

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA-MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
NAMANGAN MUHANDISLIK-TEXNOLOGIYA INSTITUTI**

“OLIY MATEMATIKA” KAFEDRASI

**Akademik litsey va kasb-hunar kolleji talabalari uchun matematika
fanidan “SONLAR KETMA – KETLIGI VA UNING LIMITI”
mavzusi bo'yicha**

Uslubiy ko'rsatma

NAMANGAN - 2016

Tuzuvchilar:

dots. A.Raxmonov
dots. M. Kamolidinov
katta o'q. SH. Saypiddinov

Taqrizchi:

A. Mashrabbboyev

Uslubiy ko'rsatma Namangan muhandislik- texnologiya instituti
"Oliy matematika" kafedrasining 2016 yil _____ sonli yig'ilishida
muxokama qilingan va maqullangan.

Uslubiy ko'rsatma Namangan muhandislik-texnologiya instituti ilmiy-
uslubiy Kengashining 2016 yil _____ sonli majlis qarori bilan chop etishga ruxsat
berilgan.

KIRISH

Ushbu uslubiy qo'llanma "**Akademik litsey va kasb-hunar kollej talabalari uchun** mo'ljallangan bo'lib, mazkur qo'llanmada "**SONLAR KETMA – KETLIGI VA LIMITI**" mavzusi bo'yicha qisqacha nazariy bilimlar va talabalar mustaqil bajarishlari uchun variantlar keltirilgan.

Limit tushunchasining ta'rifi birinchi marta Djon Vallis (1616-1705 ingliz matematigi) "Cheksiz kichik miqdorlarning arifmetikasi" da (1665 yil) yozilgan. I.Nyuton (1642-1727 – ingliz fizigi va matematigi) o'zining mashhur "**Natural filosofiyaning matematik boshlang'ichlari**" da (1686-1687) birinchi va oxirgi nisbatlar (yoki yig'indi) usulini e'lon qildi; bunda limitlar nazariyasining boshlang'ich elementlarini ko'rish mumkin. Lekin yangi hisobni limit tushunchasidan foydalanib asoslash mumkinligi XVII asr mashhur matematiklaridan birortasining ham hayoliga kelgan emas; shunday qilinganda yangi hisoblashga qarshi chiqishlarga javob berilgan bo'lar edi. Bu ma'noda Eyler «**Differensial hisob**» (1755) so'z boshida limit haqida ochiq gapiradi, lekin kitobning biror yerida ham bu tushunchadan foydalanilmaydi !

O.L. Koshi (1789-1857 fransuz analisti) ning «**Algebraik analizi**» (1821) va uning navbatdagi nashrlari bu ko'rsatilgan masalada burilish hosil qildi; matematik tahlilning hammasini qat'iy tuzib chiqish uchun Koshi qo'lida asosiy kuch sifatida xizmat qilgan limitlar nazariyasi birinchi marta bu asarlarda taraqqiy ettirildi. Koshi bajargan yo'l tahlil boshlangandagi barcha noaniqliklarni (tumanni) tarqatdi va umum tomonidan tan olindi.

Shu bilan birga Koshi qilgan ishlarni boshqa olimlar ham bajargan, masalan, ular ichida B.Bolsano (1781-1848 chex faylasufi va matematigi) maxsus o'rin egallaydi.

Limit tushunchasining turli-tuman shakllarda uchrab turishi, bu shakllarning hammasini bitta ko'rinishga keltirish masalasini qo'yadi. Bu maqsadga erishishning ikki yo'li bor: yo (masalan Shatunovskiy va Mur-Smit izidan borib) «**Tartiblangan o'zgaruvchi**» limitining eng umumiy ta'rifini berish yoki G.M.Fixtengolts usuli – har qanday limitni eng sodda holda – nomerlangan qiymatlar ketma-ketligini qabul qiladigan o'zgaruvchining limitiga keltirish kerak. Birinchi yo'l yangi

o'rganuvchilarga qiyin, shu sababli biz ikkinchi yo'lni tanladik. Limitning har bir yangi shakliga ta'rifni avvalo ketma-ketliklar limiti yordamida berib, nihoyat uning ketidan « ϵ - δ tilida» ifodaladik.

«**lim**» belgi qisqartirilgan lotincha «**Limes**» so'zining birinchi uchta harifidir, u o'zbek tilida marra, chegara (limit) ma'nosini anglatadi.

SONLAR KETMA – KETLIGINING LIMITI.

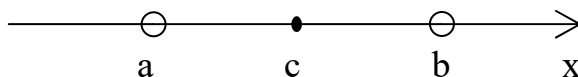
Funksiya limiti matematik tahlilning muhim tushunchalaridan biri. Dastlab, nuqtaning atrofi, sonli to'plamning limit nuqtasi tushunchalarini, so'ngra natural argumentli funksiyalar (sonlar ketma-ketligi) ning limitini qaraymiz.

Nuqtaning atrofi.

Terminologiyaga doir quyidagi izohni beramiz. Haqiqiy sonlarni sonlar o'qidagi nuqtalar bilan tasvirlaganimiz sababli, nuqta deganda sonni tushunamiz va aksincha. Bunda geometrik termin arifmetik ma'noga ega; nuqta so'zi bunda son so'zi o'rnida ishlatiladi.

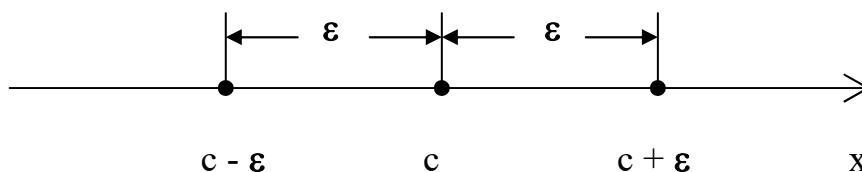
Yuqorida aytib o'tilganlarni e'tiborga olib, quyidagi ta'rifni beramiz.

Ta'rif. *C nuqtaning atrofi deb, o'rtasi C nuqta bo'lgan istalgan (a, b) intervalga aytiladi. (1-shakl)*



1 – s h a k l.

Har bir C nuqtaning cheksiz ko'p atrofi bo'ladi, chunki u cheksiz ko'p intervalning o'rtasidir. Arifmetika nuqtai nazaridan qaraganda C nuqtaning atrofini $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ interval shaklida tasvirlash mumkin, bunda ϵ ixtiyoriy musbat son yoki ikkinchi xil aytganda $c - \epsilon < x < c + \epsilon$ ($\epsilon > 0$) shartni qanoatlantiruvchi x sonlarning to'plamidir (2-shakl).



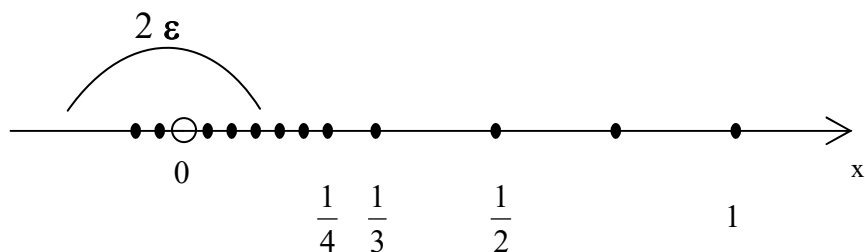
2 – s h a k l.

Masalan, koordinatasi 4 ga teng nuqtaning atroflari $(4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$ intervaldan iborat; ε ga istalgan musbat qiymatlarni berib, koordinatasi 4 ga teng nuqtaning hamma atroflarini hosil qilamiz. Tanlangan ε uchun $4-\varepsilon < x < 4 + \varepsilon$, yoki $|x-4| < \varepsilon$ bajarilsa, x nuqta ko'rsatilgan atrofga tegishli bo'ladi. ε ni atrofning radiusi deb, atrofning o'zi esa ε atrof deb ataladi.

Sonli to'plamning limit nuqtasi.

Sonlarni O x sonlar o'qida nuqtalar bilan tasvirlaymiz.

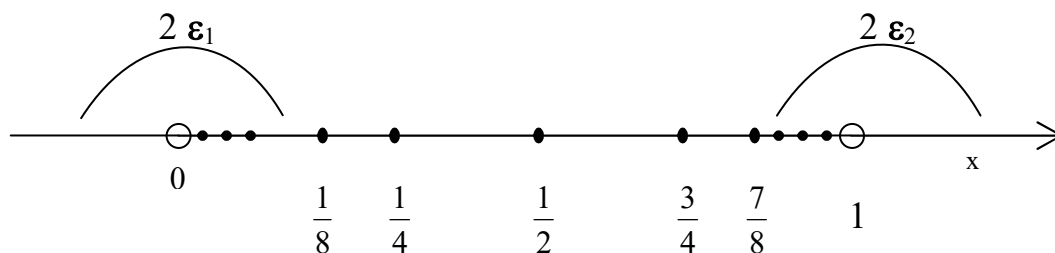
1°. M_1 sonlar to'plami (3-shakl): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$



3 – s h a k l.

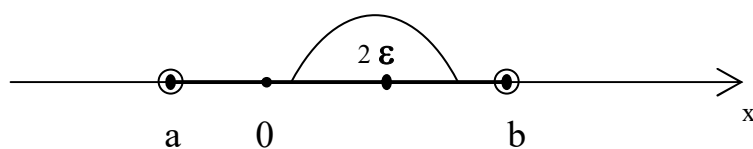
2°. M_2 sonlar to'plami (4-shakl): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{15}{16}, \dots, \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^k},$

...



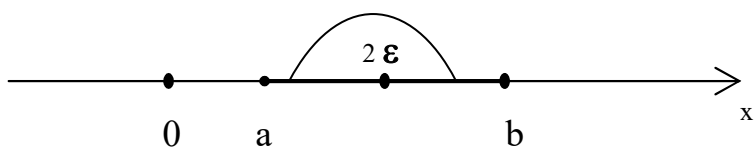
4 – s h a k l.

3°. $M_3 : (a, b)$ interval (5-shakl)



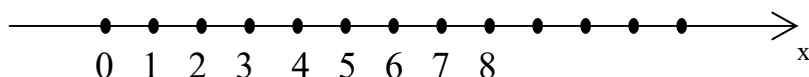
5 – s h a k l.

4°. $M_4 : [a ; b]$ segment (6-shakl)



6 – s h a k l.

5°. $M_5 : 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ (7-shakl)



7 – s h a k l.

Ta'rif. Agar a nuqtaning istalgan atrofida M sonlar to'plamiga tegishli cheksiz ko'p nuqtalar yotsa a nuqta M sonlar to'plamining limit nuqtasi deb ataladi.

Chunonchi, O nuqta M_1 to'plamning limit nuqtasidir, chunki O nuqtaning istalgan atrofida M_1 to'plamga qarashli nuqtalar cheksiz ko'pdir (3-shakl). O nuqtaning o'zi M_1 to'plamga kirmaydi.

M_2 to'plam O nuqta va 1 nuqtadan iborat ikkita limit nuqtaga ega (4-shakl). O limit nuqta to'plamga kirmaydi; 1 limit nuqta M_2 to'plamga kiradi. Shuning uchun 1 nuqta M_2 to'plamning nuqtasidir.

$(a ; b)$ intervalning barcha nuqtalari M_3 to'plamning limit nuqtalaridir.

Intervalning a va b uchlari ham uning limit nuqtalaridir (5- chizma), ammo a va b nuqtalar intervalga kirmaydi.

$[a , b]$ segmentning hamma nuqtalari bu segmentning limit nuqtalaridir. $[a , b]$ segmentning o'ziga kirmagan limit nuqtalari bo'lmaydi.

M_5 to'plamning limit nuqtalari yo'q.

Shuningdek, sonlarning istalgan chekli to'plami ham limit nuqtalarga ega emas.

Sonlar ketma-ketligi tushunchasi.

Aytaylik , $N=\{1,2,3, \dots\}$ to'plamda biror $f(n)$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiya qiymatlarini x_n bilan belgilaymiz.

$$f(n) = x_n \quad (1). \quad (f(1) = x_1, \quad f(2) = x_2, \dots, \quad f(n) = x_n, \dots).$$

Qaralayotgan funksiya qiymatlaridan tashkil topgan ushbu $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ to'plam sonlar ketma – ketligi deyiladi.

(1) ketma-ketlikni tashkil etgan x_n ($n = 1,2,3, \dots$) sonlar uning hadlari deyiladi: x_1 – ketma – ketlikning birinchi hadi, x_2 – ketma-ketlikning ikkinchi hadi va hokazo, x_n – ketma – ketlikning n – hadi (yoki umumiy hadi). (1) ketma-ketlik qisqacha x_n yoki $\{x_n\}$ kabi belgilanadi.

Ko'p holda ketma-ketliklarning umumiy hadi formula bilan ifodalanadi. Uning barcha hadlari shu formula orqali topiladi.

M a s a l a l a r.

1. $x_n = \frac{1}{n} :$ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
2. $x_n = n :$ $1, 2, 3, \dots, n, \dots$
3. $x_n = 1 :$ $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$
4. $x_n = (-1)^{n+1} :$ $1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$

Biror $\{x_n\} : x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ketma- ketlik berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M son mavjud bo'lsaki, $\{x_n\}$ ketma – ketlikning har bir hadi shu sondan katta bo'lmasa, ya'ni $\forall n \in N$ uchun $x_n \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ yuqoridan chegaralangan ketma – ketlik deyiladi.

2-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas m son mavjud bo'lsaki, $\{x_n\}$ ketma – ketlikning har bir hadi shu sondan kichik bo'lmasa, ya'ni $\forall n \in N$ uchun $x_n \geq m$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ quyidan chegaralangan ketma – ketlik deyiladi.

3-ta'rif. Agar ketma – ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday o'zgarmas m va M sonlar topilsaki, $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $m \leq x_n \leq M$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ chegaralangan ketma – ketlik deyiladi.

Misollar.

- 1.** $x_n = \frac{n+1}{n}$ ketma – ketlik quyidan va yuqoridan chegaralangan, chunki $x_n = \frac{n+1}{n} > 1$, ya'ni ketma-ketlik quyidan chegaralangan. Ikkinchi tomondan, $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ ga egamiz, bu yerda $\frac{1}{n}$ to'g'ri kasr, demak, $1 + \frac{1}{n} < 2$, ya'ni ketma – ketlik yuqoridan chegaralangan. ($m=1$, $M=2$).
- 2.** $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ ketma – ketlik quyidan chegaralangan, chunki ketma – ketlikning har bir hadi 0 dan kichik emas ($m=0$).
- 3.** $0, -1, -2, \dots, -n, \dots$ ketma – ketlik yuqoridan chegaralangan, chunki ketma – ketlikning har bir hadi 0 dan katta emas. ($M=0$).

4- ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlikning hadlari quyidagi $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$ ($x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$) tengsizliklarni qanoatlantirsa, ya'ni $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n < x_{n+1}$) bo'lsa, $\{x_n\}$ o'suvchi (qat'iy o'suvchi) ketma – ketlik deyiladi.

5-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlikning hadlari quyidagi $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$ ($x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$) tengsizliklarni qanoatlantirsa, ya'ni $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $x_n \geq x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) bo'lsa, $\{x_n\}$ kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketlik deyiladi.

O'suvchi (qat'iy o'suvchi), kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) ketma – ketliklar monoton ketma – ketliklar deyiladi.

M i s o l. $x_n = \frac{1}{n^2 - 1}$ ketma – ketlik monoton kamayuvchi ketma – ketlikdir,

chunki kamayuvchi ketma – ketlik uchun $x_{n+1} < x_n \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, tengsizlik bajariladi.

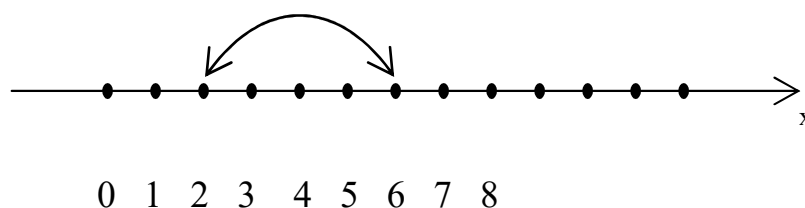
Ketma – ketlikning (n+1) hadini yozamiz: $x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 - 1} = \frac{1}{n^2 + 2n}$. U holda

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2n} < 1$, chunki $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $n^2 - 1 < n^2 + 2n$ bo'ladi. Berilgan ketma – ketlik kamayuvchidir.

Sonlar ketma – ketligining limiti

Biror $\{x_n\}$: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ketma – ketlik hamda biror a nuqta (son) berilgan bo'lsin. Bu ketma – ketlikning hadlari a nuqtaning biror atrofiga tegishli bo'ladimi, tegishli bo'lsa, nechta hadi tegishli bo'ladi – shularni aniqlash ketma – ketlikning limiti tushunchasini kiritishda muhim ahamiyatga ega.

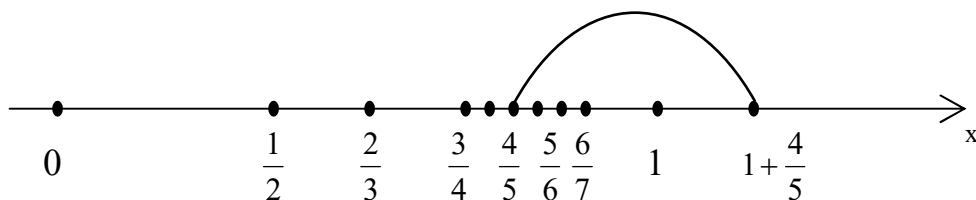
M i s o l l a r. 1. Ushbu $\{x_n\} = \{n\}$: 1, 2, 3, ..., n, ... ketma – ketlikni hamda $a=4$ nuqtaning $(4-2; 4+2)=(2; 6)$ atrofı ($\epsilon=2$) olinsa, unda ketma – ketlikning 3 ta hadi (3; 4; 5-hadlari) shu atrofga tegishli bo'ladi. (8-shakl).



8 – s h a k l.

Agar $a=2$ nuqta olinsa va uning $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ atrofı qaralsa, unda berilgan $x_n=n$ ketma – ketlikning bitta ham hadi shu atrofga tegishli bo'lmasligini ko'ramiz.

2. Ushbu $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ ketma – ketlikda $a=1$ nuqtaning $\left(1 - \frac{4}{5}; 1 + \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}; \frac{9}{5}\right)$ ($\varepsilon = \frac{4}{5}$) atrofı olinsa, unda berilgan ketma – ketlikning 4-hadidan boshlab keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo’ladi. (9-shakl).



9 – s h a k l.

Yuqorida keltirilgan misollardan ko’rinadiki, biror nuqta atrofga ketma – ketlikning chekli sondagi hadlari tegishli bo’lishi, biror hadidan boshlab keyingi

T a’ r i f. Agar a nuqtaning ixtiyoriy $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ atrofı ($\forall \varepsilon > 0$) olinganda ham $\{x_n\}$ ketma – ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo’lsa, a son $\{x_n\}$ ketma – ketlikning limiti deyiladi va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (*yoki* $\lim x_n = a$ *yoki* $x_n \rightarrow a$) kabi belgilanadi.

barcha hadlari, jumladan ketma – ketlikning barcha hadlari (cheksiz sondagi hadlari) tegishli bo’lishi, bitta ham hadi tegishli bo’lmasligi mumkin ekan.

Bu holda $\{x_n\}$ ketma – ketlik a ga intiladi deb ham yuritiladi. $\{x_n\}$ ketma – ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari a nuqtaning ixtiyoriy $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ atrofıga tegishliligi, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topilib, barcha $n > n_0$ uchun $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$ tengsizliklarning o’rinli bo’lishidan iboratdir.

Ravshanki, $a-\varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

Bu hol ketma – ketlik limitini quyidagicha ta’riflash imkonini beradi.

Ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son ($n_0 \in \mathbb{N}$) topilsaki, barcha $n > n_0$ uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a son $\{x_n\}$ ketma – ketlikning limiti deyiladi va yuqoridagidek $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ kabi belgilanadi.

1-i z o h. O'zgarmas miqdor c ko'pincha hamma qiymatlari bir xil: $x=c$ bo'lgan o'zgaruvchi miqdor deb qaraladi.

O'zgarmas miqdorning limiti shu o'zgarmas miqdorning o'ziga teng, chunki $\forall \varepsilon > 0$ da $|x - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ tengsizlik doimo bajariladi.

2-i z o h. Limitning ta'rifidan o'zgaruvchi miqdor ikkita limitga ega bo'la olmasligi kelib chiqadi. (Isboti [2], 29-bet)

3-i z o h. Har bir o'zgaruvchi miqdor limitga ega deb o'ylash yaramaydi.

Cheksiz kichik hamda cheksiz katta miqdorlar.

Agar o'zgaruvchi miqdor a limitga intilsa, u holda a o'zgarmas son ekani limitning ta'rifidan ko'rinadi. Ammo, «**intiladi**» tushunchasi o'zgaruvchi miqdorning boshqacha o'zgarish usulini tavsiflash uchun ham ishlatiladi.

Agar oldindan berilgan har bir musbat M son uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topilsaki, barcha $n > n_0$ uchun $|x_n| > M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma – ketlikning limiti (∞) deb qaraladi va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ yoki $x_n \rightarrow \infty$ kabi belgilanadi.

Agar har qanday $M > 0$ son berilganda ham shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topilsaki, barcha $n > n_0$ uchun $x_n > M$ ($x_n < -M$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma – ketlikning limiti $+\infty$ ($-\infty$) deb qaraladi.

T a' r i f. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlikning limiti cheksiz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor deyiladi.

Masalan, $x_n = 2n$ ketma – ketlik cheksiz katta miqdor bo'ladi, chunki $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty$

T a' r i f. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlikning limiti 0 ga teng bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, u holda $\{x_n\}$ cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Masalan, $x_n = \frac{1}{n+1}$ ketma – ketlik cheksiz kichik miqdor bo'ladi, chunki $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

T e o r e m a. $\{x_n\}$ ketma – ketlikning a limitga ega bo'lishi uchun $\alpha_n = x_n - a$ cheksiz kichik miqdor bo'lishi zarur va etarli. Demak, $\{x_n\}$ ketma – ketlikning limiti a bo'lsa, uning umumiy hadi x_n ni $x_n = a + \alpha_n$ ko'rinishda yozish mumkin, bunda α_n cheksiz kichik miqdor va aksincha

T a' r i f. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlikning limiti chekli son bo'lsa, uni yaqinlashuvchi ketma – ketlik, agar ketma – ketlikning limiti cheksiz yoki ketma – ketlik limitga ega bo'lmasa, uni uzoqlashuvchi ketma – ketlik deyiladi.

M i s o l. $\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ ketma – ketlikda: $x_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Ravshanki, $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ cheksiz kichik miqdor. Demak, berilgan ketma –

ketlikning limiti 1 ga teng: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

1–Lemma. Ikki cheksiz kichik miqdor yig'indisi yana cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

2–Lemma. Chegaralangan ketma – ketlik bilan cheksiz kichik miqdor ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Endi cheksiz kichik hamda cheksiz katta miqdorlar orasidagi bog'lanishni keltiramiz:

1⁰. Agar $\{x_n\}$ ($x_n \neq 0, \quad n=1,2,..$) cheksiz kichik miqdor bo'lsa, $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$

cheksiz katta miqdor bo'ladi.

2⁰. Agar $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor bo'lsa, $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ cheksiz kichik miqdor

bo'ladi.

Yaqinlashuvchi ketma – ketliklar va ularning xossalari.

Ketma – ketlik limitining mavjudligi (ya'ni yaqinlashuvchi) haqidagi masala muhim masalalardan biridir. Bu masalani hal qilib beruvchi teoremlar mavjud. Biroq ular matematik tahlilning nozik faktlariga asoslanib isbotlanadi.

1–teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa, ketma – ketlik chekli limitga ega (ya'ni yaqinlashuvchi) bo'ladi.

2–teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlik kamayuvchi bo'lib, quyidan chegaralangan bo'lsa, ketma – ketlik chekli limitga ega (ya'ni yaqinlashuvchi) bo'ladi.

Ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olganda ham shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ topilsaki, barcha $n > n_0$, barcha $m > n_0$ uchun $|x_n - x_m| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik deyiladi.

Har qanday yaqinlashuvchi ketma – ketlik fundamental ketma – ketlik bo'ladi.

3–teorema. (Koshi teoremasi). Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlik fundamental ketma – ketlik bo'lsa, u yaqinlashuvchi bo'ladi.

Yaqinlashuvchi ketma – ketliklar qator xossalarga ega. Bu xossalarni isbotsiz keltiramiz.

1⁰. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uning limiti yagona bo'ladi.

2⁰. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, chegaralangan bo'ladi.

3⁰. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\{x_n \pm y_n\}$ ketma – ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ bo'ladi.

4⁰. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\{x_n \cdot y_n\}$ ketma – ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ bo'ladi.

Natija. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, $\{c \cdot x_n\}$ ketma – ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot x_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ bo'ladi, bu yerda c – o'zgarmas son.

5⁰. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,
 $y_n \neq 0 \quad (n=1,2,3,\dots)$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ bo'lsa, u holda $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$

ketma – ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$ bo'ladi.

6⁰. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\forall n \in \mathbb{N}$ da
 $x_n \leq y_n \quad (x_n \geq y_n)$ bo'lsa, u holda
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right)$ bo'ladi.

7⁰. Agar $\{x_n\}$ va $\{z_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi va
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ bo'lib $\forall n \in \mathbb{N}$ da $x_n \leq y_n \leq z_n$ bo'lsa, u
 holda $\{y_n\}$ ketma – ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$
 bo'ladi.

8⁰. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bo'lsa,
 u holda $x_n = a + \alpha_n$ bo'ladi va aksincha, bunda α_n cheksiz kichik
 miqdor.

Sonlar ketma-ketliklari limitini hisoblash.

Sonlar ketma – ketligi mavzusining asosiy masalalaridan biri uning limitini topishdan iborat. Ketma – ketliklarning limitlarini topishda ta'rifdan va ketma – ketlik limitining xossalariidan foydalaniladi.

1 – m i s o l. Ketma – ketlik limitining ta’rifidan foydalanib isbotlang.

$$\text{a) } \lim x_n = 1, \quad \text{agar } x_n = \frac{2n-1}{2n+1}; \quad \text{b) } \lim x_n = \frac{3}{5}, \quad \text{agar}$$

$$x_n = \frac{3n^2+1}{5n^2-1} \quad \text{bo'lsa va qaysi } n \text{ nomerdan boshlab } \left| x_n - \frac{3}{5} \right| < 0,01$$

tengsizlik bajarilishi ko'rsatilsin.

Y e c h i s h. a) Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday $N(\varepsilon)$ son topiladiki, $n > N(\varepsilon)$ da $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Buning uchun absolyut qiymat

$$\text{ayirmasini topamiz: } \left| \frac{2n-1}{2n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-2}{2n+1} \right| = \frac{2}{2n+1}$$

Demak, $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi, agar $\frac{2}{2n+1} < \varepsilon$, bundan

$n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Shuning uchun $N(\varepsilon)$ sifatida $\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$ sonning butun qismi, ya'ni

$$N = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) \text{ ni olamiz.}$$

Shunday qilib, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun N son topiladiki, $n > N$ bo'lganda

$$|x_n - 1| < \varepsilon \text{ bajariladi, bu esa } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1.$$

b) Endi $\left| x_n - \frac{3}{5} \right|$ absolyut miqdor farqini topamiz:

$$\left| \frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5} \right| = \frac{8}{5(5n^2-1)}.$$

$\varepsilon > 0$ berilgan n ni shunday tanlaymizki $\frac{8}{5(5n^2-1)} < \varepsilon$ tengsizlik

bajarilsin. Bu tengsizlikni yechib: $n^2 > \frac{8}{25\varepsilon} + \frac{1}{5} \Rightarrow n > \frac{1}{5} \sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}.$

$$N = E\left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}\right) \text{ deb, } n > N \text{ da } |x_n - 3,5| < \varepsilon.$$

$$\text{Agar } \varepsilon = 0,01 \text{ bo'lsa, } N = E\left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}\right) = E\left(\frac{1}{5}\sqrt{805}\right) = 5, \text{ bundan}$$

ketma – ketlikning 6-hadidan boshlab barcha hadlari $\left(\frac{3}{5} - 0,01; \frac{3}{5} + 0,01\right)$ intervalda yotadi.

2 – m i s o l. Ushbu $0,1; 0,11; 0,111; \dots$ ketma – ketlikning limiti $\frac{1}{9}$ ga teng.

$$\text{I s b o t.} \quad \text{Buning uchun } \frac{1}{9} - 0,1 = \frac{1}{9 \cdot 10} < \frac{1}{10}; \quad \frac{1}{9} - 0,11 = \frac{1}{9 \cdot 100} < \frac{1}{100} \dots,$$

$$\frac{1}{9} - \underbrace{0,11\dots 1}_{n \text{ ta raqam}} = \frac{1}{9 \cdot 10^n} < \frac{1}{10^n} \text{ ekanligini e'tiborga olib, } \frac{1}{9} - a_n$$

ayirma $0,11\dots$ davriy kasrda o'nli kasr xonalarini yetarli darajada ko'proq olish bilan ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ sonidan ham kichik bo'lishi mumkin ekanligini ko'rish oson. Demak, berilgan ketma – ketlik limiti $\frac{1}{9}$ ga teng.

3 – m i s o l.

a) $f(x) = x^3$ funksiya $x \rightarrow 0$ da (ya'ni nol atrofida);

b) $f(x) = (x+3)^2$ funksiya $x = -3$ nuqta atrofida;

c) $f(x) = \sin(x - a)$ funksiya $x = 2$ nuqta atrofida va shuningdek 2-kII nuqtalardan istalgan birining atrofida cheksiz kichik funksiyalardir.

$$\text{4 – m i s o l.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3}{2n^2 + 3} + \frac{1 - 5n^2}{5n + 1} \right) \text{ ni toping.}$$

Y e c h i s h. Agar yig'indining limiti xossasidan foydalansak, har bir qo'shiluvchi cheksiz katta miqdor bo'lib, chegaralanmagan. Shuning uchun ular limitga ega emas; kasrlarni qo'shsak:

$$x_n = \frac{2n^3 - 13n^2 + 3}{10n^3 + 2n^2 + 15n + 3}.$$

Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{13}{n} + \frac{3}{n^3}}{10 + \frac{2}{n} + \frac{15}{n^2} + \frac{3}{n^3}} = \frac{1}{5}$$

I z o x. Limitni hisoblashda kasrning surat va maxrajini n ning eng yuqori darajasi ($n=3$) ga bo'ldik.

$$5 - m i s o l. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3}{2n^2 + n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar.

I. Sonli ketma-ketlik limiti

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ekanligi isbotlansin. ($N(\varepsilon)$ ko'rsatilsin)

$$1. a_n = \frac{2n-2}{3n+1}; a = \frac{2}{3}$$

$$2. a_n = \frac{5n+4}{3n-1}; a = \frac{5}{3}$$

$$3. a_n = \frac{2n+1}{3n+2}; a = \frac{2}{3}$$

$$4. a_n = \frac{5n-1}{n+1}; a = 5$$

$$5. a_n = \frac{n^3+1}{2n^3+1}; a = \frac{1}{2}$$

$$6. a_n = \frac{4n^2-1}{2n^2+1}; a = 2$$

$$7. a_n = \frac{n-1}{2n+1}; a = \frac{1}{2}$$

$$9. a_n = \frac{3n-1}{2n+1}; a = \frac{3}{2}$$

$$11. a_n = \frac{3n-4}{2n+1}; a = \frac{3}{2}$$

$$13. a_n = \frac{-6n}{n+1}; a = -6$$

$$15. a_n = \frac{2n^2-1}{n^2+3}; a = 2$$

$$8. a_n = \frac{n+1}{1+2n}; a = \frac{1}{2}$$

$$10. a_n = \frac{5n-2}{3n+1}; a = \frac{5}{3}$$

$$12. a_n = \frac{3n+4}{3n+1}; a = 1$$

$$14. a_n = \frac{7n}{14n+1}; a = \frac{1}{2}$$

$$16. a_n = \frac{n+1}{3n}; a = \frac{1}{3}$$

II. Sonli ketma-ketlik limiti hisoblansin.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^3 + (n+1)^3}{(n-3)^3 + (n+4)^3}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-n)^2 - (4+n)^2}{(4+n)^2 + (2-n)^2}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^2 - (1+n)^2}{(2-n)^2 - (2+n)^2}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^4 - (1+n)^3}{(2+n)^4 - (2+n)^3}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^3 - n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^2 - (2+n)^3}{(1-n)^3}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+2)^3}{(n-2)^4 - (n+1)^4}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 + (n+3)^2}{(n+2)^3 - (n+3)^3}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^4 - 1}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{(n-1)^4 - (n+1)^4}$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^2}{(n-2)^3 - (n+2)^3}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (n+1)^3}{(2-n)^3}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+2)^3}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 - (n+1)^3}{(n-3)^2 + (n+2)^2}$$

III. Sonli ketma-ketlik limiti hisoblansin.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^n$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-1} \right)^{n^3}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n-2} \right)^{\frac{n}{4}+1}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n+2}{10n-8} \right)^{n+1}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3+2} \right)^{n^2}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-5n+4}{n^2-6n+5} \right)^{2n+1}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+3} \right)^{1-n}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2-4n}{2n^2-4n+1} \right)^n$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Ё. У. Соатов Олий математика. I, II ва III жилдлар, Т.: Ўқитувчи, 1992, 1994 й.
2. Т. Ш. Шодиев Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра, Т.: Ўқитувчи, 1984 й.
3. Б.А. Абдалимов ва бошқалар. Олий математикадан масалалар ечиш бўйича қўлланма. Т.: Ўқитувчи, 1985, 1994 й.
4. Н.С. Пискунов Дифференциал ва интеграл ҳисоб, I, II жилдлар Т.: Ўқитувчи, 1974 й.
5. В. П. Минорский Олий математикадан масалалар тўплами. М.: Наука, 1987 й.

