УДК 517.98

Йордановы алгебры абстрактных измеримых операторов для JB-алгебр беровского типа

Ш. А. Аюпов, Ф. Н. Арзикулов

В неассоциативной теории интегрирования интересной является проблема построения измеримого оператора без использования неограниченных линейных операторов. Основным объектом исследования данной работы являются измеримые и локально измеримые операторы, присоединенные к AJW-алгебре. Эти понятия введены абстрактным образом, т.е. в их определении не участвует понятие неограниченного оператора. Такой подход, в частности, удобен в изучении интересующих нас вопросов, касающихся измеримых и локально измеримых операторов. Правильно будет их называть абстрактными измеримыми и локально измеримыми операторами. Следует отметить, что теория измеримых операторов для произвольных JBW-алгебр ранее построена в работах Ш. Аюпова и его учеников (см. [1], [2]). В этих работах применялись подходы Э.Нельсона, Н.Сигала, П.Йордана и др. Сравнение алгебры измеримых операторов, построенных другими авторами, рассмотрено в [3]. В данной работе построена алгебра измеримых операторов по методу Берберяна построения измеримых операторов для AW^*-алгебр (см. [4], [5], [6], [7], [8]). Йорданова алгебра измеримых операторов, которая вкладывается в $*$-алгебру измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, не всегда является её самосопряженной частью. Поэтому представляет интерес изучение класса йордановых алгебр абстрактных измеримых операторов.

Пусть всюду, если не оговорено противное, A — обратимая AJW-алгебра и $P(A)$ — множество проекторов в A.

По теореме 3.2 из [9] для AJW-алгебры A имеет место разложение $A = A_{sp} \oplus A_{ex}$, где A_{sp} — JC-алгебра, а AJW-алгебра A_{ex} изоморфна алгебре $C(X, M_3^8)$ всех непрерывных отображений экстремального компакта X в AJW-алгебру M_3^8. Обертывающая C^*-алгебра $C^*(A_{sp})$ подалгебры A_{sp} невсегда является AW^*-алгеброй. Поэтому всюду в данной работе для удобства будем предполагать, что $C^*(A_{sp})$ является AW^*-алгеброй. В этом случае, для всякого проектора p алгебры A проектор p является модулярным в A тогда и только тогда, когда p является конечным проектором в вещественной C^*-алгебре $R^c(A)$, порожденной A, которая является вещественной AW^*-алгеброй. Следовательно, проектор p является модулярным в A тогда и только тогда, когда проектор p является конечным проектором в AW^*-алгебре $C^*(A)$. В дальнейшем, обертывающую C^*-алгебру $C^*(A)$ AJW-алгебры A будем обозначать через $AW^*(A)$.

В работе [10] (теорема 3.8) установлено, что всякая обратимая AJW-алгебра A раскладывается в прямую сумму обратимой алгебры A_1, для которой C^*-алгебра $C^*(A_1)$ содержит равномерно замкнутый двухсторонний идеал I с некоторыми условиями, и обратимой алгебры A_2 такой, что $R^*(A_2)\cap iR^*(A_2)=\{0\}$. А также, в этой работе было выдвинуто гипотеза о том, что $A_1=I_{sa}$, т.е. $C^*(A_1)=I$. В данной работе для удобства мы будем предполагать, что $C^*(A_1)_{sa}=A_1$.

Для последовательности $\{e_n\}$ элементов $P(A)$ будем писать $e_n\uparrow$, если $e_n\le e_{n+1}$ для всех n, если, кроме того, $\sup e_n=e$, то пишем $e_n\uparrow e$. Последовательность $\{e_n\}$ из $P(A)$ будем называть сильно плотной областью (с.п.о.), если $e_n\uparrow 1$ и $e_n^{\perp}$ является модулярным проектором из A для любого n. В существенном измеримый оператор (с.и.о.) это последовательность пар $\{(x_n,e_n)\}$, где $x_n\in A$ для каждого n и $\{e_n\}$ — с.п.о. такая, что из $m<n$ следует $e_m x_n=e_m x_m$. Например, если $x\in A$ и $x_n=x, e_n=1$ для всех n, то $\{(x_n,e_n)\}$ — с.и.о., который обозначим через $\{(x,1)\}$. Если $x\in A$ и $e\in P(A)$, то наибольший аннулирующий проектор элемента $(1-e)x$ обозначим через $x^{-1}[e]$, т.е. $1-x^{-1}[e]$ является носителем $(1-e)x$.

В дальнейшем при доказательстве утверждений будет применяться следующее предложение.

Предложение 1. Пусть $\sup_A$ — операция взятия точной верхней грани в A, $\sup_{C^*(A)}$ — операция взятия точной верхней грани в $AW^*(A)$, и $AW^*(A)$ является AW^*-алгеброй. Тогда для всякого семейства проекторов $\{e_j\}$ алгебры A существует $\sup_{C^*(A)}e_j$ и имеет место $\sup_A e_j=\sup_{C^*(A)}e_j$ т.е. решетка $P(A)$ проекторов алгебры A является полной подрешеткой решетки $P(AW^*(A))$ проекторов алгебры $AW^*(A)$.

Доказательство. В силу предположения предложение достаточно доказать в случае $R^c(A)\cap iR^c(A)=\{0\}$. Пусть $\{e_j\}$ произвольное семейство проекторов алгебры A и $e=\sup_A e_j$. Пусть p произвольный проектор обертывающей C^*-алгебры $C^*(A)$ такой, что $p\ge e_j$ для всех j. Надо доказать, что $e\le p$.

Пусть $p=x+iy,\ x,y\in R^c(A)$. Тогда $x=x^*$, $y^*=-y$. Имеем $e_jp=e_j(x+iy)=e_jx+ie_jy=e_j$ для всех j. Отсюда $e_jx=e_j=xe_j$ и $e_j\quad y=ye_j=0$ для всех j. Поэтому $e_j\quad yy^*=0$ для всякого индекса j. В силу леммы 1 из [11] $e_j\quad yy^*+yy^*e_j=0$ для всякого индекса j. Так как $yy^*\in A$, то в силу леммы 1 из [12] $yy^*\cdot e=0$ относительно йорданова умножения. Отсюда элементы yy^* и e коммутируют. Тогда $eyy^*=eyy^*e=(ey)(ey)^*=0$. В силу аксиомы C^*-алгебры $\|ey\|^2=\|(ey)^2\|=\|(ey)(ey)^*\|=0$, т.е. $ey=0$. Аналогично и $ye=0$. Отсюда $ep=e(x+iy)=ex, pe=(x+iy)e=xe$. В силу равенств $e_jx=e_j=xe_j$ для всех j имеем

$e_j(1-x)=(1-x)e_j=0$ для всех j. Отсюда $e(1-x)=(1-x)e=0$. Поэтому $ex=xe=e$. Следовательно, $ep=ex=e$, $pe=xe=e$, т.е. $e\le p$. В силу произвольности проектора p последнее неравенство дает утверждение предложения. Доказательство завершено.

Теоремы и предложения, которые будут приведены ниже, доказываются точно также как в случае JBW-алгебр (см. [3]).

Введем отношение эквивалентности на множестве всех с.и.о. Два с.и.о. $\{(x_n,e_n)\}$ и $\{(y_n,f_n)\}$ эквивалентны, обозначим это через $\{(x_n,e_n)\}\equiv\{(y_n,f_n)\}$, если существует с.п.о. $\{g_n\}$ такая, что $g_nx_n=g_ny_n$ для всех n. Будем говорить, что с.п.о. $\{g_n\}$ обеспечивает эту эквивалентность. Нетрудно проверить, что введенное отношение является отношением эквивалентности. Действительно, пусть $\{(z_n,p_n)\}$— с.и.о., $\{(z_n,p_n)\}\equiv\{(y_n,f_n)\}$. Пусть с.п.о. $\{t_n\}$ обеспечивает эту эквивалентность. Пусть также $q_n=g_n\wedge t_n$ для всех n. Тогда $\{q_n\}$ является с.п.о. в силу леммы 3. Кроме того, для всех n также как в случае JW-алгебр имеем $q_nx_n=q_nz_n$. Отсюда $\{(z_n,p_n)\}\equiv\{(x_n,e_n)\}$. Класс эквивалентности $[x_n,e_n]$ с.и.о. $\{(x_n,e_n)\}$ называется измеримым оператором (и.о.), присоединенным к алгебре A. Обозначим множество всех
и.о. через $C(A)$. Введем алгебраические операции в $C(A)$. Пусть $\lambda\in R$ и $\{(x_n,e_n)\},\{(y_n,f_n)\}$—с.и.о, присоединенные к алгебре A. Положим $\lambda\{(x_n,e_n)\}=\{(\lambda x_n,e_n)\}$, $\{(x_n,e_n)\}+\{(y_n,f_n)\}=\{(x_n+y_n,e_n\wedge f_n)\}$. Легко заметить, что члены правой части равенств с.и.о. Пусть $g_n=e_n\wedge f_n\wedge((x_n)^{-1}[e_n])\wedge((y_n)^{-1}[f_n])$ для всех n. Также как в случае JW-алгебр доказывается, что $g_n\uparrow 1$ и то что для любого n проектор g_n является модулярным. Точно также как в случае JW-алгебр вводится операция умножения $[x_n,e_n][y_n,f_n]=[x_ny_n,g_n]$ где $g_n=e_n\wedge f_n\wedge((x_n)^{-1}[e_n])\wedge((y_n)^{-1}[f_n])$ для каждого n. Таким образом, определения

$$\lambda[x_n,e_n]=[\lambda x_n,e_n],\ [x_n,e_n]+[y_n,f_n]=[x_n+y_n,e_n\wedge f_n],$$
$$[x_n,e_n][y_n,f_n]=[x_ny_n,g_n]$$

являются корректными. Относительно этих операций $C(A)$ является йордановой алгеброй.

Предложение 2. Пусть A— AJW-фактор типа I_n, где n—конечный кардинал ≥ 3. Тогда $C(A)=A$.

Элемент E из $C(A)$ называется проектором, если $E^2=E$. Ниже мы покажем, что если A является обратимой AJW-алгеброй, то $C(A)$ не содержит новых проекторов. В силу [7, теоремы 5.4 и 5.5] и предложения 2 имеют место следующие утверждения.

Предложение 3. Каждый проектор E из $C(A)$ имеет вид $E=\widehat{e}$ для некоторого $e\in P(A)$. Следовательно, проекторы алгебры $C(A)$ образуют полную решетку, которая изоморфна решетке проекторов алгебры A через отображение $E\to\widehat{e}$.

Так же, как в теории $*$-алгебр абстрактных измеримых операторов, для йордановых алгебр абстрактных измеримых операторов представляет интерес следующая проблема. Пусть A_∞ и A_i—обратимые AJW-алгебры, удовлетворяющие условиям, принятым в начале данной работы. Предположим, что A_∞ является JB-суммой алгебр A_i, и рассмотрим йорданову алгебру $C(A_\infty)$(соответственно, $C(A_i)$) измеримых операторов, присоединенных к A_∞ (соответственно, A_i). Верно ли, что $C(A_\infty)$ является прямым произведением $\prod_i C(A_i)$ алгебр $C(A_i)$, т.е. алгеброй всех семейств (χ_i), $\chi_i \in C(A_i)$, с покоординатными операциями? На этот вопрос дан отрицательный ответ в п. 1.19 из [3]. В случае модулярной AJW-алгебры проблема, рассмотренная выше, имеет положительное решение.

Аналогично случаю JBW-алгебр мы получим следующую теорему.

Теорема 4. Пусть A— AJW-алгебра, удовлетворяющая условиям, принятым в начале данной работы. Тогда для всякого множества $S \subseteq C(A)_+$ существует проектор $e \in A$ такой, что $S^\perp = U_{\bar{e}}(C(A))$ (т.е. $C(A)$ является йордановым аналогом бэровской $*$-алгебры).

Литература

1. Аюпов Ш.А. Йордановы операторные алгебры. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Мат. анализ.-1985.-Т.27.-С.67-97.
2. Аюпов Ш.А. Классификация и представления упорядоченных йордановых алгебр.-Ташкент:Фан, 1986.
3. Арзикулов Ф.Н. Йордановы алгебры абстрактных измеримых операторов для JBW-алгебр. Математические труды ИМ СО РАН. - Новосибирск, 2000. -Vol. 3. -№2. - С. 29-70.
4. Berberian S.K. The regular ring of a finite AW^*-algebra. Ann. of Math.-1957.-Vol.65.-P.224-240.
5. Berberian S.K. Note on a theorem of Fuglede and Putnam. Proc. Amer. Math. Soc.-1959.-Vol.10.-P.175-182.
6. Berberian S.K. A note on the algebra of measurable operators of an AW^*-algebra. Tohoku Math. J.-1970.-Vol.22.-P.613-618.
7. Saito K. On the algebra of measureble operators for a general AW^*-algebras, I. Tohoku Math.J.-1969.-Vol.21.-P.249-270.
8. Saito K. On the algebra of measureble operators for a general AW^*-algebras, II. Tohoku Math.J.-1971.-Vol.23.-P.525-534.
9. Arzikulov F.N. AJW-algebras of type I and their classification. Sib. Adv. Math. -1998.-Vol.8.-N2.-C.30-48.
10. Ayupov Sh.A., Arzikulov F.N. Reversible AJW-algebras. 505.02395v1 [math.OA] 10 May 2015
11. Ayupov Sh.A., Arzikulov F.N. AW^*-algebras which are enveloping C^*-algebras of JC-algebras. Algebr Represent Theor. -2013. -Vol. 16. -P. 289-301.
12. Арзикулов Ф.Н. Об одном аналоге пирсовского разложения. Сиб. мат. журн. - Новосибирск, 1999. -№3. -С. 485-492.

Ш. А. Аюпов, Ф. Н. Арзиқулов

Бэр типидаги JB-алгебралар учун абстракт ўлчовли оператрлар Йордан алгебралари

Берилган мақолада AJW-алгебра учун абстракт ўлчовли оператрлар Йордан алгебралари киритилган ва ўрганилган. Ҳар қандай шундай алгебра Бэр $*$-алгебрасининг йордан аналоги бўлиши исботланган.

Sh. A. Ayupov, F. N. Arzikulov

Jordan algebras of abstract measurable operators for JB-algebras of Baer type

In this paper Jordan algebras of abstract measurable operators for an AJW-algebra are introduced and investigated. It is proved that such algebras are Jordan analogies of Baer $*$-algebra.