳолда $\log_3 u = 1$ тенглама ҳосил бўлади. Ундан эса $u=3^1=3$ келиб чиқади ва натижада $\log_2 \log_2 x = 3$тенгламани ҳосил қиламиз. Ҳосил бўлган тенгламада $\log_2 x=y$ деб олсак, натижада $\log_2 y=3$ тенглама ҳосил бўлиб, ундан $y=2^3=8$ келиб чиқади ва ниҳоят $\log_2 x = 8$ тенгламага эга бўламиз. Бундан эса $x=2^8=256$ ни топамиз.

Жавоб: $\{256\}$.

4. $\log_{\sqrt[4]{1331}} x = \left(\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{9}{16}\sqrt{\frac{3}{4}} + \ldots\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Дастлаб тенгламанинг ўнг томонини соддалаштирамиз. $\sqrt{\frac{4}{3}};\ \sqrt{\frac{3}{4}};\ \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}};\ \frac{9}{16}\sqrt{\frac{3}{4}};\ \ldots$ кетма – кетлик биринчи ҳади $b_1 = \sqrt{\frac{4}{3}}$ ва махражи $q = \frac{3}{4}$ бўлган чексиз камаювчи геометрик прогрессия бўлганлиги учун унинг йиғиндиси $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\sqrt{\frac{4}{3}}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{8}{\sqrt{3}}$ га тенг. Демак, берилган тенгламадан $\log_{\sqrt[4]{1331}} x=\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}$ ёки $\log_{\sqrt[4]{1331}} x=\frac{4}{3}$ кўринишдаги энг содда логарифмик тенглама келиб чиқади. Ундан эса $x=\left(\sqrt[4]{1331}\right)^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{1331}=11$ ни топамиз.

Жавоб: $\{11\}$.

5. $\log_5\left(5^{x+1}-20\right)=x$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Логарифм таърифидан фойдаланиб, $5^{x+1}-20=5^x$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу кўрсаткичли тенгламадир. Уни ечамиз:

$5^{x+1}-20=5^x;\quad 5^{x+1}-5^x=20,\quad 5^x(5-1)=20,\quad 5^x=5, x=1.$

Текшириш: $\log_5\left(5^{1+1}-20\right)=\log_5(25-20)=\log_5 5=1$.

Жавоб: $\{1\}$.

6. $\log_{1-x}\left(2x^2+x+1\right)=2$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Логарифмнинг таърифига асосан $2x^2+x+1=(1-x)^2$. Уни соддалаштириб $2x^2+x+1=1-2x+x^2$ ёки $x^2+3x=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Ундан эса x_1=0 ва x_2=-3 ларни топамиз. x_1=0 тенгламанинг ечими бўла олмайди. Чунки x=0 да логарифмнинг асоси 1 га тенг бўлади. Буни эса бўлиши мумкин эмас.

x_2=-3 да $\log_{1-(-3)}\left(2\cdot(-3)^2-3+1\right)=\log_4(18-3+1)=\log_4 16=2.$

Демак, x=-3 берилган тенгламанинг ечими экан.

Жавоб: $\{-3\}$.

7. $\log_{5-x}(2x^2-5x+31)=2$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Логарифмнинг таърифига асосан берилган тенгламадан $2x^2-5x+31=(5-x)^2$ ни ёки $x^2+5x+6=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Ундан эса x_1=-2 ва x_2=-3 келиб чиқади.

Текшириш: x_1=-2 да $\log_7(2\cdot 4-5\cdot(-2)+31)=\log_7(8+10+31)=\log_7 49=2.$

x_2=-3 да $\log_8(2\cdot 9-5\cdot(-3)+31)=\log_8(18+15+31)=\log_8 64=2.$

Жавоб: {-3; -2}.

2. Потенцирлаб ечиладиган тенгламалар. Бу турга кирувчи тенгламаларни ечишда кўпайтма, бўлинма, даража ва илдизнинг логарифми ҳақидаги теоремаларни ифодаловчи қуйидаги формулалардан фойдаланилади.

1. $\log_a x=\log_a n_1+\log_a n_2=\log_a(n_1 n_2)$ бўлса, $x=n_1 n_2$ бўлади, бу ерда $x>0,\ n_1>0,\ n_2>0,\ a>0,\ a\neq 1$.

2. $\log_a x=\log_a n_1-\log_a n_2=\log_a\frac{n_1}{n_2}$ бўлса, $x=\frac{n_1}{n_2}$ бўлади. (бу ерда $x>0,$ $a>0,\ a\neq 1,\ n_1>0,\ n_2>0$)

3. $\log_a x=k\log_a n=\log_a n^k$ бўлса, $x=n^k$ бўлади . (бу ерда $a>0,\ a\neq 1,$ $x>0,\ n>0$)

4. $\log_a x=\frac{1}{n}\log_a m=\log_a m^{\frac{1}{n}}$ бўлса, $x=m^{\frac{1}{n}}$ бўлади. (бу ерда $a>0,\ a\neq 1,$ $m>0$)

5. $\log_a x=\frac{m}{k}\log_a n=\log_a n^{\frac{m}{k}}$ бўлса, $x=n^{\frac{m}{k}}=\sqrt[k]{n^m}$. (бу ерда $a>0,\ a\neq 1,$ $n>0$)

Қуйида булар ёрдамида ечиладиган бир қанча мисоллар қараймиз.

1. $\frac{\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\lg\sqrt[3]{x-40}}=3$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси (40; 41) U (41; +∞) дан иборат.

Потенцирлаш формуласидан фойдаланиб берилган тенгламани $\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)=\lg(\sqrt[3]{x-40})^3$ ёки $\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)=\lg\sqrt{x-40}$ кўринишда ёзиш мумкин. Ундан эса $\sqrt{x+1}+1=x-40$ ёки $\sqrt{x+1}=x-41$тенглама ҳосил бўлади. Бу иррационал тенгламадир. Уни ечамиз:

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2=(x-41)^2,\ x+1=x^2-82x+1681;\ \ x^2-83x+1680=0.$$

Бу квадрат тенглама бўлиб, унинг илдизлари $x_1=35$ ва $x_2=48$ лардан иборат.

$x_1=35$ номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳасига тегишли эмас.

$x_2=48$ ни берилган тенгламага қўйиб текшириб кўрамиз.

Текшириш: $\dfrac{\lg\left(\sqrt{48+1}+1\right)}{\lg\sqrt[3]{48-40}}=\dfrac{\lg 8}{\lg 2}=\dfrac{\lg 2^3}{\lg 2}=\dfrac{3\lg 2}{\lg 2}=3.$

Жавоб: $\{3\}$.

2. $\dfrac{\lg(x^3-5x^2+19)}{\lg(x-2)}=3$ тенглама ечилсин.

Ечиш: номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $\begin{cases} x^3-5x^2+19>0, \\ x>2, \\ x\neq 3. \end{cases}$ шартдан аниқланади.

Берилган тенгламани $\lg(x^3-5x^2+19)=3\lg(x-2)$ кўринишда ёзиш мумкин. Уни потенцирлаб $\lg(x^3-5x^2+19)=\lg(x-2)^3$ ни ҳосил қиламиз. Ундан эса $x^3-5x^2+19=(x-2)^3$ га эга бўламиз. Уни соддалаштириб, $x^2-12x+27=0$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг илдизлари $x_1=3$ ва $x_2=9$ лардан иборат.

$x_1=3$ номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳасига тегишли эмас.

$x_2=9$ ни берилган тенгламага қўямиз:

$$\frac{\lg(9^3-5\cdot 9^2+19)}{\lg(9-2)}=\frac{\lg(729-405+19)}{\lg 7}=\frac{\lg 343}{\lg 7}=\frac{\lg 7^3}{\lg 7}=\frac{3\lg 7}{\lg 7}=3.$$

Демак, $x_2=9$ тенгламани қаноатлантиради.

Жавоб: $\{9\}$.

3. $\dfrac{\lg x}{\lg(x+1)}=-1$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $\begin{cases} x>0, \\ x+1>0 \\ x+1\neq 1 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x>0, \\ x>-1, \\ x\neq 0, \end{cases}$ системанинг ечимидан, яъни (0;+∞) дан иборат.

Демак, номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси (0;+∞).

Берилган тенгламадан lgx=-lg(x+1) ёки $\lg x=\lg\frac{1}{x+1}$ келиб чиқади.

Ундан $x=\frac{1}{x+1}$, $x^2+x=1$ ёки $x^2+x-1=0$ квадрат тенглама ҳосил бўлади. Уни ечамиз: $x_1=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ва $x_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

x_1 номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳасига тегишли эмас. x_2 ни берилган тенгламага қўямиз:

$$\frac{\lg\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\lg\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1\right)}=\frac{\lg\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\lg\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{\lg\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\lg\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{\lg\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\lg\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{2(\sqrt{5}-1)}}=\frac{\lg\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\lg\frac{2}{\sqrt{5}-1}}=\frac{\lg\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\lg\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{-1}}=-1.$$

Жавоб: $\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$.

4. $\lg(x-6)-0{,}5\lg 2=\lg 3+\lg\sqrt{x-10}$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $\begin{cases} x-6>0 \\ x-10>0 \end{cases}$ системанинг ечимидан, яъни x>10 иборат.

Берилган тенгламани ечиш учун унинг ҳар иккала қисмини ҳадма – ҳад 2 га кўпайтирамиз ва потенцирлаймиз.

$2\lg(x-6)-\lg 2=2\lg 3+2\lg\sqrt{x-10}$, $\lg(x-6)^2-\lg 2=\lg 9+\lg(x-10)$,

$\lg\frac{(x-6)^2}{2}=\lg 9(x-10)$. Бундан $\frac{(x-6)^2}{2}=9(x-10)$, $x^2-12x+36=18x-180$,

$x^2-30x+216=0$. Бу квадрат тенглама бўлиб, унинг илдизлари $x_1=12$ ва $x_2=18$ лардан иборат.

Текшириб кўриб ҳар иккала илдиз тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Жавоб: {12; 18}.

5. $2(\lg 2-1)+\lg\left(5^{\sqrt{x}}+1\right)=\lg\left(5^{1-\sqrt{x}}+5\right)$ тенглама ечилсин.

Ечиш: $2\lg 2-2+\lg\left(5^{\sqrt{x}}+1\right)=\lg\left(5^{1-\sqrt{x}}+5\right)$; $\quad \lg 4-\lg 100+\lg\left(5^{\sqrt{x}}+1\right)=\lg\left(5^{1-\sqrt{x}}+5\right)$;

$\lg\frac{1}{25}+\lg\left(5^{\sqrt{x}}+1\right)=\lg\left(5^{1-\sqrt{x}}+5\right)$, $\quad \lg\frac{5^{\sqrt{x}}+1}{25}=\lg\left(5^{1-\sqrt{x}}+5\right)$;

$\frac{5^{\sqrt{x}}+1}{25}=5^{1-\sqrt{x}}+5$, $\quad \frac{5^{\sqrt{x}}}{25}+\frac{1}{25}=\frac{5}{5^{\sqrt{x}}}+5$; $\quad 5^{\sqrt{x}}=y$ белгилаш қиламиз. Натижада

$\frac{y}{25}+\frac{1}{5}=\frac{5}{y}+5$, $y^2+y=125+125y$, $y^2-124y-125=0$ квадрат тенглама ҳосил бўлади.

Уни ечамиз. $y_{1,2}=62\pm\sqrt{3844+125}=62\pm\sqrt{3969}=62\pm 63$; $y_1=125$; $y_2=-1$. у нинг топилган қийматларини ўрнига қўямиз.

а) $5^{\sqrt{x}}=125$, $\quad 5^{\sqrt{x}}=5^3$, $\quad \sqrt{x}=3$, $\quad x_1=9$.

б) $5^{\sqrt{x}}=-1$. Бу тенглама ечимга эга эмас.

Текшириш:

$$2(\lg 2-1)+\lg\left(5^{\sqrt{9}}+1\right)=2\left(\lg 2-1\right)+\lg 126=2\lg\frac{2}{10}+\lg 126=\lg\frac{1}{25}+\lg 126=\lg\frac{1}{25}\cdot 126=\lg\frac{126}{25}.$$

$$\lg\left(5^{1-\sqrt{9}}+5\right)=\lg\left(5^{-2}+5\right)=\lg\left(\frac{1}{25}+5\right)=\lg\frac{126}{25}.$$

Жавоб: {9}.

3. Ёрдамчи номаълум киритиш *усули* **билан ечиладиган тенгламалар.** Баъзи бир логарифмик тенгламаларни ечишда ёрдамчи номаълум киритиш қулай бўлади. Қуйида бунга доир бир қанча мисоллар қараймиз.

1. $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $\begin{cases}5-\lg x\neq 0\\ \lg x+1\neq 0\\ x>0\end{cases}$ системанинг ечимидан иборат. Уни ечамиз:

$$\begin{cases} \lg x \neq 5 \\ \lg x \neq -1 \\ x > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \neq 100000 \\ x \neq 0{,}1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Демак, номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $(0;\ 0{,}1) \cup (0{,}1;\ 100000) \cup (100000;\ +\infty)$

Берилган тенгламада $y = \lg x$ деб оламиз ва уни соддалаштирамиз:

$$\frac{1}{5-y} + \frac{2}{1+y} = 1, \quad 1 + y + 10 - 2y = 5 + 5y - y - y^2, \ y^2 - 5y + 6 = 0, \ y_1 = 2, \ y_2 = 3.$$

1) $\lg x = 2, \ x_1 = 10^2 = 100;$ 2) $\lg x = 3; \ x_2 = 10^3 = 1000.$

Текшириб кўриб x нинг ҳар иккала қиймати тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Жавоб: $\{100;\ 1000\}$.

2. $\lg^2 x^3 - 10\lg x + 1 = 0$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $(0;+\infty)$ дан иборат. $\lg^2 x^3 = \left(\lg x^3\right)^2 = \left(3\lg x\right)^2 = 9\lg^2 x.$ бўлганлиги учун берилган тенглама $9\lg^2 x - 10\lg x + 1 = 0$ кўринишга келади. $\lg x = t$ деб белгиласак, у ҳолда $9t^2 - 10t + 1 = 0$ квадрат тенглама ҳосил бўлади. Уни ечамиз: $t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{9} = \frac{5 \pm 4}{9}, \ t_1 = 1; \ t_2 = \frac{1}{9}.$

1) $\lg x = 1, \ x_1 = 10^1 = 10;$ 2) $\lg x = \frac{1}{9}, \ x_2 = 10^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{10}.$

Текшириб кўриб x нинг ҳар иккала қиймати берилган тенгламани қаноатлантиришини кўриш мумкин.

Жавоб: $\left\{10; \sqrt[9]{10}\right\}$.

3. $\lg^2 x^3 + \lg x^2 = 40$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $(0;+\infty)$ дан иборат. $\lg^2 x^3 = \left(\lg x^3\right)^2 = \left(3\lg x\right)^2 = 9\lg^2 x.$ ва $\lg x^2 = 2\lg x$ эканлигини эътиборга олсак берилган тенглама $9\lg^2 x - 2\lg x - 40 = 0$ кўринишга келади. $\lg x = y$ алмаштириш қилсак, натижада $9y^2 + 2y$-

40=0 квадрат тенглама ҳосил бўлади. Уни ечамиз: $y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+360}}{18}=\frac{-1\pm 19}{18}$; $y_1=1$; $y_2=-\frac{10}{9}$.

1) lgx=1, $x_1=10^1=10$; 2) $\lg x=-\frac{10}{9}$; $x_2=10^{-\frac{10}{9}}=\frac{1}{10\sqrt[9]{10}}$.

Текшириб кўриб *x* нинг ҳар иккала қиймати берилган тенгламани қаноатлантришини кўриш мумкин.

Жавоб: $\left\{10;\frac{1}{10\sqrt[9]{10}}\right\}$.

4. $\lg^3x+\lg^2x-6\lg x=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $(0;+\infty)$ дан иборат. lgx=y деб оламиз. У ҳолда $y^3-y^2-6y=0$ тенглама ҳосил бўлади. Уни ечамиз: $y(y^2-y-6)=0$; $y_1=0$; $y_2=-2$; $y_3=3$. Буларни ўрнига қўйиб, lgx=0, lgx=-2 ва lgx=3 ларни ҳосил қиламиз.

1) lgx=0: $x_1=10^0=1$; 2) lgx=-2, $x_2=10^{-2}=0{,}01$; 3) lgx=3; $x_3=10^3=1000$.

Текшириб кўриб ҳар 3 ла қиймат тенгламани қаноатлантиришини кўриш мумкин.

Жавоб: {0,01; 1; 1000}.

4. Турли асосли логарифмлар қатнашган тенгламалар. Баъзи логарифмик тенгламаларда турли асосли логарифмлар қатнашиши мумкин. Бундай тенгламаларни ечиш учун дастлаб уларни бир хил асосга келтирилади. Бунда логарифмнинг бир асосидан бошқа асосига ўтиш формуласи $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ ёки $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ дан фойдаланилади. Қуйида бундай тенгламаларга доир бир қанча мисоллар қараймиз.

1. $\log_{3x}3=\log_{x^2}3$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}, \\ x \neq 1. \end{cases}$ системадан аниқланади.

$\log_{3x} 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 3x} = \frac{1}{\log_3 3x}$; $\log_{x^2} 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 x^2} = \frac{1}{\log_3 x^2}$ бўлганлиги учун берилган тенгламадан $\frac{1}{\log_3 3x} = \frac{1}{\log_3 x^2}$ ёки $\log_3 3x = \log_3 x^2$ тенглама келиб чиқади. Ундан эса $x^2=3x$ ёки $x^2-3x=0$ тенглама ҳосил бўлиб уни ечимлари $x_1=0$ ва $x_2=3$ лар дан иборат. $x_1=0$ номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳасига тегишли эмас. $x_2=3$ ни берилган тенгламага қўйиб уни қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Жавоб: $\{3\}$.

2. $\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $(0;+\infty)$ дан иборат. $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$ ва $\log_{16} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 16} = \frac{\log_2 x}{4}$ бўлганлиги учун берилган тенгламадан $\log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} + \frac{\log_2 x}{4} = 7$ ёки $7\log_2 x = 28$ тенглама ҳосил бўлади. Ундан эса $\log_2 x=4$ келиб чиқади. Буни ечиб $x=2^4=16$ ни ҳосил қиламиз.

Текшириш: $\log_4 16 + \log_{16} 16 + \log_2 16 = 2 + 1 + 4 = 7.$

Жавоб: $\{7\}$.

3. $\log_5 (x+20) \cdot \log_x \sqrt{5} = 1$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $\begin{cases} x + 20 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases}$ системадан аниқланади. Уни ечамиз $\begin{cases} x > -20 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Демак, Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $(0;1) \cup (1;+\infty)$ дан иборат.

$\log_x \sqrt{5} = \frac{\log_5 \sqrt{5}}{\log_5 x} = \frac{\frac{1}{2}}{\log_5 x} = \frac{1}{2\log_5 x}$ бўлганлиги учун берилган тенгламадан $\log_5(x+20) \bullet \frac{1}{2\log_5 x} = 1$ ёки $\log_5(x+20) = \log_5 x^2$ келиб чиқади. Ундан эса $x^2 = x + 20$ ёки $x^2 - x - 20 = 0$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг ечимлари $x_1=-4$, $x_2=5$ дан иборат.

Булардан $x_1=-4$ номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳасига тегишли эмас. $x_2=5$ ни берилган тенгламага қўйиб, у тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Жавоб: $\{5\}$.

5. Логарифмлаш орқали ечиладиган тенгламалар. Баъзи бир логарифмик тенгламаларни логарифмлаш орқали ечиш қулай бўлади. Қуйида бундай тенгламаларга бир қанча мисоллар қараймиз.

1. $x^{\lg x} = 10000$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $(0;+\infty)$ дан иборат. Тенгламани ҳар иккала қисмини 10 асосга кўра логарифмлаймиз.

$\lg x^{\lg x} = \lg 10000,\ \lg x \cdot \lg x = 4:\ \lg^2 x = 4:\ \lg x = \pm 2.$ Бундан $\lg x = -2$ ва $\lg x = 2$ лар келиб чиқади. Уларни ечиб $x_1 = 10^{-2} = 0{,}01$ ва $x_2 = 10^2 = 100$ ларни ҳосил қиламиз. x нинг ҳар иккала қиймати номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳасига тегишли. Уларни тенгламага қўйиб ҳар иккала қиймат тенгламани ечими эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Жавоб: $\{0{,}01;100\}$.

2. $x^{\log_2 x+2} == 8$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $(0;+\infty)$ дан иборат. Тенгламани ҳар иккала қисмини ҳадма – ҳад 2 асосга кўра логарифмлаймиз.

$\log_2 x^{\log_2 x+2} = \log_2 8,\ (\log_2 x+2)\log_2 x = 3,\ \log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 = 0$. Бу $\log_2 x$ га нисбатан квадрат тенглама бўлиб, ундан $\log_2 x = -3$ ва $\log_2 x = 1$ лар келиб чиқади. Булар энг содда логарифмик тенгламалар бўлиб, уларни биринчисидан $x_1 = 2^{-3} = \frac{1}{8}$ ва иккинчисидан $x_2=2$ лар келиб чиқади.

$x_1 = \frac{1}{8}$ ва $x_2 = 2$ лар номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳасига тегишли. Текшириб кўриб x нинг ҳар иккала қиймати берилган тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Жавоб: $\left\{\frac{1}{8};2\right\}$.

3. $x^{3\lg^3 x - \frac{2}{3}\lg x} = 100\sqrt[3]{10}$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $(0;+\infty)$ дан иборат. Берилган тенгламани ҳар иккала қисмини 10 асосга кўра логарифмлаймиз.

$$\lg x^{3\lg^3 x - \frac{2}{3}\lg x} = \lg 100\sqrt[3]{10}, \qquad \left(3\lg^3 x - \frac{2}{3}\lg x\right)\cdot \lg x = \lg 10^2 \cdot 10^{\frac{1}{3}},$$

$3\lg^4 x - \frac{2}{3}\lg^2 x = \frac{7}{3},\ 9\lg^4 x - 2\lg^2 x - 7 = 0.\ \lg x = y$ деб белгилаймиз. У ҳолда $9y^4 - 2y^2 - 7 = 0$ биквадрат тенглама ҳосил бўлади. Уни ечиб $y_1=-1$ ва $y_2=1$ ларни ҳосил қиламиз. Демак,

1) $\lg x = -1,\ x = 10^{-1} = 0{,}1;$ 2) $\lg x = 1,\ x = 10^1 = 10.$

x нинг ҳар иккала қиймати номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳасига тегишли ва улар берилган тенгламани қаноатлантиради.

Жавоб: $\{0{,}1;\ 10\}$.

4. $10^{1+\lg^2 x} = x^{\frac{7\lg x + \lg^3 x}{4}}$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $(0;+\infty)$ дан иборат. Тенгламани ҳар иккала қисмини 10 асосга кўра логарифмлаймиз.

$$\left(1+\lg^2 x\right)\lg 10=\frac{7\lg x+\lg^3 x}{4}\cdot\lg x$$

lgx=t деб белгилаймиз. У ҳолда $4\left(1+t^2\right)=\left(7t+t^3\right)\cdot t$ ёки $t^4+3t^2-4=0$ биквадрат тенглама ҳосил бўлади. Унда $z=t^2$ алмаштириш қилиб $z^2+3z-4=0$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Ундан $z_1=-4$, $z_2=1$ лар келиб чиқади. $t^2=-4$ эса тенглама ечимга эга эмас. $t^2=1$ дан эса $t_1=-1$ ва $t_2=1$ лар келиб чиқади. Шундай қилиб биз $\lg x=\pm 1$ га эга бўламиз. Ундан $x_1=10$ ва $x_2=0{,}1$ лар келиб чиқади.

Жавоб: {0,1; 10}.

5. $3^{\lg_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $(0;+\infty)$ дан иборат. $\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x}+x^{\log_3 x}=162$, $x^{\log_3 x}+x^{\log_3 x}=162$, $2x^{\log_3 x}=162$, $x^{\log_3 x}=81$. Ҳар иккала томонини 3 асосга кўра логарифмлаймиз. $\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 81$, $\log_3^2 x=4$. Бунда $\log_3 x=-2$ ва $\log_3 x=2$ лар келиб чиқади.

а) $\log_3 x=-2$, $x_1=3^{-2}=\frac{1}{9}$; б) $\log_3 x=2$, $x_2=3^2=9$.

Текшириб кўриб х нинг ҳар иккала қиймати берилган тенгламани қаноатлантиришни кўриш мумкин.

Жавоб: $\left\{\frac{1}{9};9\right\}$.

6. $x^{\log_2 x^3-\log_2^2 x-3}=\frac{1}{x}$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $(0;+\infty)$ дан иборат. Тенгламанинг ҳар иккала қисмини ҳадма – ҳад 2 асосга кўра логарифмлаймиз.

$$\left(\log_2 x^3-\log_2^2 x-3\right)\log_2 x=-\log_2 x,\quad 3\log_2^2 x-\log_2^3 x-3\log_2 x+\log_2 x=0,$$

$\log_2^3 x - 3\log_2^2 x + 2\log_2 x = 0,\ \log_2 x = 0,\ \log_2 x = 1,\ \log_2 x = 2.$ Булардан $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=4$ лар келиб чиқади.

х нинг барча қийматлари берилган тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Жавоб: {1;2;4}

6. Номаълум миқдор логарифм белгиси остида ва асосида қатнашган тенгламалар. $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} \varphi(x)$ кўринишдаги тенглама номаълум миқдор логарифм белгиси остида ва асосида қатнашган тенгламаларга мисол бўлиб, уларни ечиш логарифмик функциянинг хоссасига асосан ёзилган g(x)=φ(x) тенгламага g(x)>0, φ(x)>0, f(x)>0 ва f(x)≠1 шартларни қўшишдан ҳосил қилинган қуйидаги системани ечишга келтирилади.

$$\begin{cases} g(x) = \varphi(x) \\ f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

Бу системанинг ечими берилган тенгламанинг ечимидан иборат бўлади. Қуйида бундай турга кирувчи тенгламаларга бир қанча мисоллар қараймиз.

1. $\log_{x+4}\left(x^2-1\right) = \log_{x+4}(5-x)$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Бу тенгламанинг ечими унга тенг кучли бўлган қуйидаги системанинг ечимидан иборат:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 5 - x \\ x^2 - 1 > 0 \\ 5 - x > 0 \\ x + 4 > 0 \\ x + 4 \neq 1 \end{cases}$$ Уни ечамиз: $$\begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ x^2 - 1 > 0 \\ x < 5 \\ x > -4 \\ x \neq -3 \end{cases};\quad \begin{cases} x_1 = -3;\ \ x_2 = 2 \\ \mathrm{x} < -1,\ \ \mathrm{x} > 1 \\ \mathrm{x} < 5 \\ \mathrm{x} > -4 \\ \mathrm{x} \neq -3 \end{cases};$$

Бундан х=2 келиб чиқади.

Текшириб кўриб х=2 берилган тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Жавоб: $\{2\}$.

2. $\log_{3x+7}\left(9+12x+4x^2\right)+\log_{2x+3}\left(6x^2+23x+21\right)=4$ тенглама ечилсин.

Ечиш: $9+12x+4x^2=\left(2x+3\right)^2$ ва $6x^2+23x+21=(3x+7)(2x+3)$ бўлганлиги учун берилган тенгламадаги номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $2x+3>0,\ 2x+3\neq 1,\ 3x+7>0,\ 3x+7\neq 1$ шартлардан аниқланади. Бу шартлардан $(-\frac{3}{2};-1)\cup(-1;+\infty)$ келиб чиқади. Буларни эътиборга олсак, берилган тенглама $2\log_{3x+7}(2x+3)+\log_{2x+3}(3x+7)+1=4$ кўринишга келади. Агар $\log_{3x+7}(2x+3)=z$ деб белгиласак, у ҳолда $\log_{2x+3}(3x+7)=\frac{1}{z}$ бўлиб, берилган тенгламадан $2z+\frac{1}{z}=3$ ёки $2z^2-3z+1=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Уни ечиб $z_1=\frac{1}{2}$ ва $z_2=1$ ларни топамиз. Шундай қилиб берилган тенгламани ечиш $\log_{3x+7}(2x+3)=\frac{1}{2}$ ва $\log_{3x+7}(2x+3)=1$ тенгламаларни ечишга келтирилди. Уларни ечамиз:

1) $\log_{3x+7}(2x+3)=\frac{1}{2}$, $\quad 2x+3=(3x+7)^{\frac{1}{2}}$, $\quad 4x^2+12x+9=3x+7$, $\quad 4x^2+9x+2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81-32}}{8}=\frac{-9\pm 7}{8};\qquad x_1=-\frac{1}{4},\qquad x_2=-2.$$

Бу қийматлардан фақат $x_1=-\frac{1}{4}$ номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳасига тегишли.

2) $\log_{3x+7}(2x+3)=1$, $\quad 2x+3=3x+7;\ x=-4.$ Бу номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳасига тегишли эмас. Текшириб кўриб $x=-\frac{1}{4}$ берилган тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Жавоб: $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

4. $\log_x\left(3x^{\log_5 x}+4\right)=2\log_5 x$ тенглама ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $(0;1)\cup(1;+\infty)$ дан иборат. Логарифмнинг таърифига асосан $3x^{\log_5 x}+4=x^{2\log_5 x}$ га эга бўламиз. $x^{\log_5 x}=y$ деб белгиласак, у ҳолда $y^2-3y-4=0$ квадрат тенглама ҳосил бўлади. Унинг илдизлари $y_1=-1$ ва $y_2=4$ лардан иборат. у нинг бу қийматларини ўрнига қўямиз.

а) $x^{\log_5 x}=-1$ тенглама ечимга эга эмас, чунки $x^{\log_5 x}>0$.

б) $x^{\log_5 x}=4,\quad \log_5 x\cdot\log_5 x=\log_5 4,\quad \log_5^2 x=\log_5 4;\quad \log_5 x=\pm\sqrt{\log_5 4}.\quad x=5^{\pm\sqrt{\log_5 4}}$.

Жавоб: $\{5^{\pm\sqrt{\log_5 4}}\}$.

7. Логарифмик тенгламалар системаси. Алгебраик тенгламалар системасини ечишда қўлланиладиган усуллардан логарифмик тенгламалар системасини ечишда ҳам фойдаланиш мумкин. Қуйида бир қанча мисоллар қараймиз:

1. $\begin{cases}\log_3(3y-x+24)=3\\ \log_2(2x-2y)-\log_2(5-y^2)=1\end{cases}$ система ечилсин.

Ечиш: Системанинг биринчи тенгламасидан 3у-х+24=27 ни, 2-тенгламасидан эса $\log_2\frac{2x-2y}{5-y^2}=1$ ёки $\frac{2x-2y}{5-y^2}=2$ ни ҳосил қиламиз. Демак, берилган система

$$\begin{cases}3y-x+24=27,\\ \dfrac{2x-2y}{5-y^2}=2.\end{cases}$$

кўринишдаги алгебраик тенгламалар системасини ечишга келтирилади. Уни ечамиз:

$$\begin{cases}x-3y=-3\\ 2x-2y=10-2y^2,\end{cases}\begin{cases}x-3y=-3\\ x-y=5-y^2\end{cases},\quad \begin{cases}x=3y-3\\ 3y-3-y=5-y^2\end{cases};\quad \begin{cases}x=3y-3\\ y^2+2y-8=0\end{cases}$$

Бу системанинг 2-тенгламасидан y_1=-4 ва у=2 лар келиб чиқади.

Буларни 1-тенгламага қўйиб $x_1=-15$ ва $x_2=3$ ларни топамиз. Демак,

(-15; -4) ва (3; 2) ларни ҳосил қилдик. Текшириб кўриб улардан (3; 2) берилган системанинг ечими эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Жавоб: (3; 2).

2. $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \dfrac{8}{3} \\ xy = 16 \end{cases}$ система ечилсин.

Ечиш: x ва y нинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $(0;1)\cup(1;+\infty)$ дан иборат.

$\log_x y = \dfrac{1}{\log_y x}$ бўлганлиги учун системанинг 1 – тенгламасида $z=\log_y x$ белгилаш қилиб ҳамда $\log_x y = \dfrac{1}{\log_y x}$ эканлигини эътиборга олсак, системанинг 1-тенгламасидан $z-\dfrac{1}{z}=\dfrac{8}{3}$ ёки $3z^2$-8z-3=0 квадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Уни ечамиз:

$$3z^2-8z-3=0,\quad z_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+9}}{3}=\frac{4\pm 5}{3};\quad z_1=3,\qquad z_2=-\frac{1}{3}.$$

1) $\log_y x = 3;\ x = y^3;$ 2) $\log_y x = -\dfrac{1}{3};\ x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}.$

Буларни эътиборга олсак, берилган тенгламалар системасидан қуйидаги иккита $\begin{cases} x = y^3 \\ xy = 16 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} \\ xy = 16 \end{cases}$ тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Уларни ечамиз:

а) $\begin{cases} x = y^3 \\ xy = 16 \end{cases},\ \begin{cases} y^4 = 16 \\ x = y^3 \end{cases},\ \begin{cases} y_1 = -2,\ y_2 = 2 \\ x_1 = -8,\ x_2 = 8 \end{cases}.$

Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳасини эътиборга олиб, биринчи системанинг ечими фақат (8; 2) бўлишини топамиз.

б) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} \\ xy=16, \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\cdot y=16, \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} \\ \sqrt[3]{y^2}=16, \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} \\ y^2=16\cdot16\cdot16, \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} \\ y=\pm64, \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm\dfrac{1}{4} \\ y=\pm64. \end{cases}$

Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳасини эътиборга олиб иккинчи системанинг ечими $\left(\frac{1}{4};64\right)$бўлишини аниқлаймиз.

Жавоб: (8; 2) ; $\left(\frac{1}{4};64\right)$.

3. $\begin{cases} 3^x\cdot8^{-y}=1{,}125 \\ \log_{\sqrt{3}}\left(y-\dfrac{x}{3}\right)=-2 \end{cases}$ система ечилсин.

Ечиш: Номаълумнинг қабул қиладиган қийматлари соҳаси $y>\frac{x}{3}$ дан иборат. Дастлаб системанинг 2-тенгламасини ечамиз: $y-\frac{x}{3}=\left(\sqrt{3}\right)^{-2}$, $y-\frac{x}{3}=\frac{1}{3}$, $y=\frac{x+1}{3}$. y нинг бу қийматини биринчи тенгламага қўямиз:

$$3^x\cdot8^{-\frac{x+1}{3}}=1{,}125,$$

$$3^x\cdot2^{-(x+1)}=\frac{9}{8},\quad 3^x\cdot\frac{1}{2^x\cdot2}=\frac{9}{8},\quad \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{9}{4},\quad \left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^2,\ x=2.$$

x нинг бу қийматини y нинг x орқали ифодасига қўямиз. У ҳолда $y=\frac{x+1}{3}=\frac{2+1}{3}=1$ келиб чиқади. Текшириб кўриб (2, 1) берилган системанинг ечими эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Жавоб: (2; 1).

Х у л о с а л а р

1. Логарифмик тенглама тушунчаси сонни логарифмлаш, логарифмик функция тушунчалари билан узвий боғлиқ. Логарифмик функция кўрсаткичли функцияга тескари функция. Шу сабабли логарифмик функциялар ҳақидаги билим, кўникма ва малакаларни шаклланиши учун ўқувчиларда кўрсаткичли функциялар ҳақидаги билим, кўникма ва малакаларни етарли даражада

ривожлантириш мақсадга мувофиқ. Шунингдек, логарифмик тенгламалар кўп ҳолларда кўрсаткичли тенгламага келтириб ечилади. Буларни еътиборга олган ҳолда бу тушунчалар ўзаро узвий боғлиқ ҳолда ўқитилиши зарур.

2. Кўрсаткичли ва логарифмик функциялар, бу каби тенгламаларни ўрганиш учун эса 30 соат вақт ажратилган. Академик литцей ва касб - ҳунар коллежларининг математика дастурида алгебра ва анализ асослари учун жаъми 140 соат ажратилганини эътиборга олганда 30 соат вақт анча салмоқли. Шу сабабли ушбу мавзулар бўйича якунловчи такрорлашни амалга ошириш давомида кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар билан боғлиқ барча тушунчаларни умумлаштиришга эътибор қаратиш лозим.
3. Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламаларни ечиш кўникма ва малакаларини шакллантиришда уларни турларга ажратган ҳолда ечиш усулларини кўрсатиш мақсадга мувофиқ.

Адабиётлар

1. “Таълим тўғрисида” Ўзбекистон Республикаси қонуни. Баркамол авлод –Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори.-Т:”Шарқ”,1997.
2. “Кадрлар тайёрлаш миллий дацури” тўғрисида Ўзбекистон Республикасининг қонуни. Баркамол авлод –Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори.-Т:”Шарқ”,1997.

3. Умумий ўрта таълимнинг Давлат таълим стандарти ва ўқув дастури: Физика, Математика, Информатика ва хисоблаш техникаси,Чизмачилик, Мехнат. Таълим тараққиёти. Ўзбекистон Халқ таълими вазирлигининг ахборотномаси. 4–махсус сон–Т.:”Шарқ”, 1999.-384б.
4. Умумий ўрта таълим ва ўрта махсус, касб-ҳунар таълими ўқув дастури. МАТЕМАТИКА. 2010.
5. ДТМ ахборотномалари. Математикадан тестлар. 1996 – 2016.
6. Algebra va matematik analiz asoslari. I, II qismlar. Akademik litseylar uchun darslik. 5 - nashri. “O’QITUVCHI” NASHRIYOT - MATBAA IJODIY UYI. TOSHKENT - 2006.
7. Колягин Ю.М. ва бошқалар. Методики переподавания математики в средней шқоле: Обшая методика.- М.:”Просвешение”, 1980.
8. Колягин Ю.М. и др. Методики переподавания математики в средней шқоле: Частные методики.- М.:”Просвешение”, 1980.
9. Методика предподавания математики в средней школе: Частная методика. Учеб. пособие для студентов railroadпединститув по физ-мат. спец. Сост. В.И.Мишин. – М.: “Просвешение”, 1987. – 418 б.

Мундарижа