МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА имени МИРЗО УЛУГБЕКА

На правах рукописи
УДК 517.98

Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович

ИЗМЕРИМЫЕ РАССЛОЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ОПЕРАТОРНЫМ АЛГЕБРАМ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯМ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ташкент – 2008

Работа выполнена в отделе «Алгебра и анализ» института Математики и информационных технологий Академии Наук Республики Узбекистан

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор, академик АН Республики Узбекистан Аюпов Шавкат Абдуллаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, доцент Абдуллаев Рустамбай Зайирович,
доктор физико-математических наук, доцент Джалилов Ахтам Абдурахманович,
доктор физико-математических наук, Рахимов Абдугафур Абдумажидович.

Ведущая организация – Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН

Защита состоится «____» ______________ 2008 г. в _____ часов на заседании объединенного специализированного совета Д 067.02.03 при Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека по адресу: 700174, г.Ташкент, ВУЗ городок, Национальный Университет Узбекистана, механико-математический факультет, ауд. Г – 303.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат разослан «___» ____________ 2008 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
доктор физико-математических наук А.А. Абдушукуров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Развитие теории решеточно-нормированных пространств восходит к работам Л.В. Канторовича середины 30-х годов прошлого века. Важнейшим классом решеточно-нормированных пространств являются пространства Банаха – Канторовича. Впервые эти пространства были рассмотрены Л.В. Канторовичем. В середине прошлого века исследованию свойств этих пространств были посвящены работы Б.З. Вулиха, А.Г.Пинскера, Г.П.Акилова и других. В последнее время исследованиям в этой области посвящены работы А.Г. Кусраева, С.С. Кутателадзе, А.Е. Гутмана, В.И. Чилина, И.Г. Ганиева и других. В начале 80-х годов XX века в работах А.Г. Кусраева была получена булевозначная реализация пространств и решеток Банаха – Канторовича. В частности, им было доказано одно из важных свойств таких пространств о том, что всякое пространство Банаха – Канторовича над расширенным K-пространством является модулем над K-пространством и модульные операции согласованы с векторной нормой пространства. В 60-х годах прошлого века в работах Т.А. Сарымсакова были заложены основы теории топологических полуполей – специального класса K-пространств, которая нашла многие приложения в топологии, функциональном анализе, теории вероятностей.

Важным инструментом при изучении модулей Банаха – Канторовича, наряду с булевозначным анализом стала теория непрерывных и измеримых банаховых расслоений. В начале 90-х годов прошлого века в работах А.Е. Гутмана было дано представление пространств Банаха – Канторовича в виде измеримых банаховых расслоений с лифтингом и это дало возможность представления различных классов операторов, действующих в абстрактных векторных решетках.

Техника измеримых банаховых расслоений позволила В.И. Чилину и И.Г. Ганиеву представить решетки Банаха – Канторовича над кольцом измеримых функций в виде измеримого расслоения банаховых решеток, а также булевы алгебры с векторнозначной мерой в виде измеримого расслоения булевых алгебр с числовыми мерами. С помощью таких представлений удалось получить варианты индивидуальных эргодических теорем для сжатий в L_p-пространствах, построенных по полной булевой алгебре с мерой со значениями в кольце измеримых функций.

В связи с развитием общей теории пространств Банаха – Канторовича над кольцом измеримых функций возникла необходимость исследования таких подмножеств в них, которые обладают тем или иным свойством компактности. К сожалению, компактность в общепринятом топологическом смысле не обеспечивает справедливость тех свойств в пространствах Банаха – Канторовича, которые были бы аналогичны соответствующим свойствам в банаховых пространствах. Это послужило причиной введения нового класса множеств – циклических компактов. Понятия циклически компактного множества и оператора было введено А.Г. Кусраевым. В работах А.Г. Кусраева был получен общий вид самосопряженного циклически компактного оператора в модулях Гильберта – Капланского.

Оставался открытым вопрос о представлении циклически компактных операторов в виде измеримого расслоения компактных линейных операторов, а также ∇-фредгольмовых операторов в виде измеримого расслоения Фредгольмовых операторов.

Структурная теория C^*-модулей начинается с работ И. Капланского, использовавшего эти обьекты для алгебраического подхода к теории W^*-алгебр. Рассмотрение C^*-алгебр, AW^*-алгебр и W^*-алгебр как модулей над их центрами, позволили использовать методы булевозначного анализа для описание различных свойств указанных классов *-алгебр.

C^*-модули являются полезными примерами модулей Банаха – Канторовича. В работах В.И. Чилина, И.Г. Ганиева было получено представление C^*-модулей над кольцом измеримых функций в виде измеримого расслоения классических C^*-алгебр, что дает возможность получать свойства C^*-модулей с помощью "склейки" соответствующих свойств C^*-алгебр над полем комплексных чисел.

Естественным образом возникает вопрос о реализаций C^*-алгебр над кольцом измеримых функций в виде алгебр операторов на модулях Гильберта – Капланского (теорема Гельфанда – Наймарка и Гельфанда – Наймарка – Сигала).

Изучение дифференцирований операторных алгебр начинается с работы И. Капланского, доказавшего, что всякое дифференцирование AW^*-алгебры типа I является внутренним. В этой же работе И. Капланский сформулировал проблему о том, что всякое дифференцирование алгебры фон Неймана должно быть внутренним. Эта проблема была решена в работах С. Сакаи. Диффференцирования на C^*-алгебрах и алгебрах фон Неймана исследованы в монографиях Сакаи. Всестороннее рассмотрение дифференцировании в общих банаховых алгебрах дано в монографии Г. Дейлса, где детально изучены условия, гарантирующие автоматическую непрерывность дифференцирований на различных банаховых алгебрах.

Пусть A – некоторая алгебра. Линейный оператор $D: A \to A$ называется *дифференцированием*, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ при всех $x, y \in A.$ Каждый элемент $a \in A$ определяет дифференцирование $D_a : A \to A$ по правилу $D_a(x) = ax - xa,\ x \in A.$ Дифференцирования вида D_a называются *внутренними*. Если элемент a, порождающий дифференцирование D_a, принадлежит более широкой алгебре B, содержащей A, то D_a называется *пространственным* дифференцированием.

Следующие результаты являются наиболее известными:

а) Если A – коммутативная C^*-алгебра, то всякое дифференцирование на A тождественно равно нулю.

б) Если D – дифференцирование на C^*-алгебре A, то D – непрерывно по норме.

в) Если A – алгебра фон Неймана, то любое дифференцирование на A является внутренним.

Развитие теории некоммутативного интегрирования восходит к работе И. Сигала, в которой было начато изучение алгебры $S(M)$ – всех измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана M. В 2000 году Ш.А. Аюповым была сформулирована проблема о возможности распространения результатов а), б), в), для случая алгебры $S(M)$. Если $M = L^\infty(0;1)$ – алгебра всех комплексных ограниченных измеримых функций на (0;1), то $S(M)$ изоморфна $L^0(0;1)$ – алгебре всех комплексных измеримых функций на $(0;1)$. В 2004 году в работе А.Ф. Бера, Ф.А. Сукочева, В.И. Чилина и в 2005 году независимо в работе А.Г. Кусраева было доказано, что алгебра $L^0(0;1)$ допускает нетривиальные дифференцирования.

Таким образом, структура дифференцирований алгебры $S(M)$, существенно отличается от случая дифференцирований алгебр фон Неймана.

Имеется ряд других важных классов алгебр неограниченных операторов, имеющих приложения как в функциональном анализе так и математической физике: O^*-алгебры, GB^*-алгебры, EW^*-алгебры и др. Интересными примерами упомянутых алгебр являются некоммутативные алгебры Аренса.

В связи с этим актуальной является проблема описания дифференцирований алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана (и её некоторых подалгебр), а также некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с алгеброй фон Неймана и точным нормальным полуконечным следом.

Диссертационная работа посвящена решению вышеназванных проблем.

Степень изученности проблемы. В середине 90-годов прошлого века в работах А.Е. Гутмана было введено понятие векторнозначного лифтинга и доказано, что всякое пространство Банаха – Канторовича над кольцом измеримых функций представляется в виде измеримого банахово расслоения с векторнозначным лифтингом. В работах В.И. Чилина и И.Г. Ганиева было получено представление некоммутативных L_p-пространств, ассоциированных с конечной алгеброй фон Неймана и с центрозначным следом в виде измеримого расслоения некоммутативных L_p-пространств, ассоциированных с числовым следом.

В 2004 году в работе А.Ф. Бера, Ф.А. Сукочева, В.И. Чилина были получены необходимые и достаточные условия существования нетривиальных дифференцирований в коммутативных регулярных алгебрах. В частности, было показано, что алгебра $L^0(0;1)$ допускает нетривиальные дифференцирования; более того, линейное пространство всех дифференцирований на $L^0(0;1)$ имеет несчетный базис. В работах А.Г. Кусраева методами булевозначного анализа были получены необходимые и достаточные условия существования нетривиальных дифференцирований и автоморфизмов в расширенных f-алгебрах. В частности, также было показано, что алгебра $L^0(0;1)$ допускает нетривиальные дифференцирования и автоморфизмы. В 2006 году в работе М. Уейта была доказана непрерывность в топологий сходимости по мере дифференцирований алгебры измеримых операторов, присоединенных к атомической алгебре фон Неймана.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Исследования проводились по гранту Ф.1.1.3 программы фундаментальных исследований I Ф «Математика, механика, информатика».

Цель исследования. Целью диссертационной работы является решение перечисленных выше проблем теории измеримых расслоений линейных операторов, C^*-модулей над кольцом измеримых функций и дифференцирований алгебр неограниченных операторов.

Задачи исследования. Реализация C^*-алгебр над кольцом измеримых функций в виде алгебр операторов на модулях Гильберта – Капланского и описание дифференцирований алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана и её некоторых подалгебр.

Объекты и предмет исследования: модули Банаха – Канторовича, C^*-алгебры, алгебра измеримых операторов, некоммутативные алгебры Аренса, дифференцирования.

Методы исследования. Применены общие методы измеримых банаховых расслоений, функционального анализа, теории операторных алгебр.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

1. векторный вариант критерия Никольского ∇-фредгольмовости для операторов на модулях Банаха – Канторовича;
2. прицип равномерной ограниченности для операторов на модулях Банаха – Канторовича;
3. представление коммутативных унитальных C^*-алгебр над кольцом измеримых функций в виде алгебры непрерывных сохраняющих перемешивания отображений на циклических компактах со значениями в L^0;
4. ГНС-представление C^*-алгебр над L^0;
5. общий вид дифференцирований алгебры локально измеримых операторов,

присоединенных к алгебре фон Неймана типа I и её некоторых подалгебр;
6. полное описание дифференцирований некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с алгеброй фон Неймана и точным нормальным полуконечным следом.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:
– доказано, что всякий циклически компактный оператор на модуле Банаха – Канторовича над L^0 представляется в виде измеримого расслоения компактных линейных операторов;
– доказано, что всякий ∇-фредгольмов оператор представляется в виде измеримого расслоения фредгольмовых операторов;
– получен прицип равномерной ограниченности для операторов на модулях Банаха – Канторовича;
– доказано, что коммутативная унитальная C^*-алгебра над кольцом измеримых функций изометрически *-изоморфна алгебре непрерывных сохраняющих перемешивания отображений на циклических компактах со значениями в L^0;
– доказано, что всякая C^*-алгебра над L^0 изометрически *-изоморфна замкнутой подалгебре алгебры всех L^0-ограниченных L^0-линейных операторов на модуле Гильберта – Капланского над L^0;
– найден общий дифференцирований алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана типа I и её некоторых подалгебр;
– получено полное описание дифференцирований некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с алгеброй фон Неймана и точным нормальным полуконечным следом.

Научная и практическая значимость результатов исследования. В работе получено решение важных проблем теории операторов на модулях Гильберта – Капланского и теории дифференцирований на неограниченных операторных алгебрах. Результаты и методы, представленные в работе, могут быть использованы при исследованиях по функциональному анализу, теории операторных алгебр, а также в алгебраическом обосновании квантовой статистической механики.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре «Операторные алгебры и их приложения» (Институт Математики и информационных технологии АН РУз, руководитель: академик Ш.А. Аюпов), на городском семинаре по функциональному анализу (Национальный Университет Узбекистана, руководитель: проф. В.И. Чилин), на семинаре кафедры алгебра и функциональный анализ (Национальный Университет Узбекистана, руководитель: академик Ш.А. Аюпов), на городском семинаре по комплексному анализу (Национальный Университет

Узбекистана, руководитель: академик А.С. Садуллаев), во время научных командировок в институт прикладной математики университета Бонна (Германия, 2006, 2007), на международной научной конференции «Операторные алгебры и квантовая теория вероятностей» (Ташкент, 2005), на международной конференции «Порядковый анализ» (Владикавказ, Россия, 2006), на республиканской конференции «Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа» (Нукус, 2006).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[31]. В работах [11], [13], [18] постановка задач принадлежит Ш.А. Аюпову, в работах [14], [16], [17], [19], [20], [21],[22] постановка задач принадлежит С. Альбеверио и Ш.А. Аюпову, в работах [1], [3], [4], [5], [7] постановка задач принадлежит И.Г. Ганиеву, в работах [12], [15] постановка задач принадлежит В.И. Чилину и И.Г. Ганиеву. Доказательства основных результатов, полученных в этих работах, принадлежат диссертанту.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на 14 параграфов, заключения и 129 наименований использованной литературы. Полный объём диссертации – 213 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первом параграфе первой главы диссертации приводятся необходимые определения и результаты из теории меры, теорий решеточно-нормированных пространств, измеримых банаховых расслоений и др.

Пусть (Ω, Σ, μ) – измеримое пространство с мерой, обладающей свойством прямой суммы, а $L^0 = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ – алгебра всех комплексных измеримых функций на (Ω, Σ, μ) (равные почти всюду функции отождествляются).

Пусть X – отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ некоторое банахово пространство $(X(\omega), \|\cdot\|_{X(\omega)})$, где $X(\omega) \neq \{0\}$ для всех $\omega \in \Omega$. *Сечением* X называется функция u, определенная почти всюду в Ω и принимающая значение $u(\omega) \in X(\omega)$ для всех $\omega \in \mathrm{dom}(u)$, где $\mathrm{dom}(u)$ есть область определения u.

Пусть L – некоторое множество сечений.

Определение 1.1.6. Пара (X, L) называется *измеримым банаховым расслоением* (ИБР) над Ω, если

а) $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in L$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ и $c_1, c_2 \in L$,
где $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 : \omega \in \mathrm{dom}(c_1) \cap \mathrm{dom}(c_2) \to \lambda_1 c_1(\omega) + \lambda_2 c_2(\omega)$;

б) функция $\|c\| : \omega \in \mathrm{dom}(c) \to \|c(\omega)\|_{X(\omega)}$ измерима при всех $c \in L$;

в) для каждой точки $\omega \in \Omega$ множество $\{c(\omega) : c \in L,\ \omega \in \mathrm{dom}(c)\}$ плотно в

$X(\omega)$.

Сечение s называется ступенчатым, если $s(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(\omega)c_i(\omega)$, где $c_i\in L,\ A_i\in\Sigma,\ i=\overline{1,n}.$ Сечение u называется измеримым, если для всякого $A\in\Sigma,\ \mu(A)<\infty$ найдется такая последовательность $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ступенчатых сечений, что $\| s_n(\omega)-u(\omega)\|_{X(\omega)}\to 0$ для почти всех $\omega\in A.$

Пусть $M(\Omega,X)$ – множество всех измеримых сечений. Символом $L^0(\Omega,X)$ обозначим факторизацию $M(\Omega,X)$ по отношению равенства почти всюду. Через $\tilde{u}$ обозначим класс из $L^0(\Omega,X)$, содержащий сечение $u\in M(\Omega,X).$ Отметим, что функция $\omega\to\| u(\omega)\|_{X(\omega)}$ измерима для любого $u\in M(\Omega,X)$. Класс эквивалентности, содержащий функцию $\| u(\omega)\|_{X(\omega)}$, обозначим через $\|\tilde{u}\|.$ Пространство $(L^0(\Omega,X),\|\cdot\|)$ является ПБК над L^0.

Во втором параграфе первой главы изучены измеримые расслоения компактных множеств.

Пусть ∇ – булева алгебра всех идемпотентов в L^0. Если $(u_\alpha)_{\alpha\in A}\subset L^0(\Omega,X)$ и $(\pi_\alpha)_{\alpha\in A}$ – разбиение единицы в ∇, то ряд $\sum_{\alpha\in A}\pi_\alpha u_\alpha$ (bo)-сходится в $L^0(\Omega,X)$ и сумма этого ряда называется *перемешиванием* $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ относительно $(\pi_\alpha)_{\alpha\in A}$. Это сумма обозначается через $\mathrm{mix}(\pi_\alpha u_\alpha)$. Для $K\subset L^0(\Omega,X)$ через $\mathrm{mix}K$ обозначается множество всех перемешиваний произвольных семейств элементов из K. Множество K называется *циклическим,* если $\mathrm{mix}K=K$. Для направленного множества A через $\nabla(A)$ обозначается множество всех разбиений единицы в ∇, заиндексованных элементами A. Отношение порядка на $\nabla(A)$ определяется следующим образом:

$$\nu_1\le\nu_2\Leftrightarrow\forall\alpha,\beta\in A,\ \ (\nu_1(\alpha)\wedge\nu_2(\beta)\neq 0\Rightarrow\alpha\le\beta)\quad(\nu_1,\nu_2\in\nabla(A)).$$

Пусть $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ сеть в $L^0(\Omega,X)$. Для каждого $\nu\in\nabla(A)$ положим $u_\nu=\mathrm{mix}(\nu(\alpha)u_\alpha)$ и получим новую сеть $(u_\nu)_{\nu\in\nabla(A)}$. Произвольная подсеть сети $(u_\nu)_{\nu\in\nabla(A)}$ называется *циклической подсетью* сети $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Определение 1.2.1. Подмножество $K\subset L^0(\Omega,X)$ называется *циклически компактным,* если оно циклично и всякая сеть в K имеет циклическую подсеть, сходящуюся к некоторой точке из K.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 1.2.2. Пусть K – циклический компакт в $L^0(\Omega, X)$ и

$$K_\omega = \{l_X(\chi_A x)(\omega) : x \in K,\ A \in \Sigma,\ \chi_A x \in L^\infty(\Omega, X)\}.$$

Тогда K_ω – компакт для почти всех $\omega \in \Omega,$ при этом

$$K = \{x \in L^0(\Omega, X) : x(\omega) \in K_\omega \quad \text{для почти всех} \quad \omega \in \Omega\}.$$

В третьем параграфе первой главы выясняется структура модулей над кольцом измеримых функций, которые представляются как измеримое расслоение конечномерных пространств.

Определение 1.3.1. Говорят, что модуль E над L^0 *конечно-порожденный,* если в E существует конечное число элементов $x_1, x_2, ..., x_n$ таких, что всякое $x \in E$ можно представить в виде $x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$, где $\lambda_i \in L^0,\ i = \overline{1, n}$. Модуль E над L^0 называется σ*-конечно-порожденным,* если существует такое разбиение $\{\pi_n\}$ единицы в ∇, что каждый модуль $\pi_n E$ – конечно-порожденный.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 1.3.2. Модуль $L^0(\Omega, X)$ – σ-конечно-порожден в том и только в том случае, когда $X(\omega)$ – конечномерен для почти всех $\omega \in \Omega$.

Вторая глава посвящена измеримым расслоениям ограниченных и компактных линейных операторов и доказательству с их помощью аналогов основных принципов функционального анализа для модулей Банаха – Канторовича.

В первом параграфе второй главы изучены измеримые расслоения ограниченных и компактных линейных операторов.

Пусть X и Y измеримые банаховы расслоения над Ω с лифтингами l_X и l_Y, соответственно, $\{T_\omega : X(\omega) \to Y(\omega)\}$ – измеримое расслоение ограниченных операторов, т.е. $T_\omega(x(\omega)) \in M(\Omega, Y)$ для любого $x \in M(\Omega, X)$.

Равенство

$$T(\hat{u}) = \boxed{T_\omega}(u(\omega)) \qquad (1)$$

определяет L^0-линейный оператор $T : L^0(\Omega, X) \to L^0(\Omega, Y)$.

И.Г.Ганиевым было показано, что если $\{T_\omega : X(\omega) \to Y(\omega)\}$ – измеримое расслоение ограниченных линейных операторов такое, что функция $\omega \to \| T_\omega \|_{B(X(\omega),Y(\omega))}$ измерима, то оператор T, заданный по правилу (1), является L^0-ограниченным.

Следующий результат показывает, что требование $\| T_\omega \|_{B(X(\omega),Y(\omega))} \in L^0$ является лишним при установление ограниченности оператора T.

Предложение 2.1.1. Оператор T, определенный равенством (1), является L^0-ограниченным.

Напомним, что L^0-линейный оператор $T : L^0(\Omega, X) \to L^0(\Omega, Y)$ называется циклически компактным, если образ всякого ограниченного множества в $L^0(\Omega, X)$ является относительно циклически компактным.

Следующий результат является основным результатом параграфа.

Теорема 2.1.2. Пусть $T : L^0(\Omega, X) \to L^0(\Omega, Y)$ – циклически компактный L^0-линейный оператор. Тогда существует измеримое расслоение компактных линейных операторов $\{T_\omega : X(\omega) \to Y(\omega),\ \omega \in \Omega\}$ такое, что $T(x) = T_\omega(x(\omega))$ для всех $x \in L^0(\Omega, X)$.

Второй параграф второй главы посвящен векторному варианту теоремы Банаха об открытом операторе для операторов в пространствах Банаха – Канторовича и ее применениям к измеримым расслоениям операторов с замкнутой областью значений.

Для каждого L^0-линейного оператора $T : L^0(\Omega, X) \to L_0(\Omega, Y)$ положим $\ker T = \{x : T(x) = 0\}$ и $R(T) = \{T(x) : x \in L^0(\Omega, X)\}$.

Теорема 2.2.1. Пусть $T : L^0(\Omega, X) \to L^0(\Omega, Y)$ – L^0-ограниченный L^0-линейный оператор, $\ker T = 0$, $R(T) = L^0(\Omega, Y)$. Тогда T^{-1} является L^0-ограниченным оператором.

Для элемента $r \in L^0$ запись $r \gg 0$ означает, что $r(\omega) > 0$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Положим $B_1(X) = \{x \in L^0(\Omega, X) : \| x \| \le \mathbf{1}\}$.

Следующий результат является векторным вариантом теоремы Банаха об открытом операторе для операторов в модулях Банаха – Канторовича.

Теорема 2.2.2. Пусть $T : L^0(\Omega, X) \to L^0(\Omega, Y)$ – L^0-ограниченный L^0-линейный оператор и $R(T) = L^0(\Omega, Y)$. Тогда существует элемент $r \in L^0, r \gg 0$ такой, что $B_1(Y) \subset T(B_r(X))$.

Третий параграф второй главы посвящен вариантам классической теоремы Банаха – Штейнгауза о равномерной ограниченности и ее применениям.

Следующий результат показывает, что если семейство L^0-ограниченных L^0-линейных операторов, действующих в ПБК над L^0, ограничено поточечно, то оно равномерно ограничено.

Теорема 2.3.1. Пусть F – семейство L^0-ограниченных L^0-линейных операторов из $L^0(\Omega, X)$ в $L^0(\Omega, Y)$. Если для всякого $x \in L^0(\Omega, X)$ существует

$$\sup\{\| T(x) \| : T \in F\} \in L^0,$$

то существует

$$\sup\{\| T \| : T \in F\} \in L^0.$$

В четвертом параграфе второй главы исследуется измеримое расслоение Фредгольмовых операторов.

Пусть $T : L^0(\Omega, X) \to L^0(\Omega, Y)$ – L^0-ограниченный L^0-линейный оператор, $T^* : L^0(\Omega, Y)^* \to L^0(\Omega, X)^*$ – сопряженный оператор.

Рассмотрим однородные уравнения

$$T(x) = 0, \quad T^*(g) = 0$$

и соответствующие основное и сопряженное уравнения

$$T(x) = y, \quad T^*(g) = f.$$

Говорят, что для оператора T справедлива ∇-*альтернатива Фредгольма,* если существует счетное разбиение $\{\pi_n\}$ единицы в ∇ такое, что выполнены условия:

1) Однородное уравнение $\pi_0 T(x) = 0$ (сопряженное однородное уравнение $\pi_0 T^*(g) = 0$) имеет единственное нулевое решение. Уравнение $\pi_0 T(x) = \pi_0 y$ (соответственно $\pi_0 T^*(g) = \pi_0 f$) разрешимо и имеет единственное решение для любой правой части $y \in L^0(\Omega, Y)$ (соответственно $f \in L^0(\Omega, X)^*$);

2) для любого $n \in \mathbb{N}$ однородные уравнения $\pi_n T(x) = 0$ и $\pi_n T^*(g) = 0$ имеют по n ∇-линейно независимых решений $x_{n,1}, \ldots, x_{n,n}$ и $g_{n,1}, \ldots, g_{n,n}$;

3) основное уравнение (сопряженное уравнение) разрешимо в том и только в том случае, если $\pi_n g_{n,i}(y) = 0, \; i \le n, \; n \in \mathbb{N}$

($\pi_n f(x_{n,i}) = 0,\ i \le n,\ n \in \mathbb{N}$, соответственно);

4) общее решение основного уравнения имеет вид

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n (x_n^* + \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} x_{n,i}),$$

а общее решение сопряженного уравнения –

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n (g_n^* + \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} g_{n,i}),$$

где x_n^* (соответственно g_n^*) – частное решение уравнения $\pi_n T(x) = y$ (соответственно $\pi_n T^*(g) = f$), где $c_{n,i} \in L^0,\ i \le n,\ n \in \mathbb{N}$.

Следующий результат является векторным вариантом критерия Никольского фредгольмовости ограниченных линейных операторов в ПБК.

Теорема 2.4.2. Для L^0-ограниченного L^0-линейного оператора $T : L^0(\Omega, X) \to L^0(\Omega, Y)$ следующие условия эквивалентны:

1) операторы T_ω – Фредгольмовы для почти всех $\omega \in \Omega$;

2) оператор T является ∇-Фредгольмовым;

3) существуют L^0-линейные операторы A и K из $L^0(\Omega, X)$ в $L^0(\Omega, Y)$ такие, что A – обратим, K – σ-конечно-порожден и $T = A + K$;

4) существуют L^0-линейные операторы A и K из $L^0(\Omega, X)$ в $L^0(\Omega, Y)$ такие, что A – обратим, K – циклически компактен и $T = A + K$.

В третьей главе результаты предыдущих глав применены для построения основ теории C^*-алгебр над кольцом измеримых функций и доказана теорема о реализаций таких алгебр в виде алгебр операторов на модулях Гильберта – Капланского (теоремы Гельфанда – Наймарка и Гельфанда – Наймарка – Сигала).

В первом параграфе третьей главы изучаются алгебры Банаха – Канторовича над L^0 и свойства спектра элементов таких алгебр.

Пусть U – произвольная алгебра над полем комплексных чисел и одновременно модуль над L^0, причем $(\lambda u)v = \lambda(uv) = u(\lambda v)$ для всех $\lambda \in L^0, u, v \in U$. Рассмотрим на U некоторую L^0-значную норму $\|\cdot\|$, наделяющую U структурой пространства Банаха – Канторовича, в частности, $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ для всех $\lambda \in L^0, u \in U$.

U называется алгеброй Банаха – Канторовича над L^0, если для всех $u, v \in U$ имеет место соотношение: $\|u \cdot v\| \le \|u\| \|v\|$. Если U алгебра

Банаха – Канторовича над L^0 с единицей e такой, что $\| e \| = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ – единица в L^0, то U назовем унитальной алгеброй Банаха – Канторовича.

Теорема 3.1.1. Для всякой алгебры Банаха – Канторовича U над L^0 существует единственное с точностью до изоморфизма измеримое расслоение банаховых алгебр (X, L) с векторнозначным лифтингом l_X такое, что U изометрически изоморфна $L^0(\Omega, X)$, и $\{l_X(x)(\omega) : x \in L^\infty(\Omega, X)\} = X(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$. При этом, если U унитальная алгебра, то $X(\omega)$ также унитальная алгебра для всех $\omega \in \Omega$.

Во втором параграфе третьей главы изучается представления коммутативных C^*-алгебр над кольцом измеримых функций.

Пусть U – произвольная *-алгебра и U – алгебра Банаха – Канторовича над L^0, причем $(\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*$ для всех $\lambda \in L^0, u \in U$.

Определение 3.2.1. U называется *C^*-алгеброй над L^0*, если для всех $u, v \in U$ имеет место соотношение $\| u \|^2 = \| u^* \cdot u \|$.

L^0-линейный функционал $f : U \to L^0$ называется: положительным ($f \geq 0$), если $f(xx^*) \geq 0$ для всех $x \in U$; L^0-состоянием, если $f \geq 0$ и $\| f \| = \mathbf{1}$; L^0-состояние φ называется чистым, если из $\varphi \geq \psi \geq 0$, где ψ – L^0-линейный функционал, вытекает $\psi = \lambda\varphi$ для некоторого $\lambda \in L^0, 0 \leq \lambda \leq \mathbf{1}$.

Множество $F \subset U^*$ называется **-слабо циклически компактным,* если оно циклично и всякая сеть в F имеет циклическую подсеть, *-слабо сходящуюся к некоторой точке из F.

Через E_U обозначим множество всех L^0-состояний на U.

Предложение 3.2.3. Пусть U – C^*-алгебра над L^0. Тогда
(a) E_U – *-слабо циклически компактно;
(b) если U коммутативна, то множество $K(U)$ всех чистых L^0-состояний на U *-слабо циклически компактно.

Отображение $f : K(U) \to L^0$ называется *сохраняющим перемешивания,* если для произвольного разбиения единицы $(\pi_\alpha)_{\alpha \in I}$ в ∇ и $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I} \subset K(U)$ имеет место $f(\sum_{\alpha \in I} \pi_\alpha \varphi_\alpha) = \sum_{\alpha \in I} \pi_\alpha f(\varphi_\alpha)$.

Рассмотрим на $K(U)$ *-слабую топологию, индуцированную из U^*. Через $C_m(K(U), L^0)$ обозначим множество всех непрерывных, сохраняющих перемешивания отображений из $K(U)$ в L^0. Для каждого $f \in C_m(K(U), L^0)$ положим

$$\| f \| = \sup\{| f(x) |: x \in K(U)\}.$$

Рассмотрим в $C_m(K(U), L^0)$ поточечные алгебраические операции и инволюцию.

Предложение 3.2.6. $(C_m(K(U), L^0),\ \|\cdot\|)$ является C^*-алгеброй над L^0.

Следующие две теоремы являются основными результатами главы, в них получена реализация C^*-алгебр над L^0 в виде алгебр операторов на модулях Гильберта – Капланского, а в коммутативном случае – в виде алгебры непрерывных сохраняющих перемешивания отображений на циклических компактах со значениями в L^0.

Теорема 3.2.1. Пусть U унитальная коммутативная C^*-алгебра над L^0 и $K(U)$ множество всех чистых состояний на U. Тогда U изометрически *-изоморфна алгебре $C_m(K(U), L^0)$.

В третьем параграфе третьей главы изучается ГНС-представление C^*-алгебр над кольцом измеримых функций.

Пусть A – модуль Гильберта – Капланского над L^0. Пространство $B(A)$ всех L^0-ограниченных L^0-линейных операторов на A является C^*-алгеброй над L^0.

Следующий результат является векторным вариантом классической теоремы Гельфанда – Наймарка – Сигала.

Теорема 3.3.1. Если U – C^*-алгебра над L^0, то существует изометрический *-изоморфизм алгебры U на некоторую замкнутую *-подалгебру $B(A)$, где A – некоторый модуль Гильберта – Капланского.

В четвертой главе аппарат теории модулей Гильберта – Капланского применяется к исследованию дифференцировании на алгебрах неограниченных измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана. Здесь решена проблема описания дифференцирований для двух важных классов алгебр: алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана типа I (и её некоторых подалгебр), а также для некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с алгеброй фон Неймана и точным нормальным полуконечным следом.

В первом параграфе четвертой главы изучается алгебра локально измеримых операторов относительно алгебры фон Неймана типа I.

Пусть H – гильбертово пространство, $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих на H, M – подалгебра фон Неймана в $B(H)$, $P(M)$ – полная решетка всех ортопроекторов в M.

Напомним, что замкнутый линейный оператор x, действующий в гильбертовом пространстве H, называется измеримым относительно алгебры фон Неймана M, если $x\eta M$ и $\mathcal{D}(x)$ является сильно плотным в H. Обозначим через $S(M)$ множество всех измеримых операторов, присоединенных к M.

Замкнутый линейный оператор x, действующий в гильбертовом пространстве H, называется локально измеримым относительно алгебры фон Неймана M, если $x\eta M$ и существует такая последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из M, что $z_n \uparrow \mathbf{1}$ и $z_n x \in S(M)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Множество $LS(M)$ всех локально измеримых операторов, присоединенных к M, является унитальной *-алгеброй относительно операций сильного сложения и умножения и перехода сопряженному оператору. При этом $S(M)$ является заполненной *-подалгеброй в $LS(M)$.

Пусть H – гильбертово пространство и $L^0(\Omega, H)$ пространство классов эквивалентности измеримых отображений из Ω в H. $L^0(\Omega, H)$ является модулем Гильберта – Капланского над L^0, а $L^\infty(\Omega, H)$ является модулем Гильберта – Капланского над $L^\infty(\Omega)$. Через $B(L^0(\Omega, H))$ обозначим алгебру всех L^0-ограниченных L^0-линейных операторов на $L^0(\Omega, H)$, а через $B(L^\infty(\Omega, H))$ алгебру всех $L^\infty(\Omega)$-ограниченных $L^\infty(\Omega)$-линейных операторов на $L^\infty(\Omega, H)$.

Напомним, что алгебра фон Неймана M называется *типа I*, если она изоморфна алгебре фон Неймана с абелевым коммутантом.

Известно, что если M алгебра фон Неймана типа I, то существует единственная (кардинальна-индексированная) система центральных ортогональных проекторов $(q_\alpha)_{\alpha\in I} \subset P(M)$ с $\sum\limits_{\alpha\in I} q_\alpha = \mathbf{1}$ такая, что $q_\alpha M$ изоморфна однородной алгебре фон Неймана типа I_α, т. е. $q_\alpha M \cong B(L^\infty(\Omega_\alpha, H_\alpha))$, $\dim H_\alpha = \alpha$, и

$$M \cong \sum_{\alpha}^{\oplus} B(L^\infty(\Omega_\alpha, H_\alpha)).$$

Основным результатом параграфа является следующая

Теорема 4.1.1. Для $M \cong \sum\limits_{\alpha\in I}^{\oplus} B(L^\infty(\Omega_\alpha, H_\alpha))$ алгебра $LS(M)$ *-изоморфна алгебре $B(\prod\limits_{\alpha\in I} L^0(\Omega_\alpha, H_\alpha))$.

Во втором параграфе четвертой главы изучается дифференцирования алгебры локально измеримых операторов относительно алгебры фон Неймана типа I.

Пусть M однородная алгебра фон Неймана типа I_n, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае алгебра $LS(M)$ изоморфна алгебре $M_n(L^0)$ всех $n \times n$-матриц над L^0.

Пусть $\delta : L^0 \to L^0$ – произвольное дифференцирование и D_δ – "покоординатное" дифференцирование на $M_n(L^0)$ определенное по правилу

$$D_\delta((\lambda_{ij})_{i,j=1}^n) = (\delta(\lambda_{ij})_{i,j=1}^n), \tag{2}$$

где $(\lambda_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(L^0)$. Оператор D_δ является дифференцированием на $M_n(L^0)$.

Предложение 4.2.1. Всякое дифференцирование D алгебры $M_n(L^0)$ единственным образом представляется в виде

$$D = D_a + D_\delta,$$

где D_a – внутреннее дифференцирование, D_δ – дифференцирование, определенное по правилу (2).

Пусть $M \cong \sum\limits_{\alpha \in I}^{\oplus} B(L^\infty(\Omega_\alpha, H_\alpha))$ алгебра фон Неймана типа I с центром $L^\infty(\Omega)$ и D – дифференцирование на $LS(M)$, δ – его сужение на L^0. Тогда δ отображает каждое $q_\alpha L^0$ в себя, и поэтому δ порождает дифференцирование δ_α на $q_\alpha L^0$ для каждого α. Положим

$$F = \{\alpha \in I : \dim H_\alpha = \alpha < \infty\}.$$

Пусть D_{δ_α} $(\alpha \in F)$ дифференцирование на матричной алгебре $q_\alpha LS(M) \cong M_\alpha(q_\alpha L^0)$, определенное по правилу (2). Для $\alpha \in I$, F положим $D_{\delta_\alpha} \equiv 0$. Положим

$$D_\delta(x) = (D_{\delta_\alpha}(x_\alpha)), \quad x = (x_\alpha) \in LS(M). \tag{3}$$

Отображение $D_\delta : LS(M) \to LS(M)$ является дифференцированием на

$LS(M)$.

Следующий результат является одним из основным результатов главы, и дает общий вид дифференцирований алгебры локально измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана типа I, а также играет ключевую роль при описании дифференцирований алгебр измеримых, τ-измеримых и τ-компактных операторов относительно алгебр фон Неймана типа I.

Теорема 4.2.4. Пусть M – алгебра фон Неймана типа I. Всякое дифференцирование D на $LS(M)$ единственным образом представляется в виде

$$D = D_a + D_\delta,$$

где D_a – внутреннее дифференцирование и D_δ – дифференцирование вида (3).

Следствие 4.2.3. Пусть M – алгебра фон Неймана типа I_∞. Тогда всякое дифференцирование алгебры $LS(M)$ является внутренним.

В третьем параграфе четвертой главы изучаются дифференцирования на подалгебрах алгебры локально измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана типа I.

Пусть M алгебра фон Неймана и τ – точный нормальный полуконечный след на M. Напомним, что замкнутый линейный оператор x называется τ-измеримым относительно алгебры фон Неймана M, если $x\eta M$ и $\mathcal{D}(x)$ – область определение x, является τ-плотной в H, т.е. $\mathcal{D}(x)\eta M$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует проектор $p \in M$ такое, что $p(H) \subset \mathcal{D}(x)$ и $\tau(p^\perp) < \varepsilon$. Множество $S(M,\tau)$ всех τ-измеримых операторов относительно M является заполненной *-алгеброй в $S(M)$.

Теорема 4.3.2. Пусть M – алгебра фон Неймана типа I. Всякое дифференцирование D на $S(M)$ или $S(M,\tau)$ единственным образом представляется в виде

$$D = D_a + D_\delta,$$

где D_a – внутреннее дифференцирование и D_δ – дифференцирование вида (3).

В алгебре $S(M,\tau)$ рассмотрим подмножество $S_0(M,\tau)$ состоящее из операторов x таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует проектор $p \in P(M)$ с $\tau(p^\perp) < \infty, xp \in M$ и $\| xp \| < \varepsilon$.

$S_0(M,\tau)$ является идеалом в $S(M,\tau)$ и называется алгеброй τ-компактных операторов.

Следующий результат является основным результатом параграфа.

Теорема 4.3.3. Если M – алгебра фон Неймана типа I с центром Z, то всякое Z-линейное дифференцирование алгебры $S_0(M,\tau)$ является пространственным и порождается элементом из $S(M,\tau)$.

В четвертом параграфе четвертой главы изучается дифференцирования некоммутативных алгебр Аренса.

Для $p \geq 1$ положим $L^p(M,\tau) = \{x \in S(M,\tau) : \tau(|x|^p) < \infty\}$. Тогда $L^p(M,\tau)$ – банахово пространство, относительно нормы

$$\|x\|_p = (\tau(|x|^p))^{1/p}, \quad x \in L^p(M,\tau).$$

Рассмотрим множество

$$L^\omega(M,\tau) = \bigcap_{p\geq 1} L^p(M,\tau).$$

$L^\omega(M,\tau)$ является локально полной выпуклой метризуемой *-алгеброй относительно топологии t, порожденной системой норм $\{\|\cdot\|_p\}_{p\geq 1}$.

Алгебра $L^\omega(M,\tau)$ называется (некоммутативной) *алгеброй Аренса*. Введем обозначение

$$L_2^\omega(M,\tau) = \bigcap_{p\geq 2} L^p(M,\tau),$$

и на множестве $L_2^\omega(M,\tau)$ рассмотрим топологию t_2, порожденную системой норм $\{\|\cdot\|_p\}_{p\geq 2}$.

Предложение 4.4.4. $(L_2^\omega(M,\tau), t_2)$ является полной метризуемой локально выпуклой *-алгеброй.

Отметим, что при $\tau(1) < \infty$ имеет место равенство $L_2^\omega(M,\tau) = L^\omega(M,\tau)$, и топология t_2 совпадает с топологией t.

На $M + L_2^\omega(M,\tau)$ введем семейство норм $\{\|\cdot\|_n^{"}\}_{n\geq 2}$, положив

$$\|x\|_n^{"} = \inf\{\|x_1\|_\infty + \|x_2\|_n^0 : x = x_1 + x_2,\ x_1 \in M,\ x_2 \in L_2^\omega(M,\tau)\},$$

где $\| x \|_m^0 = \max\{\| x \|_n : n = \overline{2,m}\}, \ x \in \bigcap_{n=2}^{m} L^n(M,\tau).$

Пусть t_0 – топология на $M + L_2^\omega(M,\tau),$ порожденная семейством норм $\{\| \cdot \|_n^{''}\}_{n\geq 2}.$

Предложение 4.4.6. $(M + L_2^\omega(M,\tau), t_0)$ является локально выпуклой полной метризуемой *-алгеброй. Более того, алгебра Аренса $L^\omega(M,\tau)$ является идеалом в $M + L_2^\omega(M,\tau).$

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема, которая дает полное описание дифференцирований на некоммутативных алгебрах Аренса.

Теорема 4.4.3. Пусть M – полуконечная алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом $\tau.$ Тогда всякое дифференцирование D алгебры $L^\omega(M,\tau)$ является пространственным, при этом оно имеет вид

$$D(x) = ax - xa, \quad x \in L^\omega(M,\tau)$$

для некоторого $a \in M + L_2^\omega(M,\tau).$

Следствие 4.4.5. Если M – абелева алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом $\tau,$ то все дифференцирования алгебры $L^\omega(M,\tau)$ тождественно равны нулю.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой главе получено представление циклически компактных множеств в виде измеримого расслоения компактных множеств и выяснена структура модулей над кольцом L^0 измеримых функций, которые представляются как измеримое расслоение конечномерных пространств.

Во второй главе получены векторные варианты теорем Банаха об открытом операторе и Банаха – Штейнгауза о равномерной ограниченности, а также доказан векторный вариант критерия Никольского фредгольмовости ограниченных операторов.

В третьей главе изучены алгебры Банаха – Канторовича над кольцом измеримых функций.

Доказано, что всякая унитальная коммутативная C^*-алгебра над кольцом L^0, изометрически *-изоморфна алгебра всех непрерывных сохряняющих перемешивания отображений из множества всех чистых L^0-

состояний в кольцо L^0.

Доказан векторный вариант классической теоремы Гельфанда – Наймарка – Сигала C^*-алгебр над L^0.

В четвертой главе найден общий вид дифференцирований алгебр всех локально измеримых, измеримых и τ-измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана типа I, а также найдены необходимые и достаточные условие пространственности дифференцирований алгебры всех τ-компактных операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана типа I.

Дано полное описание дифференцирований некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с полуконечной алгеброй фон Неймана.

Работа носит теоретический характер. Результаты и методы, изложенные в диссертации, могут быть использованы при различных исследованиях по функциональному анализу, в теории операторных алгебр, математической физике.

Автор выражает глубокую признательность своему научному консультанту академику АН Республики Узбекистан, профессору Шавкату Абдуллаевичу Аюпову за ценные советы и внимание к работе.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I. Статьи, опубликованные в научных журналах:

1. Кудайбергенов К.К., Ганиев И.Г. Измеримые расслоения компактных множеств // Узб. Мат. Жур. – Ташкент, 1999. – № 6. – С. 37-44.
2. Кудайбергенов К. К. Измеримые расслоение непрерывных отображений циклических компактов // Узб. Мат. Жур. – Ташкент, 2000. – № 3. – С. 7-14.
3. Ganiev I.G. Kudaybergenov K.K Measurable bundles of compact operators // Methods of functional analysis and topology. – Kiev, 2001. – № 3 (7). – P. 1-6.
4. Ганиев И.Г., Кудайбергенов К.К. Теорема Банаха об обратном операторе в пространствах Банаха – Канторовича // Владикавказ. Мат. Жур. – Владикавказ, 2004. – № 3 (6). – С. 21-25.
5. Ганиев И.Г. Кудайбергенов К.К. Конечномерные модули над кольцом измеримых функций // Узб. Мат. Жур. – Ташкент, 2004. – № 4. – С. 3-9.
6. Кудайбергенов К. К. Измеримые расслоения операторов с замкнутой областью значений // Узб. Мат. Жур. – Ташкент, 2005. – № 3. – С. 54-62.
7. Ганиев И. Г., Кудайбергенов К.К. Принцип равномерной ограниченности Банаха – Штейнгауза для операторов в расширенных пространствах Банаха – Канторовича над L^0 // Математические труды.

– Новосибирск, 2006. – № 1 (9). – С. 21-33.
8. Кудайбергенов К. К. Теорема Гельфанда – Мазура для С*-алгебр над кольцом измеримых функции // Владикавказ. Мат. Жур. – Владикавказ, 2006. – № 1 (8). – С. 45-49.
9. Кудайбергенов К. К. Измеримое расслоение интегральных операторов // Узб. Мат. Жур. – Ташкент, 2006. – № 1. – С. 49-57.
10. Kudaybergenov K. K. Fredholm operators in Banach – Kantorovich spases // Methods of functional analysis and topology, – Kiev, 2006. – № 2 (12). – P. 234-242.
11. Аюпов Ш. А., Кудайбергенов К. К. Дифференцирования C^*-алгебр над кольцом измеримых функции // Узб. Мат. Жур. – Ташкент, 2007. – № 1. – С. 39-47.
12. Чилин В. И., Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К. Теорема Гельфанда – Наймарка – Сигала для C^*-алгебр над кольцом измеримых функции // Владикавказ. Мат. Жур. – Владикавказ, 2007. – № 2 (9). – С. 33-39.
13. Аюпов Ш. А., Кудайбергенов К. К. Дифференцирования алгебр Аренса // Функциональный анализ и его приложения. – Москва, 2007. – № 4 (41). – С. 70-72.
14. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K. Non commutative Arens algebras and their derivations // Journal of Functional Analysis. – Amsterdam, 2007. – № 1 (253). – P. 287-302.
15. Чилин В. И., Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К. Теорема Гельфанда – Наймарка для коммутативных C^*-алгебр над кольцом измеримых функции // Известия ВУЗов. “Математика”. – Казань, 2008. – № 2 (58). – С. 60-68.
16. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K. Derivations on the algebra of τ-compact operators affiliated with a type I von Neumann algebra // Positivity, – Basel, 2008. – № 2 (12). – P. 375-386.
17. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K. Derivations on the algebra of measurable operators affiliated with a type I von Neumann algebra // Siberian Advances in Mathematics, – Novosibirsk, 2008. – № 2 (18). – P. 86-94.
18. Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K. Innerness of Derivations on Subalgebras of Measurable Operators // Lobachevskii Journal of Mathematics, – Kazan, 2008. – № 2 (29). – P. 60-67.

III. а) Работы, опубликованные в препринтах:

19. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K. Non commutative Arens algebras and their derivations // SFB 611, Universitat Bonn, Preprint, № 290, – Bonn, 2006. – 18 p.
20. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K. Derivations on the algebra of measurable operators affiliated with a type I von Neumann algebra // SFB 611, Universitat Bonn, Preprint, № 301, – Bonn, 2006. – 14 p.

21. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K. Derivations on the algebra of τ -compact operators affiliated with a type I von Neumann algebra // SFB 611, Universitat Bonn, Preprint, № 324, – Bonn, 2007. – 13 p.
22. Albeverio S., Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Description of derivations on measurable operator algebras of type I // SFB 611, Universitat Bonn, Preprint, № 361, – Bonn, 2007. – 14 p.

III. б) Работы, опубликованные в материалах и сборниках тезисов конференции:

23. Аюпов Ш. А., Кудайбергенов К. К. Некоммутативные алгебры Аренса и их дифференцирования // Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа: Тез. докл. Респ. науч. конф. 25 – 27 июня 2006. Нукус, 2006. – С. 6-8.
24. Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К. Конечномерные модули над кольцом измеримых функции // Геометрия и анализ: Тез. докл. межд. науч. конф. 24 – 26 августа 2004. Ростов-на-Дону, 2004. – С. 92-94.
25. Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К. Представление некоммутативных C^*-алгебр над кольцом измеримых функции // Операторные Алгебры и Квантовая Теория Вероятностей: Труды международной конференций. 8 – 10 сентября 2005. Ташкент, 2005. – С. 54-56.
26. Кудайбергенов К. К. Измеримые расслоения фредгольмовых операторов // Дифференциальные уравнения и их приложения: Тез. докл. Респ. науч. конф. 24 – 26 июня 2004. Нукус, 2004. – С. 42-44.
27. Кудайбергенов К. К. Фредгольмовые операторы в пространствах Банаха – Канторовича // Тез. докл. Респ. науч. конф. 24 – 26 декабря 2004. – Ташкент, 2004. – С. 43-44.
28. Кудайбергенов К. К. Дифференцирования C^*-алгебр над кольцом измеримых функций // Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа: Тез. докл. Респ. науч. конф. 25 – 27 июня 2005. – Нукус, 2006. – С. 27-28.
29. Кудайбергенов К. К. Спектр элементов алгебры Банаха – Канторовича функции // Тихонов и современная математика: Тез. докл. межд. науч. конф. 19 – 25 июня 2006. – Москва, 2006. – С. 158-159.
30. Кудайбергенов К. К. Измеримое расслоение интегральных операторов // Тез. докл. Респ. науч. конф. 8 – 10 июня 2006. – Хива, 2006. – С. 15.
31. Кудайбергенов К. К. Спектр элементов алгебры Банаха — Канторовича функции // Исследования по математическому анализу, математическому моделированию и информатике: Материалы международной научной конференций. – Владикавказ: Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН, 2007. – С. 50-59.

Физика-математика фанлари доктори илмий даражасига талабгор Кудайбергенов Каримберген Кадирбергеновичнинг 01.01.01 – математик анализ ихтисослиги бўйича «Чизиқли операторлар ўлчовли тахламалари ва уларнинг оператор алгебралари ва дифференциаллашларга тадбиқи» мавзусидаги диссертациянинг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: дифференциаллаш, ички дифференциаллаш, лифтинг, ўлчов, Банах – Канторович модули, фон Нейман алгебраси, ўлчовли оператор, Аренс алгебралари.

Тадқиқот объектлари: Банах – Канторович модули, C^*-алгебралар, ўлчовли операторлар алгебраси, нокоммутатив Аренс алгебралари, дифференциаллашлар.

Ишнинг мақсади: Ўлчовли функциялар ҳалқаси устидаги C^*-алгебраларни Гильберт – Капланский модулида аниқланган операторлар алгебраси кўринишида ифодалаш ва фон Нейман алгебраларига нисбатан локал ўлчовли операторлар алгебраси ва унинг баьзи алгебраостилари дифференциаллашларини тавсифлаш

Тадқиқот методлари: ўлчовли банах тахламалари, функционал анализ, оператор алгебралар назариясининг усулларидан фойдаланилди.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: L^0 устидаги Банах – Канторович модулидаги ҳар бир циклик компакт оператор компакт чизиқли операторларнинг ўлчовли тахламаси кўринишида тасвирланиши исботланган; ∇-фредгольм операторлари Фредгольм операторлари ўлчовли тахламаси кўринишида тасвирланиши исботланган; ўлчовли функциялар ҳалқаси устидаги C^*-алгебраларни Гильберт – Капланский модулида аниқланган операторлар алгебраси кўринишида ифодаланиши исботланган; фон Нейман алгебраларига бириктирилган локал ўлчовли операторлар алгебраси ва унинг бази алгебраостилари дифференциаллашларининг умумий кўриниши топилган; фон Нейман алгебралари ва аниқ нормал ярим чекли из билан ассоциирланган нокоммутатив Аренс алгебралари дифференциаллашлари тўлиқ тавсифланган.

Амалий аҳамияти: иш назарий характерга эга.

Тадбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: Ишда келтирилган натижалар ва методлар функционал анализ ва операторлар алгебралари назарияларидан махсус курслар ўқишда қўлланилиши мумкин.

Қўлланиш соҳаси: ўлчовлар назарияси, функционал анализ, операторлар алгебралари назарияси, математик физика ва уларнинг тадбиқлари.

РЕЗЮМЕ

диссертации Кудайбергенова Каримбергена Кадирбергеновича на тему «Измеримые расслоения линейных операторов и их приложения к операторным алгебрам и дифференцированиям» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ.

Ключевые слова: дифференцирование, внутреннее дифференцирование, лифтинг, мера, модуль Банаха – Канторовича, алгебра фон Неймана, измеримый оператор, алгебра Аренса.

Объекты исследования: модули Банаха – Канторовича, C^*-алгебры, алгебра измеримых операторов, некоммутативные алгебры Аренса, дифференцирования.

Цель работы: Реализация C^*-алгебр над кольцом измеримых функций в виде алгебр операторов на модулях Гильберта – Капланского, описание дифференцирований алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана и её некоторых подалгебр.

Метод исследования: применены общие методы измеримых банаховых расслоений, функционального анализа, теории операторных алгебр.

Полученные результаты и их новизна: Доказано, что всякий циклически компактный оператор на модуле Банаха – Канторовича над L^0 представляется в виде измеримого расслоения компактных линейных операторов; доказано, что всякий ∇-фредгольмов оператор представляется в виде измеримого расслоения Фредгольмовых операторов; доказано, что всякая C^*-алгебра над L^0 изометрически *-изоморфна замкнутой подалгебре алгебры всех L^0-ограниченных L^0-линейных операторов на модуле Гильберта – Капланского над L^0; найден общий дифференцирований алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана типа I и её некоторых подалгебр; получено полное описание дифференцирований некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с алгеброй фон Неймана и точным нормальным полуконечным следом.

Практическая значимость: работа носит теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: Результаты и методы представленные в работе могут быть использованы при чтении специальных курсов по функциональному анализу и теорий операторных алгебр.

Область применения: теория мер, функциональный анализ, теория операторных алгебр, математическая физика и их приложения.

RESUME

Thesis of Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich on the scientific degree competition of the doctor of physical and mathematical sciences, speciality 01.01.01 – mathematical analysis

subject:

«Measurable bundles of linear operators and their applications to operator algebras and derivations».

Key words: derivation, inner derivation, lifting, Banach – Kantorovich module, von Neumann algebra, measurable operator, Arens algebra.

Subject of the inquiry: Banach – Kantorovich module, C^*-algebras, measurable Banach bundles, non commutative Arens algebras , derivation.

Aim of the inquiry: the realization of C^*-algebras over L^0 as algebras of operators on a Hilbert – Kaplansky module and description of derivation of the algebras of locally measurable operators affiliated with von Neumann algebra and of its subalgebras.

Method of inquiry: In the work methods of measurable banach Bundles, of functional analysis, of theory operator algebras are used.

The results achieved and their novelty:

It is proved that any cyclically compact operator on a Banach – Kantorovich module can be represented as a measurable bundle of compact operators; it is proved that every ∇-Fredholm operator can be represented as a measurable bundle of Fredholm operators; it is proved that every C^*-algebras over L^0 is isometrically *-isomorphic to a closed subalgebra of the algebra of all L^0-bounded L^0-linear operators on a Hilbert – Kaplansky module; a general form of derivations of the algebras of locally measurable operators affiliated with a von Neumann algebra is given; a complete description of derivations on the non commutative Arens algebras associated with von Neumann algebra and faithful normal semi-finite trace is obtained.

Practical value: the work has a theoretical character.

Degree of embed and economic effectivity: Results and methods introduced in the work can be used in special courses on functional analysis and theory of operator algebras.

Sphere of usage: the measure theory, functional analysis, theory of operator algebras, mathematical physics.