МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ФИНАНСОВЫЙ ИНСТИТУТ

Ш.Ш.Бабаджанов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ДЛЯ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ БАКАЛАВРИАТА ОБЛАСТИ ОБРАЗОВАНИЯ« БИЗНЕС И УПРАВЛЕНИЕ»

«IQTISOD-MOLIYA»
Ташкент 2006

Ш.Ш. Бабаджанов Математическое программирование: Учебное пособие Ташкент. «IQTISOD-MOLIYA», **2006 , 223 с.**

Данное учебное пособие написано в соответствии с требованиями образовательного стандарта для всех направлений бакалавриата области образования «Бизнес и управление», который утвержден МВ и ССО Республики Узбекистан от 28 февраля 2002 года. В пособии изложен курс математического программирования – линейное, нелинейное и динамическое программирование, а также элементы теории игр. Основной теоретический материал излагается по возможности очень строго, и он иллюстрируется примерами и задачами экономического характера. В конце каждой главы приводятся вопросы для самоконтроля и задачи для самостоятельного решения

Предназначается для студентов, которые обучаются по всем направлениям бакалавриата области образования «Бизнес и управление».

Печатается по решению учебно-методическог Ташкентского финансовог института

Рецензенты:д.э.н., проф К.Сафаева;
к.ф.-м.н., доц Х.А.Абдуваитов;
к.ф.-м.н.,доц А.Э.Маматов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано на основе многолетнего преподавания дисциплины «Математическое программирование» на кредитно-экономическом факультете Ташкентского финансового института и адресовано студентам, которые обучаются по всем направлениям бакалавриата области образования «Бизнес и управление».

При написании пособия поставлена цель не только сообщать студентам математические результаты - леммы и теоремы, но также научить их (там где это возможно) способам и методам получения этих результатов, т.е. в пособии приводятся логические рассуждения - доказательства большинства лемм и теорем. Ниже приведем основные причины побудившие изложить материалы пособия таким образом.

Как известно, математические результаты (леммы, теоремы) получаются путем логических рассуждений (доказательств). Логические рассуждения являются необходимой частью всякого познания, в частности, экономического.

Безусловно, многие из выпускников экономических вузов может быть в своей практической деятельности ни разу не воспользуются доказанными в курсах математических дисциплин теоремами. Однако вряд ли найдется хотя бы один специалист, которому не придется в дальнейшей работе рассуждать, аргументировать свои утверждения, анализировать, доказывать.

Логические рассуждения представляют собой метод математики, без них математика немыслима. Полезность и необходимость строгих доказательств объясняется еще и тем, что они позволяют убедиться в справедливости сделанного утверждения, показывают его закономерность и естественность, помогают раскрыть смысл вводимых математических понятий, помогают овладеть ими и, следовательно, правильно использовать их на практике.

Чрезмерное использование интуитивных подходов без формальных строгих логических обоснований приведет к туманности определений, неубедительности доказательств, наивному отождествлению экономических объектов с математическими, сокрытию условий, при которых верен тот или иной математический факт, - все это начисто исключает возможность овладения излагаемым материалом и его сознательного применения. Такова плата за понятность оторванную от строгости, за пренебрежение методом математики добывать истину с помощью формальных рассуждений.

Логические доказательства помогают вырабатывать у студента необходимые для использования математического аппарата навыки, помогают овладеть математическими методами, приобрести нужную для грамотного применения математическую культуру, составной частью которой является логическое мышление. Часто доказательство помогает лучше осознать границы применимости рассматриваемого математического аппарата и тем самым предостеречь от возможных ошибок в его использовании.

На наш взгляд, так изложенное учебное пособие будет способствовать практической реализации задачи, сформулированной Национальной Программы Подготовки Кадров – подготовки конкурентоспособных кадров, способных творчески мыслить и приобретать знания самостоятельно на протяжении всей жизни.

Учебное пособие состоит из пяти глав, разбитых на параграфы, которые в свою очередь (по необходимости) делятся на пункты и подпункты. В конце каждой главы приводятся вопросы для самоконтроля и задачи для самомтоятельного решения.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

> В мире не происходит ничего, в чем бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.
>
> Л.Эйлер

Каждое разумное действие является в определённом смысле оптимальным, ибо оно выбирается после сравнения с другими вариантами на основе интуиции и опыта человека. Интерес к задачам наилучшего выбора был всегда высоким.

Многие экономические задачи, экономические процессы обладают многовариантными решениями. Следует отметить, что иногда число допустимых вариантов или практически необозримо, или бесконечно. Конечно, нахождение оптимальных решений (выбор наилучших вариантов) не основывается на «здравом смысле», интуиции и опыте специалиста. Нахождение оптимальных решений - выбор наилучших вариантов (максимума, минимума или вообще оптимального в том или ином смысле) необходимо осуществить с помощью точных математических методов с применением компьютерной технологии. Эти точные математические методы составляют содержание предмета «Математическое программирование[1]». Более подходящим по смыслу названием было бы «Методы оптимизации», но не слишком удачно переведенный с английского[2] термин прочно вошел в обиход.

Математическое программирование – эта отрасль математики, которая является теоретической основой решения задач о нахождении оптимальных решений.

Нахождение оптимальных решений экономических задач можно разбить на следующие этапы:

1. Построение математической модели[3];
2. Нахождение оптимального метода одним из математических методов;
3. Практическое внедрение.

Построение математической модели состоит из такого функционального описания изучаемого экономического процесса математическими

---

[1] Этот термин не следует смешивать с термином «программирование», обозначающим составление программы, осуществляющей определенный вычислительный процесс на компьютере.

[2] Выражение «mathematic programming» лучше было бы перевести как «математическое планирование».

[3] Математическая модель – описание какого-либо класса явлений внешнего мира (в том числе, экономических явлений), выраженное с помощью математической символики.

соотношениями, которое отражала бы его сущность. Иными словами в математической модели должны учитываться существенные особенности задачи, а также ограничивающие условия, которые могут повлиять на результат.

Можно считать, что процесс построения математической модели любой задачи начинается с ответов на следующие вопросы [1].

I. Для определения каких величин должна быть построена модель, т.е. как идентифицировать переменные данной задачи ?

II. Какие ограничения должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы?

III. В чем состоит цель задачи, для достижения которой из всех допустимых переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи?

Следует отметить, что в экономической теории на первоначальном этапе ее развития редко использовались математические формулировки. Тем не менее многие классические доктрины экономики в словесной, завуалированной форме по существу содержали определенные математические утверждения; это иногда оставалось скрытым и от самих приверженцев таких доктрин. По мере развития экономической науки внутренне присущие ей математические черты постепенно проявлялись все сильнее. На более поздней стадии ее истории некоторые экономисты стали предлагать даже полную математизацию экономической теории. По-видимому, самым выдающимся представителем зарождавшегося математического направления в экономической теории был французский экономист Леон Вальрас. Именно он в конце XIX столетия заложил основы теории общего экономического равновесия [2]. Эта теория основана на том, что между соответствующими величинами в экономике существует не односторонняя причинно-следственная связь, а многосторонняя взаимозависимость, которую математически можно представить некоторой системой соотношений между этими величинами. Исследования Вальраса остаются блестящим примером математического подхода к экономическим явлениям. Большой его заслугой является ныне общепризнанная идея о возможности функционального описания экономических явлений системами уравнений, неравенств или и тех и других вместе.

Составными частями математического программирования является линейное, нелинейное (квадратичное, выпуклое и.т.д.), дискретное, динамическое и стохастическое программирования.

В общем случае, задачу математического программирования можно поставить следующим образом:

Пусть в R^n заданны функции $f(X), g_1(X), g_2(X), \dots, g_m(X)$ и $b_i \in R^1$.Требуется найти точку, $X^0 \in R^n$ удовлетворяющую условиям:

$$g_1(X) = b_1, g_2(X) = b_2, \dots, g_m(X) = b_m,$$

такую что

$$f\left(X^0\right)=\min_{\substack{g_i(X)=b_i,\\ i=\overline{1,m}}} f(X).$$

Кратко задачу математического программирования в общем случае можно записать так:

$$f(X)\to \min \tag{1}$$

$$g_i(X)=b_i, \quad i=1,2,...,m. \tag{2}$$

При этом система уравнений (2), определяющая допустимое множество (или множество планов) задачи, называется системой ограничений задачи математического программирования, а функция $f(X)$ называется целевой функцией, а также критерием качества.

Нетрудно понять, что задача математического программирования не всегда имеет решение.

Простое достаточное условие существования решения основано на теореме Вейерштрасса и состоит в следующем: если допустимое множество замкнуто, непустое и ограничено, а функция $f(X)$ на нем полу непрерывна снизу, то задача математического программирования имеет решение.

Замечание. Символ $f(X)\to \min$ в записи задачи математического программирования используется вместо слов «минимизировать функцию $f(X)$». Далее указываются ограничения, определяющие допустимое множество.

<u>ГЛАВА I</u>
ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

По Лейбницу наш мир является наилучшим из
всех возможных миров, и потому его законы
можно описать экстремальными принципами.
К.Зигель

Линейным программированием называют раздел математического программирования, в котором при формулировке задач используется только линейные функции.

§1. Примеры задач линейного програмирования

Линейное программирование первоначально возникло просто как задача максимизации (минимизации) линейной функции при ограничениях в форме линейных неравенств. Такая постановка появилась в связи с решением практических задач. Позднее это привело к разработке полезных алгоритмов численного нахождения решений, среди которых самым характерным и известным является симплексный метод Данцига. Однако с точки зрения экономической теории некоторые качественные аспекты линейного программирования, наряду с вычислительными аспектами, также оказываются интересными. Это обусловлено тем, что задача линейного программирования вместе с двойственной ей задачей имеет прямое отношение к проблемам распределения ресурсов и оценки производственных факторов. Линейное программирование позволяет дать компактное описание простейшей ситуации конкурентного равновесия.

Экономические приложения наиболее характерны для линейного программирования и поэтому ниже рассмотрим математические модели некоторых экономических задач.

1.1. Построение математических моделей некоторых экономических задач

Рассмотрим процесс построения математических моделей задач линейного программирования на примерах.

Пример 1.1. Определение оптимального ассортимента продукции. Предприятие изготавливает два вида продукции P_1 и P_2, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используется два вида сырья - A и B. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц, соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида P_1 и вида P_2 дан в таблице 1.

Таблица 1.

Сырье	Расход сырья на 1.ед.продукции P_1	Расход сырья на 1.ед.продукции P_2	Запас сырья, ед.
A	2	3	9
B	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию P_1 никогда не превышает спроса на продукцию P_2 более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию P_2 никогда не превышает 2 ед. в сутки.

Оптовые цены единицы продукции равны: 3 ден.ед. – для P_1 и 4 ден. ед. для P_2.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение. Ответы на вышеперечисленные вопросы (I, II, III п.1.1) могут быть сформулированы для данной задачи так: предприятию требуется определить объемы производства каждого вида продукции в тоннах, максимизирующие доход в д.е. от реализации продукции, с учетом ограничений на спрос и расход исходных продуктов.

Для построения математической модели остается только идентифицировать переменные и представить цель и ограничения в виде математических функций этих переменных.

Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции P_1 и x_2 единиц продукции P_2. Поскольку производство продукции P_1 и P_2 ограничено имеющимися в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{3}$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции P_1 и x_2 единиц продукции P_2 составит $f = 3x_1 + 4x_2$. Нас интересует максимальный доход, т.е.

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to \max. \tag{4}$$

Итак, (4)-(3) является математической моделью задачи об ассортименте продукции.

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция f принимает максимальное значение.

Пример 1.2. Задача использования сырья. Для изготовления двух видов продукции P_1, P_2 используют три вида сырья: S_1, S_2, S_3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, приведены в таблице 2. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при её реализации получить максимальную прибыль.

Обозначим через x_1 количество единиц продукции P_1, а через x_2 количество единиц продукции P_2.Тогда, учитывая количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также запасы сырья, получим систему ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \end{cases}$$

которая показывает, что количество сырья, расходуемое на изготовление продукции, не может превысить имеющихся запасов. Если продукция P_1 не выпускается, то $x_1 = 0$; в противном случае $x_1 > 0$. То же самое получаем и для продукции P_2. Таким образом, на неизвестные x_1 и x_2 должно быть наложено ограничение неотрицательности: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Таблица 2.

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	20	2	5
S_2	40	8	5
S_3	30	5	6
Прибыль от единицы продукции, (ден. единица)		50	40

Конечную цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции – выразим как функцию двух переменных x_1 и x_2. Реализация x_1 единиц продукции вида P_1 и x_2 единиц продукции вида P_2 даёт, соответственно, $50x_1$ и $40x_2$ (ден.ед) прибыли, суммарная прибыль $f=50x_1+40x_2$ (ден. ед.).

Условиями не оговорена неделимость единицы продукции, поэтому x_1 и x_2 (план выпуска продукции) могут быть и дробными числами, следовательно, задача имеет бесконечное множество вариантов планов (значение x_1 и x_2, которые удовлетворяют системе ограничений). Необходимо найти такие неотрицательные значения x_1 и x_2, при которых функция f достигает максимума, то есть найти максимальное значение линейной функции

$$f=50x_1+40x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2 \le 20, \\ 8x_1+5x_2 \le 40, \\ 5x_1+6x_2 \le 30, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Построенная линейная функция называется функцией цели и совместно с системой ограничений образуют математическую модель рассматриваемой экономической задачи.

Задачу использования сырья можно легко обобщить, если при выпуске n видов продукции используются m видов сырья. Обозначим через S_i (i=1, 2,…,m) виды сырья; b_i – запасы сырья i-го вида: P_j (j=1, 2,…,n) – виды продукции; a_{ij} – количество единиц i-го сырья, идущего на изготовление единицы j-й продукции; c_j – величину прибыли, получаемой при реализации единицы продукции. Условия задачи запишем в таблицу 3.

Таблица 3.

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц i- го сырья, идущих на изготовление единицы j-й продукции			
		P_1	P_2		P_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	……	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	……	a_{2n}
……	……	……	……	……	……
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mn}
Прибыль		c_1	c_2	……	c_n

Пусть x_j – количество единиц j-продукции, которое необходимо произвести. Тогда математическую модель задачи можно представить в следующем виде.

Найти максимальное значение линейной функции

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n$$

при ограничениях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1,$$
$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{mn} \le b_m,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\ldots,n;$$
$$b_i \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,m.$$

Рассматривая приведенную задачу и ее математическую модель, нетрудно заметить, что если потребовать, чтобы в процессе производства какое-то сырье использовалось полностью, то ограничение для этого сырья можно выразить в виде уравнения.

Таким образом, системы ограничений в зависимости от условий задачи могут содержать не только линейные неравенства, но и линейные уравнения.

Рассмотренные задачи относятся к разряду типовых задач оптимизации производственной программы предприятия. Критерий качества в этих задачах являются доход и прибыль. В качестве критериев оптимальности в этих задачах могут быть также использованы: себестоимость, номенклатура производимой продукции и затраты станочного времени и т.д.

Пример 1.3. Использование мощностей оборудования.

Предприятие имеет m моделей машин различных мощностей. Задан план по времени и номенклатуре: T — время работы каждой машины; продукции j-го вида должно быть выпущено не менее N_j -единиц.

Необходимо составить такой план работы оборудования, чтобы обеспечить минимальные затраты на производство, если известны производительность каждой i-й машины по выпуску j-го вида продукции b_{ij} и стоимость единицы времени, затрачиваемого i-й машиной на выпуск j-го вида продукции c_{ij}.

Другими словами, задача для предприятия состоит в следующем: требуется определить время работы i-й машины по выпуску j-го вида продукции x_{ij}, обеспечивающее минимальные затраты на производство при соблюдении ограничений по общему времени работы машин T и заданному количеству продукции N_j.

Задача решается на минимум затрат на производство:

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min .$$

По условию задачи машины работают заданное время T, поэтому данное ограничение можно представить в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = T, \quad i = 1,2,\ldots,m.$$

Ограничение по заданному количеству продукции выглядит следующим образом:

$$\sum_{i-1}^{m} b_{ij} x_{ij} \geq N_j, \qquad j = 1,2,...,n.$$

Необходимо также учесть неотрицательность переменных $x_{ij} \geq 0$.

Задача поставлена так, чтобы израсходовать все отведенное время работы машины, т. е. обеспечить полную загрузку машины. При этом количество выпускаемой продукции каждого вида должно быть по крайней мере не менее N_j. Однако в некоторых случаях не допускается превышение плана по номенклатуре, тогда ограничения математической модели изменяются следующим образом:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq T, \qquad i = 1,2,...,m.$$

$$\sum_{i-1}^{m} b_{ij} x_{ij} = N_j, \qquad j = 1,2,...,n.$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Пример 1.4. Минимизация дисбаланса на линии сборки.

Промышленная фирма производит изделие, представляющее собой сборку из m различных узлов. Эти узлы изготавливаются на n заводах.

Из-за различий в составе технологического оборудования производительность заводов по выпуску j-го узла неодинакова и равна b_{ij}. Каждый i-й завод располагает максимальным суммарным ресурсом времени в течение недели для производства т узлов, равного величине T_i.

Задача состоит в максимизации выпуска изделий, что по существу эквивалентно минимизации дисбаланса, возникающего вследствие некомплектности поставки по одному или по нескольким видам узлов.

В данной задаче требуется определить еженедельные затраты времени {в часах) на производство j-го узла на i-м заводе, не превышающие в сумме временные ресурсы i-го завода и обеспечивающие максимальный выпуск изделий.

Пусть x_{ij} - недельный фонд времени (в часах), выделяемый на заводе i для производства узла j. Тогда объемы производства узла/ будут следующими:

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_{ij}, \qquad j = 1,2,...,n.$$

Так как в конечной сборке каждый из комплектующих узлов представлен в одном экземпляре, количество конечных изделий должно быть равно количеству комплектующих узлов, объем производства, которых минимален:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_{ij}, \qquad j = 1,2,...,m \right).$$

Условие рассматриваемой задачи устанавливает ограничение на фонд времени, которым располагает завод i.

Таким образом, математическая модель может быть представлена и следующем виде.

$$f = \min\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}x_{ij}, \quad j = 1,2,...,m\right) \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le T_i, \quad i = 1,2,...,n\,;$$

$$x_{ij} \ge 0 \text{ для всех } i \text{ и } j\,.$$

Эта модель не является линейной, но ее можно привести к линейной форме с помощью простого преобразования. Пусть y — количество изделий:

$$y = \min\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}x_{ij} = N_j, \quad j = 1,2,...,m\right).$$

Этому выражению с математической точки зрения эквивалентна следующая формулировка: максимизировать $f = y$ при ограничениях

$$\sum_{i=11}^{n} b_{ij}x_{ij} - y \ge 0, \quad j = 1,2,...,m;$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le T_i, \quad i = 1,2,...,n\,;$$

$$x_{ij} \ge 0 \text{ для всех } i \text{ и } j\,;\; y \ge 0\,.$$

Пример 1.5. Задача составления кормовой смеси, или задача о диете [3].

Пусть крупная фирма имеет возможность покупать m различных видов сырья и приготавливать различные виды смесей (продуктов). Каждый вид сырья содержит разное количество питательных компонентов (ингредиентов).

Лабораторией фирмы установлено, что продукция должна удовлетворять по крайней мере некоторым минимальным требованиям с точки зрения питательности (полезности). Перед руководством фирмы стоит задача определить количество каждого i-го сырья, образующего смесь минимальной стоимости при соблюдении требований к общему расходу смеси и ее питательности.

Введем условные обозначения:

x_i - количество i-го сырья в смеси;

m - количество видов сырья;

n - количество ингредиентов в сырье;

a_{ij} - количество ингредиента j, содержащегося в единице i-го вида сырья;

b_j - минимальное количество ингредиента j, содержащегося в единице смеси;

c_j - стоимость единицы сырья i;

q - минимальный общий вес смеси, используемый фирмой.

Задача может быть представлена в виде

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \min$$

при следующих ограничениях:
на общий расход смеси:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \ge q;$$

на питательность смеси:

$$\sum a_{ij} x_i \ge b_j \sum_{i=1}^{m} x_i, \quad j = 1,2,...,n;$$

на неотрицательность переменных:

$$x_i \ge 0, \quad i = 1,2,...,m.$$

Пример 1.6. Задача составления жидких смесей. Еще один класс моделей, аналогичных рассмотренным выше, возникает при решении экономической проблемы, связанной с изготовлением смесей различных жидкостей с целью получения пользующихся спросом готовых продуктов.

Представим себе фирму, торгующую различного рода химическими продуктами, каждый из которых является смесью нескольких компонентов. Предположим, что эта фирма планирует изготовление смесей m-видов. Обозначим подлежащее определению количество литров i-го химического компонента, используемого для получения j-го продукта через x_{ij}. Будем предполагать, что

$$x_i \ge 0, \quad j = 1,2,...,n, \quad i = 1,2,...,m$$

Первая группа ограничений относится к объемам потребляемых химических компонентов:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le S_i, \qquad i = 1,2,...,n,$$

где S_i - объем i-го химического компонента, которым располагает фирма в начале планируемого периода.

Вторая группа ограничений отражает требование, заключающееся в том, чтобы запланированный выпуск продукции хотя бы в минимальной степени удовлетворял имеющийся спрос на каждый из химических продуктов, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge D_j, \qquad j = 1,2,...,m,$$

где D_j - минимальный спрос на продукцию j в течение планируемого периода.

Третья группа ограничений связана с технологическими особенностями, которые необходимо принимать во внимание при приготовлении смеси, например, простое ограничение, определяемое некоторыми минимально допустимыми значениями, отношения между объемами двух химических компонентов в процессе получения продукта j:

$$\frac{x_{ij}}{x_{i+1jj}} \geq r \text{ или } x_{ij} - rx_{i+1j} \geq 0,$$

где r - некоторая заданная константа.

Обозначив через P_{ij} доход с единицы продукции x_{ij}, запишем целевую функцию:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij}x_{ij} \to \max.$$

Пример 1.7. Задача о раскрое или о минимизации обрезков.

Данная задача состоит в разработке таких технологических планов раскроя, при которых получается необходимый комплекс заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму.

Например, продукция бумажной фирмы выпускается в виде бумажных рулонов стандартной ширины L. По специальным заказам потребителей фирма поставляет рулоны других размеров, для этого производится разрезание стандартных рулонов. Типичные заказы на рулоны нестандартных размеров могут включать m видов шириной l_i, $i = 1,2,...,m$. Известна потребность в нестандартных рулонах каждого вида, она равна b_i. Возможны n различных вариантов построения технологической карты раскроя рулонов стандартной ширины L на рулоны длиной l_i.

Обозначим через a_{ij} количество рулонов i- го вида, получаемых при раскрое единицы стандартного рулона по j- му варианту. При каждом варианте раскроя на каждый стандартный рулон возможны потери, равные P_j. К потерям следует относить также избыточные рулоны нестандартной длины l_i, получаемые при различных вариантах раскроя y_{ij}, $j = 1,2,...,n$.

В качестве переменных следует идентифицировать количество стандартных рулонов, которые должны быть разрезаны при j-м варианте раскроя. Определим переменную следующим образом: x_j- количество стандартных рулонов, разрезаемых по варианту j, $j = 1,2,...,n$.

Целевая функция — минимум отходов при раскрое

$$f = \left(\sum_{j=1}^{n} P_j x_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right) \to \min.$$

Ограничение на удовлетворение спроса потребителя

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{n} y_{ij}, \quad x_j \geq 0, \quad y_{ij} \geq 0.$$

Пример 1.8. Многосторонний коммерческий арбитраж[1].

В сфере деятельности, связанной с валютными и биржевыми операциями, а также коммерческими сделками контрактного характера, возможны различного рода трансакции, позволяющие извлекать прибыль на разнице в курсе валют. Такого рода трансакции называются коммерческим арбитражем.

Представим себе коммерсанта (условно назовем его N), имеющего возможность реализовать многосторонний коммерческий арбитраж. Предположим, что число валютных рынков, вовлеченных в трансакционную деятельность коммерсанта N, равняется шести, а максимальное число возможных трансакций равняется девяти. Подробные данные, характеризующие рассматриваемую задачу, приведены в табл.4.

Таблица 4

Валютный номинал	Тип трансакции									Возмож-ность рынка
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
I	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	-1	-1			≥ 0
II	-1					r_{26}			r_{29}	≥ 0
III		-1					r_{37}	r_{38}		≥ 0
IV			-1					-1		≥ 0
V				-1				r_{58}		≥ 0
VI					-1		r_{67}		-1	≥ 0
Размер трансакции	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	

При трансакции x_1 продажа единицы валютного номинала (ценных бумаг) II позволяет приобрести r_{11}, единиц валютного номинала I. При трансакции x_7 взамен единицы валютного номинала I можно получить r_{37} единиц валютного номинала III и r_{67} единиц валютного номинала VI. Остальные трансакции расшифровываются аналогично. Значения r_{ij} могут быть дробными. Заметим, что при любой трансакции x_i, $i = 1,2,3,4,5$ каждый из валютных номиналов можно обменять на валютный номинал I. Следует обратить внимание на правило выбора знака перед показателями в табл.4. Чтобы отличать куплю от продажи, будем, соответственно, использовать знаки «плюс» и «минус» перед показателями, характеризующими данную трансакцию.

Рассмотрим идеализированный случай, когда все трансакции коммерсанта N выполняются одновременно. Ограничения определяются единственным требованием — трансакция возможна лишь при условии, если коммерсант N располагает наличными ценными бумагами. Другими словами, количество проданных ценных бумаг не должно превышать количество приобретенных. Данные ограничения имеют вид

$$r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + r_{14}x_4 + r_{15}x_5 - x_6 - x_7 \ge 0;$$

$$-x_1 + r_{26}x_6 + r_{29}x_9 \ge 0;$$

$$-x_2 + r_{37}x_7 + r_{38}x_8 \ge 0;$$

$$-x_3 - x_8 + r_{29}x_9 \ge 0;$$

$$-x_4 + r_{58}x_8 \ge 0;$$

$$-x_5 + r_{67}x_7 - x_9 \ge 0;$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\dots,9.$$

Пусть целевая функция представляет собой чистый доход, выраженный в единицах валютного номинала I, т.е. задача состоит в том, чтобы

$$f = r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + r_{14}x_4 + r_{15}x_5 - x_6 - x_7 \to \max.$$

1.2. Заключительное замечание

Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to extr$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_{m,}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0,$$

то есть имеем задачу отыскания наибольших и наименьших значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Таким образом, задачи линейного программирования относятся к задачам на условный экстремум функции.

Казалось бы, что для исследования линейной функции многих переменных на условный экстремум достаточно применить хорошо разработанные методы математического анализа, однако невозможность их использования можно довольно просто проиллюстрировать.

Так как f – линейная функция, то $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = c_j$, $(j = 1,2,\dots,n)$, но все коэффициенты линейной функции не могут быть равны нулю, следовательно, внутри области, образованной системой ограничений экстремальные точки не существуют. Они могут быть на границе области, но исследовать точки границы невозможно, поскольку частные производные являются константами. Для решения задачи линейного программирования созданы специальные методы.

§2. Общая задача линейного программирования

Алгебра щедра. Зачастую она дает больше, чем у нее спрашивают.
Даламбер

2.1.Задача в нормальной и канонической формах

Определение 1. Задачей линейного программирования в нормальной форме называется следующая задача:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = 1,2,...,n) \ , \tag{3}$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины. Соотношения (1)-(3) представляют координатную запись задачи.

Как отмечалось ранее (§1), в системе ограничений (2) все b_i, $(i = 1,2,..,m)$ можно считать неотрицательными.

Если ввести векторы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, \ C = (c_1, c_2, ..., c_n),$$

то можно привести векторную запись задачи (1)-(3).

Векторная запись

$$f = CX \to \max ,$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n \le A_0, \qquad X \ge 0.$$

Формулировка задачи становится более компактной, если ввести матрицу $A = (a_{ij}), \ i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}$. В этом случае задачу (1)-(3) можно записать в матричной форме.

Матричная запись

$$f = CX \to \max$$

$$AX \le A_0, \qquad X \ge 0 .$$

Приведем еще одну форму записи задачи (1)-(3).

Запись с помощью знаков суммирования

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i = 1,2,...,m; \quad x_j \ge 0, \quad j = 1,2,...,n.$$

Матрица A называется матрицей условий.

Наряду с нормальной формой задачи линейного программирования широкое распространение получила каноническая форма.

Определение 2. Задачей линейного программирования в канонической форме называется следующая задача (в матричной записи):

$$f = CX \to \max,$$

$$AX = A_0, \quad X \ge 0.$$

Таким образом, две формы задачи линейного программирования отличаются лишь типом основных ограничений: в нормальной форме ограничения заданы неравенствами, в канонической они имеют вид равенств.

Отметим, что ограничения типа неравенств можно свести введением дополнительных переменных к ограничениям типа равенств.

Лемма 2.1. Каждая задача на максимум типа неравенств (1)-(3) эквивалентна задаче с ограничениями типа равенств

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1,2,...,m, \tag{5}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,...,n,n+1,...,n+m. \tag{6}$$

Переменные x_{n+i}, $i = \overline{1,m}$, в задаче (1)-(3) называются дополнительными переменными. Покажем, что точка X^0 будет решением задачи (1)-(3) тогда и только тогда, если

$$X_0, \quad x_{n+1}^0 = -\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j^0 + b_1 \quad ,..., \quad x_{n+m}^0 = -\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j^0 + b_m \tag{7}$$

будет решением задачи (4)-(6).

Доказательство. Пусть X^0 решение задачи (1)-(3), но точка (7) не является решением задачи (4)-(6), т.е. для точки ($\overline{X}$, $\overline{x}_{n+1}$,..., $\overline{x}_{n+m}$)

$$f(\overline{X}) > f(X^0),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j + \overline{x}_{n+j} = b_i, \quad i = 1,2,...m,$$

$$\overline{x}_j \ge 0, \quad j = 1,2,...,n,n+1,...,n+m.$$

Таким образом,

$$f(\overline{X}) > f(X^0),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j - b_i = -\overline{x}_{n+i} \le 0, \quad i = 1,2,...,m,$$

т.е.

$$f(\overline{X}) > f(X^0),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j \le b_i, \quad i = 1,2,...,m,$$

$$\bar{x}_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,n,$$

что противоречит определению точки X^0. Пусть, наоборот, точка $\left(X^0, \ x_{n+1}^0 \ ,..., \ x_{n+m}^0\right)$ - решение задачи (4)-(6), но вектор X^0 не есть решение задачи (1)-(3), т.е. существует вектор X^* такой, что

$$f(X^*) > f\left(X^0\right), \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \leq b_i, \quad i = 1,2,...,m, \tag{9}$$

$$x_j^* \geq 0, \quad j = 1,2,...,n. \tag{10}$$

Дополним вектор X^* координатами $x_{n+1}^* = -\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j^* + b_1 \ ,..., \ x_{n+m}^* = -\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j^* + b_m$. Очевидно, что $x_{n+1}^* \geq 0 \ ,..., \ x_{n+m}^* \geq 0$. Тогда для $(n+m)$-мерного вектора $\left(X^*, \ x_{n+1}^* \ ,..., \ x_{n+m}^*\right)$ и для (8)-(10)

$$f(X^*) > f\left(X^0\right),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* + x_{n+i}^* = b_i, \quad i = 1,2,...,m,$$

$$x_j^* \geq 0, \quad j = 1,2,...,n, n+1,...,n+m,$$

что противоречит предположению о том, что $\left(X^0, \ x_{n+1}^0 \ ,..., \ x_{n+m}^0\right)$ - решение задачи (4)-(6). Лемма доказана.

Таким образом, ограничения типа неравенств можно свести введением дополнительных переменных к ограничениям типа равенств. С другой стороны, каждое ограничение типа равенства $AX = A_0$ можно записать в виде двух ограничений типа неравенств $AX \leq A_0, \ -AX \leq -A_0$. Поэтому задачи в нормальной и канонической формах эквивалентны между собой (с точностью до размерностей n и m).

2.2. Основные определения

В предыдущем пункте было показано, что систему ограничений любой задачи линейного программирования можно привести к системе m линейных уравнений с n неизвестными; значения переменных x_j, $(j = 1,2,...,n)$, при которых линейная функция достигает максимального значения. Следует заметить, что там, где необходимо найти минимальное значение линейной функции, достаточно заменить на противоположный знак линейной функции и найти максимальное значение последней функции. Заменяя, на противоположный знак полученного максимального значения, определяем минимальное значение исходной линейной функции. Аналогичным образом, любую задачу максимизации можно свести к задаче минимизации.

Поэтому общую задачу линейного программирования можно определить следующим образом:

Определение 3. Общей задачей линейного программирования называется следующая задача:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \min \tag{11}$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m,
\end{cases} \tag{12}
$$

$$
x_j \geq 0, \quad (j = 1,2,...,n) , \tag{13}
$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины.

Векторная запись общей задачи линейного программирования имеет вид:

$$
f = CX \to \min \tag{14}
$$

$$
A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = A_0, \quad X \geq 0. \tag{15}
$$

Таким образом, общая задача линейного программирования означает следующее: найти такие неотрицательные значения $x_1, x_2,..., x_n$, которые удовлетворяют системе ограничений (12) и доставляют линейной функции (11) минимальное значение.

Как отмечалось ранее, в системе ограничений (12) все b_i, $(i = 1,2,..,m)$ можно считать неотрицательными.

Определение 4. Планом или допустимым решением задачи линейного программирования называется вектор $X = (x_1, x_2,..., x_n)$, удовлетворяющий условиям (12) и (13).

Определение 5. План $X = (x_1, x_2,..., x_n)$ называется опорным, если векторы A_I $(i = 1,2,...,m)$, входящие в разложение (15) с положительными коэффициентами x_i, являются линейно независимыми.

Так как векторы A_I являются m- мерными, то из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может превышать m.

Определение 6. Опорный план называется невырожденным, если он содержит m положительных, компонент, в противном случае опорный план называется вырожденным.

Определение 7. Оптимальным планом или оптимальным решением задачи линейного программирования называется план, доставляющий наименьшее (наибольшее) значение линейной функции.

Свойства решений задачи линейного программирования тесно связаны со свойствами выпуклых множеств.

2.3. Выпуклые множества

Здесь приведем основные сведения о выпуклых множествах.

Пусть на плоскости R^2 заданы две точки: $A_1(x_1^1, x_2^1)$ и $A_2 = (x_1^2, x_2^2)$. определяющие прямолинейный направленный отрезок $\overline{A_1A_2}$.

Точка A, для которой выполняются условие

$$
A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \tag{16}
$$

$$
\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \tag{17}
$$

называется выпуклой линейной комбинацией точек A_1 и A_2. При $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$ точка A совпадает с концом отрезка A_1 и при $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$ с концом отрезка A_2. Точки A_1 и A_2 называются угловыми или крайними точками отрезка $\overline{A_1 A_2}$.

Из определения выпуклой линейной комбинации точек, очевидно, что угловая точка не может быть представлена как выпуклая линейная комбинация двух других точек отрезка. Соотношения (16) и (17) верны независимо от размерности пространства.

Пусть имеется n точек $A_1, A_2, ..., A_n$. Точка A-выпуклая линейная комбинация, если выполняется условия

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_n A_n,$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (j = 1,2,...,n), \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$$

Множество точек называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию. Геометрический смысл этого определения состоит в том, что множеству вместе с его двумя произвольными точками полностью принадлежит и прямолинейный отрезок, их соединяющий. Примерами выпуклых множеств служат прямолинейный отрезок, прямая, полуплоскость, круг, шар, куб, полупространство и др.

Угловыми точками выпуклого множества называются точки, не являющиеся выпуклой комбинацией двух различных точек множества. Например, угловыми точками треугольника являются его вершины, угловыми точками круга-точки окружности, которая его ограничивает. Таким образом, выпуклое множество может иметь конечное и бесконечное число угловых точек. Прямая, плоскость, полуплоскость, пространство, полупространство угловых точек не имеют.

Выпуклым многоугольником называется выпуклое замкнутое ограниченное множество на плоскости, имеющее конечное число угловых точек. Угловые точки многоугольника называются его вершинами, а отрезки, соединяющие две вершины и образующие его границу,- сторонами многоугольника. Опорной прямой выпуклого многоугольника называется прямая, имеющая с многоугольником по одну сторону от нее, хотя бы одну общую точку.

Выпуклым многогранником называется выпуклое замкнутое ограниченное множество трехмерного пространства, имеющее конечное число угловых точек. Угловые точки многогранника называются его вершинами; многоугольники, ограничивающие многогранник, - гранями; отрезки по которым они пересекаются, - ребрами. Опорной плоскостью многогранника называется плоскость, имеющая с многогранником, расположенным по одну от нее, хотя бы одну общую точку.

Теорема 2.1 (теорема Крейна - Мильмана). Замкнутый, ограниченный, выпуклый многогранник является выпуклой линейной комбинацией своих угловых точек.

Доказательство. Рассмотрим многоугольник, имеющий n вершин. Сначала докажем, что любая точка треугольника удовлетворяет теореме. В треугольнике $A_1A_2A_3$ (рис.2.1)

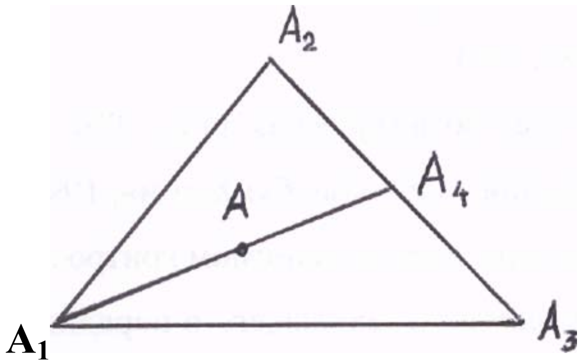

Рис.2.1

возьмем произвольную точку A и через нее проведем отрезок $\overline{A_1A_4}$. Так как A принадлежит отрезку $\overline{A_1A_4}$, то она- выпуклая линейная комбинация его концов, т.е.

$$A = t_1A_1 + t_4A_4, t_1 \geq 0, t_4 \geq 0, t_1 + t_2 = 1. \tag{8}$$

Точка A_4 принадлежит отрезку $\overline{A_2A_3}$, следовательно, является выпуклой линейной комбинацией его концов, т.е.

$$A_4 = t_2A_2 + t_3A_3, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0, t_2 + t_3 = 1. \tag{9}$$

Поставляя (9) в (8), получаем

$$A = t_1A_1 + t_4(t_2A_2 + t_3A_3) = t_1A_1 + t_2t_4A_2 + t_3t_4A_3.$$

Полагая $t_1 = \lambda_1, \quad t_2t_4 = \lambda_2, \quad t_3t_4 = \lambda_3$, окончательно имеем

$$A = \lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3,$$
$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

т.е. A - выпуклая линейная комбинация вершин A_1, A_2, A_3. Если положить, например, $\lambda_1 = 0$, то это означает, что точка A совпадает с точкой A_4 и лежит на стороне $\overline{A_2A_3}$. В этом случае выпуклая линейная комбинация для точки имеет вид

$$A = 0 \cdot A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3 = \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3,$$
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

В выпуклом многоугольнике, имеющем n вершин $(n > 3)$, возьмем произвольную точку A. С помощью диагоналей, проведенных из одной вершины, разобьем многоугольник на $n-2$ треугольников; тогда точка A попадает в один из них. Без ограничения общности можно положить, что она попала в треугольник $A_1A_2A_3$. Тогда, как уже доказано, точка A- выпуклая линейная комбинация трех вершин: $A = \lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3$. Добавляя к правой части этого соотношения остальные $n-3$ вершины, умноженные на нуль, окончательно получаем

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + 0 \cdot A_4 + ... + 0 \cdot A_n,$$

$$\lambda_j \ge 0 \qquad (j = 1,2,...,n), \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,$$

т.е. точка A - выпуклая линейная комбинация угловых точек многоугольника.

2.4. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования, система ограничений которой задана в виде неравенств.

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \min \tag{18}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{19}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = 1,2,...,n). \tag{20}$$

Совокупность чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющих ограничениям (19)-(20) называется решением. Если система (19) при условии (20) имеет хотя бы одно решение, она называется совместной, в противном случае - несовместное.

Рассмотрим на плоскости R^2 совместную систему линейных неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Это все равно, что в системе (19)-(20) положить $n = 2$. Каждое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \quad (i = 1,2,...,m)$. Условия неотрицательности определяют полуплоскости, соответственно, с граничными прямыми $x_1 = 0, \quad x_2 = 0$. Система совместна, поэтому полуплоскости, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют общую часть, которая является выпуклым множеством и представляет собой совокупность точек, координаты каждой из которых являются решением данной системы (рис.2.2).

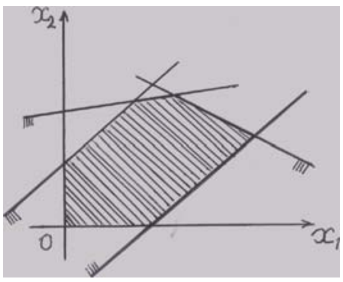

Рис.2.2

Совокупность этих точек (решений) назовем многоугольником решений. Он может быть точкой, отрезком, лучом, многоугольником, неограниченной многоугольной областью.

Если в системе ограничений (19)-(20) $n = 3$, то каждое неравенство геометрически представляет полупространство трехмерного пространства, граничная плоскость которого $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i \quad (i = 1,2,...,m)$, а условия неотрицательности – полупространства с граничными плоскостями, соответственно, $x_j = 0 \quad (j = 1,2,3)$. Если система ограничений совместна, то эти полупространства, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют в трехмерном пространстве R^3 общую часть, которая называется многогранником решений. Многогранник решений может быть точкой, отрезком, лучом, многоугольником, многогранником, многогранной неограниченной областью.

Пусть в системе ограничений (19)-(20) $n > 3$; тогда каждое неравенство определяет полупространство пространства R^n с граничной гиперплоскостью $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i, \quad (i = 1,2,..,m)$, а условия неотрицательности– полупространства с граничными гиперплоскостями $x_j = 0 \quad (j = 1,2,...,n)$.

Если система ограничений совместна, то по аналогии с R^3 пространством она образует общую часть пространства R^n,называемую многогранником решений, так как координаты каждой его точки являются решением.

Таким образом, геометрически задача линейного программирования представляет собой отыскание такой точки многогранника решений, координаты которой доставляет линейной функции минимальное значение, причем допустимыми решениями служат все точки многогранника решений.

2.5. Свойства решений задачи линейного программирования

Теорема 2.2. Множество всех планов задачи линейного программирования выпукло (если оно не пусто).

Доказательство. Необходимо доказать, что если X_1 и X_2- планы задачи линейного программирования (1)-(3), то их выпуклая линейная комбинация $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ также план задачи.

Так как X_1 и X_2- планы задачи, то выполняются соотношения

$$AX_1 = A_0, \quad X_1 \geq 0; \qquad AX_2 = A_0, \quad X_2 \geq 0$$

Перемножая

$$AX = A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 AX_1 + \lambda_2 AX_2 = \lambda_1 A_0 + \lambda_2 A_0 (\lambda_1 + \lambda_2) A_0 = A_0,$$

получаем, что X удовлетворяет системе (2). Но так как $X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$; $\lambda_1 \geq 0; \quad \lambda_2 \geq 0$, то $X \geq 0$, т.е. удовлетворяет и условию (3). Таким образом X-план задачи линейного программирования.

Теорема 2.3. Линейная функция задачи линейного программирования достигает своего минимального значения в угловой точке многогранника решений. Если линейная функция принимает минимальное значение более чем водной угловой точке, то она достигает того же значения в любой точке являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.

Доказательство. Предположим, что многогранник решений ограниченный, имеющий конечное число угловых чисел. Обозначим его через K. В двумерном пространстве K имеет вид многоугольника изображенного на рис.2.3.

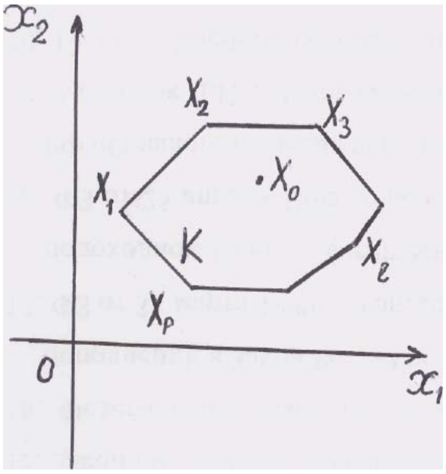

Рис.2.3

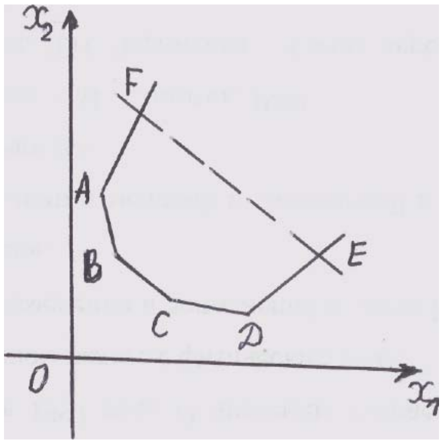

Рис.2.4

Обозначим угловые точки K через $X_1, X_2, ..., X_p$, а оптимальный план через X_0. Тогда $f(X_0) \le f(X)$ для всех $X \in K$. Если X_0-угловая точка, то первая часть теоремы доказана. Предположим, что X_0 не является угловой точкой; тогда X_0 на основании теоремы 1 можно представить как выпуклую линейную комбинацию угловых точек K, т.е.

$$X_0 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_p X_p$$

$$\lambda_j \ge 0 \quad (j = 1,2,..., p), \quad \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1.$$

Так как $f(X)$ линейная функция, получаем

$$f(X_0) = f(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_p X_p) = \lambda_1 f(X_1)_1 + \lambda_2 f(X_2) + ... + \lambda_p f(X_p). \tag{10}$$

В этом разложении среди значений $f(X_j)$ $(j = 1,2,..., p)$ выберем наименьшее (пусть оно соответствует точке X_k $(1 \le k \le p)$) и обозначим его через m, т.е. $f(X_k) = m$. Заменим в (10) каждое значение $f(X_j)$ этим наименьшим значением. Тогда, так как $\lambda_j \ge 0,\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, то

$$f(X_0) = \lambda_1 m + \lambda_2 m + ... + \lambda_p m = m \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = m.$$

По предположению, X_0-оптимальный план, поэтому, с одной стороны, $f(X_0) \le m$, но, с другой стороны, доказано, что $f(X_0) \ge m$, значит, $f(X_0) = m = f(X_k)$, где X_k-

угловая точка. Итак, существует угловая точка X_k, в которой линейная функция принимает минимальное значение.

Для доказательства второй части теоремы допустим, что $f(X)$ принимает минимальное значение более чем в одной угловой точке, например, в точках $X_1, X_2, ..., X_q$, $1 < q \le p$; тогда $f(X_1) = f(X_2) = ... = f(X_q) = m$. Если X - выпуклая линейная комбинация этих угловых точек:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... \lambda_q X_q,$$

$$\lambda_j \ge 0, \quad \sum_{j=1}^{q} \lambda_j = 1,$$

то

$$f(X) = f(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_q X_q) = \lambda_1 f(X_1) + \lambda_2 f(X_2 + ... + \lambda_q f(X_q)) = m \sum_{j=1}^{q} \lambda_j = m,$$

т.е. линейная функция f принимает минимальное значение в произвольной точке X, являющейся выпуклой линейной комбинацией угловых точек $X_1, X_2, ..., X_q$.

Замечание. Если многогранник решений – неограниченная область, то не каждую точку области можно представить выпуклой линейной комбинацией угловых точек области. В этом случае задачу линейного программирования с многогранником решений, представляющим собой неограниченную область, можно привести к задаче с ограниченной областью, вводя в систему дополнительное ограничение $x_1 + x_2 + ... + x_n \le Q$, где Q- достаточно большое число. Введение этого ограничения равносильно отсечению гиперплоскостью $x_1 + x_2 + ... + x_n = Q$ (рис.2.4) от многогранной неограниченной области ограниченного многогранника, для точек которого теорема 2.3 уже выполняется.

Очевидно, что координаты угловых точек E и F, появившихся в результате введения нового ограничения, зависят от Q. Если в одной из них линейная функция принимает минимальное значение, то оно зависит от Q; изменяя Q, значения линейной функции можно сделать сколь угодно малым, а это означает, что линейная функция не ограничена на многограннике решений.

Теорема 2.4. Если известно, что система векторов $A_1, A_2, ..., A_k$ $(k \le n)$ в разложении (15) линейно независима и такова, что

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_k x_k = A_0,$$

где все $x_j \ge 0$, то точка $X = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0)$ является угловой точкой многогранника решений.

Здесь $X - n$-мерный вектор, последние $n-k$ компонент которого равны нулю.

Доказательство. Предположим, что точка X не является угловой. Тогда она может быть представлена как выпуклая линейная комбинация двух других точек X_1 и X_2 многогранника решений, т.е.

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \quad \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Компоненты векторов X_1 и X_2, значения λ_1 и λ_2 неотрицательны и последние $n-k$ компонент вектора X равны нулю, поэтому соответствующие $n-k$ компонент векторов X_1 и X_2 также должны быть равны нулю, т.е.

$$X_1 = \left(x_1^1, x_2^1, ..., x_k^1, 0, ..., 0\right),$$
$$X_2 = \left(x_1^2, x_2^2, ..., x_k^2, 0, ..., 0\right).$$

Поскольку X_1 и X_2 -планы, то

$$A_1 x_1^1 + A_2 x_2^1 + ... + A_k x_k^1 = A_0,$$
$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + ... + A_k x_k^2 = A_0.$$

Вычитая из первого соотношения второе, получаем

$$\left(x_1^1 - x_1^2\right)A_1 + \left(x_2^1 - x_2^2\right)A_2 + ... + \left(x_k^1 - x_k^2\right)A_k = \Theta .$$

По предположению, векторы $A_1, A_2, ..., A_k$ линейно независимы, поэтому последнее соотношение выполняется, если

$$x_1^1 - x_1^2 = x_2^1 - x_2^2 = ... = x_k^1 - x_k^2 = 0.$$

Отсюда

$$x_1^1 = x_1^2; \quad x_2^1 = x_2^2; ...; x_k^1 = x_k^2.$$

Итак, X невозможно представить как выпуклую линейную комбинацию других двух точек многогранника решений. Следовательно, X -угловая точка.

Теорема 2.5. Если $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ - угловая точка многогранника решений, то векторы в разложении (15), соответствующие положительным x_i являются линейно независимыми.

Доказательство самостоятельно.

Следствие 1.Так как векторы $A_1, A_2, ..., A_n$ имеют размерность m, то угловая точка многогранника решений имеет не более чем m положительных компонент $x_i > 0, \quad (i = 1, 2, ..., m)$.

Следствие 2. Каждой угловой точке многогранника решений соответствует $k \le m$ линейно независимых векторов системы $A_1, A_2, ..., A_n$.

Не теряя общности, можно предположить, что система векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ задачи линейного программирования (11)-(13) всегда содержит m линейно независимых векторов. Если при решении частной задачи это свойство не очевидно, то первоначальную систему векторов дополняют m линейно независимыми векторами, затем находят решение расширенной задачи.

Итак, если задача линейного программирования ограничена на многограннике решений, то:

1)существует такая угловая точка многогранника решений, в которой линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимума;

2)каждый опорный план соответствует угловой точке многогранника решений. Поэтому для решения задачи линейного программирования необходимо исследовать угловые точки многогранника решений, т.е. только опорные планы.

§3. Графический метод решения задачи линейного программирования

В предыдущем параграфе была сформулирована основная задача линейного программирования. Там же были указаны приемы (п.1.§2), которые позволяют различные типы задач свести к основной задаче. Для решения основной задачи разработаны различные методы. Эти методы носят аналитический (вычислительный) характер. Некоторые из них будут нами рассмотрены в дальнейшем.

В этом параграфе мы остановимся на графическом методе решения задачи линейного программирования.

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования (п.4.§2) и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трехмерного пространства, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Задачу пространства размерности больше трех изобразить графически невозможно.

Поэтому графический метод имеет такие узкие рамки применения, что о нем как об особом методе решения задач линейного программирования нельзя.

Однако для выработки наглядных представлений о задачах линейного программирования графический метод представляет определенный интерес. Кроме того, он позволяет геометрически подтвердить справедливость теорем, доказанных в предыдущем параграфе.

3.1. Графический метод

Пусть задача линейного пространства задана в двумерном пространстве R^2, т.е.ограничения содержат две переменные:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{3}$$

Допустим, что система (2) при условии (3) совместна и ее многоугольник решений ограничен. Каждое из неравенств (2) и (3) как отмечалось в п. 2.1 определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \quad (i = 1,2,...,m)$, $x_1 = 0, \quad x_2 = 0$. Линейная функция (1) при фиксированных значениях f является уравнением прямой линии: $c_1x_1 + c_2x_2 = const$. Построим многоугольник решений системы ограничений (2)-(3) и график линейной функции (1) при $f = 0$ (рис.3.1). Тогда поставленной задаче линейного программирования можно дать следующую интерпретацию. Найти точку многоугольника решений, в которой прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ - опорная и функция f при этом достигает минимума.

Значение $f = c_1x_1 + c_2x_2$ возрастает в направлении градиента $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2)$ линейной функции f, поэтому прямую $f = 0$ передвигаем параллельно самой себе в направлении вектора ∇f. Из рис.3.1 следует, что прямая дважды становится опорной по отношению к многоугольнику решений (в точках *A* и *C)*, причем минимальное значение принимает в точке *A*. Координаты точки $A(x_1, x_2)$ находим, решая систему уравнений прямых *AB* и *AE*.

Если многоугольник решений представляет собой неограниченную область, то возможны два случая.

Случай 1.Прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, передвигаясь в направлении вектора ∇f или противоположно ему, постоянно пересекает многоугольник решений и ни в какой точке не является опорной к нему. В этом случае линейная функция не ограничена на многоугольнике решений как сверху, так и снизу (рис.3.2).

Случай 2.Прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, передвигаясь, все же становится опорной относительно многоугольника решений (рис.3.3) Тогда в зависимости от вида области линейная функция может быть ограниченной сверху и неограниченной снизу (рис.3.3, а), ограниченной снизу и не ограниченной сверху (рис. 3.3, б), либо ограниченной как снизу, так и сверху (рис.3.3, в).

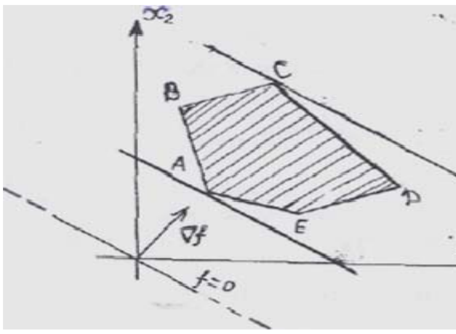

Рис.3.1

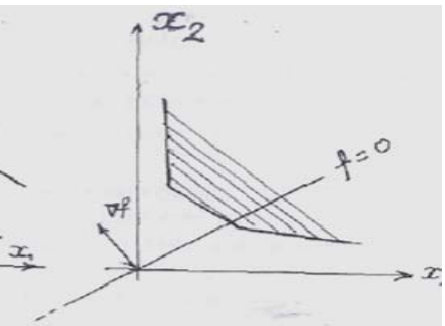

Рис.3.2

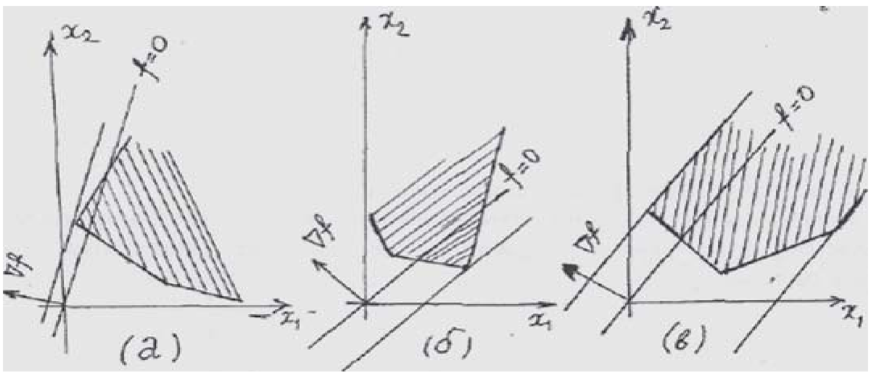

Рис.3.3

3.2. Примеры задач, решаемых графическим методом

Решим графическим методом некоторые простейшие экономические задачи из §1.

1.Определение оптимального ассортимента продукции. Предприятие изготавливает два вида продукции P_1 и P_2, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используется два вида сырья - A и B. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида P_1 и вида P_2 дан в таблице 1.

Таблица 1.

Сырье	Расход сырья на 1.ед.продукции P_1	Расход сырья на 1.ед.продукции P_2	Запас сырья, ед.
A	2	3	9
B	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию P_1 никогда не превышает спроса на продукцию P_2 более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию P_2 никогда не превышает 2 ед. в сутки.

Оптовые цены единицы продукции равны: 3 ден.ед. – для P_1 и 4 ден. ед. для P_2.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение. Нами в п.2.§1 была построена математическая модель задачи. Математическая модель задачи об ассортименте продукции имеет вид:

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Эту задачу решим графическим методом.

Построим многоугольник решений (рис.3.4). Для этого на плоскости R^2, где введена прямоугольная декартовая система координат, изобразим граничные прямые

$$2x_1 + 3x_2 = 9 \qquad (L_1,)$$

$$3x_1 + 2x_2 = 13 \qquad (L_2),$$

$$x_1 - x_2 = 1 \qquad (L_3),$$

$$x_2 = 2 \qquad (L_4).$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.,$$

и установим, какую полуплоскость определяет каждое неравенство относительно граничной прямой. В результате получим многоугольник *OABCD*.

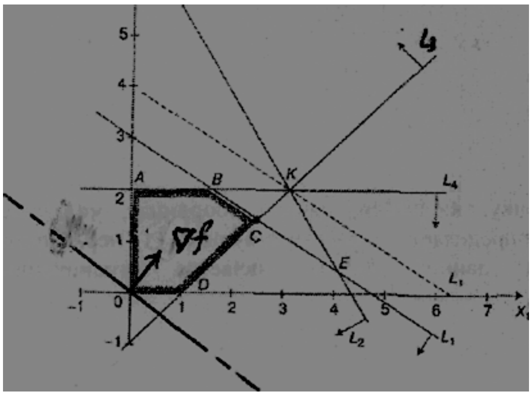

Рис.3.4

Построим градиент $\nabla f = (3;4)$ и прямую $3x_1 + 4x_2 = 0$. Перемещаем прямую $f = 0$ параллельно самой себе в направлении вектора ∇f. Из рис.3.4 следует, что по отношению к многоугольнику решений опорной эта прямая становится в точке *C*, где линейная функция принимает максимальное значение. Точка *C* лежит на пересечении прямых L_1 и L_3. Для определения ее координат решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Оптимальный план задачи: $x_1 = 2{,}4;\quad x_2 = 1{,}4,\quad т.е.\quad X_{opt} = (2{,}4;1{,}4)$, и $f_{\max} = f(X_{opt}) = 3 \cdot 2{,}4 + 4 \cdot 1{,}4 = 12{,}8.$

Полученное решение означает, что объем производства продукции P_1 должен быть равен 2,4 ед., а продукции P_2-1,4 ед. Максимальный доход, получаемый в этом случае, составит 12,8 ден.ед.

2. Задача использования сырья. Как нам известно (п.2.§1) математическая модель задачи имеет вид:

$$f = 50x_1 + 40x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решение. Построим многоугольник решений (рис.3.5). Для этого на плоскости R^2, где введена прямоугольная декартовая система координат изобразим граничные прямые

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 20 & (L_1), \\ 8x_1 + 5x_2 = 40 & (L_2), \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 & (L_3), \end{cases}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Взяв какую-нибудь точку, например, начало координат, установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство. Многоугольником решений данной задачи является ограниченный пятиугольник *OABCD*.

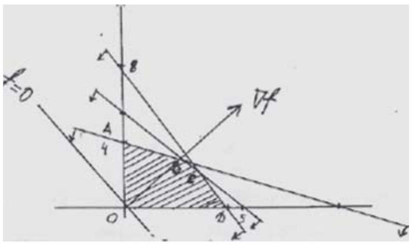

Рис.3.5

Для построения прямой $50x_1 + 40x_2 = 0$ строим градиент $\nabla f = (50;40) = 10 \cdot (5;4)$ и через точку *O* проводим прямую, перпендикулярную ему. Построенную прямую $f = 0$ перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора ∇f. Из рис.3.5 следует, что опорной по отношению к многоугольнику решений эта прямая становится в точке *C,* где функция f принимает максимальное значение. Точка *C* лежит на пересечении прямых L_2 и L_3. Для определения ее координат решим систему уравнений

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40, \\ 5x_1 + 6x_2 = 30. \end{cases}$$

Оптимальный план задачи: $x_1 = \dfrac{90}{23} \approx 3{,}9; \quad x_2 = \dfrac{40}{23} \approx 1{,}7, \quad т.е. \quad X_{opt} = \left(\dfrac{90}{23}; \ \dfrac{40}{23}\right).$

Тогда $f_{\max} = f(X_{opt}) = 50 \cdot 3{,}9 + 40 \cdot 1{,}7 \approx 260{,}3.$

Таким образом для того чтобы получить максимальную прибыль в размере 260,3 ден.ед., необходимо запланировать производство 3,9ед.продукции P_1 и 1,7 ед. продукции P_2.

Вообще, с помощью графического метода может быть решена задача линейного программирования, система ограничений которой содержит n неизвестных и m линейно независимых уравнений, если n и m связаны соотношением $n - m = 2$.

3. Графическим методом решить следующую задачу линейного программирования

$$f = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = 1,2,..,5).$$

Решение. Используя метод Жордана-Гаусса, произведем три полных исключения неизвестных x_1, x_2, x_3. В результате приходим к системе

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_4 - 3x_5 = 6, \\ \quad x_2 \quad + 7x_4 + 10x_5 = 70, \\ \qquad x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20, \end{cases} \tag{6}$$

откуда

$$x_1 = 6 - x_4 + 3x_5, \quad x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5, \quad x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5. \tag{7}$$

Подставляя эти значения в линейную функцию и отбрасывая в системе (6) базисные переменные, получаем задачу, выраженную только через свободные неизвестные x_4, x_5:

$$f = 6x_4 + 15x_5 - 38 \to \max$$

$$\begin{cases} x_4 - 3x_5 \le 6, \\ 7x_4 + 10x_5 \le 70, \\ -4x_4 + 5x_5 \le 20, \end{cases}$$

$$x_4 \ge 0, \quad x_5 \ge 0.$$

Построим многогранник решений в системе координат x_4Ox_5 (рис.3.6).

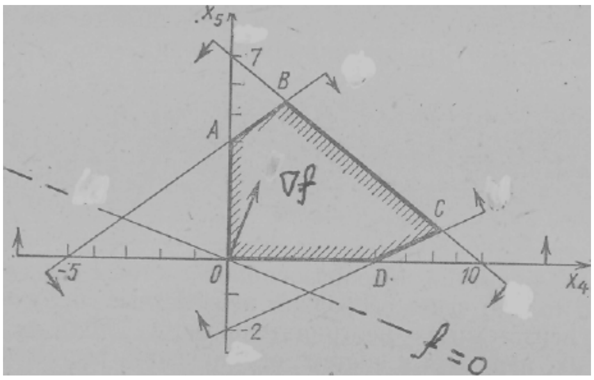

Рис.3.6

Из рис.3.6 заключаем, что линейная функция принимает максимальное значение в угловой точке B , которая лежит на пересечении прямых 2 и3. В результате решения системы

$$\begin{cases} 7x_4 + 10x_5 = 70, \\ -4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases}$$

находим: $x_4 = 2; \quad x_5 = \frac{28}{5}.$ Максимальное значение функции $f_{\max} = -38 + 12 + 84 = 58.$

Для отыскания оптимального плана исходной задачи подставляем в (7) найденные значения x_4, x_5. Окончательно получаем: $x_1 = \frac{104}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = \frac{28}{5}$.

§4. Анализ моделей на чувствительность(на основе графического представления модели)

Анализ моделей на чувствительность — это процесс, реализуемый после получения оптимального решения. В рамках такого анализа выявляется чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходной модели.

При таком анализе всегда рассматривается комплекс линейных оптимизационных моделей. Это придает модели определенную динамичность, позволяющую исследователю проанализировать влияние возможных изменений исходных условий на полученное ранее оптимальное решение. Динамические характеристики моделей фактически отображают аналогичные характеристики, свойственные реальным процессам. Отсутствие методов, позволяющих выявлять влияние возможных изменений параметров модели на оптимальное решение, может привести к тому, что полученное (статическое) решение устареет еще до своей реализации. Для проведения анализа модели на чувствительность с успехом могут быть использованы графические методы [1].

Рассмотрим основные задачи анализа на чувствительность на примере задачи об ассортименте продукции (пример 1.1.§1).

В этой задаче (об ассортименте продукции) может представлять интерес вопрос о том, как повлияет на оптимальное решение увеличение и уменьшение спроса на продукцию или запасов исходного сырья. Возможно, также потребуется анализ влияния рыночных цен на оптимальное решение.

Определение оптимального ассортимента продукции Предприятие изготавливает два вида продукции P_1 и P_2, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используется два вида сырья - A и B. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц, соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида P_1 и вида P_2 дан в таблице 1.

Таблица 1.

Сырье	Расход сырья на 1.ед.продукции P_1	Расход сырья на 1.ед.продукции P_2	Запас сырья, ед.
A	2	3	9
B	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию P_1 никогда не превышает спроса на продукцию P_2 более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию P_2 никогда не превышает 2 ед. в сутки.

Оптовые цены единицы продукции равны: 3 ден.ед. – для P_1 и 4 ден. ед. для P_2.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение. Сначала напоминаем построение математической модели задачи.

Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции P_1 и x_2 единиц продукции P_2. Поскольку производство продукции P_1 и P_2 ограничено имеющимися в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции P_1 и x_2 единиц продукции P_2 составит $Z = 3x_1 + 4x_2$. Нас интересует максимальный доход, т.е. $Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$. (2)

Итак, (2)-(1) является математической моделью задачи об ассортименте продукции.

Теперь эту задачу решим графическим методом.

Построим многоугольник решений (рис.1).

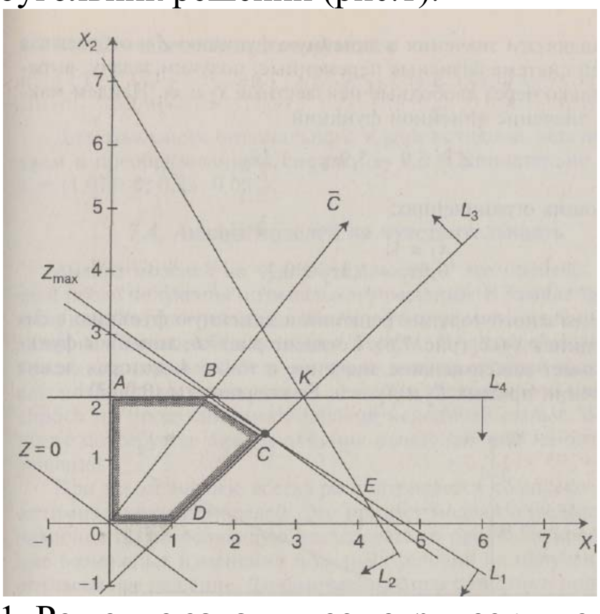

Рис.1. Решение задачи геометрическим способом

Для этого на плоскости R^2, где введена прямоугольная декартовая система координат, изобразим граничные прямые

$$2x_1 + 3x_2 = 9 \qquad (L_1,)$$
$$3x_1 + 2x_2 = 13 \qquad (L_2),$$
$$x_1 - x_2 = 1 \qquad (L_3),$$
$$x_2 = 2 \qquad (L_4).$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

и установим, какую полуплоскость определяет каждое неравенство относительно граничной прямой. В результате получим многоугольник *OABCD*.

Построим градиент $\overline{C} = \nabla Z = (3;4)$ и прямую $3x_1 + 4x_2 = 0$. Перемещаем прямую $Z = 0$ параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{C} = \nabla Z$. Из рис.1 следует, что по отношению к многоугольнику решений опорной эта прямая становится в точке *C*, где линейная функция принимает максимальное значение. Точка *C* лежит на пересечении прямых L_1 и L_3. Для определения ее координат решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Оптимальный план задачи: $x_1 = 2{,}4;\ x_2 = 1{,}4,$ *т.е.* $X_{opt} = (2{,}4;1{,}4)$, и $Z_{ma} = Z(X_{opt}) = 3 \cdot 2{,}4 + 4 \cdot 1{,}4 = 12{,}8.$

Полученное решение означает, что объем производства продукции P_1 должен быть равен 2,4 ед., а продукции P_2-1,4 ед. Максимальный доход, получаемый в этом случае, составит 12,8 ден.ед.

Теперь рассмотрим основные задачи анализа на чувствительность.

4.1. Анализ изменений запасов ресурсов (Задача 1)

После нахождения оптимального решения представляется вполне логичным выяснить, как отразится на оптимальном решении изменение запасов ресурсов. Для этого необходимо ответить на два вопроса:

1. На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции Z?
2. На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции Z?

Прежде чем ответить на поставленные вопросы, классифицируем ограничение линейной модели как связывающие (активные) и несвязывающие (неактивные) ограничения. Прямая, представляющая связывающее ограничение, должна проходить через оптимальную точку, в противном случае, соответствующее ограничение будет несвязывающим. На рис.1 связывающими ограничениями являются ограничения 1 и 3, представленные прямыми L_1 и L_3, соответственно, т. е. те, которые определяют запасы исходных ресурсов.

Первое ограничение определяет запасы сырья A.Третье ограничение определяет соотношение спроса на выпускаемую продукцию.

Если некоторое ограничение является связывающим, то соответствующий ресурс относят к разряду дефицитных ресурсов, так как он используется полностью. Ресурс, с которым ассоциировано несвязывающее ограничение, следует отнести к разряду недефицитных ресурсов (т. е. имеющихся в некотором избытке). В нашем примере несвязываюшими ограничениями являются второе и четвертое. Следовательно, ресурс - сырье B - недефицитный, т. е. имеется в избытке, а спрос на продукцию P_2 не будет удовлетворен полностью (в таблице — ресурсы 2 и 4).

При анализе модели на чувствительность к правым частям ограничений определяются: 1) предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение, и 2) предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденное ранее оптимальное значение целевой функции.

В нашем примере сырье А и соотношение спроса на выпускаемую продукцию P_1, и P_2 являются дефицитными ресурсами (в таблице-ресурсы 1, 3).

Рассмотрим сначала ресурс — сырье A. На рис. 2 при увеличении запаса этого ресурса прямая L_1 перемещается вверх, параллельно самой себе, до точки K, в которой пересекаются линии ограничений L_2, L_3 и L_4. В точке K ограничения 2, 3 и 4 становятся связывающими; оптимальному решению при этом соответствует точка K, а пространством (допустимых) решений становится многоугольник $AKDO$. В точке K ограничение 1 (для ресурса A) становится избыточным, так как любой дальнейший рост запаса соответствующего ресурса не влияет ни на пространство решений, ни на оптимальное решение.

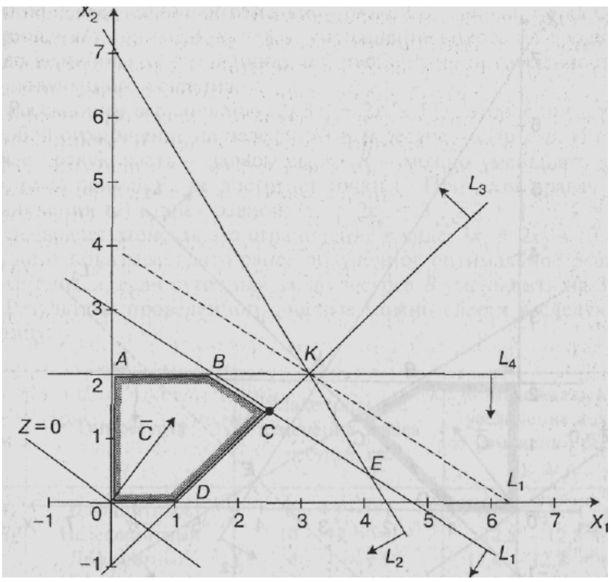

Рис. 2. Геометрическая интерпретация решения задачи (изменение ресурса А)

Таким образом, объем ресурса A не следует увеличивать сверх того предела, когда соответствующее ему ограничение 1 становится избыточным, т. е. прямая L_1 проходит через новую оптимальную точку *K*. Этот предельный уровень определяется следующим образом. Устанавливаются координаты точки *K*, в которой пересекаются прямые L_2, L_3 и L_4, т.е. находится решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 13, \\ x_1 - x_2 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

В результате получается $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$. Затем, путем подстановки координат точки *K* в левую часть ограничения 1, определяется максимально допустимый запас ресурса *A*:

$$2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12.$$

Рис.3 иллюстрирует ситуацию, когда рассматривается вопрос об изменении соотношения спроса на продукцию P_1 и P_2.

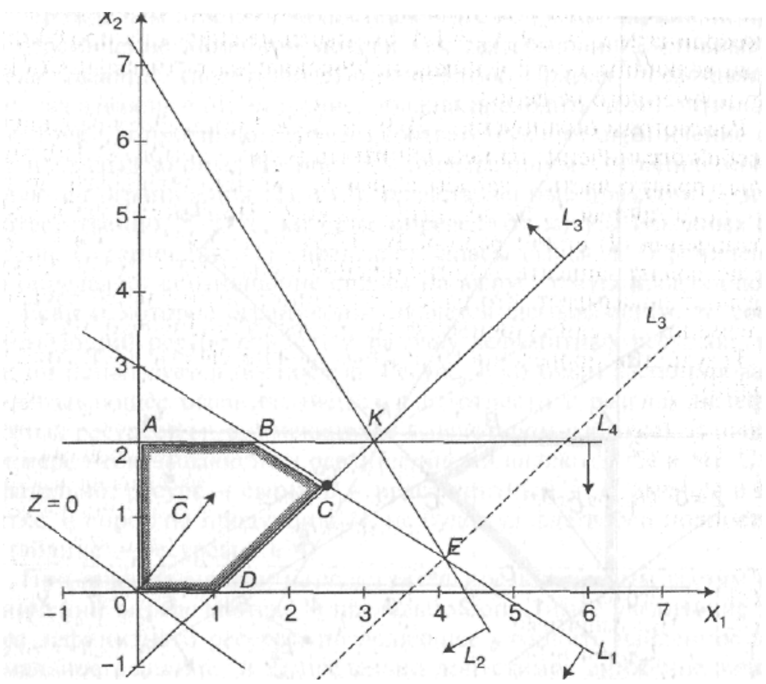

Рис. 3. Геометрическая интерпретация решения задачи (изменение спроса на продукцию)

Новой оптимальной точкой становится точка *E,* где пересекаются прямые L_1 и L_2. Координаты данной точки находятся путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 = 13. \end{cases}$$

В результате получается $x_1 = 4{,}2;\ \ x_2 = 0{,}2$, причем суточный спрос на продукцию P_1, не должен превышать спрос на продукцию P_2 на величину $x_1 - x_2 = 4{,}2 - 0{,}2 = 4$ ед.

Дальнейшее увеличение разрыва в спросе на продукцию P_1 и P_2 не будет влиять на оптимальное решение.

Рассмотрим вопрос об уменьшении правой части несвязывающих ограничений. Ограничение 4: $x_2 \le 2$ фиксирует предельный уровень спроса на продукцию P_2. Из рис. 1 следует, что, не изменяя оптимального решения, прямую L_4 можно опускать вниз до пересечения с оптимальной точкой *C*. Так как точка *C* имеет координаты $x_1 2{,}4;\ \ x_2 = 1{,}4$, уменьшение спроса на продукцию P_2 до величины x_2 = 1,4 никак не повлияет на оптимальность ранее полученного решения.

Рассмотрим ограничение 2: $3x_1 + 2x_2 \le 13$, которое представляет собой ограничение на недефицитный ресурс — сырье *B*. И в этом случае правую часть - запасы сырья *B* - можно уменьшать до тех пор, пока прямая L_2 не достигнет точки *C*. При этом правая часть ограничения 2 станет равной $3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 2{,}4 + 2 \cdot 1{,}4 = 10$, что позволяет записать это ограничение в виде: $3x_1 + 2x_2 \le 10$. Этот результат показывает, что ранее полученное оптимальное решение не изменится, если суточный запас ресурса *B* уменьшить на 3 ед.

Результаты проведенного анализа можно свести в следующую таблицу:

Ресурс	Тип ресурса	Максимальное изменение запаса ресурса, ед.	Максимальное увеличение дохода от изменения ресурса, У- Д. е.
1 *(A)*	Дефицитный	12 - 9 = +3	17 - 12,8 = +4,2
2 (B)	Недефицитный	10 - 13 = -3	12,8 - 12,8 = 0
3	Дефицитный	4 - 1 = +3	13,4 - 12,8 = +0,6
4	Недефицитный	1,4 - 2 = -0,6	12,8 - 12,8 = 0

4.2. Определение наиболее выгодного ресурса (Задача 2)

В задаче 1 анализа на чувствительность мы исследовали влияние на оптимум увеличения объема дефицитных ресурсов. При ограничениях, связанных с дополнительным привлечением ресурсов, естественно задать вопрос: какому из ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств? Для этого вводится характеристика ценности каждой дополнительной единицы дефицитного ресурса, выражаемая через соответствующее приращение оптимального значения целевой функции. Такую характеристику для рассматриваемого примера можно получить непосредственно из таблицы, в которой приведены результаты решения задачи 1 на чувствительность. Обозначим ценность дополнительной единицы ресурса i через y_i, Величина y_i определяется из соотношения

$$y_i = \frac{\textit{максимальное} \quad \textit{приращение} \quad Z}{\textit{максимально} \quad \textit{допустимый} \quad \textit{прирост} \quad \textit{ресурса} \quad i}.$$

Результаты расчета ценности единицы каждого из ресурсов представлены в следующей таблице:

Ресурс i	Тип ресурса	Значение y_i
1 (A)	Дефицитный	4,2/3 = 1,4
2 (B)	Недефицитный	0/(-3) = 0
3	Дефицитный	0,6/3 = 0,2
4	Недефицитный	0/(-0,6) = 0

Полученные результаты свидетельствуют о том, что дополнительные вложения в первую очередь следует направить на увеличение ресурса *A* и лишь затем - на формирование соотношения спроса на продукцию P_1, и продукцию P_2. Что касается недефицитных ресурсов, то, как и следовало ожидать, их объем увеличивать не следует.

4.3.Определение пределов изменения коэффициентов целевой функции (Задача 2)

Изменение коэффициентов целевой функции оказывает влияние на наклон прямой, которая представляет эту функцию в принятой системе координат. Вариация коэффициентов целевой функции может привести к изменению совокупности связывающих ограничений и, следовательно, статуса того или иного ресурса (т. е. сделать недефицитный ресурс дефицитным, и наоборот).

При анализе модели на чувствительность к изменениям коэффициентов целевой функции необходимо исследовать следующие вопросы:

1. Каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменение оптимального решения?
2. На сколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным, и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?

Ответим на поставленные вопросы на нашем примере.

Рассматривая первый вопрос, обозначим через c_1 и c_2 доходы предприятия от продажи единицы продукции P_1, и P_2 соответственно. Тогда целевую функцию можно представить в следующем виде:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 .$$

На рис.1 видно, что при увеличении c_1 или уменьшении c_2 прямая, представляющая целевую функцию Z, вращается (вокруг точки *O* по часовой стрелке). Если же c_1, уменьшается или c_2 увеличивается, эта прямая вращается в противоположном направлении — против часовой стрелки. Таким образом, точка C будет оставаться оптимальной точкой до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых для ограничений 1 и 3.

Когда наклон прямой встанет равным наклону прямой L_1, получим две альтернативные оптимальные угловые точки - C и B. Аналогично, если наклон прямой встанет равным наклону прямой для ограничения 3, будем иметь альтернативные оптимальные угловые точки C и D. Наличие альтернативных оптимумов свидетельствует о том, что одно и то же оптимальное значение Z может достигаться при различных значениях переменных x_1, и x_2. Как только наклон прямой выйдет за пределы указанного выше интервала c_1, получим некоторое новое оптимальное решение.

Рассмотрим на нашем примере, каким образом можно найти допустимый интервал изменения c_1, при котором точка C остается оптимальной. Исходное значение коэффициента $c_2 = 4$ оставим неизменным. На рис.1 видно, что значение c_1, можно уменьшать до тех пор, пока прямая Z не совпадет с прямой L_1.

Это крайнее минимальное значение коэффициента c_1 можно определить из равенства углов наклонов прямой Z и прямой L_1. Так как тангенс угла наклона для прямой Z равен $\frac{c_1}{4}$, а для прямой L_1 равен $\frac{2}{3}$, то минимальное значение c_1 определим из равенства $\frac{c_1}{4} = \frac{2}{3}$, откуда $\min c_1 = \frac{8}{3}$. На рис 1 видно, что значение c_1 можно увеличивать беспредельно, так как прямая Z при $c_2 = 4$ и $c_1 \to +\infty$ не совпадает с прямой L_3 и, следовательно, точка C при всех значениях коэффициента $c_1 \geq \frac{8}{3}$ будет единственной оптимальной.

Интервал изменения c_1, в котором точка C по-прежнему остается единственной оптимальной точкой, определяется неравенством $\frac{8}{3} < c_1 < +\infty$. При $c_1 = \frac{8}{3}$ оптимальными угловыми точками будут как точка C, так и точка B. Как только коэффициент c_1 становится меньше $\frac{8}{3}$, оптимум смещается в точку B.

Можно заметить, что, как только коэффициент c_1, оказывается меньше $\frac{8}{3}$, ресурс 3 становится недефицитным, а ресурс 4 - дефицитным. Для предприятия это означает следующее: если доход от продажи единицы продукции P_1 станет меньше $\frac{8}{3}$ д.е., то наиболее выгодная производственная программа предприятия должна предусматривать выпуск максимально допустимого количества продукции P_2 (полностью удовлетворять спрос на продукцию P_2).

При этом соотношение спроса на продукцию P_1, и P_2 не будет лимитировать объемы производства, что обусловит недефицитность ресурса 3. Увеличение коэффициента c_1 свыше $\frac{8}{3}$ д. е. не снимает проблему дефицита ресурсов 1 и 3. Точка C - точка пересечения прямых L_1, и L_3 - остается все время оптимальной.

§5.Симплексный метод решения задачи линейного программирования

То, что имеет основанием истину, следует
напоминать, не боясь показаться надоедливым.
Н.И.Пирогов

Для решения задачи линейного программирования имеется много различных методов. В особенности это касается конкретных экономических задач. Систематическое исследование общих задач линейного программирования и разработка общих методов их решения были начаты в работах Л. В. Канторовича в 1939 г. В настоящее время основным общим методом решения общих задач линейного программирования является так называемый симплексный метод, предложенный Данцигом в 1949 году и многочисленные его модификации.

На основании материала, рассмотренного в § 2-3, можно сделать следующий вывод.

Существует такая угловая точка многогранника решений, в которой линейная функция достигает своего наименьшего (наибольшего) значения. Каждой угловой точке многогранника решений соответствует опорный план. Каждый опорный план определяется системой m линейно независимых векторов, содержащихся в данной системе из n векторов, $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Для отыскания оптимального плана необходимо исследовать только опорные планы. Верхняя граница количество опорных планов, содержащихся в данной задаче, определяется числом сочетаний C_n^m. При больших m и n найти оптимальный план, перебирая все опорные планы задачи, очень трудно. Поэтому необходимо, иметь схему, позволяющую осуществлять упорядоченный переход от одного опорного плана к другому. Такой схемой является симплексный метод, который позволяет, исходя из известного опорного плана задачи, за конечное число шагов получить ее оптимальный план. Каждый из шагов (или итераций) состоит в нахождении нового плана, которому соответствует меньшее значение линейной функции, чем значение этой же функции в предыдущем плане. Процесс продолжают до получения оптимального плана. Если задача не обладает планами или ее линейная функция не ограничена на многограннике решений, то симплексный метод позволяет установить это в процессе решения.

Отметим, что существуют много эквивалентных друг другу схем, позволяющих осуществлять упорядоченный переход от одного плана (базиса) к другому. Ниже остановимся на некоторые из них.

5.1. Симплексный метод (I схема)

5.1.1.Эвристический подход

Сначала познакомимся более подробно с идеей этого варианта на конкретном примере.

Пример5.1.1.Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$f = 3 + x_4 - 2x_5 \to \min$$
$$x_1 \qquad - x_4 + x_5 = 2,$$
$$x_2 \quad + 2x_4 + 3x_5 = 7,$$
$$x_3 + x_4 - 2x_5 = 1,$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,...,5.$$

Эту задачу перепишем следующим образом:

$$f = 3 + x_4 - 2x_5 \to \min \tag{1}$$
$$x_1 = 2 + x_4 - x_5,$$
$$x_2 = 7 - 2x_4 - 3x_5, \tag{2}$$
$$x_3 = 1 - x_4 + 2x_{5,}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1,3,...,5. \tag{3}$$

Так как векторы A_1, A_2, A_3 линейно независимые и составляют базис в трехмерном пространстве; соответствующие им неизвестные x_1, x_2, x_3 выберем за базисные неизвестные, а x_4, x_5 - за свободные неизвестные. Примем $x_4 = 0, \quad x_5 = 0$ и получим соответствующее базисное решение (первоначальный опорный план): $X_0 = (2;7;1;0;0)$, для которого значение целевой функции $f = 3$.

Из (1) видно, что значение f может быть уменьшено либо путем уменьшения значения x_4, либо путем увеличения значения x_5. Первое сразу отпадает, так как $x_4 = 0$ и уменьшение его значения привело бы к нарушению условий неотрицательности (3). Будем увеличивать x_5, сохраняя $x_4 = 0$. Однако при этом нам придется следить за значениями базисных переменных x_1, x_2, x_3 ибо бесконтрольное увеличение x_5 может сделать их значения отрицательными. Как видно из (2), значению x_3 это не угрожает, но из первого и второго уравнений следует, что x_5 можно увеличить не более чем до 2.

Примем $x_5 = 2$. Учитывая, что $x_4 = 0$, и используя систему (2), получаем новое базисное решение (опорный план): $X_1 = (0;1;11;0;2)$, для которого значение целевой функции $f = -1$ (уменьшилось по сравнению с прежним значением $f = 3$).

Новый базис теперь составляют векторы A_2, A_3, A_5; соответствующие им неизвестные x_2, x_3, x_5 будут базисными неизвестными (неизвестное x_1, переходит вместо x_5 в число свободных). Для соответствующей перестройки системы (2) из первого уравнения выражаем $x_5 = 2 - x_1 + x_4$, и подставляем в другие уравнения, а также в выражение для целевой функции f. Получаем новую систему ограничений:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + 3x_1 - 5x_4, \\ x_3 &= 5 - 2x_1 + x_4, \\ x_5 &= 2 - x_1 + x_4 \end{aligned} \tag{4}$$

и целевую функцию

$$f = -1 + 2x_1 - x_4 . \tag{5}$$

На этом заканчивается один этап процесса. Дальше поступим аналогично: будем пытаться уменьшить значение f путем увеличения значения неизвестного x_4. При этом из первого уравнения системы (4) видно, что x_4 можно увеличить не более чем до 0,2. Итак, сохраняя $x_1 = 0$, примем $x_4 = 0{,}2$. Получим новое решение (опорный план):

$$X_2 = (0;0;5{,}2;0{,}2;2{,}2), \tag{6}$$

при котором $f = -1{,}2$. Новый базис образуют векторы A_3, A_4, A_5; соответствующие им неизвестные x_3, x_4, x_5 будут базисными неизвестными. Неизвестное x_1 в выражении для целевой функции (5) необходимо исключить, введя вместо него x_2. Из первого уравнения системы (4) имеем:

$$x_4 = 0{,}2 + 0{,}6x_1 - 0{,}2x_2,$$

что дает новое выражение для функции f:

$$f = -1{,}2 + 1{,}4x_1 + 0{,}2x_2 .$$

Из полученного выражения легко сделать вывод, что значение f более уже не может быть уменьшено, что сделать это можно было бы только путем уменьшения значений неизвестных x_1 и x_2. Однако, как следует из (6), $x_1 = x_2 = 0$ и их уменьшение повлекло бы нарушение условия неотрицательности.

Итак, задача решена - получено решение (6), минимизирующее значение целевой функции (при этом $f = -1{,}2$).

Заметим, что рассмотренный выше процесс не всегда приводит к получению оптимального решения: при решении отдельных задач линейного программирования может сложиться ситуация, в которой условия неотрицательности не препятствуют неограниченному уменьшению значения целевой функции. Такой случай означает, что функция f не имеет минимума и, следовательно, оптимального решения не существует.

Для выяснения условий, приводящих к подобным случаям, рассмотрим первый вариант симплексного метода в общем виде.

5.1.2. Симплексный метод-I

Пусть поставлена общая задача линейного программирования (§2 п.2.2):

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m,$$
$$x_j \ge 0, \quad (j = 1,2,...,n),$$

где a_{ij}, $b_i \ge 0$, c_j - заданные постоянные величины.

Предположим сначала, что система ограничений задачи содержит m единичных векторов, причем без ограничения общности можно предположить, что единичными являются первые m векторов (Вопрос о том, как привести систему к такому виду, рассматривается позже в п.5.1.4, а непосредственное решение задач линейного программирования не содержащих m единичных векторов будет рассматриваться в п.5.2.4). Векторы $A_1, A_2,..., A_m$- линейно независимые единичные векторы m - мерного пространства. Они и образуют базис этого пространства. Поэтому в системе ограничений за базисные неизвестные выберем $x_1, x_2,..., x_m$, а свободные неизвестные - $x_{m+1},..., x_n$. Выражая в этом случае базисные неизвестные $x_1, x_2,..., x_m$ и целевую функцию f, через свободные неизвестные придем к соотношениям:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - (a_{1m+1}x_{m+1} + ... + a_{1n}x_n), \\ x_2 &= b_2 - (a_{2m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n}x_n), \\ &.. \\ x_m &= b_m - (a_{mm+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n), \end{aligned} \qquad (7)$$

$$f = \gamma_0 - (\gamma_{m+1}x_{m+1} + ... + \gamma_n x_n) \qquad (8)$$

При этом свободные члены $b_1, b_2,..., b_m$ неотрицательны, базис $Б = \{A_1, A_2,..., A_m\}$, а соответствующее ему базисное решение (опорный план) есть

$$X_0 = (b_1, b_2,..., b_m, 0,..., 0) \qquad (9)$$

для которого $f_Б = f(X_0) = c_0$.

Как следует из (8), уменьшить значение f - это значит, путем увеличения одного из свободных неизвестных добиться того, чтобы значение выражения в скобках стало положительным (разумеется, при соблюдении условия неотрицательности для базисных неизвестных). В зависимости от знаков коэффициентов $\gamma_{m+1}, \gamma_{m+2},..., \gamma_n$ здесь могут быть два случая.

1. Все числа $\gamma_{m+1}, \gamma_{m+2},..., \gamma_n$ **неположительны.** Тогда значение f уже более не может быть уменьшено, ибо это могло быть сделано только путем уменьшения значений свободных неизвестных, что невозможно. Отсюда следует, что базисное решение (опорный план) (9) в этом случае является оптимальным.

2. Среди чисел $\gamma_{m+1}, \gamma_{m+2}, ..., \gamma_n$ **имеются положительные.** Пусть, например, $\gamma_j > 0 \quad (m+1 \le j \le n)$. Это позволяет уменьшить значение f путем увеличения x_j, оставляя значения других свободных неизвестных нулевыми. Считая, что значения всех неизвестных $x_{m+1}, ..., x_n$, кроме x_j, равны нулю, на основании (7) и (8) имеем:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{1j}x_j, \\ x_2 &= b_2 - a_{2j}x_j, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_m &= b_m - a_{mj}x_{j,} \end{aligned} \tag{10}$$

$$f = \gamma_0 - \gamma_j x_j, \quad \gamma_j > 0. \tag{11}$$

Из равенств (10) следует, что, увеличивая значение x_j, необходимо следить за сохранением условия неотрицательности базисных переменных $x_1, x_2, ..., x_m$. Легко видеть, что при неотрицательности свободных членов $b_1, b_2, ..., b_m$, последнее полностью зависит от знака коэффициентов при x_j. Здесь, в свою очередь, снова различаются два случая (2а и 2б).

2а). Все числа $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}$ **неположительны.** Тогда значение x_j может быть увеличено неограниченно, что приводит к неограниченному уменьшению f. Таким образом, в этом случае минимум f не достигается, т. е. $\min f = -\infty$.

2б). Среди чисел $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}$ **имеются положительные.** Пусть, например, $a_{kj} > 0, \quad 1 \le k \le m$. Коэффициентов a_{kj}, удовлетворяющих этому условию, может быть несколько. Найдем для них значения частных вида $\frac{b_k}{a_{kj}}$ и выберем среди этих частных наименьшее - пусть это будет $\frac{b_i}{a_{ij}} = K \ge 0$. Понятно (см. (10)), что для сохранения неотрицательности всех базисных неизвестных $x_1, x_2, ..., x_m$ (и прежде всего x_i) значение x_j может быть увеличено не более чем до K. Коэффициент a_{ij} в этих условиях называют разрешающим элементом.

Итак, примем $x_j = K$ и найдем значения базисных неизвестных (при условии, что все небазисные неизвестные, кроме x_j, равны нулю):

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{1j}K, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_2 &= b_2 - a_{ij}K = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_m &= b_m - a_{mj}K. \end{aligned}$$

Неизвестное x_i теперь должно перейти в состав свободных неизвестных, а взамен него в базис следует ввести неизвестное x_j. Новый базис будет иметь вид:

$$Б_1 = \{A_1,...,A_{i-1}, A_i, A_{i+1},..., A_m\}.$$

Значение целевой функции f, соответствующее базису $Б_1$, равно (см. (11)): $f_{Б_1} = \gamma_0 - \gamma_j K \le \gamma_0 = f_Б, \quad т.е. f_{Б_1} \le f_Б$.

Последнее означает, что в результате выполнения одного шага процесса (для случая 2б) происходит уменьшение (или, по крайней мере, неувеличение) значения целевой функции.

Для перехода к следующему шагу симплексного метода необходимо преобразовать систему ограничений (7) и целевую функцию (8) применительно к новому базису. С этой целью из уравнения системы (7) , отвечающего бывшему базисному неизвестному x_i, выражается новое базисное неизвестное x_j, которое вслед за этим исключается из остальных уравнений системы (подстановкой в эти уравнения полученного выражения для x_i). Точно так же неизвестное x_j исключается из выражения (8) для функции f.

Вслед за этим весь рассмотренный этап повторяется сначала. Очевидно, что остановка процесса может произойти в случаях 1 или 2а.

5.1.3. Симплексные таблицы

Ручные вычисления по симплексному методу удобно оформлять в виде так называемых симплексных таблиц. Для удобства составления симплексной таблицы будем считать, что система ограничений (7) переписана в виде:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &+ a_{1m+1}x_{m+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 \quad &+ a_{2m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n} = b_2, \\ &.. \\ x_m &+ a_{mm+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \qquad (12)$$

и целевая функция (8) определена равенством

$$f + \gamma_{m+1}x_{m+1} + ... + \gamma_n x_n = \gamma_0. \qquad (13)$$

По исходным данным (12) - (13) заполняется начальная симплексная таблица, форма которой показана в таблице 1.

Таблица 1.

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	$\downarrow$ x_j	…	x_m
x_1	b_1	1	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$\to$ x_i	b_i	0	…	1	…	0	a_{im+1}	..	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	b_m	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}
Целевая функция	γ_0	0	…	0	…	0	γ_{m+1}	…	γ_j	…	γ_n

Ниже сформулируем алгоритм первого варианта симплексного метода применительно к данным, внесенным в таблицу 1.

1. Выяснить, имеются ли в последней строке таблицы положительные числа (γ_0 не принимается во внимание). Если все числа отрицательны, то процесс закончен; базисное решение (опорный план) $X_0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, 0, ..., 0)$ является оптимальным; соответствующее значение целевой функции $f = \gamma_0$.

Если в последней строке имеются положительные числа, перейти в п. 2.

2. Просмотреть столбец, соответствующий положительному числу из последней строки, и выяснить, имеются ли в нем положительные числа. Если ни в одном из таких столбцов нет положительных чисел, то оптимального решения не существует.

Если найден столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент (если таких столбцов несколько, взять любой из них), отметить этот столбец вертикальной стрелкой (табл. 1) и перейти к п. 3.

3. Разделить свободные члены на соответствующие положительные числа из выделенного столбца и выбрать наименьшее частное. Отметить строку таблицы, соответствующую наименьшему частному, горизонтальной стрелкой. Выделить разрешающий элемент a_{ij}, стоящий на пересечении отмеченных строки и столбца. Перейти к п. 4.

Комментарий. Задача теперь состоит в том, чтобы удалить из базиса неизвестное, расположенное против разрешающего элемента в строке (xi) и ввести вместо него свободное неизвестное, расположенное напротив разрешающего элемента в столбце (x_i). В соответствии с алгоритмом симплексного метода это означает преобразование системы ограничений и целевой функции. В данном случае это означает переход к новой симплексной таблице, в первом столбце которой вместо x_i вписывается обозначение x_j, а заполнение внутренних пустых клеток происходит по правилам, изложенным ниже.

4. Разделить элементы выделенной строки исходной таблицы на разрешающий элемент (на месте разрешающего элемента появится единица). Полученная таким образом новая строка пишется на месте прежней в новой таблице. Перейти к п. 5.

5. Каждая следующая строка новой таблицы образуется сложением соответствующей строки исходной таблицы и строки, записанной в п. 4, которая предварительно умножается на такое число, чтобы в клетках выделенного столбца при сложении появились нули. На этом заполнение новой таблицы заканчивается, и происходит переход к п. 1.

Пример 5.1.2. Решим задачу линейного программирования из примера 5.1.1 с помощью симплексных таблиц.

Перед заполнением первой симплексной таблицы (табл. 2) перепишем систему ограничений (2) в соответствии с (12):

$$x_1 \qquad - x_4 + x_5 = 2,$$
$$x_2 \quad + 2x_4 + 3x_5 = 7,$$
$$x_3 + x_4 - 2x_5 = 1$$

и целевую функцию (1) в соответствии с (13):

$$f - x_4 + 2x_5 = 3$$

Воспользуемся алгоритмом симплексного метода. Замечаем, что в последней строке таблицы 2 имеется положительный элемент, выбираем наименьшее частное из $\frac{2}{1}$ и $\frac{7}{3}$ и выделяем разрешающий элемент (на пересечении строки, x_1 и столбца x_5). В новый базис вместо неизвестного x_1 войдет неизвестное x_5. Поскольку разрешающий элемент уже равен единице, выделенную строку без изменений переписываем на прежнее место в новую таблицу (табл.3). Остальные строки преобразовываем в соответствии с алгоритмом так, чтобы в соответствующих клетках столбца x_5 появились нули (так, например, при преобразовании второй строки она предварительно складывается с уже переписанной первой, умноженной на -3).

Таблица 2

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	$\downarrow$ x_4	x_5
x_5	2	1	0	0	-1	1
$\rightarrow x_2$	1	-3	1	0	5	0
x_3	5	2	0	1	-1	0
Целевая функция	-1	-2	0	0	1	0

К таблице 3 снова применяем симплекс- алгоритм, начиная с п.1. Поскольку в последней строке есть положительный элемент (в столбце x_4), процесс не заканчивается. В результате преобразований получается таблица 4, в последней строке которой уже нет положительных элементов. Это означает, что последнее базисное решение (последний опорный план) $X_2 = (0;0;5,2;0,2;2,2)$ является оптимальным. Соответствующее значение целевой функции $f = -1,2$. Таким образом, задача решена.

Таблица 3

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	$\downarrow$ x_5
$\rightarrow$ x_1	2	1	0	0	-1	1
x_2	7	0	1	0	2	3
x_3	1	0	0	1	1	-2
Целевая функция	3	0	0	0	-1	2

Таблица 4

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_5	2,2	0,4	0,2	0	0	1
x_4	0,2	-0,6	0,2	0	1	0
x_3	5,2	1,4	0,2	1	0	0
Целевая функция	-1,2	-1,4	-0,2	0	0	0

5.1.4. Отыскание первоначального опорного плана или отыскание неотрицательного базисного решения систем линейных алгебраических уравнений

При обсуждении симплексного метода-I (п.5.1.2) и его алгоритма (п.5.1.3), мы предполагали, что начальный базис системы ограничений уже известен. В некоторых простых случаях базис усматривается непосредственно. Однако при большом числе уравнений и неизвестных подбор базисного решения затруднителен, поэтому мы укажем здесь удобный прием отыскания начального базиса систем ограничений. Одновременно этот прием даст возможность установить, совместна ли система ограничений в области неотрицательных значений неизвестных, т.е. имеет ли система ограничений хотя бы одно неотрицательное базисное решение. Замечателен тот факт, что сам этот прием основан на симплексном методе.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{aligned}
$$

Можно предположить без ограничения общности, что все $b_i \geq 0$ (если $b_i < 0$, то i - е уравнение умножаем на -1). Систему перепишем в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) = 0,\\
&b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) = 0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Введем вспомогательные неизвестные ξ_i, $i = 1,2,\ldots,m$ связанные с неизвестными x_j, $j = 1,2,\ldots,n$ соотношениями

$$
\begin{aligned}
&\xi_1 = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n),\\
&\xi_2 = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\xi_m = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Рассмотрим также вспомогательную линейную функцию

$$\varphi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_m . \qquad (16)$$

Будем минимизировать функцию (16) при ограничениях (15) и дополнительных условиях, что все $x_j \geq 0, \quad \xi_i \geq 0$. Для решения этой задачи мы сразу же можем применить симплексный метод, так как первоначальное базисное решение для системы (15) легко найти. В самом деле, очевидно, что в системе (15) совокупность неизвестных $x_j, \quad j = 1,2,...,n$ может служить набором свободных неизвестных, а $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_в$- базисными неизвестными. А так как все $b_i \geq 0$, то

$$X = (\xi_1 = b_1, \xi_2 = b_2, ..., \xi_m = b_m, x_1 = 0, ..., x_n = 0)$$

является базисном решением.

В силу неотрицательности $\xi_i \geq 0$ очевидно, что $\min \varphi \geq 0$, причем равенство достигается лишь тогда, когда все $\xi_i = 0$. Следовательно, если $\min \varphi = 0$, то это означает, что существует система неотрицательных значений x_j, которые обращают все ξ_i в нуль, т.е. удовлетворяют системе (14). С другой стороны, очевидно, справедливо и обратное утверждение: всякое неотрицательное решение системы (14) обращает все ξ_i в нуль, т.е. обращает $\min \varphi$ в нуль.

Таким образом, мы получили следующее утверждение.

Теорема 5.1.1. Необходимым и достаточным условием существования неотрицательного базисного решения системы (14) является равенство нулю минимума функции φ.

Эта теорема позволяет нам сформулировать следующее правило.

Правило. Для нахождения неотрицательного базисного решения системы (14) минимизируем функцию (16) при ограничениях (15). В качестве свободных берем $x_j, \quad j = 1,2,...,n$, а в качестве базисных берем $\xi_i, \quad i = 1,2,...,m$ и проводим минимизацию функции φ по симплексному методу.

Могут представиться два случая:

1) $\min \varphi = 0$; в этом случае все ξ_i обязаны равняться нулю, а получившиеся значения x_j будут составлять неотрицательное базисное решение системы (14).

2) $\min \varphi > 0$; в этом случае система (14) не имеет неотрицательного базисного решения.

Замечание. Указанный прием составляет фактически идейную основу и другого распространенного метода отыскания начального базиса, особенно удобного для последующего составления симплексных таблиц, так называемого «метода искусственного базиса» (п.5.2.4)

Пример 5.1.3. Найти неотрицательное базисное решение системы

$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 2,\\
&x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 5,\\
&-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \qquad\quad = 4.
\end{aligned}
\tag{14*}
$$

Решение. Для этого введем вспомогательные неизвестные ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$
\begin{aligned}
&\xi_1 = 2 - x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 6x_5,\\
&\xi_2 = 5 - x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 - 3x_5,\\
&\xi_3 = 4 + x_1 - x_2 - x_3 + x_4.
\end{aligned}
\tag{15*}
$$

Введем вспомогательную линейную функцию

$$\varphi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3. \tag{16*}$$

Минимизируем по симплексному методу вспомогательную функцию (16*) при ограничениях (15*) и дополнительных условиях $x_j \geq 0, j = 1,2,3,4;\quad \xi_i \geq 0,\quad i = 1,2,3.$

Баз. неиз.	Св. чл	ξ_1	ξ_2	ξ_3	$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\rightarrow \xi_1$	2	1	0	0	1	-1	2	-2	-6
ξ_2	5	0	1	0	1	2	-1	7	3
ξ_3	4	0	0	1	-1	1	1	-1	0
φ	11	0	0	0	1	2	2	4	-3

Баз. неиз.	Св. чл	ξ_1	ξ_2	ξ_3	x_1	$\downarrow$ x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2	1	0	0	1	-1	2	-2	-6
$\rightarrow \xi_2$	3	-1	1	0	0	3	-3	9	9
ξ_3	6	1	0	1	0	0	3	-3	-6
φ	9	-1	0	0	0	3	0	6	3

Баз. неиз.	Св. чл	ξ_1	ξ_2	ξ_3	x_1	x_2	$\downarrow$ x_3	x_4	x_5
x_1	3	2/3	1/3	0	1	0	1	1	-3
x_2	1	-1/3	1/3	0	0	1	-1	3	3
$\rightarrow \xi_3$	6	1	0	1	0	0	3	-3	-6
φ	6	0	-1	0	0	0	3	-3	-6

Баз. неиз.	Св. чл	ξ_1	ξ_2	ξ_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1/3	1/3	-1/3	1	0	0	2	-1
x_2	3	0	1/3	1/3	0	1	0	2	1
x_3	2	1/3	0	1/3	0	0	1	-1	-2
φ	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0

Как видно из последней таблицы, вспомогательная функция (16*) достигла своего минимума, равного нулю. При этом $\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0$, и мы нашли неотрицательное базисное решение системы (14*):

$$X = (1;3;2;0;0).$$

Пример 5.1.4. Найти неотрицательное базисное решение системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_1 + x_4 &= 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 &= 5. \end{aligned} \tag{14**}$$

Решение. Для этого введем вспомогательные неизвестные ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1 - \quad x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4, \\ \xi_2 &= 2 + x_1 - 2x_2 - 3x_1 - x_4, \\ \xi_3 &= 5 - x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4. \end{aligned} \tag{15**}$$

Введем вспомогательную линейную функцию

$$\varphi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3. \tag{16**}$$

Минимизируем по симплексному методу вспомогательную функцию (16*) при ограничениях (15**) и дополнительных условиях

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4; \quad \xi_i \geq 0, \quad i = 1,2,3.$

Баз. неиз.	Св. чл	ξ_1	ξ_2	ξ_3	x_1	x_2	x_3	x_4
ξ_1	1	1	0	0	1	2	-1	-1
ξ_2	2	0	1	0	-1	2	3	1
ξ_3	5	0	0	1	1	5	1	-1
φ	9	0	0	0	1	9	3	-1

Баз. неиз.	Св. чл	ξ_1	ξ_2	ξ_3	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	1/2	1/2	0	0	1/2	1	-1/2	-1/2
ξ_2	1	-1	1	0	-2	0	4	2
ξ_3	5/2	-5/2	0	1	-3/2	0	7/2	3/2
φ	7/2	-7/2	0	0	-7/2	0	15/2	7/2

Баз. неиз.	Св. чл	ξ_1	ξ_2	ξ_3	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	5/8	3/8	1/8	0	1/4	1	0	1/4
x_3	1/4	-1/4	1/4	0	-1/2	0	1	1/2
ξ_3	13/8	-13/8	-7/8	1	1/4	0	0	1/4
φ	13/8	-21/8	-15/8	0	1/4	0	0	1/4

Баз. неиз.	Св. чл	ξ_1	ξ_2	ξ_3	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	5/2	3/2	1/2	0	1	4	0	1
x_3	3/2	1/2	1/2	0	0	2	1	1
ξ_3	1	-2	-1	1	0	-1	0	0
φ	1	-3	-2	0	0	-1	0	0

Из последней симплексной таблицы видно, что $\min\varphi = 1 > 0$. Следовательно, согласно правилу нахождения неотрицательного базисного решения систем линейных уравнений, система (14**) не имеет неотрицательных базисных решений.

5.2. Симплексный метод (II схема)

5.2.1.Построение опорных планов

Пусть поставлена общая задача линейного программирования (§2 п.2.2):

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ &.. \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = 1,2,...,n),$$

где a_{ij}, $b_i \ge 0$, c_j - заданные постоянные величины.

Предположим сначала, что система ограничений задачи содержит m единичных векторов, причем без ограничения общности можно предположить, что единичными являются первые m векторов. Тогда имеем задачу

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min \tag{17}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + a_{1m+1}x_{m+1} + ... + a_{1n}x_n &= b_1, \\ x_2 \quad + a_{2m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_3 + a_{mm+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n &= b_{m,} \end{aligned} \tag{18}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,n. \tag{19}$$

Запишем систему (18) в векторной форме:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + ... + x_nA_n = A_0, \tag{20}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ ... \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}, \quad ..., \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{nm} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Поскольку векторы $A_1, A_2, ..., A_m$ линейно независимы, они образуют базис в m мерном пространстве. Поэтому в разложении (20) за базисные неизвестные выбираем $x_1, x_2, ..., x_m$, свободные неизвестные $x_{m+1}, ..., x_n$, приравниваем нулю и, учитывая, что $b_i \geq 0$, $i = 1,2,...,m$, а векторы $A_1, A_2, ..., A_m$- единичные; получаем первоначальный план:

$$X_0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0). \tag{21}$$

Плану (21) соответствует разложение

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m = A_0, \tag{22}$$

где векторы $A_1, A_2, ..., A_m$ линейно независимы, следовательно, построенный первоначальный план является и опорным.

Рассмотрим, как исходя из первоначального опорного плана (21), можно построить второй опорный план. Векторы $A_1, A_2, ..., A_m$ образуют базис в m-мерном пространстве, поэтому каждый из данных n векторов соотношения (20) можно разложить по векторам базиса, причем единственным образом:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}A_i, \quad j = 1,2,...,n.$$

Предположим, что для некоторого вектора, не входящего в базис, например, для вектора A_{m+1}, положителен хотя бы один из коэффициентов x_{im+1} в разложении

$$x_{1m+1}A_1 + x_{2m+1}A_2 + ... + x_{mm+1}A_m = A_{m+1}. \tag{23}$$

Выберем некоторую величину $\theta > 0$ (пока неизвестную), умножим на нее обе части равенства (23) и вычтем результат почленно из равенства (22). Получаем

$$(x_1 - \theta x_{1m+1})A_1 + (x_2 - \theta x_{2m+1})A_2 + ... + (x_m - \theta x_{mm+1})A_m + \theta A_{m+1} = A_0 . \qquad (24)$$

Таким образом, вектор

$$X_1 = \left(x_1 - \theta x_{1m+1}; x_2 - \theta x_{2m+1}; ...; x_m - \theta x_{mm+1}; \theta; 0, ..., 0\right)$$

является планом, если его компоненты неотрицательны.

Так как $\theta > 0$, то все компоненты вектора, X_1 в которые входят неположительные x_{im+1}, неотрицательны. Потому надо рассмотреть только компоненты, включающие положительные x_{im+1}, $i = 1,2,...,m$, т. е. необходимо определить такое $\theta > 0$, при котором для всех $x_{im+1} > 0$

$$x_i - \theta x_{im+1} \ge 0 . \qquad (25)$$

Из (25) получаем, $\theta \le \dfrac{x_i}{x_{im+1}}$, следовательно, вектор X_1- план задачи для любого θ, удовлетворяющего условию

$$0 < \theta \le \min \frac{x_i}{x_{im+1}} , \qquad (26)$$

где минимум берется по i, для которых $x_{im+1} > 0$.

Опорный план не может содержать $m+1$ положительных компонент, поэтому в плане X_1 необходимо обратить в нуль по крайней мере одну из компонент. Положим в (26), что

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{im+1}} , \qquad (27)$$

тогда компонента плана, X_1 для которой достигается минимум, обращается в нуль. Пусть эта компонента стоит на первом месте, т. е.

$$\theta_0 = \min \frac{x_i}{x_{im+1}} = \frac{x_1}{x_{im+1}} .$$

Подставляя значение θ_0 в (24), имеем

$$\left(x_1 - \frac{x_1}{x_{1m+1}} \cdot x_{1m+1}\right)A_1 + \left(x_2 - \frac{x_1}{x_{1m+1}} \cdot x_{2m+1}\right) + ... + \left(x_m - \frac{x_1}{x_{1m+1}} \cdot x_{mm+1}\right)A_m + \frac{x_1}{x_{1m+1}} A_{m+1} = A_0$$

откуда получаем разложение

$$x_2' A_2 + x_3' A_3 + ... + x_m' A_m + x_{m+1}' A_{m+1} = A_0 ,$$

которому соответствует новый опорный план:

$$X_1 = \left(0; x_2', x_3'; ..., x_m'; x_{m+1}'; 0; ...; 0\right),$$

где $x_i' = \theta_0 x_{im}'$, $\quad (i = 1,2,...,m)$; $\quad x_{m+1}' = \theta_0$.

Исключение одного вектора из базиса и включение вместо него другого с помощью θ_0 соответствуют переходу от одного базиса к другому с помощью метода Жордана-Гаусса. Поэтому система векторов $A_2, A_3, ..., A_m, A_{m+1}$ линейно независима и является новым базисом.

Для определения следующего опорного плана необходимо любой вектор, не входящий в базис $A_2, A_3, ..., A_m, A_{m+1}$, разложить по векторам этого базиса, а затем определить такое $\theta_0 > 0$, при котором исключался бы один из векторов этого базиса.

Таким образом, процесс получения новых опорных планов заключается в выборе вектора, который подлежит включению в базис, и определении вектора, подлежащего исключению из базиса. Критерий, используемый для определения вектора, который включается в базис, является одним из основных элементов симплексного метода. Заметим, что если вектор A_{m+1} подлежит включению в базис, а в его разложении (23) все $x_{im+1} \le 0$ очевидно, нельзя выбрать такое $\theta > 0$, которое исключало бы один из векторов разложения (24). В этом случае план X_1 содержит $m+1$ положительных компонент, а система векторов $A_1, A_2, A_3, ..., A_m, A_{m+1}$ линейно зависимая и определяет не угловую, а внутреннюю точку многогранника решений, в которой линейная функция не может достигать минимального значения. Это указывает на то, что гиперплоскость соответствующая линейной функции, не может стать опорной к многограннику решений, как бы далеко ни перемещать ее в направлении, обратном вектору ∇f, т. е. линейная функция не ограничена на многограннике решений.

Таким образом, если система ограничений задачи линейного программирования при неотрицательных свободных членах содержит единичный базис, то без дополнительных вычислений нужно получить первоначальный опорный план, а также коэффициенты разложения векторов по векторам базиса.

Пример 5.2.1. Дана система

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad &= 7, \\ 2x_1 - 4x_2 \qquad + x_5 \quad &= 12, \\ -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 \qquad + x_6 &= 10 \end{aligned}$$

или

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 + x_6A_6 = A_0,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

За базис выбираем систему векторов A_4, A_5, A_6, так нам эти векторы единичные и линейно независимые. Базисными неизвестными являются неизвестные x_4, x_5, x_6. Приравнивая нулю, свободные неизвестные $x_1 = x_2 = x_3$ получаем исходное базисное решение - первоначальный опорный план:

Этому плану соответствует разложение

$$7A_4 + 12A_5 + 10A_6 = A_0. \tag{28}$$

Чтобы перейти к другому опорному плану, возьмем любой вектор, не входящий в базис, но имеющий хотя бы одну положительную компоненту, например A_1, и разложим его по базису. Так как базис единичный, то коэффициентами разложения вектора A_1 по векторам базиса являются компоненты вектора A_1, т. е,

$$3A_4 + 2A_5 - 4A_6 = A_1. \qquad (29)$$

В разложении вектора имеются два положительных коэффициента. Умножая последнее соотношение на $\theta > 0$ и вычитая из (28), получим

$$(7-3\theta)A_4 + (12-2\theta)A_5 + (10+\theta)A_6 + \theta A_1 = A_0. \qquad (30)$$

Для исключения какого-нибудь вектора из разложения (30) находим

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i1}} = \min\left(\frac{7}{3};\frac{12}{3}\right) = \frac{7}{3}.$$

Подставляя значение $\theta_0 = \frac{7}{3}$ в (30), исключаем из разложения вектор A_4.

Имеем:

$$\left(7 - 3\cdot\frac{7}{3}\right)A_4 + \left(12 - 2\cdot\frac{7}{3}\right)A_5 + \left(10 + 4\cdot\frac{7}{3}\right)A_6 + \frac{7}{3}A_1 = A_0$$

В результате получаем второе разложение:

$$\frac{22}{3}A_5 + \frac{58}{3}A_6 + \frac{7}{3}A_1 = A_0,$$

которому соответствует новое базисное решение – новый опорный план

$$X_1 = \left(\frac{7}{3};0;0;0;\frac{22}{3};\frac{58}{3}\right).$$

Заметим, что не всякий вектор можно ввести в базис для получения нового базисного решения. В нашем примере, вводя в базис вектор, A_2 не удается получить новое базисное решение – новый опорный план.

Действительно, возьмем вектор A_2, который имеет следующее разложение в первоначальном базисе:

$$-A_4 - 4A_5 - 3A_6 = A_0. \qquad (31)$$

Умножая (31) на $\theta > 0$ и вычитая из (28), получаем разложение

$$(7+\theta)A_4 + (12+4\theta)A_5 + (10+3\theta)A_6 + \theta A_2 = A_0,$$

из которого ни при каком $\theta > 0$ нельзя исключить ни один из векторов, т.е. нет возможности получить новое базисное решение.

План $X_1 = (0;\theta;0;7-\theta;12+\theta;10+3\theta)$ не является опорным, так как содержит четыре положительные компоненты и соответствует внутренней точке многогранника решений.

5.2.2. Условия оптимальности

Предположим, что задача линейного программированная (17)—(19) обладает планами, и каждый ее опорный план является невырожденным. В этом случае для опорного плана (21) имеем:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m = A_0, \qquad (32)$$

$$x_1c_1 + x_2c_2 + ... + x_mc_m = f(X_0), \qquad (33)$$

где все $x_i > 0$, а $f(X_0)$-значение линейной функции, соответствующее этому плану.

Разложение любого вектора A_j по векторам данного базиса $A_1, A_2, ..., A_m$ единственное:

$$x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + ... + x_{mj}A_j = A_j, \quad j = 1,2,...,n, \qquad (34)$$

поэтому разложению вектора A_j в базисе соответствует и единственное, значение линейной функции

$$x_{1j}c_1 + x_{2j}c_j + ... + x_{mj}c_m = f_j, \quad j = 1,2,...,n, \qquad (35)$$

где f_j-значение линейной функции, если в нее вместо неизвестных подставить соответствующие коэффициенты разложения j-го вектора по векторам базиса.

Обозначим через c_j коэффициент линейной функции, соответствующий вектору A_j. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2.1. Если для некоторого вектора A_j выполняется условие $f_j - c_j > 0$, то план X_0 не является оптимальным, и можно построить такой план X для которого выполняется неравенство $f(X) < f(X_0)$.

Доказательство. Умножая (34) и (35) на $\theta > 0$ и вычитая результаты, соответственно, из (32) и (33), получаем

$$(x_1 - \theta x_{1j})A_1 + (x_2 - \theta x_{2j})A_2 + ... + (x_m - \theta x_{mj})A_m + \theta A_j = A_0 \qquad (36)$$

$$(x_1 - \theta x_{1j})c_1 + (x_2 - \theta x_{2j})c_2 + ... + (x_m - \theta x_{mj})c_m + \theta c_j = f(X_0) - \theta(f_j - c_j). \qquad (37)$$

В соотношении (37) к обеим частям прибавлена величина θc_j для $j = 1,2,...,n$. В (36) $x_1, x_2, ..., x_m$ положительны, поэтому всегда можно выбрать такое $\theta > 0$, чтобы все коэффициенты при векторах $A_1, A_2, ..., A_m$, A_j были неотрицательными, т. е. получить новый план задачи: $X = (x_1 - \theta x_{1j}; x \ - \theta x_{2j}; ...; x_m - \theta x_{mj}; \theta; 0; ...; 0)$,которому, согласно (37), соответствует значение линейной функции

$$f(X) = f(X_0) - \theta(f_j - c_j). \qquad (38)$$

Так как по условию теоремы $f_j - c_j > 0$ и $\theta > 0$, то

$$f(X) < f(X_0).$$

Следствие. Если для некоторого плана X_0 разложения всех векторов A_j, $j = 1,2,..., n$ в данном базисе удовлетворяют условию

$$f_j - c_j \le 0, \qquad (39)$$

то план X_0 является оптимальным.

Неравенства (39) являются условием оптимальности плана задачи, решаемой на отыскание минимального значения линейной функции, а значения $\Delta_j = f_j - c_j$ называются оценками плана.

Таким образом, для того чтобы план задачи на отыскание минимального значения линейной функции был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы его оценки были неположительными.

Для задачи линейного программирования (17) - (19), заключающейся в отыскании максимального значения линейной функции, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2.2. Если для некоторого вектора A_j, выполняется условие $f_j - c_j < 0$, то план X_0 не является оптимальным и можно построить такой план X, для которого выполняется условие $f(X) > f(X_0)$).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.2.1.

Следствие. Если для некоторого плана X_0 разложения всех векторов A_j, $j = 1, 2, ..., n$ в данном базисе удовлетворяют условию

$$f_j - c_j \le 0, \tag{40}$$

то план X_0 является оптимальным.

Неравенство (40) - условие оптимальности плана задачи на отыскание максимального значения линейной функции.

Таким образом, для того чтобы план задачи на отыскание максимального значения линейной функции был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы его оценки были неотрицательными.

5.2.3. Алгоритм симплексного метода

Как следует из теорем 5.2.1 и 5.2.2 и следствий, начиная с исходного опорного плана задачи можно получить последовательность опорных планов, завершающихся оптимальным планом.

Продолжим рассмотрение задачи линейного программирования (17)—(19) на отыскание минимального значения линейной функции, опорный план которой $X_0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ определяется системой m-мерных единичных векторов $A_1, A_2, ..., A_m$. Для исследования этого опорного плана на оптимальность необходимо векторы A_j, $j = 1, 2, ..., n$ системы (18) разложить по векторам базиса $A_1, A_2, ..., A_m$ и подсчитать значения оценок $\Delta_j = f_j - c_j$. Базис является единичным, поэтому коэффициентами разложения вектора A_j по базису служат его компоненты, т. е. $x_{ij} = a_{ij}$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$. Дальнейшие вычисления удобнее проводить, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения первого опорного плана, записать в симплексную таблицу (табл. 5). В столбце C базиса запишем коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса. В столбце A_0 - первоначальный опорный план X_0, в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план, в столбцах A_j, $j = 1, 2, ..., n$ записываем коэффициенты разложения j-го вектора по базису, обозначаемые в дальнейшем через X_j. В $m+1$- й строке в столбце A_0 записываем значения линейной функции $f(X_0)$, которое она принимает при найденном опорном плане, а в столбцах A_j - значения оценок $\Delta_j = f_j - c_j$.

Значения $f(X_0)$ и $f_j = f(X_j)$ находим, подставляя в линейную функцию, соответственно, компоненты опорного плана и коэффициенты разложения j-го вектора по векторам базиса, поэтому эти значения в табл. 5 можно получить как скалярное произведение:

$$f(X_0) = C_б X_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \,,$$

$$f_j = C_б X_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} \,, \quad j = 1,2,...,n \,,$$

где c_j коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса.

Таблица 5.

i	Бази	$C_б$	A_0	c_1	c_2	$\dots$	c_l	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_j	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
				A_1	A_2	$\dots$	A_l	$\dots$	A_m	A_{m+1}	$\dots$	A_j	$\dots$	A_k	$\dots$	A_n
1	A_1	c_1	x_1	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	x_{1m+1}	$\dots$	x_{1j}	$\dots$	x_{1k}	$\dots$	x_{1n}
2	A_2	c_2	x_2	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	x_{2m+1}	$\dots$	x_{2j}	$\dots$	x_{2k}	$\dots$	x_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	0	$\dots$	..	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
l	A_l	c_l	x_l	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	x_{lm+1}		x_{lj}	$\dots$	x_{lk}	$\dots$	$x_{\ln}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	A_m	c_m	x_m	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	x_{mm+1}	$\dots$	x_{mj}	$\dots$	x_{mk}	$\dots$	x_{mn}
$m+1$	Δ_j		f_0	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$f_{m+1} - c_{m+1}$	$\dots$	$f_j - c_j$	$\dots$	$f_k - c_k$	$\dots$	$f_n - c_n$

После составления табл. 5 просматриваем $m+1$- ю строку. Если для всех $j = 1,2,...,n$ разности $f_j - c_j \le 0$, то опорный план X_0 оптимальный и минимальное значение линейной функции равно $f(X_0)$.

Предположим, что одна из оценок $f_j - c_j > 0$; тогда план X_0 не является оптимальным и, включая в базис вектор, соответствующий этой оценке, можно построить другой опорный план, которому соответствует меньшее значение линейной функции.

Если положительных оценок несколько, то на основании соотношения (38) в базис должен быть включен вектор, которому соответствует $\max\left[\theta_{0j}(f_j - c_j)\right]$, где максимум берется по тем j, для которых $f_j - c_j > 0$ и θ_{0j} определяется для каждого j. Это дает возможность на данном шаге перейти к вершине многогранника решений, связанной с наибольшим уменьшением линейной функции и в большинстве случаев приводящей к уменьшению количества итераций, что при решении задачи «вручную» позволяет быстрее получить оптимальное решение. При решении задачи на компьютере вектор, подлежащий включению в базис, выбирается по $\max(f_j - c_j)$

Если имеется несколько одинаковых максимальных значений $\theta_{0j}(f_j - c_j)$, то из соответствующих им векторов включается в базис, прежде всего, вектор, которому соответствует $\min c_j$. Если хотя бы для одной положительной оценки $f_j - c_j > 0$ коэффициенты разложения x_{ij} соответствующего вектора неположительны, то линейная функция не ограничена на многограннике решений и, выбирая θ, ее значение можно сделать сколь угодно малым; многогранник решений в этом случае (представляет собой неограниченную многогранную область.

Пусть $\max[\theta_{0j}(f_j - c_j)] = \theta_{0k}(f_k - c_k)$, т. е. максимальное значение достигается для k - го вектора, $m < k \le n$. Тогда в базис включается вектор A_k и исключается-вектор, которому соответствует $\theta_{0k} = \min \frac{x_i}{x_{ik}}, \quad (x_{ik} > 0)$.

Допустим, что $\theta_{0k} = \min \frac{x_i}{x_{ik}} = \frac{x_l}{x_{lk}}$ достигается для вектора базиса, состоящего в l - й строке; тогда вектор A_l исключается из базиса. Элемент x_{lk} называется разрешающим, а столбец и строка, на пересечении которых он находится, - направляющими. Новому опорному плану соответствует базис, состоящий из векторов $A_1, A_2, ..., A_{l-1}, A_k, A_{l+1}, ..., A_m$. Чтобы вычислить новый опорный план и проверить его на оптимальность, необходимо все векторы $A_0, A_j, \quad j = 1,2,...,n$ разложить по векторам базиса. Первоначальный базис был единичным, поэтому

$$A_0 = x_1 + ... + x_l A_l + ... + x_m A_m, \tag{41}$$

$$A_k = x_{1k} A_1 + ... + x_{lk} A_l + ... + x_{mk} A_m, \tag{42}$$

$$A_j = x_{1j} A_1 + ... + x_{lj} A_l + ... + x_{mj} A_m. \tag{43}$$

Из (42) имеем

$$A_l = \frac{1}{x_{lk}}\left(A_k - x_{1k} A_1 - ... - x_{mk} A_m\right). \tag{44}$$

Подставляя выражение A_l в (41), получаем

$$A_0 = x_1 A_1 + ... + x_l \left[\frac{1}{x_{lk}}\left(A_k - x_{1k} A_1 - ... - x_{mk} A_m\right)\right] + ... + x_m A_m,$$

или

$$A_0 = \left(x_1 - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{1k}\right)_1 A_1 + ... + \frac{x_l}{x_{lk}} A_k + ... + \left(x_m - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{mk}\right) A_m.$$

Таким образом, новый опорный план $X_1 = (x_1'; x_2'; ...; x_k'; ...; x_m')$ вычисляется по формулам

$$\begin{cases} x_i' = x_i - \dfrac{x_l}{x_{lk}} x_{ik} \quad (i \ne l) \\ x_k' = \dfrac{x_l}{x_{lk}} \quad (i = l). \end{cases} \tag{45}$$

Подставляя в (44) в (43), получаем разложение вектора A_j,- по векторам нового базиса:

$$A_j = x'_{1j}A_1 + \ldots + x'_{kj}A_k + \ldots + x'_{mj}A_m$$

где

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} & (i \neq l) \\ x'_{kj} = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} & (i = l). \end{cases} \tag{46}$$

Объединяя (45) и (46), находим, что новый опорный план и разложения векторов в новом базисе при $j = 1,2,\ldots,n$ определяются по формулам

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} & (i \neq l) \\ x'_{lj} = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} & (i = l), \end{cases} \tag{47}$$

которые являются формулами полных исключений Жордана-Гаусса. Действительно, полагая $j = k$, имеем

$$\begin{cases} x'_{ik} = x_{ik} - \dfrac{x_{lk}}{x_{lk}} x_{ik} & (i \neq l) \\ x'_{lk} = \dfrac{x_{lk}}{x_{lk}} = 1 & (i = l), \end{cases}$$

т. е. все коэффициенты разложения вектора, вводимого в базис, за исключением одного, обращаются в нуль, коэффициент, взятый за разрешающий элемент, - в единицу. Вектору базиса соответствует оценка, равная нулю, поэтому для вычисления значений $m+1$-й строки также используем формулы (47).

Таким образом, чтобы получить коэффициенты разложения векторов $A_0, A_j,\ \ j = 1,2,\ldots,n$ по векторам нового базиса, значения оценок нового опорного плана и значение линейной функции, нужно разделить все элементы направляющей строки на разрешающий элемент и, производя одно полное исключение по методу Жордана - Гаусса с помощью этой преобразованной строки, составить симплексную таблицу (табл. 6).

Таблица 6

i	Бази	$C_б$	A_0	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_k	…	c_n
				A_1	A_2	…	A_l	…	A_m	A_{m+1}	…	A_j	…	A_k	…	A_n
1	A_1	c_1	x'_1	1	0	…	x'_{1l}	…	0	x'_{1m+1}	…	x'_{1j}	…	0	…	x'_{1n}
2	A_2	c_2	x'_2	0	1	…	x'_{2l}	…	0	x'_{2m+1}	…	x'_{2j}	…	0	…	x'_{2n}
…	…	…	…	…	0	…	..	…	…	…	…	…	…	…	…	…
l	A_k	c_k	x'_k	0	0	…	x'_{ll}	…	0	x'_{lm+1}		x'_{lj}	…	1	…	$x'_{\ln}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…		…	…	…	…
m	A_m	c_m	x'_m	0	0	…	x'_{ml}	…	1	x'_{mm+1}	…	x'_{mj}	…	0	…	x'_{mn}
$m+1$	Δ_j		f'_0	0	0	…	$f'_l - c_k$	…	0	$f'_{m+1} - c_{m+1}$	…	$f'_j - c_j$	…	0	…	$f'_n - c_n$

Формулы

$$f(X_0)=C_б X_0; \quad f_j-c_j=C_б X_j-c_j \tag{48}$$

используют для контроля за правильностью произведенных вычислений.

Если в табл. 6 в $m+1$-й строке все оценки $f_j-c_j\le 0$, то полученный план X_0 является оптимальным; если же имеются положительные оценки, то отыскивают следующий опорный план. Процесс продолжают либо до получения оптимального плана, либо до установления неограниченности линейной функции решаемой задачи. Если среди оценок оптимального плана нулевые только оценки, соответствующие базисным векторам, то это говорит о единственности оптимального плана. Если же нулевая .оценка соответствует вектору, не входящему в базис, то в общем случае это означает, что оптимальный план не единственный.

Действительно, пусть некоторому A_{m+1}, не входящему в базис, соответствует оценка $f_{m+1}-c_{m+1}$. Включим этот вектор в базис и по θ_{0m+1} какой-то вектор исключим из базиса. В результате получим новый опорный план-, которому соответствует то же значение линейной функции, что и в первоначальном оптимальном плане, т. е. линейная функция достигает оптимума в двух угловых точках многогранника решений, но тогда по теореме 2.3 (§2) она достигает его в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих угловых точек. Таким образом, в этом случае задача линейного программирования обладает бесконечным множеством оптимальных планов.

Используя теорему 5.2.2 и ее следствие, решаем задачу линейного программирования на отыскание максимальных значений линейной функции.

При невыполнении условия оптимальности (40) в базис включают, в первую очередь, тот вектор, которому соответствует $\min\left[\theta_{0j}\left(f_j-c_j\right)\right]$, где минимум берется по тем j, для которых $f_j-c_j<0$. Если минимальных оценок несколько, то в базис, прежде всего, включают вектор, который соответствует $\max c_j$. В остальном симплексный процесс аналогичен процессу, имеющему место при отыскании минимального значения линейной функции.

Пример. На заводе изготовляются изделия четырех типов. Стоимости единицы изделия каждого типа: $c_1=2, \quad c_2=1, \quad c_3=3, \quad c_4=5$. На изготовление изделий расходуются энергия, материалы, труд. Размеры на единицу изделия каждого типа и заводские ресурсы на них приведены в следующей таблице:

	I тип	II тип	III тип	IV тип	Ресурсы
Энергия	2	3	1	2	30
Материалы	4	2	1	2	40
Трудовые затраты	1	2	3	1	25

Требуется найти такой план производства изделий, при котором стоимость всей продукции завода была максимальна.

Решение. Нетрудно составить математическую модель данной производственной задачи:

$$f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 30,$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 40,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 25,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

От этой задачи в нормальной форме перейдем к задаче в канонической форме

$$f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \to \max$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 30,$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 40,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_7 = 25,$$
$$x_1 \ge 0, \ldots, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0,$$

где x_5, x_6, x_7- дополнительные переменные, имеющие экономический смысл свободных ресурсов при рассматриваемом плане.

В качестве первоначального опорного плана можно взять точку $X = (0,0,0,0,30,40,25)$, которой соответствует базисные векторы A_5, A_6, A_7.

Составим первую симплексную таблицу.

Базис	$C_б$	A_0	2	1	3	5	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_5	0	30	2	3	1	2	1	0	0
A_6	0	40	4	2	1	2	0	1	0
A_7	0	25	1	2	3	1	0	0	1
Δ_j		0	-2	-1	-3	-5	0	0	0

В последней строке среди чисел Δ_j имеются отрицательные числа. Значит, первоначальный опорный план неоптимальный. Над отрицательными числами Δ_j нет столбцов из неположительных чисел. Значит пока нельзя сказать, что решение задачи не ограничено. Первоначальный план можно улучшить, включив в базис вектор, которому соответствует $\min\{\theta_{0j} \cdot \Delta_j\} < 0$. Вычислим:

$$\theta_{01} = \min\left\{\frac{30}{2}; \frac{40}{4}; \frac{25}{1}\right\} = 10, \quad \theta_{02} = \min\left\{\frac{30}{3}; \frac{40}{2}; \frac{25}{2}\right\} = 10, \quad \theta_{03} = \min\left\{\frac{30}{1}; \frac{40}{1}; \frac{25}{3}\right\} = \frac{25}{3},$$

$$\theta_{04} = \min\left\{\frac{30}{2}; \frac{40}{2}; \frac{25}{1}\right\} = 15;$$

$$\min\{\theta_{0j} \cdot \Delta_j\} = \min\left\{(-2 \cdot 10);\ (-1) \cdot 10;\ (-3) \cdot \frac{25}{3};\ (-5) \cdot 15\right\} = (-5) \cdot 15 = -75\,.$$

Следовательно, разрешающим элементом служит число 2, стоящее на пересечении первой строки и четвертого столбца, первая строка и четвертый столбец являются направляющими; необходимо вектор A_4 включить в базис, а A_5 исключить.

Составим вторую симплексную таблицу.

Базис	$C_б$	A_0	2	1	3	5	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_4	5	15	1	3/2	1/2	1	1/2	0	0
A_6	0	10	2	-1	0	0	-1	1	0
A_7	0	10	0	-1/2	5/2	0	-1/2	0	1
Δ_j		55	3	13/2	-1/2	0	5/2	0	0

Аналогично строится следующая таблица.

Базис	$C_б$	A_0	2	1	3	5	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_4	5	13	1	8/5	0	1	3/5	0	-1/5
A_6	0	10	2	-9/10	0	0	-1	1	0
A_3	3	4	0	-1/5	1	0	0	0	2/5
Δ_j		77	3	32/5	0	0	3	0	3/5

Итак, имеем таблицу, у которой в последней строке все числа $\Delta_j \geq 0$. Следовательно, опорный план $X = (0,0,4,13,10,0,0)$ является оптимальным планом исходной задачи, т.е. $X_{opt} = X = (0,0,4,13,10,0,0)$, и $f_{\max} = f(X_{opt}) = 77$.

5.2.4. Решение задач линейного программирования методом искусственного базиса

В п.5.2.1 было показано, что если ограничения задачи линейного программирования содержат единичную матрицу порядка m, то тем самым при неотрицательных правых частях уравнений определен первоначальный план, исходя из которого с помощью симплексного метода находится оптимальный план.

Если ограничения задачи линейного программирования можно преобразовать к виду $AX \leq A_0$ при $A_0 \geq 0$, то система ограничений всегда содержит единичную матрицу. Многие задачи линейного программирования не содержат единичной матрицы. В этом случае для решения задач применяются следующие методы:

а) двухфазный метод решения задач линейного программирования;

б) решение задач линейного программирования с помощью М-метода.

Замечание. Фактически идейную основу этих методов мы демонстрировали при отыскании неотрицательного базисного решения систем линейных алгебраических уравнений (п.5.1.4).

а) Двухфазный метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min \tag{49}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned} \tag{50}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1,2,...,n), \tag{51}$$

где a_{ij}, $b_i \geq 0$, c_j - заданные постоянные величины и система ограничений не содержит единичной матрицы. Предположим что, относительно этой задачи неизвестно, имеет ли она планы и содержит ли уравнения (50) линейно зависимые условия.

Дж. Данцигом [4] предложен метод решения задачи (49)-(51), состоящий из двух фаз. В первой фазе находится опорный план и выясняется вопрос о ранге системы (50), во второй – приводится стандартная процедура симплексного метода. Здесь рассмотрим лишь первую фазу.

По задаче (49)-(51) построим вспомогательную задачу

$$\varphi = x_1 + x_2 + ... + x_m \to \min \tag{52}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} = b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \quad\quad + x_{n+m} = b_m, \end{aligned} \tag{53}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,n+m, \tag{54}$$

в которой переменные x_{n+i}, $i = 1,2,...,m$, называются искусственными.

Теорема 5.2.3. Необходимым и достаточным условием существования планов задачи (49)-(51) является выполнение равенства

$$\varphi = x_1 + x_2 + ... + x_m = 0 \tag{55}$$

на решении задачи.

Доказательство. Действительно, если равенство (55) выполняется, то из условия $x_{n+i} \geq 0$, $i = 1,2,...,m$ следует, что $x_{n+i} = 0$, $i = 1,2,...,m$, а значит, компоненты $x_1, x_2, ..., x_n$ решения задачи (52)-(54) составляют план $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ задачи (49) - (51).

Предположим, что равенство (55) на решении $X = (x_1, x_2, ..., x_n x_{n+1}, ..., x_{n+m})$ задачи (52) - (54) не выполняется, но задача (49)-(51) имеет план. Дополним этот вектор нулями до плана вектора задачи (52) - (54):

$$X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \overbrace{0, ...0}^{m} \right).$$

Тогда

$$\varphi\left(X^*\right) = x_1^* + x_2^* + ... + x_m^* < x_1 + x_2 + ... + x_m = \varphi(X),$$

что противоречит тому, что на векторе $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n x_{n+1}, ..., x_{n+m}\right)$ линейная функция (52) достигает минимума.

Значит, условие (55) является необходимым и достаточным для существования допустимых векторов задачи (49) - (51).

Замечание. Задача (52) - (54) всегда имеет решение, так как нижняя граница линейной функции на множестве планов равна нулю.

Вспомогательную задачу (52) - (54) можно решить симплексным методом, ибо первоначальный опорный план для нее известен:

$$X = \left(0, 0, ..., 0, b_1, ..., b_m\right).$$

При решении задачи (52)- (54) возможны три исхода:

1) в полученном решении не все искусственные переменные равны нулю;

2) все искусственные переменные равны нулю и среди базисных векторов нет векторов, соответствующих искусственным переменным;

3) все искусственные переменные равны нулю, но среди базисных векторов есть векторы, соответствующие искусственным переменным.

В случае 1), согласно доказанному задача (49) - (51) не разрешима из-за отсутствия планов, т. е. из-за того, что уравнения в (50) несовместны.

В случае 2) решение задачи (52)-(54) без искусственных переменных можно использовать в качестве первоначального опорного плана при решении задачи (49)-(51) симплексным методом.

В случае 3) решение задачи (52)-(54) нельзя использовать непосредственно, ибо в конечном базисе присутствуют векторы, соответствующие искусственным переменным. Поэтому, прежде чем переходить ко второй фазе, нужно из числа базисных исключить лишние векторы.

Для этого преобразуем последнюю таблицу первой фазы. В качестве разрешающей строки выберем строку с искусственной переменной x_{n+k}. В качестве разрешающего столбца берем столбец, в котором находится вектор условий A_j, $j \le n$, не вошедший в базис, и в котором $x_{n+kj} \ne 0$. После преобразования таблицы строка Δ_j не изменится. Не изменится и столбец A_0, только теперь вместо переменной x_{n+k} будет стоять переменная $x_j = 0, \quad j \le n$. Этот процесс закончится или удалением из базиса всех векторов, соответствующих искусственным переменным, или получением равенств

$$x_{n+kj} = 0, j = 1,2,...,n; \quad k = k_1, k_2, ..., k_s, \tag{56}$$

для всех оставшихся искусственных базисных переменных x_{n+k}; $k = k_1, k_2, ..., k_s$. В первом случае переходим ко второй фазе. Второй случай по смыслу чисел x_{ij}

означает, что среди уравнений в (50) есть линейно зависимые. Напомним, что x_{ij} - i-я координата вектора A_j по базисному вектору A_i. Если $x_{n+kj} \neq 0$ для всех $j = 1,2,...,n$, то это означает, что все векторы можно разложить по базисным, в которые не входит вектор A_{n+k}, т. е. на вектор A_{n+k} а базисные векторы можно сократить. Поэтому при выполнении равенств (56) в симплексной таблице вычеркиваем s строк, содержащих искусственные переменные, и вторую фазу начнем с $m-s$ базисных векторов.

В терминах исходной задачи полученный результат означает, что из уравнений (50) исключается s линейно зависимых и процедура симплексного метода начинается при меньшем числе уравнений.

Проиллюстрируем двухфазный метод на следующем примере.

Пример.

$$
\begin{aligned}
&f = -x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 5,\\
&2x_1 + x_2 = 3,\\
&-2x_1 + 2x_2 = 4,\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Решаем задачу первой фазы:

$$
\begin{aligned}
&\varphi = x_4 + x_5 \to \min\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 5,\\
&2x_1 + x_2 + x_4 = 3,\\
&-2x_1 + 2x_2 + x_5 = 4,\\
&x_1 \geq 0, ..., x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Произведя вычисления, получим следующие таблицы:

Базис	$C_б$	A_0	0	0	0	1	1
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	5	1	1	1	0	0
A_4	1	3	2	1	0	1	0
A_5	1	4	-2	2	0	0	1
Δ_j		7	0	3	0	0	0

Базис	$C_б$	A_0	0	0	0	1	1
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	3	2	0	1	0	-1/2
A_4	1	1	3	0	0	1	-1/2
A_2	0	2	-1	1	0	0	1/2
Δ_j		1	3	0	0	0	-3/2

Базис	$C_б$	A_0	0	0	0	1	1
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	7/3	0	0	1	-2/3	-1/6
A_1	0	1/3	1	0	0	1/3	-1/6
A_2	0	7/3	0	1	0	1/3	1/3
Δ_j		0	0	0	0	-1	-1

Далее переходим ко второй фазе, взяв за первоначальный опорный план $X = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ и базис A_1, A_2, A_3. Для этого плана составлена следующая таблица:

Базис	$C_б$	A_0	-1	2	-1
			A_1	A_2	A_3
A_3	-1	7/3	0	0	1
A_1	-1	1/3	1	0	0
A_2	2	7/3	0	1	0
Δ_j		2	0	0	0

Таким образом, $X = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ доставляет минимум линейной функции $f = -x_1 + 2x_2 - x_3$, т.е. $X_{opt} = X = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$, и $f_{\min} = f\left(X_{opt}\right) = 2$.

б) Решение задач линейного программирования с помощью М-метода

Этот метод предложен американским ученым Чарнесом [4]. В этом методе обе фазы предыдущего метода объединены. Вместо исходной задачи заданной в общем виде

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ &.. \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \\ &\quad x_j \geq 0, \quad (j = 1,2,...,n), \end{aligned}$$

где a_{ij}, $b_i \geq 0$, c_j - заданные постоянные величины и система ограничений не содержит единичной матрицы, рассматривается так называемая М-задача или расширенная задача:

$$\overline{f} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + Mx_{n+1} + ... + Mx_{n+m} \to \min$$

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} \qquad = b_2, \\
.... \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = b_m, \\
\qquad x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,...,n+m\ .
\end{array}
$$

Замечание. Здесь для получения единичной матрицы к каждому равенству исходной задачи прибавили по одной переменной $x_{n+i}, \quad i = 1,2,...,m$, которые называют искусственными.

Величина M предполагается достаточно большим положительным числом, если задача решается на отыскание минимального значения линейной функции, и достаточно малым отрицательным числом, если находится максимальное значение линейной функции. Единичные векторы $A_{n+1}, A_{n+2},..., A_{n+m}$, соответствующие искусственным переменным, образуют искусственный базис.

Для отыскания оптимального плана исходной задачи используют следующую теорему.

Теорема 5.2.4. Если в оптимальном плане $\overline{X} = (x_1, x_2,..., x_n, 0,...,0)$ расширенной задачи искусственные переменные $x_{n+i} = 0, \quad i = 1,2,...,m$, то план $X = (x_1, x_2,..., x_n)$ является оптимальным планом исходной задачи.

Доказательство. Заметим, что если план $\overline{X}$ - оптимальный план расширенной задачи, то план X - план первоначальной задачи, при этом $\bar{f}(\overline{X}) = f(X)$. Равенство значений функции следует из того, что план $\overline{X}$ от плана X отличается m последними компонентами равными нулю.

Докажем, что план X - оптимальный план исходной задачи. Допустим, что X не является оптимальным планом. Тогда существует такой оптимальный план $X^* = (x_1^*, x_2^*,..., x_n^*)$, для которого $f(X^*) < f(X)$. Отсюда для вектора $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*,..., x_n^*, 0,...,0)$, являющегося планом расширенной задачи, получаем

$$\bar{f}(\overline{X}^*) = f(X^*) < f(X) = \bar{f}(\overline{X})$$
$$\bar{f}(\overline{X}^*) < \bar{f}(\overline{X}).$$

Таким образом, план $\overline{X}$ расширенной задачи не является оптимальным, что противоречит условию теоремы.

Применение симплексного метода к расширенной задаче обеспечивает построение плана, в котором каждое из искусственных переменных $x_{n+m} = 0$. Если первоначальная задача не обладает планами (т.е. она не совместна), то оптимальное решение расширенной задачи содержит по крайней мере одно $x_{n+m} > 0$.

Для отыскания оптимального плана расширенной задачи в случае, если заранее не задана величина M, применяется симплексный метод, с составлением симплексных таблиц, которые имеют на одну строку больше, чем обычная симплексная таблица. По этой $m+2$-й строке определяют вектор, подлежащий включению в базис. Итерационный процесс по $m+2$-й строке проводят для исключения из базиса всех искусственных векторов, затем процесс отыскания оптимального плана продолжают по $m+1$-й строке.

Проиллюстрируем М-метод на следующем примере.

Пример.

$$
\begin{aligned}
&f = -x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min\\
&\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 2,\\
&x_1 + 2x_2 = 3,\\
&-x_1 + 4x_2 = 3,\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Так как вектор условий A_3 является единичным, то его можно взять в качестве базисного. Поэтому вводим две искусственные переменные x_4, x_5 и составляем расширенную задачу (М-задачу):

$$
\begin{aligned}
&\bar{f} = -x_1 + 2x_2 - x_3 + Mx_4 + Mx_5 \to \min\\
&\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 2,\\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 3,\\
&-x_1 + 4x_2 + x_5 = 3,\\
&x_1 \geq 0, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Произведя стандартные вычисления, получим следующие таблицы:

Базис	$C_б$	A_0	-1	2	-1	M	M
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-1	2	1/2	1/2	1	0	0
A_4	M	3	1	2	0	1	0
A_5	M	3	-1	4	0	0	0
Δ_j		-2	1/2	-5/2	0	0	0
		6	0	6	0	0	0

Базис	$C_б$	A_0	-1	2	-1	M	M
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-1	13/8	5/8	0	1	0	-1/8
A_4	M	3/2	3/2	0	0	1	-1/2
A_2	2	3/4	-1/4	1	0	0	1/4
Δ_j		-13/8	-1/8	0	0	0	5/8
		9/4	3/2	0	0	0	-3/2

Базис	$C_б$	A_0	-1	2	-1	M	M
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-1	1	0	0	1	-5/12	1/12
A_1	-1	1	1	0	0	2/3	-1/3
A_2	2	1	0	0	0	1/6	1/6
Δ_j		0	0	0	0	1/12-M	7/12-M

Таким образом, $\overline{X} = (1,1,1,0,0)$ является оптимальным планом расширенной задачи (М-задачи). В нем искусственные переменные $x_4 = 0, x_5 = 0$, следовательно, в силу теоремы 5.2.4 план $X = (1,1,1)$ является оптимальным планом исходной задачи, т.е. $X_{opt} = X = (1,1,1)$, и $f_{\min} = f(X_{opt}) = 0$.

Замечание. Отметим, что если исходная задача является задачей на отыскания максимального значения линейной функции, то для нее М-задача или расширенная задача имеет вид:

$$\overline{f} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m} \to \max$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &&= b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} &&= b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad + x_{n+m} &&= b_m,
\end{aligned}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2,\ldots,n+m\,.$$

Замечание. С помощью последней задачи довольно просто можно показать эвристическую основу М-метода. Она такова. Введением искусственных переменных $x_{n+1} \ge 0, x_{n+2} \ge 0, \ldots, x_{n+m} \ge 0$ нарушается каждое из исходных уравнений. За нарушение условий платится «штраф» - $M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$, где M - мера штрафа за единицу нарушения. Таким образом, общая прибыль от выбора вектора $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, при котором условия задачи выполняются с заданными отклонениями $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$, будет равна $c_1x_1 + .. + c_nx_n - M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$. При больших относительных штрафах M эта величина может стать отрицательной, поэтому, чем больше M, тем менее выгодно нарушать условия задачи. В задачах линейного программирования существует конечный штраф M, при превышении которого ни одно из условий нельзя нарушать, если стремиться получить максимальное значение линейной функции.

§6. Вырожденные задачи

Определение. Задача линейного программирования называется невырожденной, если у нее нет вырожденных опорных планов.

Определение. Задача линейного программирования называется вырожденной, если у нее имеется вырожденный опорный план.

Если проанализировать обоснование симплексного метода, приведенное в § 5 (п.2) нетрудно обнаружить моменты, где используется предположение о невырожденности задачи. Главная трудность применения стандартной процедуры к вырожденным задачам заключается в том, что на некоторой итерации параметр θ_0 может оказаться равным нулю, в силу чего на ней линейная функция не возрастает. Если подобная ситуация повторится несколько раз, то появляется опасность зацикливания, т.е. через несколько итераций возможно возвращение к тому же базису, при котором впервые оказалось, что $\theta_0 = 0$. Существуют примеры вырожденных задач, при решении которых получается зацикливание. Однако пока не описано практических задач, где это явление наблюдалось. Поэтому целесообразно следовать во всех случаях стандартной процедуре симплексного метода. При этом, возможно, потребуются дополнительные итерации для вырожденных задач, но сохранится простота алгоритма. Существует несколько способов избежания зацикливания [4].

§7. Двойственность в линейном программировании

7.1. Понятие двойственности. Любой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую связанную с ней задачу, которую называют двойственной по отношению к первой. Первоначальная задача называется исходной или прямой.

Связь исходной и двойственной задач состоит в том, что коэффициенты C_j функции цели исходной задачи являются свободными членами системы ограничений двойственной задачи, свободные члены b_i системы ограничений исходной задачи служат коэффициентами функции цели двойственной задачи, а матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи является транспонированной матрицей коэффициентов системы ограничений исходной задачи. Решение двойственной задачи может быть получено из решения исходной и наоборот (п.2).

В качестве примера рассмотрим задачу использования ресурсов. Предприятие №1 имеет m видов ресурсов в количестве $b_i \quad (i = 1,2,...,m)$ единиц, из которых производится n видов продукций. Для производства 1 ед. j-й продукции расходуется a_{ij} ед. i-*го* ресурса, а ее стоимость составляет C_j ед. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий ее максимальный выпуск в стоимостном выражении. Обозначим через $x_j \quad (j = 1,2,...,n)$ количество ед. j-й продукций. Тогда математическая модель исходной задачи имеет вид:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2,\\
&..\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

т.е. найти вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, который удовлетворяет ограничениям (2) и доставляет максимальное значение линейной функции (1).

Допустим, предприятие №1 решило продать все ресурсы (на рынке спрос на эти ресурсы очень высок), а предприятие №2 решило закупить все ресурсы, которыми располагает предприятие №1. В этом случае предприятиям (совместно) необходимо установить оптимальные цены на эти ресурсы, исходя из следующих условий:

1) общая стоимость ресурсов для предприятия №2 должна быть минимальной;

2) за каждый вид ресурса предприятию №1 надо уплатить не менее той суммы, которую это предприятие может получать при переработке данного вида ресурса в готовую продукцию.

Оценим ресурсы, необходимые для изготовления продукции. Обозначим

через y_i $(i = 1,2,...,m)$ стоимость единицы i-го ресурса. Тогда стоимость всех затраченных ресурсов, идущих на изготовление единицы j-й продукции, равна $\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i$. Стоимость затраченных ресурсов не может быть меньше стоимости окончательного продукта, поэтому должно выполняться неравенство $\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i \ge C_j$, $j = 1,2,...,n.$ Стоимость всех имеющихся ресурсов выразится величиной $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$.

Итак, получили следующую задачу

$$g = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1,\\
&a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2,\\
&..\\
&a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n,\\
&y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, ..., y_m \ge 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

т.е. найти вектор $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$, который удовлетворяет ограничениям (4) и доставляет минимальное значение линейной функции (3).

Связь полученной задачи(3)–(4) с исходной задачей (1)-(2) очевидна. Задача (3)-(4) является двойственной задачей к исходной задаче (1)-(2).

Отношение двойственности является взаимным. Если двойственную задачу считать исходной, то двойственной к ней будет прямая задача, поэтому имеет смысл, говорить о паре двойственных задач.

Обычно различают следующие виды пары двойственных задач - симметрических и несимметрических.

1) Симметрические двойственные задачи

Разновидностью двойственных задач линейного программирования являются двойственные симметрические задачи, в которых система ограничений как исходной, так и двойственной задач задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.

Исходная задача.

$$f = C'X \to \min,$$
$$AX \geq A_0, \quad X \geq 0.$$

Двойственная задача.

$$g = A_0'Y \to \max,$$
$$A'Y \leq C, \quad Y \geq 0.$$

2) Несимметрические двойственные задачи

В несимметрических двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными.

Исходная задача.

$$\begin{aligned} & f = C'X \to \min, \\ & AX = A_0, \quad X \geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Двойственная задача.

$$\begin{aligned} & g = A_0'Y \to \max, \\ & A'Y \leq C. \end{aligned} \tag{6}$$

Замечание. Систему неравенств в симметрических двойственных задач с помощью дополнительных переменных можно преобразовать в систему уравнений, поэтому всякую пару симметрических двойственных задач можно преобразовать в пару несимметричесхих. Поэтому ниже (в п.2) теорему двойственности докажем для несимметрических двойственных задач.

Математические модели пары двойственных задач могут иметь один из следующих видов.

Таблица 7.1

№	Исходная задача	Двойственная задача
Несимметричные задачи		
I	$f = C'X \to \min,$ $AX = A_0, \quad X \geq 0.$	$g = A_0'Y \to \max,$ $A'Y \leq C.$

II	$f = C'X \to \max,$ $AX = A_0,\ \ X \ge 0.$	$g = A_0'Y \to \min,$ $A'Y \ge C.$
Симметричные задачи		
III	$f = C'X \to \min,$ $AX \ge A_0,\ \ X \ge 0.$	$g = A_0'Y \to \max,$ $A'Y \le C,\ \ Y \ge 0.$
IV	$f = C'X \to \max,$ $AX \le A_0,\ \ X \ge 0.$	$g = A_0'Y \to \min,$ $A'Y \ge C,\ \ Y \ge 0.$

Следовательно, прежде чем записать двойственную задачу для данной исходной, систему ограничений исходной задачи необходимо привести к соответствующему виду.

Пример 1. Для следующей задачи

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$$

составить двойственную задачу.

Решение**.** Рассматриваемая задача относится к несимметричным

задачам (II вид). Число переменных в двойственной задаче равно числу уравнений исходной задачи, т.е. равно трём. Коэффициентами целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы уравнений исходной задачи, т.е. 12, 24, 18.

Целевая функция исходной задачи исследуется на максимум, а система условий содержит только уравнения. Поэтому в двойственной задаче целевая функция исследуется на минимум, а её переменные могут принимать любые значения (в том числе и отрицательные). Так как все три переменные исходной задачи принимают только лишь неотрицательные значения, то в системе условий двойственной задачи должны быть три неравенства вида «≥». Следовательно, для исходной задачи двойственная задача имеет вид:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 2 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \ge 1 \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 3 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$g = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \to \min.$$

Пример 2.Для следующей задачи

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$$

составить двойственную задачу.

Решение. Эта задача в таком виде не соответствует ни одному из видов задач, приведённых в таблице. Однако, умножением первого неравенства на –1, её можно привести к виду III :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge -4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min.$$

Для этой задачи двойственной будет следующая задача:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \le 2 \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \le 1 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \le 5 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$g = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to max.$$

Пример 3. Для следующей задачи

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$f = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max$$

составить двойственную задачу.

Решение. Эта задача тоже не соответствует ни одному из видов задач, приведённых в таблице. Рассматриваемую задачу можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \le 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$f = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max.$$

Эта задача относится к симметричным задачам вида IV. Поэтому двойственная задача будет иметь вид:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 4 \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 1 \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \le -4 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$g = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \to min.$$

7.2. Связь между решениями прямой и двойственной задач

Рассмотрим пару двойственных задач (5) и (6). Существующие связи между оптимальными планами пары двойственных задач устанавливают следующие теоремы двойственности.

Теорема 7.1 (первая теорема двойственности). Если из пары двойственных задач одна обладает оптимальным планом, то и другая имеет решение, причём для экстремальных значений целевых функций выполняется соотношение

$$\min f = \max g, \qquad X_{opt} = D^{-1}A_0, \qquad Y_{opt} = C_Б^* D^{-1},$$

где D^{-1} – матрица, составленная из компонент векторов окончательного базиса, A_0 – вектор, составленный из свободных членов исходной задачи; $C_Б^*$ - вектор, составленный из коэффициентов при окончательных базисных переменных в целевой функции.

Если целевая функция одной из задач не ограничена, то другая не имеет решения.

Доказательство. Предположим, что исходная задача обладает оптимальным планом, который получен симплексным методом. Не нарушая общности, можно считать, что окончательный базис состоит из m первых векторов $A_1, A_2, ..., A_m$. Тогда последняя симплексная таблица имеет вид:

Таблица 7.2

i	Базис	$C_Б^*$	A_0	c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_n
				A_1	A_2	$\dots$	A_m	A_{m+1}	$\dots$	A_n
1	A_1	c_1^*	x_1^*	1	0	$\dots$	0	x'_{1m+1}	$\dots$	x'_{1n}
2	A_2	c_2^*	x_2^*	0	1	$\dots$	0	x'_{2m+1}	$\dots$	x'_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	A_m	c_m^*	x_m^*	0	0	$\dots$	1	x'_{mm+1}	$\dots$	x'_{mn}
$m+1$	Δ_j		f_0^*	$f_1 - c_1$	$f_2 - c_2$	$\dots$	$f_m - c_m$	$f'_{m+1} - c_{m+1}$	$\dots$	$f'_n - c_n$

Пусть D - матрица, составленная из компонент векторов окончательного базиса $A_1, A_2, ..., A_m$, тогда табл. 7.2 состоит из коэффициентов разложения векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ исходной системы по векторам базиса, т. е. каждому вектору A_j в этой таблице соответствует такой вектор X_j, что

$$A_j = DX_j, \quad j = 1,2,...,n. \tag{7}$$

Для оптимального плана получаем

$$A_0 = DX^*, \tag{8}$$

где $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$.

Обозначим через $\overline{X}$ матрицу, составленную из коэффициентов разложения векторов A_j, записанных а табл. 7.2. Тогда, учитывая соотношения (7) и (8), получаем:

$$A = D\overline{X}, \qquad D^{-1}A = \overline{X}, \tag{9}$$

$$A_0DX^*, \qquad D^{-1}A_0 = X^*, \tag{10}$$

$$\min f = C^*X^*, \tag{11}$$

$$\bar{f} = C^*\overline{X} - C \le 0, \tag{12}$$

где $C^* = (c_1^*, c_2^*, ..., c_m^*)$, $C = (c_1, c_2, ..., c_m, c_{m+1}, ..., c_n)$, а $\bar{f} = \left(C^*X_1 - c_1; C^*X_2 - c_2; ..., C^*X_N - c_n\right) = \left(f_1 - c_1; f_2 - c_2, ..., f_n - c_n\right)$ - вектор, компоненты которого неположительны, так как они совпадают с $f_j - c_j \le 0$, соответствующими оптимальному плану.

Оптимальный план исходной задачи имеет вид $X^* = D^{-1}A_0$, поэтому оптимальный план двойственной задачи ищем в виде

$$Y^* = C^*D^{-1}. \tag{13}$$

Покажем, что Y^* действительно план двойственной задачи. Для этого ограничения задачи (6) запишем в виде неравенства $YA - C \le 0$, в левую часть которого подставим Y^*. Тогда на основании (13), (9) и (12) получим

$$Y^*A - C = C^*D^{-1}A - C = C^*\overline{X} - C \le 0,$$

откуда находим $Y^*A \le C$ или то же самое $A'Y^* \le C$*.

Так как Y^* удовлетворяет ограничениям задачи (6), то это и есть план двойственной задачи. При этом плане значение линейной функции двойственной задачи $g(Y^*) = Y^*A_0$. Учитывая соотношения (13), (10) и (11), имеем

$$g(Y^*) = Y^*A_0 = C^*D^{-1}A_0 = C^*X^* = \min f(X^*). \tag{14}$$

Таким образом, значение линейной функции двойственной задачи от Y^* численно равно минимальному значению линейной функции исходной задачи.

Докажем теперь, что Y^* является оптимальным планом. Умножим (5) на любой план Y двойственной задачи, а (6) - на любой план X исходной задачи:

$$YAX = YA_0 = g(Y), \qquad YAX \le CX = f(X).$$

Отсюда следует, что для любых планов X и Y выполняется неравенство

$$g(Y) \le f(X). \tag{15}$$

Этим же соотношением связаны и экстремальные значения $g(Y) \le \min f(X)$. Из последнего неравенства заключаем, что максимальное значение линейной функции достигается только в случае, если $\max g(Y) = \min f(X)$, но это значение (14) $g(Y)$ достигает при плане Y^*, следовательно, план Y^* - оптимальный план двойственной задачи.

Аналогично можно доказать, что если двойственная задача имеет решение, то исходная также обладает решением и имеет место соотношение $\max g(Y) = \min f(X)$.

Для доказательства второй части теоремы допустим, что линейная функция исходной задачи не ограничена снизу. Тогда из (15) следует, что $g(Y) \le -\infty$. Это выражение лишено смысла, следовательно, двойственная задача не имеет решений.

Аналогично предположим, что линейная функция двойственной задачи не ограничена сверху. Тогда из (15) получаем, что $f(X) \geq +\infty$. Это выражение также лишено смысла, поэтому исходная задача не имеет решений.

Доказанная теорема позволяет при решении одной из двойственных задач находить оптимальный план другой.

Пример 4. Для следующей задачи

$$f = x_2 - x_4 - 3x_5 \to \min$$
$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1$$
$$-4x_2 + x_3 = 2x_4 - x_5 = 2$$
$$3x_2 + x_5 + x_6 = 5$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1{,}6$$

составить двойственную задачу и найти её решения.

Решение. Двойственная задача имеет вид:

$$\begin{cases} 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ -y_1 + 2y_2 \leq -1 \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq -3 \\ y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

$$g = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max.$$

Решение исходной задачи находим симплексным методом.

Б	C_δ		0	1	0	-1	-3	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	0	1	-1	2	0	-1	1	0
A_3	0	2	0	-4	1	2	-1	0
A_6	0	5	0	3	0	0	1	1
Δ_j		0	0	-1	0	1	3	0
A_5	-3	1	1	2	0	-1	1	0
A_3	0	3	1	-2	1	1	0	0
A_6	0	4	-1	1	0	1	0	1
Δ_j		-3	-3	-7	0	4	0	0
A_5	-3	4	2	2	1	0	1	0
A_4	-1	3	1	-2	1	1	0	0
A_6	0	1	-2	3	-1	0	0	1
Δ_j		-15	-7	1	-4	0	0	0
A_5	-3	4	2	0	1	0	1	0
A_4	-1	11/3	-1/3	0	1/3	1	0	2/3
A_2	1	1/3	-2/3	1	-1/3	0	0	1/3
Δ_j		-46/3	-19/3	0	-11/3	0	0	-1/3

Оптимальный план исходной задачи $X_{opt} = (0;1/3;0;11/3;4;0)$, при котором $f_{\min} = -\frac{46}{3}$, получен в четвертой итерации. Используя эту итерацию, найдем оптимальный план двойственной задачи. Согласно первой теоремы двойственности, оптимальный план двойственной задачи находится из соотношения $Y^* = C^* D^{-1}$, где матрица D^{-1}- матрица, обратная матрице, составленной из компонент векторов, входящих в последний базис, при котором получен оптимальный план исходной задачи. В последний базис входят векторы A_5, A_4, A_2; значит,

$$D = (A_5, A_4, A_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица D^{-1} образована из коэффициентов, стоящих в столбцах A_1, A_3, A_6 четвертой итерации:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Из этой же итерации следует $C^* = (-3;-1;-1;1)$. Таким образом,

$$Y^* = C^* D^{-1} = (-3; \quad -1; \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (-19/3; \quad -11/3; \quad -1/3),$$

т.е. $y_i = C^* X_i$, где X_i - коэффициенты разложения последней итерации, стоящие в столбцах векторов первоначального единичного базиса.

Итак, i- ю двойственную переменную можно получить из значения оценки последней строки симплексной таблицы, стоящей против соответствующего вектора, входившего в первоначальный единичный базис, если к ней прибавить соответствующее значение коэффициента целевой функции исходной задачи:

$$y_1 = -\frac{19}{3} + 0 = -\frac{19}{3}; \quad y_2 = -\frac{11}{3} + 0 = -\frac{11}{3}; \quad y_3 = -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}.$$

При этом плане $g_{\max} = -\frac{46}{3}$.

Замечание. На практике при нахождении оптимальных планов двойственных задач, выбирают задачу более удобную для решения. Затем с помощью первой теоремы двойственности находят оптимальный план другой.

Пример 5. Найти оптимальный план следующей задачи

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \le -3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min.$$

Решение. Для этой задачи двойственной будет следующая задача

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \le 1 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 2 \\ -y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 2y_4 \le 3 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$g = 2y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 3y_4 \to \max.$$

Для решения исходной задачи необходимо ввести четыре дополнительные переменные и одну искусственную. Таким образом, исходная симплексная таблица будет состоять из шести строк и девяти столбцов.

Для решения двойственной задачи необходимо ввести три дополнительные переменные. Её первая симплексная таблица содержит четыре строки и восемь столбцов.

Целесообразным является решать двойственную задачу. Двойственную задачу решим симплексным методом.

Б	C_δ	A_0	2	3	6	3	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_5	0	1	2	-1	1	2	1	0	0
A_6	0	2	2	1	1	-1	0	1	0
A_7	0	3	-1	4	-2	-2	0	0	1
	Δ_j	0	-2	-3	-6	-3	0	0	0
A_3	6	1	2	-1	1	2	1	0	0
A_6	0	1	0	2	0	-1	-1	1	0
A_7	0	5	3	6	0	2	2	0	1
	Δ_j	6	10	-9	0	9	6	0	0
A_3	6	3/2	2	0	1	3/2	1/2	1/2	0
A_2	3	1/2	0	1	0	-1/2	-1/2	1/2	0
A_7	0	2	3	0	0	4	5	3	1
	Δ_j	21/2	10	0	0	9/2	3/2	9/2	0

Оптимальный план двойственной задачи $Y^* = (0;1/2;3/2;0)$, $g_{\max} = \dfrac{21}{2}$.

Оптимальный план исходной задачи находим, используя оценки последней строки симплексной таблицы, стоящие в столбцах A_5, A_6, A_7:

$$x_1 = 3/2 + 0 = 3/2; \quad x_2 = 9/2 + 0 = 9/2; \quad x_3 = 0 + 0 = 0.$$

При оптимальном плане исходной задачи

$$X^* = (3/2);9/2;0)$$

целевая функция достигает минимального значения $f_{\min} = \frac{21}{2}$.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 7.2 (вторая теорема двойственности). Если при подстановке компонент оптимального плана в систему ограничений исходной задачи i-е ограничение обращается в неравенство, то i-я компонента оптимального плана двойственной задачи равна нулю.

Если i-я компонента оптимального плана двойственной задачи положительна, то i-е ограничение исходной задачи удовлетворяется ее оптимальным решением как строгое равенство.

§8. Экономическая интерпретация решения задачи линейного программирования. Экономико-математический анализ полученных оптимальных решений

8.1.Экономическая интерпретация решения задачи линейного программирования

Оказывается заключительная симплексная таблица «насыщена» весьма важными данными, лишь небольшую часть которых составляют оптимальные значения переменных. Из симплексной таблицы можно получить информацию относительно:

-оптимального решения;

-статуса ресурсов;

-ценности каждого ресурса;

-чувствительности оптимального решения к изменению запасов ресурсов, вариациям коэффициентов целевой функции и интенсивности потребления ресурсов.

Сведения, относящиеся к первым трем пунктам, можно извлечь непосредственно из итоговой симплексной таблицы. Получение информации, относящейся к четвертому пункту, требует дополнительных вычислений.

Для иллюстрации возможностей получения указанной выше информации из заключительной симплексной таблицы воспользуемся опять задачей об ассортименте продукции (см. § 4).

Определение оптимального ассортимента продукции. Предприятие изготавливает два вида продукции P_1 и P_2, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используется два вида сырья - A и B. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц, соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида P_1 и вида P_2 дан в таблице 1.

Таблица 1

Сырье	Расход сырья на 1.ед.продукции P_1	Расход сырья на 1.ед.продукции P_2	Запас сырья, ед.
A	2	3	9
B	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию P_1 никогда не превышает спроса на продукцию P_2 более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию P_2 никогда не превышает 2 ед. в сутки.

Оптовые цены единицы продукции равны: 3 ден.ед. – для P_1 и 4 ден. ед. для P_2.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Эта задача формулируется следующим образом:

$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$ (доход);

$2x_1 + 3x_2 \le 9$ (сырье А);

$3x_1 + 2x_2 \le 13$ (сырье В);

$x_1 - x_2 \le 1$ (спрос);

$x_2 \le 2$ (спрос);

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Решим эту задачу методом симплекса. Симплексная таблица имеет вид:

Таблица1

			3	4	0	0	0	0
$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	0	9	2	3	1	0	0	0
A_4	0	13	3	2	0	1	0	0
A_5	0	1	1	-1	0	0	1	0
A_6	0	2	0	1	0	0	0	1
Δ_j		0	-3	-4	0	0	0	0
A_3	0	7	0	5	1	0	-2	0
A_4	0	10	0	5	0	1	-3	0
A_1	3	1	1	-1	0	0	1	0
A_6	0	2	0	1	0	0	0	1
Δ_j		3	0	-7	0	0	3	0

A_2	4	7/5	0	1	1/5	0	-2/5	0
A_4	0	3	0	0	-1	1	-1	0
A_1	3	12/5	1	0	1/5	0	3/5	0
A_6	0	3/5	0	0	-1/5	0	2/5	1
Δ_j		64/5	0	0	7/5	0	1/5	0

В таблице x_3, x_4, x_5, x_6 -выравнивающие (дополнительные) переменные.

Оптимальное решение

С точки зрения практического использования результатов решения задач линейного программирования классификация переменных на базисные и небазисные не имеет значения и при анализе оптимального решения может не учитываться. Переменные, вектора которых отсутствуют в симплексной таблице в столбце $Б$-«базисные вектора», обязательно имеют нулевое значение. Значения остальных переменных приводятся в столбце A_0-«свободные члены».

При интерпретации результатов оптимизации в задаче об ассортименте продукции нас, прежде всего, интересуют объемы производства продукции P_1 и P_2, т. е. значения управляемых переменных x_1 и x_2. Используя данные, содержащиеся в симплексной таблице для оптимального решения, основные результаты можно представить в следующем виде:

Управляемые переменные	Оптимальные значения	Решение
x_1	2,4	Объем производства продукции P_1, должен быть равен 2,4 ед. в сутки
x_2	1,4	Объем производства продукции P_2, должен быть равен 1,4 ед. в сутки
$Z_{\max}$	12,8	Доход от реализации продукции будет равен 12,8 д. е. в сутки

Статус ресурсов

В § 4 ресурсы относились либо к дефицитным либо к недефицитным - в зависимости от того, полное или частичное их использование предусматривает оптимальное решение задачи. Сейчас цель состоит в том, чтобы получить соответствующую информацию непосредственно из оптимальной таблицы.

В модели, построенной для задачи об ассортименте продукции, фигурируют четыре ограничения со знаком «$\le$». Первые два ограничения (определяющие допустимый расход исходного сырья) представляют собой истинные ограничения на ресурсы. Третье и четвертое ограничения относятся к спросу. Эти требования можно рассматривать как ограничения на соответствующие ресурсы, так как увеличение спроса на продукцию эквивалентно расширению представительства предприятия на рынке сбыта. В отношении финансовых средств такая ситуация имеет те же последствия, что и увеличение запасов ресурсов, требующее распределения дополнительных вложений.

Из вышеизложенного следует, что статус ресурсов (дефицитный или недефицитный) для любой модели линейного программирования можно установить непосредственно из результирующей симплексной таблицы, обращая внимание на значения выравнивающих переменных. Применительно к нашей задаче можно привести следующую сводную таблицу:

Ресурс	Выравнивающая переменная	Статус ресурса
Сырье A	$x_3 = 0$	Дефицитный
Сырье B	$x_4 = 3$	Недефицитный
Превышение объема производства продукции P_1, по отношению к отношению к объему производства производства продукции P_2	$x_5 = 0$	Дефицитный
Спрос на продукцию P_2	$x_6 = 0$	Недефицитный

Положительное значение выравнивающей переменной указывает на неполное использование соответствующего ресурса, т. е. данный ресурс является недефицитным. Если же выравнивающая переменная равна 0, то это свидетельствует о полном потреблении соответствующего ресурса. Из сводной таблицы видно, что ресурсы 2 и 4 связаны с запасами сырья B и возможностями сбыта продукции P_2. Поэтому любое увеличение их запасов сверх установленного максимального значения приведет лишь к тому, что они станут еще более недефицитными. Оптимальное решение задачи при этом останется неизменным.

Ресурсы, увеличение запасов которых позволяет улучшить решение (увеличить доход), — это сырье A и возможности по сбыту продукции P_1, поскольку из оптимальной симплексной таблицы видно, что они дефицитные. В связи с этим логично поставить вопрос: какому из дефицитных ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств на увеличение их запасов, с тем чтобы получить от них максимальную отдачу? Ответ на этот вопрос будет дан в следующем разделе этой главы, где рассматривается ценность различных ресурсов.

Ценность ресурса

Ценность ресурса характеризуется величиной улучшения оптимального значения Z, приходящегося на единицу прироста объема данного ресурса. Графическая интерпретация этого определения применительно к условиям задачи об ассортименте продукции была дана в § 4 (вторая задача на чувствительность). Графический анализ показывает, что ценность ресурсов 1, 2, 3 и 4 равна:

y_1 = 1,4 д. е. на единицу прироста запасов ресурса сырья *A;*

y_2=0, y_4 = 0;

y_3=0,2 д. е. на единицу прироста превышения производства продукции P_1 по отношению к объему производства продукции P_2.

Эта информация представлена в оптимальной таблице, а именно, в последней строке в столбцах, которые соответствуют векторам начального базиса A_3, A_4, A_5, A_6 : 1,4; 0; 0,2; 0. Указанные числа в точности соответствуют значениям y_1, y_2, y_3, y_4.

Хотя в § 4 были даны необходимые разъяснения, связанные с определением ценности ресурсов, покажем, каким образом аналогичный результат можно получить непосредственно из симплексной таблицы.

Рассмотрим Z-уравнение оптимальной симплексной таблицы решения задачи об ассортименте продукции:

$$Z = 12{,}8 - \left(1{,}4 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0{,}2 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6\right).$$

Положительное приращение переменной относительно x_3 текущего нулевого значения приводит к пропорциональному уменьшению Z, причем коэффициент пропорциональности равен 1,4 д. е. Однако из первого ограничения модели следует

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9,$$

т. е. увеличение x_3 эквивалентно снижению запаса ресурса 1 (сырья *A)*. Отсюда следует, что уменьшение запаса первого ресурса вызывает пропорциональное уменьшение целевой функции с коэффициентом пропорциональности, равным 1,4 д. е. Аналогичные рассуждения справедливы и для ресурса 3.

В отношении ресурсов 2 и 4 было установлено, что их ценность равна 0 ($y_2 = y_4$=0). Этого и следовало ожидать, так как ресурсы 2 и 4 оказались недефицитными. Такой результат получается всякий раз, когда соответствующие выравнивающие переменные имеют положительное значение.

Несмотря на то, что ценность различных ресурсов, определяемая значениями переменных y_i, была представлена в стоимостном (д. е.) выражении, ее нельзя отождествлять с действительными ценами, по которым возможна закупка соответствующих ресурсов. На самом деле речь идет о некоторой мере, имеющей экономическую природу и количественно характеризующей ценность ресурса только относительно полученного оптимального значения Z. При изменении ограничений модели соответствующие экономические оценки будут меняться даже тогда, когда оптимизируемый процесс предполагает применение тех же ресурсов. Поэтому при характеристике ценности ресурсов экономисты предпочитают использовать такие термины, как теневая цена или двойственная оценка.

Заметим, что теневая цена характеризует интенсивность улучшения оптимального решения Z. Однако при этом не фиксируется интервал значений увеличения запасов ресурсов, при которых интенсивность улучшения целевой функции остается постоянной. Для большинства практических ситуаций логично предположить наличие верхнего предела увеличения запасов, при превышении которого соответствующее ограничение становится избыточным, что в свою очередь приводит к новому базисному решению и соответствующим ему новым теневым ценам. Ниже определяется интервал значений запасов ресурса, при которых соответствующее ограничение не становится избыточным.

Максимальное изменение запаса ресурса

При решении вопроса о том, запас какого из ресурсов следует увеличивать в первую очередь, обычно используются двойственные оценки (теневые цены). Чтобы определить интервал значений изменения запаса ресурса, при которых двойственная оценка данного ресурса, фигурирующая в заключительной симплекс-таблице, остается неизменной, необходимо выполнить ряд дополнительных вычислений. Положим, что в задаче об ассортименте продукции запас первого ресурса (сырья A) изменился на Δ_1, т. е. запас сырья A составит (9 + Δ_1) единиц. Введем это изменение в начальную симплекс-таблицу и затем выполним всю последовательность вычислений.

Поскольку элементы правых частей ограничений никогда не используются в качестве разрешающих, то очевидно, что на каждой итерации вычислений Δ_1, будет оказывать влияние только на значения элементов столбца «свободные члены».

Результаты вычислений элементов столбца A_0 - «свободные члены» сведены в следующую таблицу:

Начальная симплексная таблица	Оптимальная симплексная таблица
$9 + \Delta_1$	$1{,}4 + 0{,}2 \cdot \Delta_1$
13	$3 - 1 \cdot \Delta_1$
1	$2{,}4 + 0{,}2 \cdot \Delta_1$
2	$0{,}6 - 0{,}2 \cdot \Delta_1$
0	$12{,}8 + 1{,}4 \cdot \Delta_1$

Все изменения элементов столбца «свободные члены» определяются непосредственно по данным, содержащимся в симплекс-таблицах. Каждый элемент столбца «свободные члены» представляет собой сумму двух величин: 1) постоянной и 2) члена, линейно зависящего от Δ_1. Постоянные соответствуют числам, которые фигурируют в оптимальной симплекс-таблице до введения Δ_1 в столбце «свободные члены». Коэффициенты при Δ_1 во вторых слагаемых равны коэффициентам при x_3 в оптимальной симплексной таблице.

Заметим, что при анализе изменений в правых частях второго, третьего и четвертого ограничений нужно пользоваться коэффициентами при переменных x_4, x_5, x_6 соответственно.

Так как введение Δ_1 сказывается лишь на правой части ограничений (на элементах столбца «свободные члены»), изменение запаса ресурса может повлиять только на допустимость решения. Поэтому Δ_1 не может принимать значений, при которых какая-либо из базисных переменных становится отрицательной. Из этого следует, что величина Δ_1, должна быть ограничена таким интервалом значений, при котором выполняется условие неотрицательности правых частей ограничений в результирующей симплекс-таблице, т. е.:

x_2=1,4 + 0,2· $\Delta_1 \geq 0$, (I)

x_4= 3 - 1· $\Delta_1 \geq 0$, (II)

x_1=2,4 +0,2· $\Delta_1 \geq 0$, (II)

x_6=0,6 - 0,2 · $\Delta_1 \geq 0$. (IV)

Для определения допустимого интервала изменения Δ_1 рассмотрим два случая.

***Случай* 1:** $\Delta_1 > 0$.

Соотношения (I) и (III) всегда выполняются при $\Delta_1 \geq 0$. Соотношения (II) и (IV) определяют следующие предельные значения Δ_1,: $\Delta_1 \leq 3$; $\Delta_1 \leq 3$. Таким образом, все четыре соотношения выполняются при $\Delta_1 \leq 3$

***Случай* 2:** $\Delta_1 < 0$.

Соотношения (II) и (IV) выполняются при $\Delta_1 < 0$. Соотношения (I) и (III) справедливы при $\Delta_1 \geq -12$; $\Delta_1 \geq -7$, соответственно.

Таким образом, оба соотношения справедливы при $\Delta_1 \geq -7$.

Объединяя результаты, полученные для обоих случаев, можно сделать вывод, что при $-7 \leq \Delta_1 \leq 3$ решение рассматриваемой системы всегда будет допустимым. Любое значение Δ_1, выходящее за предел указанного интервала (т.е. уменьшение запаса сырья A более чем на 7 единиц или увеличение более чем на 3 единицы), приведет к недопустимости решения и новой совокупности базисных переменных.

Анализ на чувствительность оптимального решения к вариации коэффициентов целевой функции

В .§ 4 на основе графического представления модели было показано, что при определенных значениях изменения коэффициентов целевой функции оптимальные значения переменных остаются неизменными (хотя оптимальное значение Z при этом меняется). Возвращаясь к этому вопросу, покажем, каким образом интересующую нас информацию можно получить из данных, содержащихся в оптимальной симплексной таблице.

Следует отметить, что уравнение целевой функции также не используется в качестве ведущего уравнения. Поэтому любые изменения коэффициентов целевой функции окажут влияние только на Z - уравнение результирующей симплексной таблицы. Это означает, что такие изменения могут сделать полученное решение неоптимальным. Наша цель заключается в том, чтобы найти интервалы изменений коэффициентов целевой функции, при которых оптимальные значения переменных остаются неизменными.

Чтобы показать, как выполняются соответствующие вычисления, положим, что доход, получаемый с единицы продукции P_1, изменяется от 3 до 3 + δ_1, где δ_1 может быть как положительным, так и отрицательным числом. Целевая функция в этом случае принимает следующий вид:

$$Z = (3+\delta_1)\cdot x_1 + 4x_2 \to \max .$$

Если воспользоваться данными начальной симплексной таблицы и выполнить все вычисления, необходимые для получения оптимальной симплексной таблицы, то последнее Z - уравнение будет выглядеть следующим образом:

$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Δ_j		$12{,}8+2{,}4\delta_1$	0	0	$1{,}4+0{,}2\delta_1$	0	$0{,}2+0{,}6\delta_1$	0

Это уравнение (строка целевой функции) отличается от Z-уравнения до введения δ_1, только наличием членов, содержащих δ_1. Коэффициенты при δ_1 равны коэффициентам при соответствующих переменных в x_1- уравнении (x_1-строка) симплекс-таблицы для полученного ранее оптимального решения:

$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	3	2,4	1	0	0,2	0	0,6	0

Мы рассматриваем x_1- уравнение, так как коэффициент именно при этой переменной в выражении для целевой функции в начальной симплексной таблице изменился на δ_1.

Оптимальные значения переменных будут оставаться неизменными при значениях δ_1, удовлетворяющих условию неотрицательности (задача на отыскание максимума) всех коэффициентов при свободных переменных в Z-уравнении. Таким образом, должны выполняться следующие неравенства:

$$1{,}4 + 0{,}2\cdot\delta_1 \geq 0;$$

$$0{,}2 + 0{,}6\cdot\delta_1 \geq 0.$$

Из первого неравенства получаем, то $\delta_1 \geq$-7, а из второго следует, что $\delta_1 \geq$-1/3. Эти результаты определяют пределы изменения коэффициента
$-1/3 \leq \delta_1 < +\infty$.

Таким образом, при уменьшении коэффициента целевой функции при переменной x_1 до значения, равного $\left(3+\left(\frac{1}{3}\right)\right)=2\frac{2}{3}$, или при его увеличении до $+\infty$ оптимальные значения переменных остаются неизменными. Этот вывод совпадает с результатом, полученным в § 4.

Следует отметить, что оптимальное значение Z будет изменяться в соответствии с выражением (12,8 + 2,4 δ_1), где $-1/3 \le \delta_1 < +\infty$.

Мы рассмотрели случай изменения коэффициента при базисной переменной x_1. В случае изменения коэффициента при свободной переменной в целевой функции происходит изменение коэффициента только при данной переменной в оптимальной симплексной таблице. Рассмотрим в качестве иллюстрации случай, когда коэффициент при свободной переменной x_3 (первая выравнивающая переменная) изменяется от 0 до δ_2. Выполнение преобразований, необходимых для получения заключительной симплекс-таблицы, приводит к следующему результирующему Z - уравнению:

$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Δ_j		12,8	0	0	1,4-δ_2	0	0,2	0

Из приведенного фрагмента заключительной симплексной таблицы видно, что единственное отличие от Z-уравнения до введения δ_2 состоит в том, что коэффициент при x_5 уменьшился на δ_2. Таким образом, коэффициент при свободной переменной в результирующем Z-уравнении нужно уменьшить на ту же величину, на которую он увеличивался в исходном Z-уравнении.

8.2. Экономико-математический анализ полученных оптимальных решений

Оптимальное решение задачи линейного программирования существенно зависит от реальной экономической ситуации, складывающейся на предприятии. На решение задачи могут повлиять следующие экономические ситуации:

1) изменение запасов ресурсов;

2) внедрение нового технологического способа производства, позволяющего снизить расход сырья А и В;

3) происшедшие изменения в ценовой политике на предприятии;

4) предполагается выпуск нового вида продукции.

Результаты влияния данных экономических ситуаций на оптимальное решение можно получить в ходе проведения экономико-математического анализа модели на чувствительность.

Анализ на чувствительность оптимального решения базируется на второй теореме двойственности (теорема 7.2 из § 7):

Теорема. Если при подстановке компонент оптимального плана в систему ограничений исходной задачи i-е ограничение обращается в неравенство, то i-я компонента оптимального плана двойственной задачи равна нулю.

Если i-я компонента оптимального плана двойственной задачи

положительна, то i-е ограничение исходной задачи удовлетворяется ее оптимальным решением как строгое равенство.

Таким образом:

1.Двойственные оценки характеризуют дефицитность ресурсов. Величина y_i в оптимальном решении двойственной задачи является оценкой i-го ресурса; чем больше значение оценки y_i, тем выше дефицитность ресурса. Для недефицитного ресурса $y_i = 0$.

2.Двойственные оценки показывают, как влияют изменения правой части ограничений (запасов ресурсов) на значение целевой функции. Практический интерес представляют границы (нижняя и верхняя) изменения ресурсов, в которых величины оценок остаются неизменными.

3.Двойственные оценки являются показателем эффективности производства отдельных видов продукции с позиции критерия оптимальности. С этой точки зрения в оптимальный план может быть включена лишь та продукция j-го вида, для которой выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j .$$

4. Двойственные оценки позволяют провести сравнение суммарных условных затрат и результатов.

Это свойство следует из принципа двойственности, в котором устанавливается связь между значениями функции прямой и двойственной задач, т. е. $Z_{\max} = L_{\min}$. Это означает, что оценка всех затрат производства должна равняться оценке произведенного продукта.

Используя данные свойства двойственных оценок, проведем анализ изменений исходной задачи, которые могут привести к недопустимости и неоптимальности решения.

Обратимся к конкретной задаче и проиллюстрируем применение анализа оптимального решения на чувствительность на примере задачи оптимизации ассортимента выпускаемой продукции (лаб.раб.№1).

Математическая модель исходной задачи имеет вид:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max \qquad (1)$$

$2x_1 + 3x_2 \le 9$ (сырье А);

$3x_1 + 2x_2 \le 13$ (сырье В); (2)

$x_1 - x_2 \le 1$ (спрос);

$x_2 \le 2$ (спрос);

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Математическая модель двойственной задачи имеет вид:

$$L = 9y_1 + 13y_2 + y_3 + 2y_4 \to \min \qquad (3)$$

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3,$$
$$3y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \geq 4, \qquad (4)$$
$$y_1 \geq 0, ..., y_4 \geq 0.$$

Как видно, задачи (1) - (2) и (3) - (4) образуют симметричную пару двойственных задач. Чтобы найти решение этих задач, следует сначала отыскать решение какой-либо одной из них. Так как система ограничений задачи (1) - (2) содержит лишь неравенства вида «≤», то лучше сначала найти решение этой задачи. Ее решение приведено в таблице 1:

$$X_{opt} = \left(\frac{12}{5}, \frac{7}{5}\right), \qquad Z_{\max} = \frac{64}{5} = 12{,}8.$$

Из этой же таблицы получим решение двойственной задачи (3) – (4):

$$Y_{opt} = \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{1}{5}, 0\right), \qquad L_{\min} = \frac{64}{5} = 12{,}8.$$

Из этой таблицы видно, что оптимальным планом производства продукций является такой, при котором изготовляется $\frac{12}{5} = 2{,}4$ продукция P_1 и $\frac{7}{5} = 1{,}4$ продукции P_2. При данном плане производства остается неиспользованным 3 ед. ресурса B и на $\frac{3}{5} = 0{,}6$ ед. продукции P_2 спроса не будет, а доход от реализации продукций равна $\frac{64}{5} = 12{,}8$ ден.ед.

Переменные y_1 и y_3 обозначают двойственные оценки ограничения 1 и 3. Первое ограничение определяет запасы сырья A, а третье ограничение определяет соотношение спроса на выпускаемую продукцию. Эти оценки отличны от нуля (оптимальное решение двойственной задачи), следовательно ресурс 1 и 3 видов полностью используется при оптимальном плане производства продукции. Двойственная оценка единицы ресурса 2 и 4 видов равна нулю. Следовательно, ресурс B не полностью используется и спрос на продукцию P_2 не будет удовлетворен полностью.

Таким образом, положительную двойственную оценку имеют лишь те виды ресурсов, которые полностью используются при оптимальном плане производства продукций. Поэтому двойственные оценки определяют дефицитность используемого предприятием ресурсов. Более того, величина данной двойственной оценки показывает, на сколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества сырья соответствующего вида на 1 ед.Так, увеличение количества сырья A вида на $\Delta b_1 = 1$ ед. приведет к тому, что появится возможность найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции возрастет на 1,4 ден.ед.: $\Delta Z = y_1 \cdot \Delta b_1 = \frac{7}{5} \cdot 1 = 1{,}4$ и станет равной

$Z_{\max} = 12{,}8 + 1{,}4 = 14{,}2$ ден.ед.

При этом числа, стоящие в столбце вектора A_3 табл.1, показывают, что указанное увеличение общей стоимости изготовляемой продукции может быть достигнуто за счет увеличения выпуска продукций P_1 и P_2 на 1/5=0,2 ед. Вследствие этого использование сырья A вида увеличится на 1 ед. Точно так же увеличение на Δb_3= 1 ед. ресурса 3 вида (т.е. если предположить, что суточный спрос на продукцию P_1 никогда не превышает спроса на продукцию P_2 более чем на 2 ед.) позволит найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции возрастет на $\Delta Z = y_3 \cdot \Delta b_3 = \frac{1}{5} \cdot 1 = 0{,}2$ ден.ед. и составит $Z_{\max} = 12{,}8 + 0{,}2 = 13$ ден.ед.

Это будет (столбец вектора A_5) достигнуто в результате увеличения выпуска продукции P_1 на 3/5 ед. и уменьшения изготовления продукции P_2 на 2/5 ед.

Продолжим рассмотрение оптимальных двойственных оценок. При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи получаем

$$2 \cdot \frac{7}{5} + 3 \cdot 0 + \frac{1}{5} = 3,$$

$$3 \cdot \frac{7}{5} + 2 \cdot 0 - \frac{1}{5} + 0 = 4.$$

Первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как строгие равенства. Это означает, что двойственные оценки сырья, используемого для производства единицы, соответственно, продукций P_1 и P_2 равны в точности их ценам. Поэтому выпускать эти два вида продукции по двойственным оценкам экономически целесообразно. Их производство и предусмотрено оптимальным планом прямой задачи.

Таким образом, двойственные оценки тесным образом связаны с оптимальным планом прямой задачи. Всякое изменение исходных данных прямой задачи может оказать влияние как на ее оптимальный план, так и на систему оптимальных двойственных оценок. Поэтому, чтобы проводить экономический анализ с использованием двойственных оценок, нужно знать их интервал устойчивости.

§9. Двойственный симплексный метод.

Иногда для получения оптимального решения исходной задачи переходят к двойственной и, используя оценки её оптимального плана, определяют оптимальное решение исходной задачи. Переход к двойственной задаче не обязателен, так как если рассмотреть первую симплексную таблицу с m единичным базисом, то легко заметить, что в столбцах записана исходная задача, а в строках- двойственная. Причём оценками плана исходной задачи являются c_j, а оценками плана двойственной задачи -b_i.

Решим двойственную задачу по симплексной таблице, в которой записана исходная задача. Найдём оптимальный план двойственной задачи, а вместе с ним и оптимальный план исходной задачи. Этот метод называется двойственным симплексным методом.

Пусть необходимо решить исходную задачу линейного программирования, поставленную в общем виде:

$$f = C'X \to \min,$$
$$AX = A_0, \quad X \geq 0.$$

Тогда в двойственной задаче необходимо максимизировать целевую функцию:

$$g = A_0'Y \to \max,$$
$$A'Y \leq C.$$

Допустим, что выбран такой базис $D = (A_1, A_2, ..., A_m)$, при котором хотя бы одна из компонент вектора $X = D^{-1}A_0 = (x_1, x_2, ..., x_l, ..., x_m)$ отрицательная, но для всех векторов A_j выполняется соотношение $f_j - c_j \leq 0, \quad j = 1,2,...,n$. Тогда на основании первой теоремы двойственности (теорему 7.1. §7) $Y = C_Б D^{-1}$ план двойственной задачи. Этот план неоптимальный, так как, с одной стороны, при выбранном базисе X содержит отрицательную компоненту и не является планом исходной задачи, а, с другой стороны, оценки оптимального плана двойственной задачи должны быть неотрицательными.

Таким образом, проверяют, имеет ли $X = D^{-1}A_0 = (x_1, x_2, ..., x_l, ..., x_m)$ отрицательные числа. Если их нет, то найден оптимальный план исходной задачи. Если же они имеются (что мы предполагаем), то выбирают наименьшее отрицательное число. В том случае, когда таких чисел несколько, берут какое-нибудь одно из них: пусть это будет число x_l, т. е.

$$\min_{x_i < 0} x_i = x_l \ .$$

Выбор этого числа определяет вектор, исключаемый из базиса, т.е. в данном случае из базиса выводится вектор A_l.

$$\min_{x_{lj} < 0} \frac{\Delta_j}{x_{lj}}.$$

Если этот минимум достигается при $j = r$, тогда вектор A_r включают в базис, т.е. a_{lr} будет разрешающим элементом. Симплексная таблица преобразовывается как в обычном симплексном методе. Этот процесс продолжают до тех пор, пока из столбца вектора A_0 не будут исключены отрицательные элементы. В результате находим оптимальный план исходной задачи, а следовательно, и двойственной.

Замечание. В обычном симплексном методе для преобразования симплексной таблицы (т.е. для перехода к новому допустимому базисному решению) сначала выбирают вектор подлежащий включению в базис, а затем определяют вектор, который необходимо исключить из базиса.

Если на некотором шаге окажется, что в i-й строке симплексной таблицы в столбце вектора A_0 стоит отрицательное число x_i, а среди остальных элементов этой строки нет отрицательных, то исходная задача не имеет решения.

Пример. Следующую задачу

$$f = -x_1 + x_2 - 2x_3 \to \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 - x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

решить двойственным симплексным методом.

Решение. Эту задачу не трудно привести к следующему виду:

$$f = -x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = -4$$

$$-x_1 - 2x_2 + x_5 = -6$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

Выбрав в качестве базиса векторы A_3, A_4 и A_5 составим первоначальную симплексную таблицу для исходной задачи:

Б	$C_б$	A_0	-1	-1	-2	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-2	8	1	1	1	0	0
A_4	0	-4	-1	1	0	1	0
A_5	0	-6	-1	-2	0	0	1
Δ_j		-16	-1	-1	0	0	0

В столбце вектора A_0 имеются два отрицательных числа (-4 и -6) и в строках векторов A_4 и A_5 имеются отрицательные числа (Если бы они отсутствовали, то задача была бы неразрешима). Вектор, подлежащий исключению выбираем из условия

$$\min\{-4; -6\} = -6,$$

т.е. из базиса исключаем вектор A_5. Чтобы определить, какой вектор необходимо ввести в базис, находим

$$\min_{x_{3j}<0} \frac{\Delta_i}{x_{3j}} = \min\left\{\frac{-1}{-1}; \frac{-1}{-2}\right\} = \frac{1}{2} \quad .$$

Значит, в базис вводим вектор A_2. Переходим к новой симплексной таблице.

Б	$C_б$	A_0	1	1	2	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3 A_4 A_2	-2 0 1	5 -7 3	1/2 -3/2 1/2	0 0 1	1 0 0	0 1 0	1/2 1/2 -1/2
Δ_j		-13	-1/2	0	0	0	-1/2

В столбце вектора A_0 стоит отрицательное число -7. Поэтому рассмотрим элементы второй строки. Среди этих чисел есть одно отрицательное -3/2 (Если бы такое число отсутствовало бы, то исходная задача была бы неразрешима). В данном случае переходим к новой симплексной таблице

Б	$C_б$	A_0	1	1	2	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3 A_1 A_3	-2 -1 1	8/3 14/3 2/3	0 1 0	0 0 1	1 0 0	1/3 -2/3 1/3	2/3 -1/3 -1/3
Δ_j		-32/3	0	0	0	-1/3	-2/3

Как видно из таблицы, найдены оптимальные планы исходной и двойственной задач. Ими собственно являются:

$$X_{opt} = \left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{8}{3}; 0\right), \qquad f_{\max} = -\frac{32}{3};$$

$$Y_{opt} = \left(-2; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), \qquad g_{\max} = -\frac{32}{3} \quad .$$

§ 10. Транспортная задача

Транспортная задача - самая распространенная в линейном программировании. Она обладает рядом специфических свойств, в силу которых общие свойства и методы линейного программирования могут быть детализированы до весьма простых утверждений и операций.

10.1. Постановка задачи. Теорема существования. Имеется n пунктов производства (поставщики) $A_1, A_2, ..., A_n$ и m пунктов потребления (потребители) $B_1, B_2, ..., B_m$ некоторого продукта. В пункте A_i производится $a_i > 0, \quad i = 1,2,...,n$ (запасы) а в пункте B_j потребляется $b_j > 0, \quad j = 1,2,...,m$ единиц продукта (потребности). Стоимость перевозки единицы продукта из A_i в B_j равна $c_{ij} > 0$. Нужно найти оптимальный план перевозок, т. е. указать количество

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,...,n; \quad j = 1,2,...,m. \tag{1}$$

продукта, перевозимое из A_i в B_j при условии:

весь продукт из пунктов производства будет вывезен:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,...,n, \tag{2}$$

запросы всех пунктов потребления удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2,...,m, \tag{3}$$

стоимость перевозок окажется минимальной:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min. \tag{4}$$

Задача линейного программирования, имеющая структуру (1)-(4), называется транспортной задачей.

В рассмотренной модели предполагается, что количество произведенного продукта равно его потреблению, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j. \tag{5}$$

Условие (5) называется условием баланса.

Транспортная задача для которой выполняется условие (5) называется задача с закрытой моделью; в противном случае – задача с открытой моделью. Транспортная задача открытой модели будет рассматриваться в п.6 данного параграфа.

Теорема 10.1. Для того чтобы закрытая транспортная задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию баланса.

Доказательство. Необходимость. Пусть (x_{ij})-оптимальный план перевозок. Тогда удовлетворяются условия (2), (3). Поэтому, суммируя эти равенства, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{m} b_j,$$

т. е. условие баланса (5) выполняется.

Достаточность. Пусть условие баланса (5) выполнено:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j = M > 0.$$

Построим план перевозок

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{M}. \qquad (*)$$

Величины (*) являются планами, так как $x_{ij} > 0$ и

$$\sum_{j=0}^{m} x_{ij} - \frac{a_i}{M}\sum_{j=1}^{m} b_j = a_i; \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \frac{b_j}{M}\sum_{i=1}^{n} a_i = b_j .$$

Множество является, таким образом, непустым. Оно замкнуто, по определению (1)-(3), Ограниченность множества допустимых планов следует из того, что если неотрицательное число x_{ij} удовлетворяет ограничениям (2), (3), то для всех i, $(i = 1,2,...,n)$; j, $(j = 1,2,...,m)$ выполняются неравенства

$$x_{ij} \le \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j < \sum_{j=1}^{m} b_j = M .$$

Согласно теоремы Вейерштрасса непрерывная функция (4) на ограниченном замкнутом множестве планов перевозок достигает минимума, т. е. задача (1) - (4) имеет решение. Теорема доказана.

10.2. Основные свойства матрицы условий транспортной задачи. Условия (2), (3) запишем в векторной форме

$$A_{11}x_{11} + ... + A_{1m}x_{1m} + ... + A_{n1}x_{1n} + ... + A_{nm}x_{nm} = A_0 . \qquad (6)$$

Здесь через A_{ij} обозначен $(n+m)$-мерный вектор, у которого все координаты равны нулю, за исключением i-й и $(n+j)$-й, равных единице:

$$A_{ij}^{i} = 1, \qquad A_{ij}^{n+j} = 1 .$$

Другими словами, каждый вектор условий A_{ij} можно записать в форме

$$A_{ij} = e_i + e_{n+j} ,$$

где e_k - $(n+m)$-вектор, все координаты которого равны нулю, кроме k-й, равной единице.

Вектор A_0 имеет размерность $n+m$:

$$A_0 = (a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m).$$

Матрица A условий транспортной задачи (1) - (4) составлена из векторов A_{ij}:

$$A = (A_{11}, A_{12}, ..., A_{ij}, ..., A_{nm}) \qquad (7)$$

у нее $n+m$ строк и nm столбцов.

Первое свойство. Ранг матрицы условий равен $n+m-1$:

$$rankA = n + m - 1.$$

Доказательство. Ранг матрицы (7) меньше $n+m$. Действительно, если сложить первые n строк матрицы, то получим строку, состоящую из одних единиц. Сумма последних m строк также дает строку из одних единиц. Это значит, что если первые n строк умножить на +1, а последние m строк на - 1 и сложить, то в результате получим нулевой вектор, что означает

$$rankA < n + m .$$

Осталось показать, что в матрице (7) можно найти отличный от нуля минор $(n+m-1)$- го порядка.

Составим матрицу из первых $n+m-1$ компонент векторов $A_{1m}, A_{2m}, ..., A_{nm}, A_{11}, A_{12}, ..., A_{1m-1}$. Полученная матрица треугольная, на ее диагонали стоят единицы, значит, определитель равен единице. Утверждение доказано.

Замечание. Если у матрицы условий A вычеркнуть любую строку, то ранг оставшейся $(n+m-1)\times nm$- матрицы будет равен $n+m-1$.

В силу доказанного свойства достаточно показать, что любое условие в (2), (3) есть следствие остальных.

Пусть план x_{ij} удовлетворяет всем условиям из (2), (3), кроме k-го, $1 \le k \le n$.

Тогда

$$\sum_{o=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,...,n; \quad i \ne k; \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2,...,m.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n} a_i = a_k,$$

т. е. k-е условие также выполняется.

Следовательно, одно из условий в (2), (3) можно отбросить, однако ради симметрии все соотношения обычно сохраняются. Согласно результатам по задаче линейного программирования решение транспортной задачи можно искать среди угловых точек множества планов. Поскольку $rank \ A = n+m-1$, то опорный план в транспортной задаче не может иметь более $n+m-1$ положительных координат.

Второе свойство. Любой минор матрицы (7) равен одному из трех чисел: -1, 0, +1 (в силу этого свойства матрицу транспортной задачи называют унимодулярной).

Доказательство. Рассмотрим минор k-го порядка

$$A_k = \begin{pmatrix} i_1, ..., i_k \\ j_1, ..., j_k \end{pmatrix}.$$

В этом определителе каждый столбец содержит не более двух единиц. Если найдется столбец из нулей, то $A_k = 0$.

Пусть в каждом столбце по две единицы. Одна из них обязательно в строке, соответствующей ограничениям (2), другая - в строке, соответствующей ограничениям (3). Складывая строки с номерами из (2) и вычитая из них сумму строк по номерам из (3), получаем нуль. Это значит, что $A_k = 0$. Если найдется столбец с одной единицей, то, разлагая определитель по этому столбцу, получаем

$$A_k = \pm B_{k-1},$$

где B_{k-1}- некоторый минор $(k-1)$-го порядка.

Повторив рассуждения с минором B_{k-1}, получим $B_{k-1}=0$ или $B_{k-1}=\pm C_{k-2}$ и т. д. Поскольку миноры первого порядка матрицы A равны 0 или 1, то отсюда следует справедливость второго свойства.

Третье свойство. Если числа $a_i,\quad i=1,2,...,n;\quad b_j,\quad j=1,2,...,m$ целые, то существует решение транспортной задачи из целочисленных компонент.

Доказательство. Пусть $x_{ij},\quad i=1,2,...,n;\quad j=1,2,...,m$ (угловая точка)- некоторое решение транспортной задачи, положительные координаты которой обозначим через $x_1,x_2,...,x_k,\quad k\le n+m-1$. В § 2 доказано, что векторы условий $A_1,A_2,...,A_K$ с теми же номерами линейно независимы (теорема 2.5). В равенстве

$$A_1x_1+A_2x_2+...+A_kx_k=A_0$$

выделим k строк, соответствующих ненулевому минору k-го порядка. Остальные строки будут линейно выражаться через выделенные. Поскольку каждый отличный от нуля минор матрицы A равен ±1 , то, решая выделенную систему уравнений по правилу Крамера, получаем

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\pm\Delta_1,\quad ...\quad ,x_k=\frac{\Delta_k}{\Delta}=\pm\Delta_k$$

где Δ_i- определители из целочисленных элементов. Значит, и все $x_1,x_2,...,x_k$- целые числа.

10.3. Вычисление элементов симплексной таблицы. Распределительный метод. При решении задач линейного программирования симплексным методом наиболее трудоемким является вычисление элементов симплексной таблицы. Ситуация существенно упрощается для транспортной задачи.

Как известно, симплексная таблица состоит из координат разложения векторов условий по текущему базису, соответствующему рассматриваемому опорному плану. Пусть задача невырожденная. Тогда любой опорный план (x_{ij}) имеет ровно $n+m-1$ положительных компонент, которым соответствуют $n+m-1$ линейно независимых векторов условий $\{A_{ij}\}$. Множество индексов i,j которые встречаются в этих векторах, обозначим через Ω. Любой вектор условий A_{kl} разлагается по базису $A_{ij},\quad (i,j)\in\Omega$:

$$A_{kl}=\sum_{(i,j)\in\Omega}\sum x_{ij}^{kl}A_{ij}\,. \tag{8}$$

Числа x_{ij}^{kl} и есть элементы основной части симплексной таблицы.

Лемма 10.1. Элементы x_{ij}^{kl}, принимают одно из трех значений:- 1, 0, +1.

Доказательство. В матричной форме соотношение (8) принимает вид

$$A_{ij}=Qx^{kl}\,, \tag{9}$$

где Q- матрица, составленная из $n+m-1$ линейно независимых векторов условий $A_{ij},\quad (i,j)\in\Omega$. По доказанному второму свойству, если у матрицы Q вычеркнуть любую строку, то оставшаяся $(n+m-1)\times(n+m-1)$- матрица будет неособой. В уравнении (9) вычеркнем k-ю строку. Тогда слева останется $n+m-1$ вектор e_{n+i-1}, а справа - Rx^{kl}, где R неособая матрица:

$$e_{n+l-1} = Rx^{kl}.$$

Отсюда

$$x^{kl} = R^{-1}e_{n+l-1} = r_{n+l-1},$$

где r_{n+l-1}- $(n+l-1)$- й столбец матрицы R^{-1}. Известно, что каждый элемент обратной матрицы R^{-1} равен некоторому минору, $(n+m-2)$-го порядка, деленному на определитель матрицы R. Но $\det R$ и все миноры матрицы R являются минорами матрицы условий А транспортной задачи. Поэтому они равны одному из трех чисел: -1, 0, 1. Следовательно, $x_{ij}^{kl} = -1,0,1$. Лемма доказана.

В силу леммы каждый вектор условий транспортной задачи имеет представление

$$A_{kl} = \sum\sum_{(i,j)\in\Omega^1} \pm A_{ij}, \qquad \Omega^1 \subset \Omega. \tag{10}$$

Поскольку у вектора A_{ij} единицы стоят только на k-м и $(n+m)$-м местах, то в базисе найдется вектор A_{kj_1} первый индекс которого такой же, что и у разлагаемого вектора A_{kl}. Если $j_1 \neq l$ то в силу равенства (10) найдется вектор базиса $A_{i_1j_1}$ который в (10) входит со знаком « - ». Разложение на двух векторах не может закончиться, ибо слева $(n+l)$-я координата равна 1; справа координаты с номерами, большими чем n, - нулю, i_1-я координата равна -1 . Поэтому найдется вектор базиса $A_{i_1j_2}$ входящий в (10) со знаком «+». Если $j_2 = l$, то разложение вектора A_{kl} закончено. При $j_2 \neq l$ разложение продолжается. В результате через конечное число шагов получаем разложение

$$A_{kl} = A_{kj_1} - A_{i_1j_1} + A_{i_1j_2} - \ldots - A_{i_sj_s} + A_{i_sl}. \tag{11}$$

В этом разложении справа будет нечетное число слагаемых, знаки слагаемых чередуются, первое и последнее слагаемые имеют знак «+». Правило чередования индексов поясним на следующем примере. Пусть в табл. 10.1 точками обозначены клетки с номерами векторов базиса. Нужно разложить вектор A_{26}. Из клетки A_{26} движемся по строке до одной из точек, затем по столбцу до одной из точек, далее по строке и т. д. Наконец приходим по строке к точке, лежащей в том же столбце, что и раскладываемая точка. Если в очередную точку приходим по строке, то вектору базиса, соответствующему этой точке, приписываем знак «+», если по столбцу - знак «-». По доказанному, описанное построение всегда осуществимо и единственно. Для вектора A_{26} имеем

$$A_{26} = A_{23} - A_{33} + A_{34} - A_{44} + A_{46}.$$

Последовательность построенных прямолинейных отрезков, исходящих из клетки с A_{26}, назовем цепочкой этой клетки, отрезки - звеньями цепочки.

Таблица 10.1

Поставщики	Потребители						Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	•	•					a_1
A_2		•	•			A_{26}	a_2
A_3			•	•			a_3
A_4				•		•	a_4
Потребности	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Теперь можно приступить к вычислению последней строки в симплексной таблице. При двуиндексной нумерации координат выражение для компонент вектора $f-c$ принимает вид

$$f_{kl}-c_{kl}=\sum_{(i,j)\in\Omega}\sum c_{ij}x_{ij}^{kl}-c_{kl}.$$

Значения x_{ij}^{kl} определяются разложением (11) вектора A_{kl}, в соответствии с этим разложением получаем

$$f_{kl}-c_{kl}=c_{kj_1}-c_{i_1j_1}+c_{i_1j_2}-\ldots-c_{i_sj_s}+c_{i_sl}-c_{kl}. \tag{12}$$

Как следует из симплексного метода, величины (12) полностью определяют оптимальность текущего плана и вектор условий, который следует включить в базис на следующем этапе, если текущий план неоптимален.

Для подсчета чисел (12) составим новую таблицу, которую назовем транспортной таблицей или таблицей планирования (табл. 10.2), включим в нее данные о транспортной задаче.

Вместо величин x_{ij} на каждом этапе вычислений заносим компоненты текущей крайней точки, причем, если $x_{ij}=0$, то клетку оставляем пустой. Далее, для каждой пустой клетки с номером (k,l) составляем цепочку по правилу разложения вектора условия A_{kl}, соответствующего этой клетке. Числа c_{ij}, стоящие в клетках, где умножим на +1, где кончается вертикальное звено,- на -1 и результаты сложим. Из полученного результата вычитаем значение c_{kl}, стоящее в клетке, из которой начинается цепочка. Ясно, что эти операции приведут к величине (12).

Таблица 10.2

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1m} x_{1m}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{12} x_{12}	…	c_{2m} x_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}		c_{nm} x_{nm}	a_n
Потребности	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Согласно критерию оптимальности, доказанному для симплексного метода, текущий опорный план будет оптимальным, если все числа (12) неположительны.

Если хотя бы для одной пустой клетки описанные операции приведут к положительному числу, то рассматриваемый план перевозок неоптимален. Номер (k,l) этой клетки указывает номер вектора условия A_{kl}, который можно ввести в базис. При рассмотрении симплексного метода брался тот номер (k,l), при котором число (12) наибольшее. И здесь можно, просчитав числа (12) для пустых клеток, выбрать из результатов наибольший. Из физического смысла подобного выбора, отмеченного при исследовании симплексного метода, следует, что при такой замене скорость убывания линейной функции (4) будет наибольшей. Пусть индексы (s,t) таковы, что

$$f_{st} - c_{st} \max\{f_{kl} - c_{kl}\}$$

Тогда вектор A_{st} войдет в базис и число x_{st} будет положительным на следующем этапе, т. е. клетка с номером (s,t) уже не будет пустой.

Замечание. Вопрос о неограниченности решения в транспортной задаче не возникает, ибо множество планов всегда ограничено (п. 1).

Значения $\Delta_{kl} = f_{kl} - c_{kl}$ помещаются также в клетках. Окончательный вид транспортной таблицы представлен табл. 10.3.

Таблица 10.3

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} Δ_{12}	…	c_{1m} Δ_{1m}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} Δ_{22}	…	c_{2m} Δ_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1} Δ_{n1}	c_{12} Δ_{n2}		c_{nm} x_{nm}	a_n
Потребности	b_1	b_2	…	b_m	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$

Найдем далее номер того вектора условий, который нужно исключить из базиса. Для этого, следуя симплексному методу, составим отношения

$$\theta_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_{ij}^{st}}, для \quad всех \quad x_{ij}^{st} > 0 .$$

Но, по доказанному (лемма 10.1), все положительные x_{ij}^{st} равны единице, поэтому $\theta_{ij} = x_{ij}$. Согласно симплексному методу исключается из базиса вектор A_{pq}, индексы которого удовлетворяют соотношению

$$\theta_{pq} = \min \theta_{ij} = \max x_{ij} = x_{pq}, \qquad (13)$$

На языке транспортной таблицы индексы исключаемого вектора находятся так: для клетки (s,t) строится цепочка. Среди чисел x_{ij}, стоящих на концах горизонтальных звеньев цепочки, находим наименьшее x_{pq}. Вектор A_{pq} на следующем этапе выводим из базиса, клетка с номером (p,q)] становится пустой.

Осталось заполнить таблицу для нового набора базисных векторов. Общая формула перехода к новой угловой точке в симплексном методе имела вид

$$x'_{ij} = x_{ij} - \theta_{pq} x_{ij}^{pq} .$$

Пользуясь графической интерпретацией чисел x_{ij}^{pq}, формулой (13), приходим к следующим правилам заполнения таблицы в новом базисе:

1) $x'_{st} = x_{pq}, \qquad x'_{ij} = x_{ij} - x_{pq}$,

если клетка (i, j) лежит на конце горизонтального звена цепочки, построенного для клетки (s,t);

2) $x'_{ij} = x_{ij} + x_{pq}$,

если клетка (i, j) лежит на конце вертикального звена цепочки, построенного для клетки (s,t);

3) $x'_{ij} = x_{ij}$,

если в непустой клетке (i, j) старой таблицы цепочка не терпит излома.

Описанная процедура перехода от старого базиса к новому, являющаяся интерпретацией симплексного метода для транспортной задачи, называется распределительным методом решения транспортной задачи.

10.4. Построение первоначального опорного плана

Известно, что нахождение оптимального решения любой задачи линейного программирования начинается с построения первоначального опорного плана. Первоначальный опорный план транспортной задачи как задачи линейного программирования можно построить ранее рассмотренными методами. При решении симплексным методом общей задачи линейного программирования для построения начальной крайней точки приходится, как правило, прибегать к искусственным переменным. В транспортной задаче введение искусственных переменных излишне, ибо существует допустимый план перевозок (см. п. 1) и имеются различные приемы построения крайней точки по этим планам. Остановимся на некоторых из них.

10.4.1.Метод северо-западного угла

В матрице планирования не учитывая стоимости перевозки единицы груза, удовлетворим потребности первого потребителя B_1 за счет запаса поставщика A_1 . Для этого $\min(a_1,b_1)$ записываем в левый нижний угол клетки A_1B_1 , т.е. $x_{11} = \min(a_1,b_1)$. Если $a_1 > b_1$, то излишек $a_1 - b_1$ завозим из A_1 в пункт B_1 , т.е. полагаем $x_{12} = \min(a_1 - b_1 ; b_2)$. Если $a_1 < b_1$, то остаток $b_1 - a_1$ завозим из пункта A_2 , т.е. полагаем $x_{12} = \min(b_1 - a_1 ; a_2)$. Процесс продолжим до тех пор, пока не удовлетворим всех потребителей за счет запасов поставщиков. На этом построение первоначального плана заканчивается.

Опорный план содержит не более n+m-1 положительных компонент (т.е. в таблице планирования количество занятых клеток не превосходит n+m-1). Если опорный план имеет ровно n+m-1 положительных компонент (т.е. в таблице планирования количество занятых клеток не превосходит n+m-1), тогда этот опорный план будет невырожденным.

<u>Пример 10.1</u>. Найти первоначальный план следующей задачи

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
A_2	1	4	6	2	130
A_3	5	8	12	7	170
Потребности	150	120	80	50	

Решение. Первоначальный опорный план найден методом северо-западного угла. Матрицу планирования заполним следующим образом:

a_i \ b_j	150	120	80	50
100	3 100	5	7	11
130	1 50	4 80	6	2
170	5	8 40	12 80	7 50

В этой таблице через a_i обозначены запасы поставщиков, а через b_j – потребности потребителей. Полученный опорный план имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}.$$

Этот план невырожденный, так как содержит точно n+m-1=3+4-1=6 занятых клеток. Вычислим стоимость полученного плана:

$$f(X) = 100 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 80 \cdot 4 + 40 \cdot 8 + 80 \cdot 12 + 50 \cdot 7 = 2300.$$

Недостатком правила северо-западного угла является то, что оно не учитывает стоимости перевозок. В силу этого первоначальный опорный план может оказаться далекой от решения задачи и потребует большого числа вычислений по распределительному методу. Существуют другие методы построения первоначального опорного плана, учитывающие стоимость перевозок. Хотя они более трудоемки, но могут сократить общий объем вычислений при решении задачи, так как дают лучшее начальное приближение к решению.

10.4.2.Метод минимальной стоимости

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i или b_j. Затем из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Пример 10.2. Составить с помощью метода минимальной стоимости опорный план выше рассмотренной транспортной задачи.

Решение.

b_j \ a_i	150	120	80	50
100	3 20	5 80	7	11
130	1 130	4	6	2
170	5	8 40	12 80	7 50

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}.$$

В этом случае также опорный план содержит точно 6 занятых клеток. Следовательно, опорный план является невырожденным. При составлении опорного плана учитывалась стоимость перевозки единицы груза. Поэтому план будет значительно ближе к оптимальному. Действительно,

$$f(X) = 20 \cdot 3 + 80 \cdot 5 + 130 \cdot 1 + 40 \cdot 8 + 80 \cdot 12 + 50 \cdot 12 = 2200.$$

Существуют ещё другие методы построения первоначального плана.

С помощью рассмотренных методов построения первоначального плана можно получить вырожденный и невырожденный опорный план.

10.5. Метод потенциалов

10.5.1. Вводное замечание. Метод потенциалов является модификацией распределительного метода (поэтому иногда называется модифицированным распределительным методом), в которой введением дополнительных переменных (потенциалов) упрощается одна из процедур распределительного метода.

Как известно, в симплексном методе и его реализации - распределительном методе - одна из основных процедур связана с вычислением в опорном плане вектора $\Delta = f - c$, по которому можно судить об оптимальности опорного плана или находить новый вектор базиса. В методе потенциалов предлагается новый путь вычисления компонент этого вектора.

Введение потенциалов существенно уменьшает объем вычислений для транспортных задач больших размеров (числа n, m большие).

Метод потенциалов был предложен Л. В. Канторовичем вне связи с симплексным методом. Дж. Данциг получил его независимо исходя из симплексного метода.

С помощью рассмотренных методов построения первоначального плана (см.п.10.4) можно получить вырожденный и невырожденный опорный план. Построенный опорный план транспортной задачи с помощью методов потенциалов можно довести до оптимального.

10.5.2. Метод потенциалов. **Теорема 10.2.** Если план $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$ транспортной задачи является оптимальным, то существует система $m+n$ чисел U_i^* и V_j^* удовлетворяющих условиям

$$U_i^* + V_j^* = c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij}^* > 0,$$
$$U_j^* + V_j^* \le c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij}^* = 0,$$
$$i = 1,2,...,n; \quad j = 1,2,...m.$$

Числа U_i^* и V_j^* j называются потенциалами, соответственно, поставщиков и потребителей.

Доказательство. Транспортную задачу минимизации линейной функции $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$ при ограничениях

$$x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{im} = a_i, \qquad i = 1,2,...,n;$$
$$x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{nj} = b_j, \qquad j = 1,2,...,m;$$
$$x_{ij} \ge 0, \qquad i = 1,2,...,n; \quad j = 1,2,...,m,$$

можно рассматривать как двойственную некоторой исходной задачи линейного программирования,- условия которой получают по общей схеме, рассмотренной в §7, если каждому ограничению вида $x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{im} = a_i$ в исходной задаче соответствует переменная U_i, $i = 1,2,...,n$, а каждому ограничению вида $x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{nj} = b_j$ - переменная V_j, $j = 1,2,...,m$, а именно максимизировать линейную функцию

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i U_i + \sum_{j=1}^{m} b_j V_j$$

при ограничениях

$$U_i + V_j \le c_{ij}, \quad i = 1,2,...,n; \quad j = 1,2,...,m.$$

План X^*- оптимальный план двойственной задачи, поэтому план $Y^* = \left(U_i^*, V_j^*\right)$ является планом исходной задачи и на основании теоремы двойственности

$$g_{\max} = f_{\min}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} a_i U_i^* + \sum_{j=1}^{m} b_j V_j^* = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}^*, \qquad x_{ij}^* \ge 0.$$

На основании второй теоремы двойственности (теорема 7.2 из § 7) получаем, что ограничения исходной задачи, соответствующие положительным компонентам оптимального плана двойственной задачи, удовлетворяются как строгие равенства, а соответствующие компонентам, равным нулю, - как неравенства, т. е.

$$U_i^* + V_j^* = c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij}^* > 0,$$

$$U_j^* + V_j^* \le c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij}^* = 0.$$

Теорема доказана.

На основании доказанной теоремы для того чтобы первоначальный опорный план был оптимальным, необходимо выполнение следующих условий:

а) для каждой занятой клетки сумма потенциалов должна быть равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке:

$$U_i^* + V_j^* = c_{ij}; \tag{14}$$

б) для каждой незанятой клетки сумма потенциалов должна быть меньше или равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке:

$$U_i^* + V_j^* \le c_{ij}. \tag{15}$$

Если хотя бы одна незанятая клетка не удовлетворяет условию (15), то опорный план является неоптимальным и его можно улучшить, вводя в базис вектор, соответствующий клетке, для которой нарушается условие оптимальности (т. е. в клетку надо переместить некоторое количество единиц груза).

Таким образом, для проверки плана на оптимальность необходимо сначала построить систему потенциалов.

10.5.3. Построение системы потенциалов. Для построения системы потенциалов используем условие

$$U_i^* + V_j^* = c_{ij}.$$

Систему потенциалов можно построить только для невырожденного опорного плана. Такой план содержит n+m-1 занятых клеток, поэтому для него можно составить систему из n+m-1 линейно независимых уравнений с n+m неизвестными. Уравнений на одно меньше, чем неизвестных, поэтому система является неопределенной и одному неизвестному (обычно U_1) придают нулевое значение. После этого остальные потенциалы определяются однозначно. Затем для каждой незанятой клетки проверяем условие $\Delta_{ij} = (U_i + V_j) - C_{ij} \le 0$. Если для некоторых клеток $\Delta_{ij} \le 0$, то план оптимальный. Если для некоторых клеток $\Delta_{ij} > 0$, то план неоптимальным. Тогда для каждой клетки, в которой не выполняется условие оптимальности, находим величину $\Delta_{ij} > 0$ и записываем её значение в левый нижний угол этой же клетки.

Для построения следующего опорного плана в первую очередь заполняется клетка, которой соответствует max Δ_{ij}. Для того чтобы эту клетку сделать занятой сначала необходимо определить, сколько единиц груза должно быть перераспределено в нее.

Для определения количества единиц груза, подлежащих перераспределению, отмечаем знаком «+» незанятую клетку, которую надо загрузить. Это означает, что клетка присоединяется к занятым клеткам. В таблице занятых клеток стало n+m, поэтому появляется цикл, все вершины которого, за исключением клетки, отмеченной знаком «+» находятся в занятых клетках, причем этот цикл единственный. Отыскиваем цикл и, начиная движение от клетки, отмеченной знаком «+», поочередно проставляем знаки «-» и «+». Затем находим $\theta_0 = \min x_{ij}$, где x_{ij} – перевозки стоящее в вершине цикла, отмеченных знаком «-».

Величина θ_0 определяет сколько единиц груза можно перераспределить по найденному циклу. Значение θ_0 записываем в незанятую клетку, отмеченную знаком «+», двигаясь по циклу, вычитаем θ_0 из объемов перевозок, расположенных в клетках, которые отмечены знаком «-», и прибавляем к объёмам перевозок, находящихся в клетках, отмеченных знаком «+». Если θ_0 соответствуют несколько минимальных перевозок, то при вычитании оставляем в соответствующих клетках нулевые перевозки в таком количестве, чтобы θ_0 вновь полученном опорном плане занятых клеток было n+m-1. В результате перераспределения θ_0 получается новый опорный план, который снова подлежит проверке на оптимальность.

Пример 10.3. С помощью метода потенциалов найти оптимальный план выше рассмотренной транспортной задачи.

Решение. Построим систему потенциалов для первоначального опорного невырожденного плана, найденного нами методом северо-западного угла.

$U_1 + V_1 = 3$ $\quad$ $U_1 = 0$; $V_1 = 3$

$U_2 + V_1 = 1$ $\quad$ $U_2 = 1 - V_1 = 1 - 3 = -2$

$U_2 + V_2 = 4$ $\quad$ $V_2 = 4 - U_2 = 4 + 2 = 6$

$U_3 + V_2 = 8$ $\quad$ $U_3 = 8 - V_2 = 8 – 6 = 2$

$U_3 + V_3 = 12$ $\quad$ $V_3 = 12 - U_3 = 12 - 2 = 10$

$U_3 + V_4 = 7$ $\quad$ $V_4 = 7 - U_3 = 7 – 2 = 5.$

b_j \ a_i	150	120	80	50	U_i
100	3 - 100	5	7 +	11	0
130	1 - 50	4 80	6	2	-2
	5	8 +	12	7	2

170		40	80 -	50	
V_j	3	6	10	5	

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}.$$

F(X) = 2300.

Теперь для незанятых клеток проверим условие оптимальности:

$\Delta_{12} = (U_1 + V_2) - C_{12} = -1$; $\Delta_{23} = (U_2 + V_3) – C_{23} = 2$

$\Delta_{12} = (U_1 + V_2) - C_{13} = 3$; $\Delta_{24} = (U_2 + V_4) – C_{24} = 1$

$\Delta_{14} = (U_1 + V_4) - C_{14} = -6$; $\Delta_{31} = (U_3 + V_1) – C_{31} = 0$.

Видно, что среди Δ_{ij} имеются положительные. Поэтому этот план не является оптимальным. Переходим к новому опорному плану:

max{3; 2; 1} = 3 = Δ_{13}. Значит в таблице клетку A_1B_3 отметим знаком «+» и построим цикл. Вычислим θ_0 = min{100; 80}= 80. Значение θ_0 = 80 записываем в незанятую клетку со знаком «+»; двигаясь по циклу вычитаем θ_0 = 80 из объёмов перевозок, расположенных в клетках с знаком «-» и прибавляем к объёмам перевозок, находящихся в клетках «+». В результате получим новый опорный план:

b_j \ a_i	150	120	80	50	U_1
100	3 100	5	7	11	0
130	1 50	4 80	6	2	-2
170	5	8 40	12 80	7 50	3
V_j	3	5	7	4	

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 50 \end{pmatrix}. \qquad F(X) = 2060$$

X_1 – вырожденный опорный план, ибо одной занятой клетки не хватает. Поэтому выбираем строку, которая содержит наибольшее количество занятых клеток (например, строка A_1) и полагаем $U_1 = 0$.

Тогда $U_1 = 0$

$U_1 + V_1 = 3$; $V_1 = 3 - U_1 = 3 – 0 = 3$; $V_1 = 3$;

$U_1 + V_3 = 7$; $V_3 = 7 – U_1 = 7 - 0 = 7$; $V_3 = 7$;

$U_2 + V_1 = 4$; $U_2 = 1 - V_1$ $1 - 3 = -2$.

А из соотношения

$U_3 + V_2 = 8$

$U_3 + V_4 = 7$

Невозможно определить U_3 , V_2 , V_4 .

Эта ситуация возникла из-за того что опорный план оказался невырожденным, т.е. количество занятых клеток равно 5. чтобы выйти из этого положения и определение U_3 и V_4 сделать фиктивно занятой одну из незанятых клеток строки A_3 или столбца B_4 . Фиктивно занятые клетки это те клетки, в которые введены нулевые перевозки. Задача решается на минимизацию линейной функции, поэтому целесообразно сделать фиктивно занятой клетку, в которой стоит наименьшая стоимость. Такой клеткой является клетка A_2B_4. Теперь последовательно находим

$U_2 + V_4 = 2$; $V_4 = 2 - U_2 = 2 –(-2) = 4$; $V_4 = 4$;

$U_3 + V_4 = 7$; $U_3 = 7 – V_4 = 7 – 4 = 3$; $U_3 = 3$;

$U_3 + V_2 = 8$; $V_2 = 8 - U_3 = 8 - 3 = 5$; $V_2 = 5$.

Теперь для не занятых клеток проверяем условие оптимальности :

$\Delta_{12} = (U_1 + V_2) - C_{12} = 0$;

$\Delta_{14} = (U_1 + V_4) - C_{14} = -7$;

$\Delta_{23} = (U_2 + V_3) – C_{23} = -1$;

$\Delta_{31} = (U_3 + V_1) – C_{31} = 1$;

$\Delta_{33} = (U_3 + V_3) – C_{33} = 2$.

План X_1 не является оптимальным, ибо $\Delta_{31} = 1 > 0$.

В таблице клетку A_3B_1 отметим знаком «+» и построим цикл ; находим $\theta_0 = \min\{130; 50\} = 50$

Значение $\theta_0 = 50$ записываем в не занятую клетку со знаком «+» ; двигаясь по циклу вычитаем $\theta_0 = 50$ из объёмов перевозок, расположенных в клетках со знаком «-» и прибавляем к объемам перевозок, находящихся в клетках со знаком «+». В результате получим новый опорный план

b_j \ a_i	150	120	80	50	U_1
100	3 20	5	7 80	11	0
130	1 80	4	6	2 50	-2
170	5 50	8 120	12	7	2
V_j	3	6	7	4	

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 50 & 120 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F(X)=2010

Полученный опорный план X_2 является невырожденным. Выполнив необходимые вычисления убеждаемся что план X_2 не является оптимальным. Построим очередной опорный план

b_j \ a_i	150	120	80	50	U_1
100	3	5 20	7 80	11	0
130	1 80	4	6	2 50	-1
170	5 70	8 100	12	7	3
V_j	2	5	7	-1	

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 70 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$F(X) = 1990$

X_3 является невырожденным опорным планом. Этот план является оптимальным. Для этого выполняются все условия оптимальности:

$\Delta_{12} = (U_1 + V_1) - C_{11} = -1$;
$\Delta_{14} = (U_1 + V_4) - C_{14} = -12$;
$\Delta_{22} = (U_2 + V_2) – C_{12} = 0$;
$\Delta_{23} = (U_2 + V_3) – C_{23} = 0$;
$\Delta_{33} = (U_3 + V_3) – C_{23} = -2$;
$\Delta_{34} = (U_3 + V_4) – C_{34} = -5$,

т.е. $X_3 = X_{opt}$ и $F_{min} = F(X_3) = 1990$.

10.6.Транспортная задача с «открытой» моделью. В ранее рассмотренных транспортных задачах суммарные запасы и потребности совпадали. Такие задачи называются транспортные задачи с «закрытой» моделью, в противном случае задачу называют транспортные задачи с «открытой» моделью.

Транспортная задача с «открытой» моделью решается приведением к задаче с «закрытой» моделью.

Для приведения задачи с «открытой» модели к задаче с «закрытой» модели вводятся «фиктивный потребитель» или «фиктивный поставщик». А именно:

а) в случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, вводится «фиктивный потребитель» B_{n+1}, потребности которого $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$.

б) в случае, когда суммарные потребности превышают суммарные запасы, вводится «фиктивный поставщик» A_{n+1}, запасы которого $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Стоимость перевозки как до «фиктивного потребителя», так и стоимость перевозки единицы груза от «фиктивного поставщика» полагают равными нулю, так как груз в обоих случаях не перевозится.

Пример 10.4. Приведите следующую транспортную задачу с «открытой» модели к задаче с «закрытой» модели и найдите ее оптимальное решение.

b_i \ a_j	3	3	3	2	2
4	3	2	1	2	3
5	5	4	3	1	1

7	0	2	3	4	5

В этой задаче

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 16 \rangle \quad \sum_{j=1}^{5} b_j = 13.$$

Поэтому введем «фиктивного потребителя», потребности которого $b_6 = 16\text{-}13 = 3$.

Теперь составим таблицу планирования:

b_i \ a_j	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	0	2	3	4	5	0

Полученную задачу с «закрытой» модели решаем методом потенциалов. После 7-ми итераций получим следующий оптимальный план задачи:

b_i \ a_j	3	3	3	2	2	3
4	3	2 1	1 3	2	3	0
5	5	4	3	1 2	1 2	0 1
7	0 3	2 2	3	4	5	0 2

Ответ: $x_{12}=1$; $x_{13}=3$; $x_{24}=2$; $x_{25}=2$; $x_{26}=1$; $x_{31}=3$; $x_{32}=2$.

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{F}(\mathrm{X}_{\text{опт}}) = 13.$$

10.7. Вырожденная транспортная задача и ее решение ε-методом. Если количество положительных компонент опорного плана транспортной задачи $k < n + m - 1$,- такой план называется вырожденным.

Если в транспортной задаче частичные суммы a_i и b_j равны, то опорные планы, найденные любым методом, окажутся вырожденными. Для того, чтобы избежать этого зададимся числом $\varepsilon > 0$ и числа a_i и b_j преобразуем следующим образом:

$$\overline{a_{\mathrm{i}}} = a_i + \varepsilon, \qquad (i = \overline{1, m});$$

$$\overline{b_{\mathrm{j}}} = b_j, \qquad (j = \overline{1, n-1});$$

$$\overline{b_{\mathrm{n}}} = b_n + m\varepsilon.$$

Полученную задачу решим и найдем оптимальный план $X(\varepsilon)$. Положив в этом плане $\varepsilon = 0$, получим оптимальный план исходной задачи.

Пример 10.5. Следующую задачу решить ε- методом.

b_i / a_j	12	14	10	24
14	1	5	3	2
12	6	3	2	1
12	4	2	1	5
22	2	6	5	3

В этой задаче частичные суммы a_1+a_2 и $в_1+в_2$, следовательно, задача имеет вырожденный план. Задачу перепишем следующим образом и решим ее методом потенциалов:

b_i / a_j	12	14	10	$24+4\varepsilon$	U_i
$14+\varepsilon$	1 12	5 0	3 1	2 $2+\varepsilon$	0
$12+\varepsilon$	6 -6	3 1	2 $+\ \theta$ 1	1 $12+\varepsilon\ -\theta$	-1
$12+\varepsilon$	4 -6	2 $2+\varepsilon+\theta$	1 $10-\theta$	5 -6	-3
$22+\varepsilon$	2 0	6 $12-\varepsilon-\theta$	5 0	3 $10+2\varepsilon+\theta$	1
V_j	1	5	4	2	θ =10

b_i / a_j	12	14	10	$24+4\varepsilon$	U_i
$14+\varepsilon$	1 12	5 0	3 0	2 $2+\varepsilon$	0
$12+\varepsilon$	6 -6	3 $+\ \theta$ 1	2 10	1 $2+\varepsilon\ -\theta$	-1

$12+\varepsilon$	4 -6	2 $12+\varepsilon$	1 -1	5 -6	-3
$22+\varepsilon$	2 0	6 $2-\varepsilon-\theta$	5 -1	3 $20+2\varepsilon+\theta$	1
V_j	1	5	3	2	$\theta=2-\varepsilon$

b_i \ a_j	12	14	10	$24+4\varepsilon$	U_i
$14+\varepsilon$	1 12	5 -1	3 0	2 $2+\varepsilon$	0
$12+\varepsilon$	6 -6	3 $2-\varepsilon$	2 10	1 3ε	-1
$12+\varepsilon$	4 -5	2 $12+\varepsilon$	1 0	5 -5	-2
$22+\varepsilon$	2 0	6 -1	5 -1	3 $22+\varepsilon$	1
V_j	1	4	3	2	

$$X_{опт}(\varepsilon)=\begin{pmatrix}12 & 0 & 0 & 2+\varepsilon\\ 0 & 2-\varepsilon & 10 & 3\varepsilon\\ 0 & 12+\varepsilon & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 22+\varepsilon\end{pmatrix} \quad при \quad \varepsilon=0 \quad X_{опт}=\begin{pmatrix}12 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 10 & 0\\ 0 & 12 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 22\end{pmatrix}, \quad F(X_{опт})=132.$$

10.8. Усложненные задачи транспортного типа. Нами рассмотрена классическая транспортная задача, на которой показано, в частности, как используется метод потенциалов для нахождения оптимального плана. В экономике предприятия такие задачи встречаются крайне редко. Обычно при составлении математической модели задачи транспортного типа приходится вводить целый ряд дополнительных ограничений, а затем пользоваться методом потенциалов.

Ряд экономических задач легко сводимы к транспортной задаче. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся ситуации в экономике предприятия.

1.Отдельные поставки от определенных поставщиков некоторым потребителям должны быть исключены (из-за отсутствия необходимых условий хранения, чрезмерной перегрузки коммуникаций и т. д.). Это ограничение требует, чтобы в матрице перевозок, содержащей оптимальный план, определенные клетки оставались свободными. Последнее достигается искусственным завышением затрат на перевозки c_{ij} в клетках, перевозки через которые следует запретить. При этом производят завышение величины c_{ij} до таких значений, которые будут заведомо больше всех и с которыми их придется сравнивать в процессе решения задачи.

2.На предприятии необходимо определить минимальные суммарные затраты на производство и транспортировку продукции. С подобной задачей сталкиваются при решении вопросов, связанных с оптимальным размещением производственных объектов. Здесь может оказаться экономически более выгодным доставлять сырье из более отдаленных пунктов, но зато при меньшей его себестоимости. В таких задачах за критерий оптимальности принимают сумму затрат на производство и транспортировку продукции.

3.Ряд транспортных маршрутов, по которым необходимо доставить грузы, имеют ограничения по пропускной способности. Если, например, по маршруту A_iB_j можно провести не более q единиц груза, то B_j-й столбец матрицы разбивается на два столбца - B'_j и B''_j. В первом столбце спрос принимается равным разности между действительным спросом b_j и ограничением $q: b'_j = b_j - q$, во втором - равным ограничению q, т. е. $b''_j = q$. Затраты c_{ij} в обоих столбцах одинаковы и равны данным, но в первом столбце B'_j, клетке, соответствующей ограничению i, вместо истинного тарифа c_{ij} ставится искусственно завышенный тариф M (клетка блокируется). Затем задача решается обычным способом.

4.Поставки по определенным маршрутам обязательны и должны войти в оптимальный план независимо от того, выгодно это или нет. В этом случае уменьшают запас груза у поставщиков и спрос потребителей и решают задачу относительно тех поставок, которые необязательны. Полученное решение корректируют с учетом обязательных поставок.

5.Экономическая задача не является транспортной, но в математическом отношении подобна транспортной, так как описывается аналогичной моделью, например, распределение производства изделий между предприятиями, оптимальное закрепление механизмов по определенным видам работы.

6.Необходимо максимизировать целевую функцию задачи транспортного типа. В этой ситуации при составлении опорного плана, в первую очередь, стараются заполнить клетки с наиболее высокими значениями показателей c_{ij}. Выбор клетки, подлежащей заполнению при переходе от одного допустимого плана к другому, должен производиться не по максимальной положительной разнице $\Delta_{ij}=U_i+V_j-c_{ij}$, а по минимальной отрицательной разнице $\Delta_{ij}=U_i+V_j-c_{ij}$. Оптимальным будет план, которому в последней таблице сопутствуют свободные клетки с неотрицательными элементами: все разности $\Delta_{ij}=U_i+V_j-c_{ij}\ge 0$.

7.Необходимо в одно время распределить груз различного рода по потребителям. Задачи данного типа называются многопродуктовыми транспортными задачами. В этих задачах поставщики n родов грузов разбиваются на n условных поставщиков, а потребители m родов грузов разбиваются на m условных потребителей. С учетом этой разбивки составляют полную транспортную таблицу. При этом заметим, что некоторые маршруты A_iB_j, должны быть блокированы (закрыты), поскольку в данной постановке задачи грузы разного рода не могут заменять друг друга. Этим маршрутам A_iB_j должна соответствовать очень высокая стоимость перевозки. Многопродуктовую задачу не всегда обязательно описывать одной моделью. Например, если поставки грузов различного рода независимы, то задачу можно представить в виде комплекса транспортных задач по каждому роду груза. Однако если между грузами различного рода существует связь (например, одни из грузов можно заменить другими), то в общем случае исходную модель (задачу) не удается разбить на комплекс простых транспортных задач.

§ 11. Целочисленное линейное программирование.

11.1.Метод графика

Во многих случаях на переменные задачи линейного программирования накладывается дополнительное требование целочисленности переменных. Если этому требованию должны удовлетворять все переменные, то получаем полностью целочисленную задачу линейного программирования, которая записывается следующим образом:

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\min \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,2,...,m, \qquad (2)$$

$$x_j\ge 0;\quad j=1,2,...,n, \qquad (3)$$

$$x_j\in Z\quad j=1,2,...,n, \qquad (4)$$

где Z – множество целых чисел.

Полностью целочисленную задачу с двумя переменными можно решить графически, учитывая, что множество допустимых решений $\tilde{K}$ этой задачи состоит из точек целочисленной координатной сетки, принадлежащих множеству допустимых решений задачи (1)-(3), т.е. задачи линейного программирования без дополнительного требования (4).

Пример 11.1.

$$F = x_1 - 20x_2 \to \min$$
$$-x_1 + 10x_2 \le 40$$
$$4x_1 + 2x_2 \le 29$$
$$x_j \ge 0,\ \ x_j \in Z,\ \ j = 1,2$$

Решение. На плоскости R^2 построим множество допустимых решений К рассматриваемой задачи линейного программирования без требования целочисленности (многоугольник ABCD на рис.12.1) и отметим точки множества К с целочисленными координатами. Совокупность этих точек представляет собой множество допустимых решений $\tilde{K}$ полностью целочисленной задачи.

Перемещая линию уровня целевой функции F(x) в направлении $\nabla F = (-1;20)$ убывания F(x), находим крайнее положение этой линии, в котором она ещё имеет непустое пересечение с множеством $\tilde{K}$. В этом положении линия уровня проходит через точку B(0,4), поэтому решение задачи будет $\tilde{X}_{opt} = (0,4)$ и $F_{\min} = F(\tilde{X}_{opt}) = -80$.

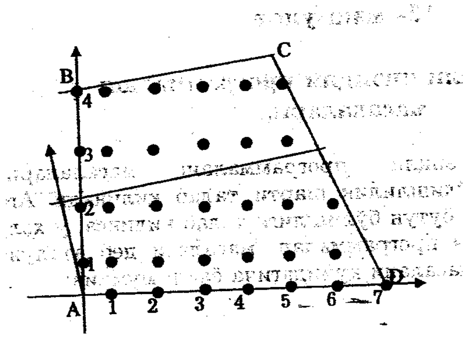

Рис.12.1

Отметим, что (как видно из рис. 12.1) точкой минимума F(x) в данной задаче без требования целочисленности является точка С (5;4,5), т.е. X_{opt}=(5;4,5) и $F_{min}=F(X_{opt})$=-85. Отсюда следует, что точкой минимума целевой функции на множестве допустимых решений $\tilde{K}$ целочисленной задачи не обязательно является ближайшая к решению X_{opt} обычной (не целочисленной) задачи точка множества К с целочисленными координатами.

11.2.Метод Гомори

Для решения полностью целочисленных задач линейного программирования с произвольным числом переменных используется метод Гомори. Он состоит в последовательном отсечении от множества допустимых решений К нецелочисленной задачи частей, не содержащих точек с целыми координатами. Эти отсечения производятся включением в задачу дополнительных ограничений на переменные x_j.

Опишем алгоритм метода Гомори:

1. С помощью симплекс-метода находится решение X_{opt} задачи линейного программирования без учета требования целочисленности (4). Если для X_{opt} условие (4) выполняется , то задача решена. В противном случае среди чисел β_i и столбца A_0 , определяющей решение X_{opt} , есть такие, что $\{\beta_i\} > 0$.

Замечание. Напомним, что любое $a \in R^1$ можно представить в виде $a = [a] + \{a\}$, где $[a]$- целая часть числа a, а $\{a\} = a - [a]$ - его дробная часть.

Например,

$$\left[\frac{7}{3}\right] = 2 \,;\ \left[-\frac{7}{3}\right] = -3\,,$$

$$\left\{\frac{7}{3}\right\} = \frac{7}{3} - \left[\frac{7}{3}\right] = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3},\ \ \left\{-\frac{7}{3}\right\} = -\frac{7}{3} - \left[-\frac{7}{3}\right] = -\frac{7}{3} + 3 = \frac{2}{3}\,.$$

2. Среди нецелых элементов β_i выбирается произвольный элемент $\{\beta_r\}$(например, исходя из условия $\{\beta_r\} = \max\{\beta_i\}$).

По r-й строке симплекс-таблицы составляется дополнительное ограничение вида

$$-\sum_{j=m+1}^{n} \{q_{rj}\} x_j \le -\{\beta_r\}.$$

С помощью вспомогательной переменной $x_{n+1} \ge 0$ это ограничение представляется в виде равенства

$$-\sum_{j=m+1}^{n} \{q_{rj}\} x_j + x_{n+1} = -\{\beta_r\}$$

и вводится в симплекс-таблицу дополнительной строкой.

Так как x_{n+1} = -$\{\beta_r\}$<0 , то теперь симплекс-таблица перестает соответствовать допустимому базисному решению задачи линейного программирования, которую она описывает (на столбце A_0 появляется -$\{\beta_r\}$<0).

3. Для перехода к допустимому базисному решению производятся следующие операции:

a) строка с отрицательным свободным членом β_k считается разрешающей (на первом шаге, очевидно k=n+1);

b) если все коэффициенты q_{kj}>0, то задача не имеет решения, в противном случае номер l разрешающего столбца находится из условия

$$\frac{\Delta_l}{|q_{kl}|} = \min_{j:\, q_{kj} < 0;} \frac{\Delta_j}{|q_{kj}|}$$

c) совершается преобразование симплекс-таблицы с опорным элементом q_{kl} .

4. Если найденное в разделе 3 решение задачи линейного программирования удовлетворяет условию целочисленности, то вычисления

завершаются, а если нет, то продолжаются переходом к разделу 2 описания алгоритма.

Описанный алгоритм позволяет найти решение полностью целочисленной задачи линейного программирования или установить отсутствие решений за конечное число итераций.

Пример 11.2. Решить задачу, рассмотренную в примере 1 методом Гомори.

Решение. Введя дополнительные переменные $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, запишем эту задачу в каноническом виде:

$$F = x_1 - 20x_2 \to \min$$
$$-x_1 + 10x_2 + x_3 = 40$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 29$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$$
$$x_j \in Z, j = 1,2,3,4.$$

Отметим, что, так как все коэффициенты ограничений-равенств данной задачи целые, то целочисленность исходных переменных x_1 , x_2 влечет целочисленность и дополнительных переменных x_3, x_4. Поэтому и после перехода к каноническому виду можно рассматривать данную задачу как полностью целочисленную (что мы сделали выше) и применить для её решения метод Гомори.

Задачу решим симплексным методом.

Б	$C_б$	A_0	1	-20	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
A_3	0	40	-1	10	1	0
A_4	0	29	4	2	0	1
Δ_j		0	-1	20	0	0
A_2	-20	4	$-1/10$	1	$1/10$	0
A_4	0	21	$21/5$	0	$-1/5$	1
Δ_j		-80	2	0	-2	0
A_2	-20	$9/2$	0	1	$2/21$	$1/42$
A_1	1	5	1	0	$-1/21$	$5/21$
Δ_j		-85	0	0	$-41/21$	$-5/21$

Это решение X_{opt} = (5;9/2;0;0), F_{min}= -85 не удовлетворяет условию целочисленности, поэтому дополняем последнюю симплекс-таблицу дополнительной строкой.

$$\{\beta_1\} = \frac{9}{2} - \left[\frac{9}{2}\right] = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2};\quad q_{11} = q_{12} = 0;\quad q_{13} = \frac{2}{21} - 0 = \frac{2}{21};\quad q_{14} = \frac{1}{42} - 0 = \frac{1}{42}.$$

Для перехода к допустимому базисному решению находим разрешающий элемент по описанному правилу и преобразуем симплексную таблицу:

Б	$C_б$	A	1	-20	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2 A_1	-20 1	$9/2$ 5	0 1	1 0	$2/21$ $-1/21$	$1/42$ $5/21$	0 0
Δ_j		-85	0	0	$-41/21$	$-5/21$	0
A_5	0	$-1/2$	0	0	$-2/21$	$-1/42$	1
A_2 A_1 A_4	-20 1 0	4 0 21	0 1 0	1 0 0	0 -1 4	0 0 1	1 10 -42
Δ_j		-80	0	0	-1	0	-10

Последняя симплекс-таблица дает решение рассматриваемой задачи:

$$\tilde{X}_{opt} = (0,4) \qquad F_{\min} = F(\tilde{X}_{opt}) = -80.$$

Отметим, что дополнительное ограничение, введенное в симплексную таблицу, имеет вид

$$-\frac{1}{42}x_4 - \frac{4}{42}x_3 \le -\frac{1}{2}.$$

С помощью уравнений $x_3=40+x_1-10x_2$; $x_4=29-4x_1-2x_2$ перепишем его для переменных x_1 и x_2: $x_2 \le 4$. Отсюда видно, что дополнительное ограничение соответствует отсечению от множества K (многоугольника ABCD на рис.12.1) части, содержащей точку X= (5, $9/2$) (вершину C этого многоугольника).

Отметим, что переход к каноническому виду в полностью целочисленной задаче линейного программирования , содержащей ограничения-неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i \qquad (5)$$

не приводит, вообще говоря, к полностью целочисленной задаче в каноническом виде, так как в преобразованных ограничениях (5) вспомогательные переменные x_{n+i} не подчинены требованию целочисленности.

Однако, если все коэффициенты $a_{ij};b_i$ в (5) –целые числа, то условия целочисленности можно распространить и на x_{n+i}, как это сделано при решении примера 2.

Полностью целочисленную задачу в каноническом виде можно получить также, если (5) $a_{ij};b_i$ - рациональные числа. Для этого следует умножить (5) на общее кратное знаменателей коэффициентов $a_{ij};b_i$ (т.е. перейти к целым коэффициентам в (5)) и лишь после этого ввести вспомогательные переменные $x_{n+i.}$

Ключевые слова

Линейное программирование, математическая модель, задача в нормальной форме, задача в канонической форме, ограничения типа равенств, ограничения типа неравенств, дополнительная переменная, целевая функция, план, опорный план, невырожденный опорный план, и вырожденный опорный план, оптимальный план выпуклая линейная комбинация точек, выпуклое множество (замкнутое, ограниченное), угловая точка, многогранник решений, первоначальный опорный план, базис, неотрицательное базисное решение систем линейных уравнений, условия оптимальности опорного плана, искусственный базис, двойственные задачи, симметрические и несимметрические двойственные задачи, двойственный симплексный метод, транспортная задача линейного программирования, закрытая модель, открытая модель, занятая клетка, незанятая клетка, фиктивно занятая клетка, ε- метод, усложненные транспортные задачи, задача целочисленного программирования, метод Гомори, целочисленное решение, дополнительное ограничение.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения задачи линейного программирования в нормальной форме.
2. Дайте определения задачи линейного программирования в канонической форме.
3. Каким образом ограничения типа неравенств можно свести к ограничениям типа равенств? Доказать лемму. Какие переменные называются дополнительными?
4. Сформулируйте общую задачу линейного программирования.
5. Дайте определения плана, невырожденного и вырожденного плана, оптимального плана.
6. Какое множество называется выпуклым?
7. Какая точка выпуклого множества называется угловой?

8. В чем заключается важность теоремы Крейна - Мильмана?
9. Что называется многогранником решений?
10. Дайте геометрическое истолкование задачи линейного программирования.
11. В какой точке многогранника решений линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимального решения?
12. Какой вид имеет угловая точка многогранника решений и какому плану она соответствует?
13. Какие планы необходимо исследовать, чтобы найти оптимальное значение линейной функции?
14. Дайте геометрическое истолкование задачи линейного программирования.
15. В какой точке многогранника решений линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимального значения?
16. Какой вид имеет угловая точка многогранника решений и какому плану она соответствует?
17. Какие планы необходимо исследовать, чтобы найти оптимальное значение линейной функции?
18. На чем основан графический метод решения задачи линейного программирования?
19. Как определить по рисунку, имеет задача линейного программирования решение или ее оптимум находится в $\pm\infty$?
20. Какие задачи линейного программирования, можно решать графическим методом?
21. Как построить первоначальный опорный план задачи линейного программирования и проверить его на оптимальность?
22. На чем основан метод отыскания неотрицательного базисного решения систем линейных уравнений? Наряду с этим, этот метод одновременно дает ответ еще на какие вопросы?
23. Перечислите условия оптимальности опорного плана задачи линейного программирования на отыскание минимального и максимального значений линейной функции.
24. Как определяется вектор для включения в базис, если первоначальный план не является оптимальным?
25. Когда линейная функция не ограничена на многограннике решений?
26. Как определить вектор, подлежащий исключению из базиса? Какой элемент называется разрешающим?
27. Выведите формулы разложения векторов по векторам базиса и покажите, что они являются формулами полного исключения.
28. Какой метод решения систем линейных уравнений лежит в основе симплексного метода ?
29. Какая переменная называется искусственной, когда она вводится и какой коэффициент соответствует ей в линейной функции?

30. Зачем в системе ограничений необходим единичный базис?

31. Когда оптимальный план расширенной задачи является оптимальным планом исходной задачи?

32. Когда исходная задача несовместна, и как это определить с помощью решения расширенной задачи?

33. Как определяется вектор, подлежащий включению в базис при использовании искусственного базиса?

34. Что такое зацикливание и в какой задаче линейного программирования оно может произойти?

35. В чем заключается сущность двойственности в линейном программировании?

36. Пусть исходная задача состоит в оптимальном использовании ресурсов. Дайте экономическую интерпретацию двойственной задачи.

37. Сформулируйте и докажите теорему двойственности.

38. Какие задачи линейного программирования относятся к несимметричным и симметричным, в чем их отличие?

39. Как по решению исходной (двойственной) найти решение двойственной (исходной) задачи?

40. Запишите возможные виды математических моделей двойственных задач.

41. В чем состоит сущность двойственного симплексного метода?

42. Сформулируйте транспортную задачу линейного программирования и напишите ее математическую модель.

43. Докажите теорему о существовании решения транспортной задачи.

44. Какие существуют методы построения первоначального опорного плана? Постройте опорный план с помощью этих методов.

45. Сколько положительных перевозок должен содержать невырожденный опорный план и: почему?

46. В чем заключается опорность плана транспортной задачи, условия которой записаны в виде таблицы?

47. Дайте определение системе потенциалов, расскажите, как она строится.

48. В каком случае опорный план транспортной задачи является оптимальным?

49. Какая модель транспортной задачи называется закрытой, а какая - открытой?

50. Как открытую модель преобразовать в закрытую?

51. Для решения каких экономических задач применяется транспортная задача? Сформулируйте эти задачи и постройте их математические модели. Что такое усложненные задачи транспортного типа?

52. Какие экономические задачи относятся к задачам целочисленного программирования?

53. Сформулируйте задачу целочисленного программирования.

54. В чем состоит метод Гомори?

55. Как составить дополнительное ограничение, если компоненты оптимального плана задачи являются дробными?

56. В каком случае поставленная задача не имеет целочисленного решения?

57. Какой геометрический смысл имеет введение дополнительного ограничения?

Задачи

1.1. Построить математическую модель следующих задач, представив полученные задачи линейного программирования в каноническом виде.

1. Фирма располагает ресурсами сырья, рабочей силой и оборудованием, необходимыми для производства любого из четырёх видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы каждого вида товаров, прибыль, получаемая предприятием, а также запасы ресурсов указаны в таблице:

Виды ресурсов	Вид товара				Объём ресурсов
	А	Б	В	Г	
сырьё, кг	3	5	2	4	60
рабочая сила, ч	8	14	18	30	400
оборудование. станко-ч	4	14	8	16	128
Прибыль на единицу товара	30	25	56	46	

Какой ассортимент товара, и в каком объёме надо выпускать, чтобы совокупная прибыль от реализации всех видов товара была максимальной?

2. Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, бюро и книжные шкафы. При изготовлении этих товаров используется два различных типа досок, причём фабрика имеет в наличии 190 м досок 1-го типа и 900 м 2-го типа. Кроме того, заданы трудовые ресурсы в количестве 3940 чел-ч.. В таблице приведены трудоёмкости нормативов затрат каждого вида досок на изготовление 1 ед. изделия и прибыль на единицу изделия .

Изделия ресурсы	Затраты на единицу изделия			
	столы	стулья	бюро	книжные шкафы

доски 1-го типа, м доски 2-го типа, м трудовые ресурсы чел-ч	2 5 10	4 8 10	6 8 20	7 5 8
Прибыль, ден.ед./шт.	25	34,6	28,4	31

Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль.

3. Для изготовления четырёх видов изделий А, Б, В и Г фабрика расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. В таблице приведены исходные данные задачи:

Виды ресурсов	Нормы расхода на единицу изделия				Объем ресурсов
	А	Б	В	Г	
сталь, кг	4	3	8	10	490
цветные металлы, кг	4	7	5	6	3000
токарные станки, станко-ч	7	9	9	6	720
Прибыль на ед. товара, ден.ед.	12	9	7	15	

Какой ассортимент товара необходимо выпускать, чтобы прибыль от их реализации была максимальной?

4. Торговое предприятие, реализующее четыре группы товаров (1, 2, 3, 4) ,должно составить оптимальный план , определяющий объёмы и структуру товарооборота, максимизирующий прибыль торгового предприятия. При этом используется три вида ресурсов. Уровень издержек обращения не должен превышать 1450 ден. ед, фонд рабочего времени 1100 чел.-час, площадь торговых залов 900 м.кв.

Данные о нормативных затратах ресурсов на 1 тыс. ден.ед товарооборота, рассчитывающегося с использованием среднегрупповых цен реализации и нормативов затрат на единицу товарооборота, приведены в таблице :

Ресурсы	нормативы затрат на 1 тыс. ден.ед. товарооборота			
	1	2	3	4
Фонд рабочего времени, (чел-ч.)	3	5	4	3
Площадь торговых залов, м.кв.	4	3	2	4
Издержки обращения (в ден. ед.)	2	2	5	2
прибыль от продажи	7	6	5	8

5. Ткань четырёх артикулов производится на ткацком станке с ограниченной мощностью. Для изготовления тканей используется пряжа и красители.

В таблице указаны мощность станка (в станко-ч) ресурсы пряжи и красителей (в кг на 1000 м), а также нормативное время работы станка, нормы расхода пряжи и краски и цена ткани (в ден.ед.) за 1м.

Виды ресурсов	Производительность и нормы расхода				Объём ресурсов
	1	2	3	4	
Ткацкий станок (станко-час)	8	9	7	5	4000
Пряжа, кг	6	7	6	5	2400
Красители, кг	9	8	5	4	2520
Цена	9	8	5	7	

Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий товарную продукцию фабрики.

6. Для изготовления компота четырёх видов используются яблоки, вишни, сливы. Наличное количество фруктов, расход фруктов в килограммах для изготовления одной банки компота разных видов и цена одной банки компота разных видов даются в таблице:

Фрукты	Виды компота				Запасы продуктов
	1	2	3	4	
Яблоки, кг	5	4	3	5	1500
Вишни, кг	4	6	7	4	1200
Сливы, кг	5	5	7	7	1100
Цена одной банки(в ден.ед.)	0,4	0,5	0,4	0,5	

Составить ассортимент и план выпуска продукции, при котором общая сумма от реализации продукции была бы наибольшей.

7. Для производства детских туфель, ботинок, босоножек используется сырьё четырёх видов, запасы которых в цехе ограничены и составляют, соответственно, 6600, 7200,5000 и 4300 условных единиц.

Количество сырья каждого вида, необходимого для изготовления пары туфель, пары ботинок и пары босоножек, а также доход от реализации одной пары обуви (в ден.ед.) приведены в таблице:

Виды сырья	Расход сырья на 1 пару обуви		
	туфли	ботинки	босоножки
1	4	3	3
2	1	2	4
3	3	3	5
4	2	5	5
Доход от реализ-ции 1 пары обуви	8	6	9

Составить оптимальный ассортимент выпуска продукции.

8. Магазин торгует тремя видами продукции: А, Б и В. Количество продаваемой продукции лимитируется ограниченностью имеющихся ресурсов 1, 2, 3 , 4 вида (в единицах).

Числовые данные, необходимые для решения задачи, представлены в таблице:

Виды ресурсов	Объём ресурсов	Норма затрат ресурсов на продажу ед.продукции вида		
		А	Б	В

1 2 3 4	6300 6000 5640 5000	2 1 2 3	3 1 3 2	3 4 5 2
Стоимость ед. продукции (ден. ед.)		5	3	6

Определить объём продажи продукции по видам , при котором её общая стоимость достигнет максимума.

1.2.Решите следующие задачи линейного программирования графическим методом, проведите анализ на чувствительность

1. $11x_1 + 4x_2 \ge 44$,
$8x_1 + 7x_2 \le 56$,
$6x_1 + 11x_2 \le 66$,
$2x_1 + 18x_2 \ge 36$,
$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$
$F_{max,min}=3x_1+4x_2$.

2. $9x_1+6x_2 \le 54$,
$6x_1+6.5x_2 \ge 39$,
$4.5x_1+10x_2 \ge 45$,
$4x_2 \le 20$,
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$F_{max,min}= 4x_1+5x_2$.

3. $17x_1+5x_2 \ge 05$,
$14x_1+13x_2 \le 182$,
$10x_1+17x_2 \le 170$,
$3x_1+22x_2 \ge 66$,
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$F_{max,min}=2x_1+7x_2$.

4. $10x_1+3x_2 \ge 30$,
$8x1+6x_2 \le 48$,
$5x_1+10x_2 \le 50$,
$3x_1+17x_2 \ge 51$,
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$F_{max,min}=2x_1+4x_2$.

5. $19x_1+10x_2 \le 190$,
$12x_1+19x_2 \le 228$,
$10x1+7x_2 \ge 70$,
$5x_1+11x_2 \ge 55$,
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$F_{max,min}= x_1+11x_2$.

6. $15x_1+4x_2 \ge 60$,
$7x_1+8x_2 \ge 56$,
$3x_1+16x_2 \ge 48$,
$12x_1+14x_2 \le 168$;
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$F_{max,min}= 7x_1+3x_2$.

7. $7.5x_1+12x_2 \le 90$,
$9x_1+8x_2 \ge 72$,
$11x1+7x_2 \le 77$,
$5.5x_1 \le 22$;
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$F_{max,min}= 7x_1+18x_2$.

8. $24x_1+12x_2 \le 312$,
$15x_1+15x_2 \ge 225$,
$12x_1+22x_2 \le 264$,
$9x_1+25x_2 \ge 225$;
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$F_{max,min}= 6x_1+8x_2$.

9. $6x_1+17x_2 \ge 136$,
$10x_1+22x_2 \le 220$,
$25x_1+8x_2 \le 200$,
$11x_1+9x_2 \ge 99$;
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$F_{max,min} = 8x_1+2x_2$.

10. $27x_1+8x_2 \ge 216$,
$19x_1+23x_2 \le 437$,
$7x_1+23x_2 \ge 161$,
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$25x_1+19x_2 \le 475$;
$F_{max,min}= 2x_1+4x_2$.

11. $3x_1+1.5x_2 \ge 4.5$,
$x_2 \le 4$,
$x_1-x_2 \le 3$,
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$3x_1+2x_2 \le 18$,
$F_{max,min}= 4x_1+x_2$.

12. $3x_1+2x_2 \le 20$,
$-2x_1+x_2 \ge 2$,
$3x_1+5x_2 \ge 15$,
$x_2 \ge 0$
$x_1 \le 0$,
$F_{max,min}= 0.5x_1+5x_2$.

13. $7x_1+6x_2 \le 42$,
$12.5x_1+5x_2 \le 50$,
$x_1 \le 3$,
$x_2 \ge 0$,
$x_1 \ge 0$,
$F_{max,min} = 2x_1+x_2$.

14. $5x_1+4x_2 \le 40$,
$-x_1+3x_2 \le 3$,
$-x_1+4x_2 \ge 4$,
$9x1+3x_2 \ge 16$,
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$F_{max,min} =1.5x_1+3x_2$.

15. $2x_1+3x_2 \ge 6$,
$2x_1+7x_2 \le 24$,
$1.8x_1+33x_2 \ge 16$,
$-2x1+x_2 \le 2$,
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$F_{max,min} = x_1+8x_2$.

16. $9x_1+10x_2 \le 90$,
$x1+2x_2 \ge 10$,
$2x_1+x_2 \ge 10$,
$x_1 \le 6$,
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$F_{max,min} = 4x_1+0.5x_2$.

17. $11.2x_1+5x_2 \ge 12$,
$3x1+1.5x_2 \ge 9$,
$2x_1+2.5x_2 \le 20$,
$x1 \ge 0$,
$x_2 \ge 0$
$F_{max,min} =2.5x_1+x_2$.

18. $x_1-2x_2 \le 8$,
$2.4x_1+3x_2 \le 24$,
$-4x_1+x_2 \le 4$,
$x_2 \le 7$,
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$F_{max,min}= 2x_1+1.5x_2$.

19. $12x_1+x_2 \ge 10$,
$x_1+x_2 \ge 3$,
$2x_1+2x_2 \le 14$,
$6x_1-x_2 \le 6$,
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$F_{max,mi\text{т}}= x_1+ x_2$.

20. $12x_1+1.2x_2 \ge 10$,
$x_1+0.4x_2 \le 4$,
$2x_1+9x_2 \ge 17$,
$5x_1-x_2 \le 7$,
$x_1 \ge 0;x_2 \ge 0$
$F_{max,min} =3x_1+ x_2$.

1.3. Решить задачи приведенные в 1.1. симплексным методом, затем составить двойственную задачу и провести экономический анализ полученных оптимальных планов

1.4. Найдите решения следующих задач двойственным симплексным методом:

1. $F = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \min$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 4$$
$$3x_1 + x_2 - 4x_3 \ge 7$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

2. $F = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$
$$x_1 - x_2 \ge 4$$
$$x_1 + x_2 \ge 6$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

3.
$F = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max$

$$x_1 + x_2 + 2x_4 \ge 4$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$$

4. $F = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 18$$
$$3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \ge 24$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$$

5. $F = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \min$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \ge 27$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \ge 24$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$$

6. $F = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \to \max$

$$-2x_1 + x_2 - x_3 = 12$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 10$$
$$3x_1 - 2x_2 - x_5 = 18$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$$

1.5. Решить транспортные задачи.

1. В производственном объединении есть три склада, которые обеспечивают четыре цеха однородным материалом, объёмом 1300 т. Себестоимость перевозок 1 т. груза представлена в таблице.

Определить оптимальный план прикрепления складов к потребителям, которые бы обеспечивали минимальные транспортные издержки.

Склады	Цеха				Мощность складов
	1	2	3	4	
1	2	2	3	4	500
2	2	3	6	1	600
3	5	2	2	2	200
Потребность цехов	700	100	200	300	

2. Сформулировать практическую транспортную задачу отрасли народного хозяйства, в которой вы работаете, подставить данные, представленные в таблице, и определить план перевозок.

Поставщики	Потребители				Запасы
	1	2	3	4	
A_1 A_2 A_3	1 2 3	2 4 3	2 3 3	4 4 5	500 200 500
	400	200	300	300	

3. Имеются три склада, из которых необходимо вывезти муку в четыре торговые точки. Объём перевозок, потребности пунктов назначения и удельные транспортные расходы представлены в таблице .

Склады	Торговые точки				Объём вывоза (т)
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1 A_2 A_3	2 3 3	5 11 10	4 3 3	6 2 2	120 130 170
Объём ввоза, т	70	90	110	150	

Необходимо закрепить поставщиков за потребителями так, чтобы общая сумма затрат на перевозку была минимальной.

4. Составить наивыгоднейший план перевозок глины с четырёх карьеров к трём керамическим заводам. Мощности карьеров потребности заводов и расходам на перевозку 1 тонны глины (в ден.ед.) от каждого карьера к каждому заводу даны в таблице:

Карьеры	Заводы			Мощности карьеров
	B_1	B_2	B_3	
A_1 A_2 A_3 A_4	2 1 4 3	5 7 6 5	4 3 2 3	600 300 200 400
Потребност и заводов	800	300	400	

5.Три автохозяйства (A_1, A_2, A_3) ежедневно выпускают на линию 1200 автомобилей марки КАМАЗ. Эти хозяйства должны ежедневно подавать подвижной состав четырём крупным грузоотправителям (B_1, B_2, В3, B_4).

Расстояние между автохозяйствами и основными клиентами, а также потребность грузовладельцев в автомобилях и наличие их в автохозяйствах приводятся в таблице:

Автохозяйства	Расстояние между автохозяйствами и грузоотправителями				Наличие автомоб.
	B_1	B_2	B_3	B_4	

A1	2	3	4	3	350
A_2	5	3	1	2	300
A_3	2	1	3	4	550
Потребность в автомобилях	250	300	350	300	

Найти оптимальный вариант закрепления автохозяйств за грузоотправителями, обеспечивающий минимальный порожний пробег автомобилей.

6. С трёх плодоовощных баз ежедневно отправляется груз в четыре магазина “ Овощи- фрукты”.

Расстояние между поставщиками и потребителями, а также потребность магазинов в поставке груза и наличие груза на базах приводятся в таблице:

Плодоовощная база	Магазины				Наличие груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	7	1	2	90
A_2	3	4	2	5	80
A_3	5	2	3	1	100
A_4					
Потребность	70	60	110	30	

Найти оптимальный вариант поставок груза с плодоовощных баз в магазины.

7. Из трёх станций A_1, A_2, A_3 отправления необходимо перевезти однородный груз, соответственно объёмом, 350 т, 250 т, 300 т, которые надо перевезти четырём заказчикам B_1, B_2, B_3, B_4 с объёмами потребности соответственно 150 т, 200т, 280 т, 270 т. Стоимость перевозки 1 тонны груза с данной станции, данному заказчику приведены в таблице:

Пункты отправления	Пункты назначения			
	B_1	B2	B_3	B_4
A_1	5	4	3	1
A_2	3	4	3	4
A_3	5	2	7	5

Требуется спланировать перевозки так, чтобы общая сумма стоимости была наименьшей.

8. Три завода A_1, A_2, A_3 производящие минеральные удобрения, обеспечивают четыре хозяйства (B_1, B_2, B_3, B_4). Производительность заводов, потребность хозяйств в минеральных удобрениях и транспортные издержки за 1 кг минеральных удобрений (в ден. ед.) представлены в таблице:

Заводы	Хозяйства				Производительность кг.
	B_1	B_2	B3	B_4	
A_1	5	4	3	2	1200
A_2	3	2	4	3	3900
A_3	2	6	2	5	3200
Потребность в кг	2300	1300	3100	1600	

Найти оптимальный вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором транспортные издержки по поставке были бы минимальными.

1.6. Решить следующие полностью целочисленные задачи линейного программирования графическим методом.

1. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 36 \\ x_1 \le 13 \\ 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$$
$$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min$$

2. $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$$
$$F(x) = -9x_1 - 11x_2 \to \min$$

3 . $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 5 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$$
$$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min$$

4. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$$
$$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min$$

5. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 29 \\ 3x_1 - x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$$
$$F(x) = 3x_1 + x_2 \to \min$$

6. $$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26 \\ x_1 + 4x_2 \ge 25 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2 \end{cases}$$
$$F(x) = 5x_1 + 7x_2 \to \min$$

1.7. Решить следующие полностью целочисленные задачи линейного программирования методом Гомори.

9. $\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$

$F(x) = -x_1 + x_4 \to \min$

10. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$

$F(x) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \min$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$

$F(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \min$

12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$

$F(x) = x_1 + 2x_2 + x_5 \to \min$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$

$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min$

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4 \end{cases}$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min$

16. $\begin{cases} -6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6 \\ 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$

$F(x) = -x_3 \to \min$

17. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$

$F(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$

18. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 100 \\ 2x_1 + 4x_3 \ge 14 \\ 2x_2 + x_3 \ge 7 \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3 \end{cases}$

$F(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$

ГЛАВА II

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Нелинейным программированием называют раздел математического программирования, в котором либо целевая функция, либо ограничения, либо то и другое нелинейные.

§1. Введение

1.1. Постановка задачи. В общем случае, задачу нелинейного программирования можно поставить следующим образом:

Пусть в R^n заданны функции, $f(X), g_1(X), g_2(X),..., g_m(X)$ из которых хотя бы одна является нелинейной. Требуется найти точку, $X^0 \in R^n$ удовлетворяющую условиям:

$$g_1(X) = 0, g_2(X) = 0,..., g_m(X) = 0,$$

Такую, что

$$f(X^0) = \min_{\substack{g_i(X)=0 \\ i=\overline{1,m}}} f(X).$$

Кратко задачу нелинейного программирования в общем случае можно записать так:

$$f(X) \to \min \tag{1}$$

$$g_i(X) = 0, \quad i = 1,2,...,m. \tag{2}$$

Очевидно, что задача нелинейного программирования имеет смысл лишь в том случае, когда допустимое множество K:

$$K = \{X : g_1(X) = 0, \quad g_2(X) = 0, \quad ..., \quad g_m(X) = 0\}$$

не пусто (система ограничений (2) совместна).

Нетрудно понять, что задача нелинейного программирования не всегда имеет решение.

Во многих случаях для доказательства существования решения задачи нелинейного программирования достаточно воспользоваться теоремой Вейерштрасса о минимуме на компакте полунепрерывной снизу функции.

Задачу (1), (2) называют задачей на глобальный условный минимум в отличие от задачи на локальный условный минимум, которая состоит в следующем: найти точку X^0,удовлетворяющую ограничениям (2), такую, что при некотором достаточно малом ε, $\varepsilon > 0$, для всех допустимых векторов (точек) X из ε-окрестности точки X^0, $\|X - X^0\| \le \varepsilon$, выполняется неравенство $f(X^0) \le f(X)$.

В других обозначениях точка X^0- локального условного минимума – определяется равенством:

$$f\left(X^0\right)=\min_{\left\|X-X^0\right\|\le\varepsilon,\quad X\in K} f(X)\ .$$

Замечание 1.1.1. Некоторые авторы используют термины абсолютный и относительный, а не глобальный и локальный условный минимум. Мы ниже будем использовать те и другие термины.

Замечание 1.1.2. Так как любое уравнение равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} \varphi(X)\le 0, \\ -\varphi(X)\le 0, \end{cases}$$

то можно считать, что допустимое множество K задачи нелинейного программирования задается только неравенствами.

Замечание 1.1.3. Отметим также, что если ограничения задачи нелинейного программирования задается ограничениями типа неравенств, то их можно свести введением дополнительных переменных к ограничениям типа равенств. Этот вопрос мы будем обсуждать в §6 данной главы.

Задачи нелинейного программирования образуют широкий класс оптимизационных задач. В частности, к этому классу принадлежит задача минимизации функции n переменных на всем пространстве R^n, которую называют задачей безусловного минимума (ниже в §2 данной главы).

Отметим, что основные результаты в нелинейном программировании получены при рассмотрении задач, в которых система ограничений линейная, а целевая функция нелинейная. Даже в таких задачах оптимальное решение может быть найдено только для узкого класса целевых функций. Рассматривают частные случаи, когда целевая функция сепарабельная (является суммой n функций $f_j(X_j)$) или квадратичная. Отметим также, что в некоторых специальных случаях эти задачи можно решить методом графика. Мы на них здесь останавливаться не будем.

§2. Задачи на безусловный минимум (минимизация функции многих переменных)

Приступим к исследованию функций, определенных на n-мерном пространстве R^n. Точки пространства R^n будем обозначать символом X. При операциях с вектором X будем считать его записанным в виде вектора-столбца, хотя часто для экономии места компоненты вектора будут записываться в строку. Для обозначения вектора-строки используется символ (')-транспонирование. Поэтому

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\qquad X'=\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right),$$

где $x_i,\quad i=1,2,..,n$ - компоненты вектора X (координаты точки X).

Скалярное произведение векторов X и Y

$$Y'X = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X'Y .$$

Для дважды непрерывно дифференцируемой скалярной функции $f(X)$, $X \in R^n$, (т.е. $f(X) \in C^{(2)}$), символы $\nabla f \equiv \frac{\partial f}{\partial X}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}$ означают

$$\nabla f \equiv \frac{\partial f}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Если функция $g(X)$- m-мерная, то символ $\frac{\partial g}{\partial X}$ означает $n \times m$- мерную матрицу $(\nabla g_1, \nabla g_2, ..., \nabla g_n)$. Символом $\|X\|$ будем обозначать норму вектора X, определенную каким-нибудь образом, например, $\|X\|^2 = X'X$.

2.1. Постановка задачи. Пусть в R^n задана скалярная функция $f(X)$. Требуется найти точку X^0, $X^0 \in R^n$, такую, что

$$f(X^0) = \min_{x \in R^n} f(X).$$

Эта задача называется задачей на глобальный (абсолютный) минимум, точка X^0- точкой глобального (абсолютного) минимума. Задача на локальный (относительный) минимум состоит в поиске точки X^0, $X^0 \in R^n$, такой, что при некотором достаточно малом ε, $\varepsilon > 0$, выполняется соотношение

$$f(X^0) = \min_{\|X - X^0\| \le \varepsilon, \ X \in R^n} f(X) \ .$$

Вопрос о существовании решения поставленных задач во многих случаях решается с помощью теоремы Вейсрштрасса (§ 1).

2.2. Вспомогательные сведения из теории квадратичных форм

Пусть $A = (a_{ij})$- симметричная $n \times n$ матрица. Выражение

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = X'AX$$

называется квадратичной формой. Эта форма называется знакоположительной, если неравенство

$$X'AX \ge 0$$

выполняется для всех точек $X \in R^n$, и определенно положительной, если неравенство

$$X'AX > 0$$

выполняется для всех $X \in R^n$, $X \neq 0$. Аналогично определяются знакоотрицательные и определенно отрицательные квадратичные формы. С введенными квадратичными формами связаны понятия положительных и неотрицательных матриц. Симметричная матрица A называется положительной (неотрицательной) и обозначается $A > 0$ (соответственно, $A \geq 0$), если она служит матрицей коэффициентов определенно положительной (знакоположительной) квадратичной формы.

Рассмотрим симметрическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Минор матрицы A, составленный из строк с номерами $i_1,...,i_p$ и столбцов $j_1,...,j_p$, обозначим через

$$A\begin{pmatrix} i_1,...,i_p \\ j_1,...,j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_p} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{i_p j_1} & \dots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix}.$$

Минор называется главным, если $i_1 = j_1$,..., $i_p = j_p$, т. е. он составлен из строк и столбцов с одинаковыми номерами. Миноры

$$D_1 = a_{11}, \quad D_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad ,..., \quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются последовательными главными.

Справедливы следующие утверждения (критерии Сильвестра):

1) для того чтобы матрица была положительной, необходимо и достаточно, чтобы ее последовательные главные миноры были положительны:

$$D_1 > 0 \quad ,..., \quad D_n > 0 . \tag{1}$$

2) для того чтобы матрица была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были неотрицательны:

$$A\begin{pmatrix} i_1,...,i_p \\ i_1,...,i_p \end{pmatrix} \geq 0, \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_p \leq n, \quad p = 1,2,...,n . \tag{2}$$

Условий $D_1 \geq 0$,..., $D_n \geq 0$ недостаточно, чтобы матрица была неотрицательной. Действительно, у матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

последовательные главные миноры

$$D_1 = a_{11}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{11}^2 .$$

При $a_{11}=0,\quad a_{12}=0,\quad a_{22}<0$, получаем $D_1=0,\qquad D_2=0$, однако в этом случае соответствующая форма $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=a_{22}x_2^2$ не является знакоположительной (она знакоотрицательна).

Замечания 2.2.1. Применяя условия (1), (2) к матрице A, получаем критерии:

а) отрицательности матрицы: $(-1)^p D_p>0,\quad p=1,2,...,n;$

б) неположительности матрицы: $(-1)^p A\begin{pmatrix} i_1,...,i_p \\ i_1,...,i_p \end{pmatrix}\geq 0$

Замечания 2.2.2. Проверку условий (2) следует начинать с построения последовательных главных миноров, ибо из неравенств (1) следует, что все главные миноры положительны.

2.3. Необходимые условия минимума. Пусть $X^0,\quad X^0\in R^n$ - точка локального (относительного) минимума, т. е. существует такое $\varepsilon,\quad \varepsilon>0$, что для всех $X,\quad \left\|X-X^0\right\|\leq\varepsilon$, выполняется неравенство $f(X^0)\leq f(X)$.

Теорема 2.1. В точке минимума X^0 гладкой функции $\left(f(X)\in C^{(1)}\right)$; выполняется условие

$$\nabla f(X^0)=0\ . \qquad (3)$$

Доказательство мы опускаем, так как его можно найти в любом учебнике по математическому анализу.

Условие (3) называется необходимым условием минимума первого порядка. Вектор $\nabla f(X^0)=\dfrac{\partial f(X^0)}{\partial X}$ - принято называть градиентом функции $f(X)$ в точке X^0.

В новых терминах теорема 1 утверждает: в точке локального (относительного) минимума градиент функции равен нулю.

Теорема 1 сводит поиск относительного минимума к решению уравнения

$$\nabla f(X)=0\,. \qquad (4)$$

Решения уравнения (4) называют стационарными точками функции $f(X)$. Смысл теоремы 1 можно выразить и таким образом: точка минимума функции является стационарной точкой функции. Обратное утверждение, конечно, неверно, ибо уравнению могут удовлетворять и точки максимума и другие точки.

Для того чтобы среди стационарных точек выделить точки минимума, нужно использовать дополнительные условия, например, необходимое условие второго порядка, которое содержится в следующем утверждении.

Теорема 2.2. Пусть функция $f(X)$ определена, непрерывна вместе с производными первого и второго порядков во всех точках n- мерного пространства R^n. Если X^0- точка относительного минимума, то в этой точке матрица вторых производных минимизируемой функции неотрицательна:

$$\frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial X^2} \geq 0 . \qquad (5)$$

Доказательство этой теоремы также опускаем.

2.4. Достаточное условие относительного минимума. Из курса математического анализа без доказательства приведем следующее утверждение.

Теорема 2.3. Для того чтобы стационарная точка X^* была точкой относительного минимума дважды непрерывно дифференцируемой функций $f(X)$ ($f(X) \in C^{(2)}$), достаточно, чтобы матрица вторых производных функции $f(X)$ в точке X^* была положительной

$$\frac{\partial^2 f(X^*)}{\partial X^2} > 0 . \qquad (6)$$

§3. Задачи на условный минимум. Правило множителей

3.1. Решение задачи нелинейного программирования методом исключения. Рассмотрим задачу нелинейного программирования в общем виде (задача (1), (2) из §1)

$$f(X) \to \min \ , \qquad (1)$$

$$g_i(X) = 0, \quad i = 1,2,...,m . \qquad (2)$$

В некоторых задачах условия (2) составлены из несложных функций $g_1(X), g_2(X),..., g_m(X)$, позволяющих исключить m переменных. Пусть ими будут $x_1, x_2,..., x_m$. Тогда подставив значения

$$x_1 = h_1(x_{m+1},...,x_n), x_2 = h_2(x_{m+1},...,x_n), \quad ..., \quad x_m = h_m(x_{m+1},...,x_n)$$

в $f(X)$, получим новую функцию

$$\psi(x_{m+1},...,x_n) = f(h_1(x_{m+1},...,x_n),...,h_m(x_{m+1},...,x_n), x_{m+1},...,x_n) \qquad (3)$$

$n-m$ переменных.

Лемма 3.1. Если $X^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$ - точка условного минимума функции $f(X)$, то $(x_{m+1}^0,...,x_n^0)$ - точка безусловного минимума функции $\psi(x_{m+1},...,x_n)$ и, наоборот, если $(x_{m+1}^0,...,x_n^0)$-точка безусловного минимума функции $\psi(x_{m+1},...,x_n)$, то $(h_1(x_{m+1}^0,...,x_n^0),...,h_m(x_{m+1}^0,...,x_n^0), x_{m+1}^0,...,x_n^0)$ - точка условного минимума функции $f(X)$.

Доказательство. Действительно, пусть точкой безусловного минимума функции $\psi(x_{m+1},...,x_n)$ является не $(x_{m+1}^0,...,x_n^0)$, а точка $(\tilde{x}_{m+1},...,\tilde{x}_n)$:

$$\psi(\tilde{x}_{m+1},...,\tilde{x}_n) < \psi(x_{m+1}^0,...,x_n^0).$$

Тогда для $\tilde{X} = (h_1(\tilde{x}_{m+1},...,\tilde{x}_n),...,h_m(\tilde{x}_{m+1},...,\tilde{x}_n), \tilde{x}_{m+1},...,\tilde{x}_n)$, удовлетворяющей условиям (2), получаем неравенство

$$f(\tilde{X}) = \psi(\tilde{x}_{m+1},...,\tilde{x}_n) < \psi(x_{m+1}^0,...,x_n^0) = f(X_0),$$

которое противоречит предположению о том, что X^0- точка условного минимума.

Наоборот, пусть точка $(x_{m+1}^0,...,x_n^0)$- точка безусловного минимума функции $\psi(x_{m+1},...,x_n)$, но $\left(h_1(x_{m+1}^0,...,x_n^0),...,h_m(x_{m+1}^0,...,x_n^0),x_{m+1}^0,...,x_n^0\right)$ не является точкой условного минимума функции $f(X)$. Если точкой условного минимума является $\widetilde{X}=(\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_n)$: $f(\widetilde{X})<f(X^0)$, то

$$\psi(\widetilde{x}_{m+1},...,\widetilde{x}_n)=f\left(h_1(\widetilde{x}_{m+1},...,\widetilde{x}_n),...,h_m(\widetilde{x}_{m+1},...,\widetilde{x}_n),\widetilde{x}_{m+1},...,\widetilde{x}_n\right)<$$
$$<f\left(h_1(x_{m+1}^0,...,x_n^0),...,h_m(x_{m+1}^0,...,x_n^0),x_{m+1}^0,...,x_n^0\right)=\psi(x_{m+1}^0,...,x_n^0).$$

Полученное неравенство противоречит предположению. Следовательно, точка X^0 - точка условного минимума функции $f(X)$.

Хотя метод исключения часто затруднителен для реализации, все же в тех задачах, где он осуществим, следует им пользоваться. Например, метод исключения реализуется в симплексном методе (см. гл. I).

Теоретическая возможность применения метода исключения основана на теоремах о неявных функциях. Приведем простейшую теорему такого рода, которая будет использоваться и в дальнейшем.

Теорема 3.1 (о неявных функциях). Пусть A, B. $A\in R^m$, $B\in R^k$ - некоторые точки. Если m-мерная .функция $g(Y,Z)$, $Y\in R^m$, $Z\in R^k$ определена в окрестности точки $(Y,Z)\in R^m\times R^k$, дифференцируема там по Y и удовлетворяет условиям:

$$g(A,B)=0, \qquad \left|\frac{\partial g(A,B)}{\partial Y}\right|\neq 0,$$

то найдется m-мерная функция $Y=h(Z)$, определенная, непрерывная в окрестности точки $Z=B$ такая, что

1) $g(h(Z),Z)\equiv 0$ в окрестности точки $Z=B$;

2) $h(B)=A$;

3)функция $h(Z)$ имеет в окрестности точки $Z=B$ непрерывные производные по Z того же порядка, что и функция $g(Y,Z)$.

Используем теорему о неявных функциях для обоснования метода исключения в случае гладких функций $g_1(X),g_2(X),...,g_m(X)$.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3.2. Метод исключения в задаче на относительный минимум применим, если в точке $X=X^0$

$$rank\left(\frac{\partial g_1(X^0)}{\partial X},...,\frac{\partial g_m(X^0)}{\partial X}\right)=m.$$

Доказательство. Действительно, при выполнении этого условия в $m\times n$-мерной матрице $\left(\frac{\partial g_1(X^0)}{\partial X},...,\frac{\partial g_m(X^0)}{\partial X}\right)$ найдется хотя бы один отличный от нуля минор m-го порядка. Для простоты можно считать, что он занимает первые m строк. Обозначим первые m компонент вектора X через Y, а остальные – через Z, условия (12) запишем в виде $g(X)=g(Y,Z)=0$. Для функции $g(Y,Z)$выполнены все условия теоремы о неявных функциях и поэтому искомые функции $h_1(x_{m+1},...,x_n), h_2(x_{m+1},...,x_n)$,..., $h_m(x_{m+1},...,x_n)$ найдутся. Лемма доказана.

3.2. Метод множителей Лагранжа. По условиям задачи (1), (2) составим функцию

$$F(X,\overline{\Lambda}) = \lambda_0 f(X) + \Lambda' g(X), \tag{4}$$

где $\overline{\Lambda} = (\lambda_0, \Lambda)$ есть $(m+1)$- мерный вектор, состоящий из скаляра λ_0 и m-мерного вектора Λ.

Функцию $F(X,\overline{\Lambda})$ называют функцией Лагранжа задачи (1), (2), а компоненты $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_{2,} ..., \lambda_m$ вектора $\overline{\Lambda}$ - множителями Лагранжа.

Теорема 3.2 (правило множителей Лагранжа). Пусть функции $f(X), g_1(X), g_2(X),..., g_m(X)$ определены, непрерывны и дифференцируемы на R^n. Если X^0 - точка локального условного минимума, то найдется ненулевой вектор $\overline{\Lambda}$ такой, что

$$\frac{\partial F(X^0,\overline{\Lambda})}{\partial X} = 0.$$

Доказательство. Согласно определению (14) функции Лагранжа, утверждение примет вид

$$\lambda_0 \frac{\partial f(X^0)}{\partial X} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial X} = 0, \quad \overline{\Lambda} \neq 0,$$

т. е. векторы

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial X}, \quad \frac{\partial g_1(X^0)}{\partial X} \quad ,..., \quad \frac{\partial g_m(X^0)}{\partial X} \tag{5}$$

линейно зависимы.

Предположим, что это не так и векторы (5) линейно независимы. Тогда, по теореме о неявных функциях (ее применение к методу исключения), система уравнений

$$f(X) = f(X^0) + \beta \tag{6}$$

$$g_1(X) = 0, g_2(X) = 0,..., g_m(X) = 0 \tag{7}$$

имеет решение для всех β из окрестности точки $\beta = 0$. В частности, найдется точка $X(\beta)$ из окрестности точки X^0, удовлетворяющая уравнениям (6), (7) при $\beta < 0$, т. е.

$$f(X(\beta)) < f(X^0), \quad g(X(\beta)) = 0,$$

но это противоречит предположению о том, что X^0 - точка локального условного минимума. Теорема доказана.

Замечание 3.3.1. Если $\overline{\Lambda}$, удовлетворяет правилу множителей Лагранжа, то, в силу однородности по $\overline{\Lambda}$ функции Лагранжа, правилу множителей удовлетворяет и вектор -$\overline{\Lambda}$. Поэтому знак одной компоненты вектора $\overline{\Lambda}$ можно выбрать заранее. Для определенности задают знак множителя $\lambda_0 : \lambda_0 \geq 0$. В уточненной формулировке правило множителей утверждает о существовании чисел $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1, ..., \lambda_m$, не равных одновременно нулю, таких что $\frac{\partial F\left(X^0, \overline{\Lambda}\right)}{\partial X} = 0$.

В приложениях часто используется функция Лагранжа,

$$F(X, \Lambda) = f(X) + \Lambda' g(X), \qquad (8)$$

которую будем называть нормальной функцией Лагранжа. Функция (8) получается из (4) при $\lambda_0 = 1$. Нормальная функция Лагранжа проще функции Лагранжа, удобнее для вычислений. Однако правило множителей для нее не всегда верно.

Пример. $n = 2$, $m = 1$ $f(x) = x_1$, $g(x) = x_1^3 - x_2^2$. Допустимые точки удовлетворяют уравнению $x_1^3 - x_2^2 = 0$ и лежат на полукубической параболе.

Ясно, что точка $x_1^0 = x_2^0 = 0$ есть точка условного минимума. Составим нормальную функцию Лагранжа

$$F(X, \lambda) = f(X) + \lambda g(X) = x_1 + \lambda\left(x_1^3 - x_2^2\right).$$

Правило множителей приводит к уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1 + 3\lambda x_1^2 = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2\lambda x_2 = 0.$$

Точка минимума $x_1^0 = x_2^0 = 0$ не удовлетворяет этим уравнениям, т. е. правило множителей с нормальной функцией Лагранжа в данной задаче не справедливо.

Множители λ_0, Λ, при которых выполняется правило множителей в точке X^0, назовем множителями, соответствующими точке X^0. Точке X^0 может соответствовать несколько систем множителей Лагранжа.

§ 4. Нормальные задачи на условный минимум

Рассматриваются задачи на условный минимум, которые не сводятся к перебору конечного числа допустимых точек.

4.1. Нормальные точки минимума и обыкновенные допустимые точки. Если среди систем множителей Лагранжа, соответствующих точке условного минимума X^0 задачи

$$f(X) \to \min, \quad g(X) = 0,$$

нет множителей $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ с $\lambda_0 = 0$, то точка называется нормальной точкой минимума; а сама задача - нормальной задачей на условный минимум. Если X^0 - нормальная точка минимума, то соответствующие ей множители можно разделить на $\lambda_0 \neq 0$ и считать, что множители Лагранжа имеют вид $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

Для нормальной точки соответствующие множители $1, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ существуют и определяются единственным образом.

Действительно, если допустить еще одну систему множителей $1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, ..., \tilde{\lambda}_m$, $\left(\tilde{\lambda}_i \neq \lambda_i\right)$, то получаем

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial X} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(X^0)}{\partial X} + ... + \lambda_m \frac{\partial g_m(X^0)}{\partial X} = 0,$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial X} + \tilde{\lambda}_1 \frac{\partial g_1(X^0)}{\partial X} + ... + \tilde{\lambda}_m \frac{\partial g_m(X^0)}{\partial X} = 0.$$

Вычитая одно уравнение из другого, приходим к равенству

$$\mu_1 \frac{\partial g_1(X^0)}{\partial X} + ... + \mu_m \frac{\partial g_m(X^0)}{\partial X} = 0,$$

где $\mu_i = \lambda_i - \tilde{\lambda}_i \neq 0$. Полученное равенство означает, что точке X^0 соответствует еще одна система множителей $\mu_0 = 0, \mu_1, ..., \mu_m$, и это противоречит определению нормальности точки X^0. Следовательно, система множителей Лагранжа $1, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ единственна. Оказывается, характер точки минимума (нормальна она или нет) определяется полностью ограничениями задачи.

Точку $\tilde{X}$ назовем обыкновенной допустимой точкой, если $g(\tilde{X}) = 0$ и векторы

$$\frac{\partial g_1(\tilde{X})}{\partial X}, \frac{\partial g_2(\tilde{X})}{\partial X}, ..., \frac{\partial g_m(\tilde{X})}{\partial X},$$

вычисленные в этой точке, линейно независимы.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. Точка X^0 является нормальной в том и только в том случае, когда она обыкновенная допустимая точка.

Доказательство. Необходимость. Пусть точка X^0 - нормальная:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial X} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(X^0)}{\partial X} + ... + \lambda_m \frac{\partial g_m(X^0)}{\partial X} = 0,$$

но не является обыкновенной, т. е. для некоторого вектора $\mathrm{M} = (\mu_1, ..., \mu_m), \quad \mathrm{M} \neq 0$, выполняется равенство

$$\mu_1 \frac{\partial g_1(X^0)}{\partial X} + ... + \mu_m \frac{\partial g_m(X^0)}{\partial X} = 0.$$

Отсюда следует, что точке X^0 соответствует система множителей Лагранжа $\mu_0 = 0, \mu_1, ..., \mu_m = 0$, чего не может быть по определению нормальной точки X^0. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть допустимая точка X^0 обыкновенная. Если предположить, что она не является нормальной, то найдутся множители $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m; \quad \Lambda \neq 0$, такие, что

$$\lambda_0 \frac{\partial f(X^0)}{\partial X} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(X^0)}{\partial X} + ... + \lambda_m \frac{\partial g_m(X^0)}{\partial X} = 0.$$

Поскольку первое слагаемое слева равно нулю, то оставшаяся часть равенства означает, что векторы $\frac{\partial g_1(X^0)}{\partial X}, \frac{\partial g_2(X^0)}{\partial X}, ..., \frac{\partial g_m(X^0)}{\partial X}$ линейно зависимы. Это противоречит определению обыкновенной точки. Теорема доказана.

4.2. Правило множителей для нормальной задачи на условный минимум. Как следует из определения нормальных задач на условный минимум, при их исследовании достаточно пользоваться нормальными функциями Лагранжа. В этом случае правило множителей верно. Более того, оно упрощается и может быть записано в симметричном виде.

Теорема 4.2. Если точка X^0 доставляет решение нормальной задаче на условный минимум, то существует m-мерный вектор Λ такой, что выполняются равенства

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda\right)}{\partial X}=0,\qquad \frac{\partial F\left(X^0,\Lambda\right)}{\partial \Lambda}=0, \tag{1}$$

где $F(X,\Lambda)=f(X)+\Lambda' g(X)$.

Для доказательства утверждения достаточно заметить, что первое равенство в (1) есть следствие правила множителей для рассматриваемого нормального случая, а второе эквивалентно условию $g\left(X^0\right)=0$, которое должно, очевидно, выполняться для допустимой точки X^0.

Соотношения (1) представляют собой систему из $n+m$ уравнений относительно $n+m$ неизвестных X^0,Λ. В анормальных задачах правило множителей сводит исходную задачу к решению $n+m$ уравнений относительно $n+m+1$ неизвестных X^0,λ_0,Λ.

Если сравнить метод исключения с правилом множителей, то видно, что в первом методе исходная задача на условный минимум функции n переменных сводится к задаче безусловной минимизации функции $n-m$ переменных, во втором методе исходная задача сводится к условиям стационарности функции Лагранжа от $n+m$ аргументов. Следует подчеркнуть, что точка условного минимума X^0, вообще говоря, не является точкой минимума функции Лагранжа.

Пример 1. $n=2,\quad m=1,\quad f(X)=x_2,\quad g(X)=-x_1^2+x_2$. В обыкновенной точке $x_1^0=x_2^0=0$ достигается условный минимум. Правило множителей приводит к уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=-2\lambda x_1=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial x_2}=1+\lambda=0,$$

откуда $\lambda=-1$. Функция Лагранжа $F(X,-1)=x_1^2$ в точке $x_1=0$, соответствующей точке условного минимума, также достигает минимума.

Пример 2. $n=2,\quad m=1,\quad f(X)=x_2^3,\quad g(X)=-x_1^2+x_2$. Поскольку

$$\frac{\partial g}{\partial x_{11}}=-2x_1,\qquad \frac{\partial g}{\partial x_2}=1,$$

то

$$\frac{\partial g}{\partial X}\neq 0$$

и любая допустимая точка – обыкновенная, т.е. задача нормальная и $F(X,\lambda)=x_2^3+\lambda\left(x_2-x_1^2\right)$. Правило множителей приводит к уравнениям

$$-2\lambda x_1=0,\quad 3x_2^2+\lambda=0,\quad x_2-x_1^2=0.$$

Точке условного минимума $x_1^0 = x_2^0 = 0$ соответствует $\lambda = 0$. Функция Лагранжа с этим значением $F(X,0) = x_2^3$ в точке $x_2^0 = 0$ не достигает минимума. Точка $x_2^0 = 0$ является точкой перегиба функции.

Пример 3. $n = 2$, $m = 1$, $f(X) = -x_2^2$, $g(X) = x_2$. Точка $x_1^0 = x_2^0 = 0$ является нормальной точкой условного минимума. Правило множителей для функции $F(X,\lambda) = -x_2^2 + \lambda x_2$ приводит к уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_2^0 + \lambda = 0,$$

из которых следует, что $\lambda = 0$. При этом значении множителя функция Лагранжа $F(X,0) = -x_2^2$ достигает не минимума, а максимума.

4.3. Лемма о включении. Место нормальных задач в теории минимизации функций с дополнительными ограничениями определяется тем, что нормальные задачи на условный минимум не могут быть тривиальными, т.е. множество их допустимых векторов состоит не из конечного числа точек, а из бесконечного. Это следует из метода исключения. Такой же смысл можно придать, и следующей лемме, ярко отражающей существо классических методов исследования задач на минимум.

Лемма 4.1. Пусть X^* - обыкновенная допустимая точка, $g(X^*) = 0$, где $g(X)$ - гладкая функция. Тогда для n - мерного вектора Y, лежащего в гиперплоскости

$$\frac{\partial g'(X^*)}{\partial X} Y = 0, \tag{2}$$

найдется n - мерная функция $h(\beta)$ такая, что в окрестности точки $\beta = 0$ выполняется тождество

$$g(h(\beta)) \equiv 0$$

и

$$h(0) = X^*, \dot{h}(0) = Y \quad \left(\dot{h}(0) = \frac{dh(0)}{d\beta} \right).$$

Доказательство. Так как X^* - обыкновенная допустимая точка, то векторы

$$\frac{\partial g_1(X^*)}{\partial X}, \frac{\partial g_2(X^*)}{\partial X}, ..., \frac{\partial g_m(X^*)}{\partial X} \tag{3}$$

линейно независимы. Дополним эти векторы до базиса векторами

$$\frac{\partial g_{m+1}(X^*)}{\partial X}, \frac{\partial g_{m+2}(X^*)}{\partial X}, ..., \frac{\partial g_n(X^*)}{\partial X}, \tag{4}$$

где функции $g_{m+1}(X), g_{m+2}(X), ..., g_n(X)$ - гладкие.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} &g_1(X) = 0, g_2(X) = 0, ..., g_m(X) = 0, \\ &g_{m+1}(X) = g_{m+1}(X^{*)} + \beta\gamma_{m+1}, ..., g_n(X^*) = g_n(X^*) + \beta\gamma_n \end{aligned}, \tag{5}$$

здесь β - параметр, а

$$\gamma_{m+1} = \frac{\partial g'_{m+1}(X^*)}{\partial X} Y, ..., \gamma_n = \frac{\partial g'_n(X^*)}{\partial X} Y. \qquad (6)$$

В силу линейной независимости векторов (3), (4) и теоремы о неявных функциях система (5) в окрестности $\beta = 0$ имеет решение $X = h(\beta)$, которое переходит в точку X^*

$$h(0) = X^*. \qquad (7)$$

Поскольку

$$g(h(\beta)) \equiv 0, \qquad g_{m+1}(h(\beta)) \equiv g_{m+1}(X^*) + \beta\gamma_{m+1}, ..., g_n(h(\beta)) \equiv g_n(X^*) + \beta\gamma_n,$$

то

$$\frac{\partial g(h(\beta))}{\partial X} \cdot \frac{dh(\beta)}{d\beta} \equiv 0, \quad \frac{\partial g'_{m+1}(h(\beta))}{\partial X} \cdot \frac{dh(\beta)}{d\beta} = \gamma_{m+1}, ... \quad , \frac{\partial g'(h(\beta))}{dX} \cdot \frac{dh(\beta)}{d\beta} = \gamma_n$$

и, в частности,

$$\frac{\partial g(h(\beta))}{\partial X} \dot{h}(0) = \frac{\partial g(X^*)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial g'_{m+1}(X^*)}{\partial X} \dot{h} = \gamma_{m+1}, ..., \frac{\partial g'_n(X^*)}{\partial X} \dot{h}(0) = \gamma_n. \qquad (8)$$

Сравнивая уравнения (2), (6) с уравнениями (8), видим, что векторы Y и $\dot{h}(0)$ удовлетворяют одной системе линейных уравнений с неособой матрицей коэффициентов. Поэтому $\dot{h}(0) = Y$. C учетом (7) этот результат завершает доказательство леммы.

Замечание. Найденная функция $h(\beta)$ по теореме о неявных функциях дифференцируема столько раз, сколько раз дифференцируема функция $g(X)$.

Геометрический смысл леммы можно пояснить следующим образом. Совокупность уравнений $g_1(X) = 0, ..., g_m(X) = 0, \quad m < n$, задает $(m-n)$-мерное многообразие. В частности, при $m - n = 2$ это будет поверхность.

Уравнение

$$\frac{\partial g'(X^*)}{\partial X} Y = 0$$

задает касательную гиперплоскость к этой поверхности в точке $X = X^*$. Лемма о включении утверждает, что какой бы вектор Y ни взять из касательной плоскости, на поверхности можно провести линию, которая исходит из точки $X = X^*$ с касательной, содержащей вектор Y.

По доказанной лемме, точку минимума нормальной задачи можно погрузить в семейство допустимых точек, зависящее от параметров β, Y. Поэтому нормальная задача на условный минимум не может оказаться тривиальной. Анормальные же задачи могут быть и тривиальными.

Пример 4. $n = 4, \quad m = 1, \quad f(X) = x_1, \quad g(X) = x_1^2 + x_2^2 = 0$. Множество допустимых точек состоит лишь из одной точки $x_1 = x_2 = 0$, поэтому задача минимизации вырождается: минимизировать функцию $f(X)$ на других точках не имеет смысла.

4.4. Случай линейных ограничений. Пусть функции $g_i(X), \quad i = 1,2,...,m$, имеют вид

$$g_i(X) = A_i'X + b_i, \quad i = 1,2,...,m, \tag{9}$$

где A_i - постоянные n - мерные векторы, b_i -постоянные числа. В случае (9) лемма о включении становится известным утверждением о решениях неоднородных уравнений.

Лемма 4.2. Если точка X^* удовлетворяет уравнениям

$$A_i'X + b_i = 0, \quad i = 1,2,...,m, \tag{10}$$

то при любом n - мерном векторе, удовлетворяющем уравнениям

$$A_i'X_i = 0, \quad i = 1,2,...,m, \tag{11}$$

и любом β, $-\infty < \beta < \infty$, вектор

$$h(\beta) = X^* + \beta Y$$

есть решение уравнений (10).

Справедливость леммы проверяется прямой подстановкой:

$$A_i'h(\beta) + b_i = A_i'X^* + \beta A_i'Y + b_i = 0.$$

Замечание. В лемме в отличие от общего случая не предполагается, что X^* -обыкновенная допустимая точка.

Используем лемму для доказательства правила множителей в задаче минимизации с линейными ограничениями:

$$\begin{aligned} &f(X) \to \min, \\ &A_i'X + b_i = 0, \; i = 1,2,...,m \end{aligned} \tag{12}$$

Пусть $f(X) \in C^{(1)}$ и X^0 - точка минимума. Согласно лемме, функция $h(\beta) = X^0 + \beta Y, \quad -\infty < \beta < \infty$, при любом Y из (11) удовлетворяет ограничениям задачи (12). Поэтому функция $\varphi(\beta) = f(X^0 + \beta Y)$ в точке $\beta = 0$ достигает минимума и, следовательно,

$$\frac{d\varphi(0)}{d\beta} = \frac{\partial f'(X^0)}{\partial X} Y = 0. \tag{13}$$

Равенство (13) справедливо для каждого Y из (11). Это может быть лишь тогда, когда

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial X} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i. \tag{14}$$

Действительно, в противном случае при всех λ_i, $i = 1,2,...,m$, будет выполняться неравенство

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial X} \neq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i$$

означающее, что вектор $\dfrac{\partial f(X^0)}{\partial X}$ не принадлежит подпространству, натянутому на векторы A_i, $i = 1,2,...,m$. Поэтому найдется вектор $\widetilde{Y}$, ортогональный всем векторам A_i, $i = 1,2,...,m$, и имеющий ненулевую проекцию на вектор $\dfrac{\partial f(X^0)}{\partial X}$, т. е.

$$A_i'\widetilde{Y} = 0, \quad i = 1,2,...,m; \qquad \frac{\partial f'(X^0)}{\partial X}\widetilde{Y} \neq 0 .$$

Но это противоречит соотношениям (11), (13). На языке функции Лагранжа задачи (12)

$$F(X,\Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [A_i'X + b_i]$$

равенство (14) выражает условие стационарности

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda)}{\partial X} = 0 .$$

Таким образом, в случае линейных ограничений правило множителей выполняется для нормальной функции Лагранжа без дополнительных предположений о характере точки минимума.

4.4. Экономическая интерпретация множителей Лагранжа. В конкретных прикладных вопросах множители Лагранжа имеют содержательную интерпретацию. Так, в механике множители Лагранжа задают реакции связей, а в экономике – цены на продукты производства.

Ниже будем обсуждать экономическую интерпретацию множителей Лагранжа.

Пример. Пусть производственные функции каждого из двух продуктов зависят от двух (одних и тех же) факторов. Суммарное количество каждого фактора фиксировано. Пусть заданы цены продуктов. При каких условиях доход от выпуска будет максимальным?

Обозначим через x_1, x_2 объемы выпуска первого и второго продуктов, соответственно. Пусть x_3, x_4 - объемы факторов, использованные при производстве первого продукта с производственной функцией $x_1 = \varphi(x_3, x_4)$. Аналогично, $x_2 = \psi(x_5, x_6)$. Предполагается, что x_3 и x_5 представляют один и тот же фактор, так же как и x_4 и x_6. Задача состоит в следующем:

$$f(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 \to \max,$$
$$x_1 - \varphi(x_3, x_4) = 0, \quad x_3 + x_5 - k_1 = 0,$$
$$x_2 - \psi(x_5, x_6) = 0, \quad x_4 + x_6 - k_2 = 0 .$$

Функция Лагранжа в этом случае запишется в виде

$$F(X,\Lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda_1(x_1 - \varphi(x_3,x_4)) - \lambda_2(x_2 - \psi(x_5,x_6)) - \lambda_3(x_3 + x_5 - k_1) - \lambda_4(x_4 + x_6 - k_2).$$

Приравнивая частные производные нулю, получим шесть уравнений:

$$p_1 = x_{1,} \quad p_2 = x_2,$$
$$\lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \lambda_3, \quad \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} = \lambda_4,$$
$$\lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_5} = \lambda_3 \quad \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_6} = \lambda_4.$$

Отсюда легко получить условия на выпуск, максимизирующий доход:

$$p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = p_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_5} = \lambda_3, \qquad p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} = p_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_6} = \lambda_4.$$

Следовательно, стоимость предельного продукта по каждому фактору будет одна и та же в обеих отраслях. Заметим, что все множители Лагранжа оказались равными ценам. Если в приведенном случае имеет место конкурентное ценообразование, то λ_1, λ_2 - цены продуктов, а λ_3, λ_4 - цены факторов.

Таким образом, в примере, приведенном выше, множители Лагранжа оказались равными ценам. Такими же свойствами, как мы помним, обладают двойственные переменные в теории линейного программирования.

Ниже будет предложена формальная интерпретация множителей Лагранжа.

Рассмотрим стандартную задачу условной оптимизации. Решим ее с помощью метода множителей Лагранжа, который дает оптимальные векторы X^*, Λ^*. Пусть i-е ограничение имеет вид $g_i(x) = b_i$.

Первоначально полагалось, что $b_i = 0$. Исследуем здесь влияние малого ослабления ограничения.

Обозначим через V^* оптимальное значение целевой функции ($V^* = f(X^*)$). Малое ослабление i-го ограничения приводит к малым изменениям оптимальных значений переменных. Однако предполагается, что условия оптимальности по-прежнему удовлетворяются, так что новое состояние, достигаемое в результате ослабления ограничений, также оптимально. Влияние ослабления на оптимальное значение целевой функции определяется формулой

$$\frac{\partial V^*}{\partial b_i} = \sum_j \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i}. \qquad (2)$$

Из ограничений имеем

$$\sum_j \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i} = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i. \end{cases} \qquad (3)$$

Умножим k-е равенство в (3) на λ_k^* и просуммируем по k. Получим

$$\sum_k \sum_j \lambda_k^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i} = \lambda_i^*.$$

Вычтем это выражение из (2). Получим

$$\frac{\partial V^*}{\partial b_i} = \lambda_i^* + \sum_j \left[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \right] \frac{\partial x_j}{\partial b_i}.$$

Выражение справа в скобках в силу условия оптимальности равно нулю, поэтому

$$\frac{\partial V^*}{\partial b_i} = \lambda_i^*.$$

Таким образом, λ_i^* соответствует маргинальной (предельной) скорости изменения целевой функции относительно малого ослабления i-го ограничения при условии, что все остальные ограничения неизменны. Эта интерпретация аналогична интерпретации двойственных переменных в теории линейного программирования.

В типичных экономических приложениях ограничения могут задаваться лимитами на ресурсы, а целевая функция - некоторым индексом общественного благосостояния. Тогда оптимальные множители Лагранжа соответствовали бы маргинальным (предельным) общественным оценкам ресурсов. В примере, рассмотренном выше, множители соответствуют ценам на продукты и на факторы. Цены на факторы соответствуют предельным оценкам для фиксированного предложения факторов. Чему же соответствуют цены на продукты? Оказывается, они соответствуют маргинальным оценкам производственных функций, выступающих в качестве ограничений, или параметрам эффективности производственных функций.

Таким образом, множители Лагранжа в общей задаче оптимизации, играют роль двойственных переменных в линейном программировании, и сводится к ним, если общая задача линейна.

В экономических задачах можно, поэтому интерпретировать множители Лагранжа так же, как двойственные переменные.

§5. Необходимое условие второго порядка. Достаточное условие минимума

До сих пор в задачах нелинейного программирования рассматривались необходимые условия первого порядка, которые используют лишь значения первых производных. Этой информации может оказаться недостаточно для различения точек, не являющихся точками минимума. Ниже приводятся, и доказываются более тонкие условия минимума, основанные на свойствах вторых производных.

5.1. Необходимое условие второго порядка

Теорема 5.1. Пусть функции $f(X)$, $g(X)$ определены, непрерывны и дважды дифференцируемы в окрестности точки $X = X^0$. Если X^0 - нормальная точка условного минимума, а Λ - соответствующий ей множитель Лагранжа, то квадратичная форма

$$Y'\frac{\partial^2 f\left(X^0,\Lambda\right)}{\partial X^2}Y$$

знакоположительна на гиперплоскости

$$\frac{\partial g'\left(X^0\right)}{\partial X}Y = 0, \qquad (1)$$

т.е. для всех Y, удовлетворяющих уравнению (1), выполняется неравенство

$$Y'\frac{\partial^2 f\left(X^0,\Lambda\right)}{\partial X^2}Y \geq 0.$$

Доказательство. Так как точка минимума X^0 - нормальная, то она является обыкновенной допустимой точкой. По лемме о включении найдется n - мерная функция $X = h(\beta)$ такая, что $g(h(\beta)) \equiv 0$, $h(0) = X^0$, $\dfrac{dh(0)}{d\beta} = Y$, где Y -

вектор из гиперплоскости (1). Подставив $X = h(\beta)$ в $f(X)$ получим функцию $\varphi(\beta) = f(h(\beta))$, которая, очевидно, в точке $\beta = 0$ достигает минимума. Поэтому $\frac{d\varphi(0)}{d\beta} = 0, \quad \frac{d^2\varphi(0)}{d\beta^2} \geq 0$. В подробной записи

$$\frac{d\varphi(\beta)}{d\beta} = \frac{\partial f'(h(\beta))}{\partial X} \cdot \frac{dh(\beta)}{d\beta},$$

$$\frac{d^2\varphi(\beta)}{d\beta^2} = \frac{dh'(\beta)}{\partial\beta} \cdot \frac{\partial^2 f(h(\beta))}{\partial X^2} \cdot \frac{dh(\beta)}{d\beta} + \frac{\partial f'(h(\beta))}{\partial X} \cdot \frac{d^2h(\beta)}{d\beta^2}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d^2\varphi(0)}{d\beta^2} = Y' \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial X^2} Y + \frac{\partial f'(X^0)}{\partial X} \cdot \frac{d^2h(0)}{d\beta^2} \geq 0. \tag{2}$$

С другой стороны, из тождества $g(h(\beta)) \equiv 0$ получаем

$$\frac{\partial[\Lambda' g(h(\beta))]}{\partial\beta} = \frac{\partial[\Lambda' g(h(\beta))]'}{\partial X} \cdot \frac{dh(\beta)}{d\beta} \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2[\Lambda' g(h(\beta))]}{\partial\beta^2}\Big|_{\beta=0} &= \frac{dh'(\beta)}{d\beta} \cdot \frac{\partial^2[\Lambda' g(h(\beta))]}{\partial X^2} \cdot \frac{dh(\beta)}{d\beta}\Big|_{\beta=0} + \frac{\partial[\Lambda' g(h(\beta))]'}{\partial X} \cdot \frac{d^2h(\beta)}{d\beta^2}\Big|_{\beta=0} = \\ &= Y' \frac{\partial^2[\Lambda' g(X^0)]}{\partial X^2} Y + \frac{\partial[\Lambda' g(X^0)]'}{\partial X} \cdot \frac{d^2h(0)}{d\beta^2} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Сложим неравенство (2) с равенством (3). Поскольку нормальная функция Лагранжа $F(X, \Lambda) = f(X) + \Lambda' g(X)$ в точке $X = X^0$ удовлетворяет правилу множителей $\frac{\partial F(X^0, \Lambda)}{\partial X} = 0$, то результат сложения приводит к неравенству

$$Y' \frac{\partial^2 f(X^0, \Lambda)}{\partial X^2} Y \geq 0,$$

в котором, по построению (лемма о включении, п.3 §4), вектор Y - произвольный вектор, лежащий на гиперплоскости (1). Теорема доказана.

Без предположения о нормальности точки X^0 теорема 5.1 может вырождаться.

Пример. $n = 2, \quad m = 1, \quad f(X) = x_1^4 + x_2^4, \quad g(X) = x_1 x_2$. Допустимые точки заполняют оси координат $x_1 = 0, \quad x_2 = 0$. Точка $x_1^0 = 0, \quad x_2^0 = 0$ является точкой условного минимума. Правило множителей приводит к уравнениям

$$\frac{\partial F(X^0, \overline{\Lambda})}{\partial x_1} = 4\lambda_0 (x_1^0)^3 + \lambda x_2^3 = 0, \quad \frac{\partial F(X^0, \overline{\Lambda})}{\partial x_2} = 4\lambda_0 (x_2^0)^3 \lambda x_1^0 = 0,$$

из которых следует, что любые числа $\lambda_0, \ \lambda$ являются множителями, соответствующими точке минимума. Матрица вторых производных функции Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial^2 F(X^0, \overline{\Lambda})}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} 12\lambda_0 (x_1^0)^2 & \lambda \\ \lambda & 12\lambda_0 (x_2^0)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнению

$$\frac{\partial g'(X^0)}{\partial X}Y = 0\cdot y_1 + 0\cdot y_2 = 0$$

удовлетворяют все точки плоскости. Квадратичная форма $2\lambda y_1 y_2$ неотрицательна лишь при $\lambda = 0$.

5.2.Случай линейных ограничений. Не трудно заметить, что в доказательстве необходимых условий минимума второго порядка предположение о нормальности используется дважды: при обосновании использования нормальной функции Лагранжа в правиле множителей, при ссылке на лемму о включении. Как показано в п.4 §4, при линейных ограничениях требуемые свойства выполняются без предположения о нормальности точки минимума. Поэтому с учетом линейности ограничений условия минимума можно сформулировать таким образом:

а) для того чтобы точка X^0 была решением задачи

$$\begin{aligned} &f(X)\to \min,\\ &A_i'X + b_i = 0,\ \ i = 1,2,...,m \end{aligned} \tag{4}$$

(предполагается, что $f(X)\in C^{(1)}$) необходимо, чтобы квадратичная форма

$$Y'\frac{\partial^2 f\left(X^0\right)}{\partial X^2}Y \tag{5}$$

была знакоположительной на гиперплоскости

$$A_i'Y = 0,\quad i = 1,2,...,m; \tag{7}$$

б) если форма (6) определенно положительная на гиперплоскости (7), то точка X^0 -относительного минимума в задаче (4), (5).

5.3. Достаточное условие минимума. Допустимую точку X^* назовем условно - стационарной точкой функции $f(X)$, если найдется m-мерный вектор Λ такой, что

$$\frac{\partial F\left(X^*,\Lambda\right)}{\partial X} = 0,$$

где $F\left(X,\Lambda\right) = f\left(X\right) + \Lambda' g\left(X\right)$.

Теорема 5.2. Пусть функции $f\left(X\right),\ \ g\left(X\right)$ определены, непрерывны и дважды дифференцируемы в окрестности точки $X = X^*$. Для того чтобы условно – стационарная точка была точкой относительного условного минимума, достаточно, чтобы квадратичная форма

$$Y'\frac{\partial^2 f\left(X^*,\Lambda\right)}{\partial X^2}Y$$

была определенно положительной на гиперплоскости

$$\frac{\partial g'\left(X^*\right)}{\partial X}Y = 0\,. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть

$$\alpha = \min\left\{Y'\frac{\partial^2 F\left(X^*,\Lambda\right)}{\partial X^2}Y\right\},\quad \left\|Y\right\| = 1,\quad \frac{\partial g'(X^*)}{\partial X}Y = 0\,. \tag{9}$$

Минимум справа достигается и $\alpha > 0$ по условии теоремы. Введем множество

$$A_\varepsilon = \left\{ X : X = X^* + \varepsilon Y, \quad \|Y\| = 1, \quad \frac{\partial g'(X^*)}{\partial X} Y = 0 \right\},$$

лежащее на гиперплоскости (8) в ε- окрестности точки $X = X^*$. В силу (9) для точек множества A_ε выполняется неравенство

$$\left(X - X^*\right)' \frac{\partial^2 f\left(X^*, \Lambda\right)}{\partial X^2}\left(X - X^*\right) \geq \alpha\varepsilon^2,$$

поэтому из формулы с учетом условной стационарности точки $X = X^*$ следует

$$\begin{aligned} F(X,\Lambda) - F\left(X^*,\Lambda\right) &= \frac{1}{2}\left(X - X^*\right)' \frac{\partial^2 F\left(X^*,\Lambda\right)}{\partial X^2}\left(X - X^*\right) + o\left(\left\|X - X^*\right\|\right) \geq \\ &\geq \frac{\alpha}{2}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) = \varepsilon^2\left[\frac{\alpha}{2} + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\right] \geq \frac{\alpha}{4}\varepsilon^2, \qquad при \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_1, X \in A_\varepsilon. \end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим множество

$$B_\varepsilon = \left\{ X : \left\|X - X^*\right\| = \varepsilon, \quad g(X) = 0 \right\}.$$

Поскольку гиперплоскость (8) является касательной к многообразию $g(X) = 0$, то для каждой точки $\widetilde{X} \in B_\varepsilon$ найдется точка $X \in A_\varepsilon$ такая, что

$$\left\|\widetilde{X} - X\right\| \leq K\varepsilon^2 . \tag{11}$$

Функция $\dfrac{\partial F(X,\Lambda)}{\partial X}$ непрерывна по X и $\dfrac{\partial F\left(X^*,\Lambda\right)}{\partial X} = 0$. Поэтому

$$\left\|\frac{\partial F(X,\Lambda)}{\partial X}\right\| \leq K_1\varepsilon, \text{ если } \left\|X - X^*\right\| \leq 2\varepsilon . \tag{12}$$

С учетом (11), (12) получаем

$$\left|F\left(\widetilde{X},\Lambda\right) - F\left(X^*,\Lambda\right)\right| \leq \left\|\frac{\partial F\left(\widetilde{X},\Lambda\right)}{\partial X}\right\| \cdot \left\|\widetilde{X} - X^*\right\| \leq KK_1\varepsilon^2, \tag{13}$$

где $\widetilde{X}$- некоторая точка из ε- окрестности точки X. А значит, из 2ε- окрестности точки X^*.

Теперь для каждой точки $\widetilde{X} \in B_\varepsilon$ из (10) и (13) следует, что

$$F\left(\widetilde{X},\Lambda\right) - F\left(X^*,\Lambda\right) = F(X,\Lambda) - F\left(X^*,\Lambda\right) + \left[F\left(\widetilde{X},\Lambda\right) - F(X,\Lambda)\right] \geq \frac{\alpha}{4}\varepsilon^2 - KK_1\varepsilon^2 \geq 0,$$

если $0 < \varepsilon < \dfrac{\alpha}{4KK_1}$.

Так как на многообразии $g(X) = 0$ функция $F(X,\Lambda)$ совпадает с $f(X)$, то из найденной оценки следует неравенство $f\left(\widetilde{X}\right) \geq f\left(X^*\right)$ для всех $\widetilde{X} \in B_\varepsilon$, $\varepsilon < \min\left\{\varepsilon_1, \dfrac{\alpha}{4KK_1}\right\}$. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что X^* - точка строгого относительного условного минимума, т.е. найдется такое ε_2, что для всех точек $X, \quad X \neq X^*, \quad X \in B_\varepsilon \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_2$, выполняется неравенство $f\left(X^*\right) < f(X)$.

Пример. Найти параметры цилиндрической цистерны, которая при заданной площади поверхности S_0 имеет объем.

Решение. Площадь поверхности цистерны равна $S = 2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2$. Объем цистерны равен $V = -\pi x_1 x_2^2$. Введя функцию

$$g(x_1, x_2) = \pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2 - S_0,$$

исходную задачу сведем к задаче

$$f(X) \to \min, \quad g(X) = 0. \tag{14}$$

Полученная задача не эквивалентна исходной, ибо не учтены дополнительные ограничения

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \tag{15}$$

вытекающие из физической сущности этих переменных.

Однако будем решать задачу в форме (4), в случае необходимости отбрасывая решения, не удовлетворяющие ограничениям (5). Если задача (14) имеет решение, то искомое, очевидно, будет среди локальных минимумов задачи (14). Но без учета (15) задача (14) не имеет решения, ибо при $x_1 \to \infty, \quad x_2 \to -\infty$ имеем $f(X) \to -\infty$. Значит, доказанные необходимые условия минимума нельзя применить. И все же имеющегося материала достаточно для решения поставленной задачи. Для этого нужно найти условно-стационарные точки и к ним применить достаточное условие минимума.

Составляем нормальную функцию Лагранжа
$F(X, \lambda) = -\pi x_1 x_2^2 + \lambda[2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2 - S_0]$.

Условно-стационарные точки удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -2\pi x_2^2 + 2\pi\lambda x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -2\pi x_1 x_2 + 4\pi\lambda x_2 + 2\pi\lambda x_1 = 0,$$

$$2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2 - S_0 = 0.$$

Отсюда $x_1 = 4\lambda, \quad x_2 = 2\lambda, \quad \lambda = \pm\sqrt{\dfrac{S_0}{24\pi}}$.

Выберем $\lambda > 0$. Подсчитаем матрицу

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\begin{pmatrix} 0 & -2\pi x_2 + 2\pi\lambda \\ -2\pi x_2 + 2\pi\lambda & -2\pi x_1 + 4\pi\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi\lambda \\ -2\pi\lambda & -4\pi\lambda \end{pmatrix}$$

Уравнение гиперплоскости, на которой проверяется квадратичная форма:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} y_2 = 2\pi x_2 y_1 + [4\pi x_2 + 2\pi x_1] y_2 = 4\pi\lambda y_1 + 16\pi\lambda y_2 = 0. \tag{16}$$

Квадратичная форма с матрицей $\dfrac{\partial^2 F}{\partial X^2}$ имеет вид

$$-4\pi\lambda y_1 y_2 - 4\pi\lambda y_2^2$$

и на гиперплоскости (16) переходит в выражение

$$12\pi\lambda y_2^2,$$

которое положительно при $y_2 \neq 0$. Таким образом, условия теоремы 5.2для точки

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{S_0}{6\pi}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{S_0}{6\pi}}$$

выполнены. Поэтому цистерна с такими параметрами, по крайней мере, среди цистерн с близкими параметрами имеет наибольший объем.

§ 6. Минимизация функций при ограничениях типа неравенств

В задаче на условный минимум из § 3 ограничения задаются в виде системы равенств, поэтому ее можно назвать задачей минимизации при ограничениях типа равенств. В данном параграфе рассматривается задача минимизации, в которой дополнительные условия задаются системой неравенств.

6.1. Постановка задачи и ее сведение к задаче на условный минимум

Пусть в R^n заданны функции, $f(X), g_1(X), g_2(X), ..., g_m(X)$ из которых хотя бы одна является нелинейной. Требуется найти точку, $X^0 \in R^n$ удовлетворяющую условиям:

$$g_1(X) \leq 0, g_2(X) \leq 0, ..., g_m(X) \leq 0,$$

такую, что

$$f(X^0) = \min_{\substack{g_i(X) \leq 0 \\ i=1,m}} f(X)$$

Решение этой задачи – точка X^0 - называется точкой минимума функции $f(X)$ при ограничениях типа неравенств.

Кратко задачу минимизации при ограничениях типа неравенств можно записать так:

$$f(X) \to \min \tag{1}$$

$$g_i(X) \leq 0, \quad i = 1,2,...,m \tag{2}$$

Каждый вектор X, удовлетворяющий ограничениям (2) называется допустимым. Ограничения $g_i(X) \leq 0$ называется жестким (активным) в точке X^*, если $g_i(X^*) = 0$, и нежестким (пассивным), если $g_i(X^*) < 0$.

В дальнейшем, при необходимости, ограничения (2) будем записывать в векторном виде $g(X) \leq 0$, считая, что для m- мерного вектора $A = (a_1, a_2, ..., a_m)$ неравенство $A \leq 0$ означает покомпонентное выполнение неравенства $a_i \leq 0, \quad i = 1,2,...,m$. В задаче (1),(2) с ограничениями типа неравенств не обязательно предполагать, что $m < n$.

Задачу (1), (2) называют задачей на глобальный условный минимум при ограничениях типа неравенств в отличие от задачи на локальный условный минимум при ограничениях типа неравенств, которая состоит в следующем: найти точку X^0,удовлетворяющую ограничениям (2), такую что при некотором достаточно малом ε, $\varepsilon > 0$, для всех допустимых векторов (точек) X из ε-окрестности точки X^0, $\left\|X - X^0\right\| \le \varepsilon$, выполняется неравенство $f\left(X^0\right) \le f(X)$.

В других обозначениях точка X^0- локального условного минимума при ограничениях типа неравенств – определяется равенством:

$$f\left(X^0\right) = \min_{\left\|X - X^0\right\| \le \varepsilon, \quad X \in K} f(X)$$

Лемма 6.1. Каждая задача на минимум с ограничениями типа неравенств (1), (2) эквивалентна задаче с ограничениями типа равенств

$$f(X) \to \min \tag{3}$$

$$g_i(X) + x_{n+i}^2 = 0, \quad i = 1,2,...,m \ . \tag{4}$$

Дополнительные переменные x_{n+i}, $i = 1,2,...,m$, в задаче (3), (4) называются дополнительными переменными. Покажем, что точка X^0 будет решением задачи (1), (2) тогда и только тогда, если

$$X^0, \quad x_{n+1}^0 = [-g_1(X^0)]^{\frac{1}{2}}, \quad ... \quad ,x_{n+ь}^0 = [-g_m(X^0)]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

будет решением задачи (3), (4).

Доказательство. Пусть X^0 - решение задачи (1), (2), но точка (5) не является решением задачи (3), (4), т. е. для точки $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_{n+1},..., \widetilde{x}_{n+m})$ выполняются

$$f(\widetilde{X}) < f(X^0),$$

$$g_i(\widetilde{X}) + \widetilde{x}_{n+i}^2 = 0.$$

Таким образом,

$$f(\widetilde{X}) < f(X^0),$$

$$g_i(\widetilde{X}) = -\widetilde{x}_{n+i}^2 \le 0,$$

что противоречит определению точки X^0. Пусть, наоборот, точка $\left(X^0, x_{n+1}^0,..., x_{n+m}^0\right)$ - решение задачи (3), (4), но вектор X^0 не есть решение задачи (1), (2), т. е. существует вектор X^* такой, что

$$f(X^*) < f(X^0), \tag{6}$$

$$g_i(X^*) \le 0, \quad i = 1,2,...,m \ . \tag{7}$$

Дополним вектор X^* координатами $x_{n+1}^* = [-g_1(X^*)]^{\frac{1}{2}},..., x_{n+m}^* = [-g_m(X^*)]^{\frac{1}{2}}$.

Тогда для $(n+m)$- мерного вектора $\left(X^*, x_{n+1}^*,..., x_{n+m}^*\right)$ и (6), (7)

$$f(X^*) < f(X^0),$$

$$g_i(X^*) + [x_{n+i}^*]^2 = 0, \quad i = 1,2,...,m,$$

что противоречит предположению о том, что $\left(X^0, x_{n+1}^0,..., x_{n+m}^0\right)$ - решение задачи (3), (4). Лемма 6.1 доказана.

Дальнейшее исследование задачи на минимум при ограничениях типа неравенств, очевидно. К задаче (3), (4) применяем доказанные теоремы по задаче на условный минимум, а результаты формулируем в терминах исходной задачи.

6.2. Необходимые условия минимума. Будем считать, что функции $f(X), g(X)$ определены и принадлежат классу $C^{(2)}$. Допустимую точку X^* назовем обыкновенной допустимой при ограничениях (2), если векторы

$$\frac{\partial g_{i_1}(X^*)}{\partial X},\dots,\frac{\partial g_{i_k}(X^*)}{\partial X}, \quad 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le m, \tag{8}$$

соответствующие всем ограничениям $g_{i_1}(X) \le 0,\dots,g_{i_k}(X) \le 0$, активным в точке X^*, линейно независимы. Нетрудно показать, что если точка X^* обыкновенная при ограничениях (2), то $(X^*, x_{n+1}^* = [-g_1(X^*)]^{\frac{1}{2}},\dots,x_{n+m}^* = [-g_m(X^*)]^{\frac{1}{2}})$ - обыкновенная допустимая при ограничениях (4).

Составим для задачи (3), (4) нормальную функцию Лагранжа:

$$F(X, x_{n+1},\dots,x_{n+m},\Lambda) = f(X) + \Lambda' g(X) + \sum_{i=1} \lambda_i x_{n+i}^2 .$$

Согласно правилу множителей Лагранжа, для точки $\overline{X}^0 = \left(X^0, x_{n+1}^0,\dots,x_{n+m}^0\right)$ найдется m - мерный векторный множитель Λ такой, что

$$\frac{\partial F(X^0, x_{n+1}^0,\dots,x_{n+m}^0,\lambda)}{\partial X} = \frac{\partial f(X^0)}{\partial X} + \Lambda' \frac{\partial g(X^0)}{\partial X} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial F(X^0, x_{n+1}^0,\dots,x_{n+m}^0,\Lambda)}{\partial x_{n+1}} = 2\lambda_1 x_{n+1}^0 = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{10}$$

$$\frac{\partial F(X^0, x_{n+1}^0,\dots,x_{n+m}^0,\Lambda)}{\partial x_{n+m}} = 2\lambda_m x_{n+m}^0 = 0.$$

Если для исходной задачи (1), (2) ввести функцию Лагранжа

$$F(X,\Lambda) = f(X) + \Lambda' g(X),$$

то условие (9) примет вид

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda)}{\partial X} = 0.$$

Обратимся к условиям (10). Из неравенств (2) видно, что равенства

$$\lambda_i x_{n+i}^0 = 0, \quad i = 1,2,\dots,m$$

выполняются тогда и только тогда, когда

$$\lambda_i g_i(X^0) = 0, \quad i = 1,2,\dots,m .$$

Эти условия называются условиями дополняющей нежесткости (условия дополняющей пассивности). Очевиден их смысл: множитель Лагранжа, соответствующий ограничению, пассивному в точке X^0, равен нулю и, наоборот, если некоторый множитель Лагранжа отличен от нуля, то соответствующее ограничение активно в точке X^0.

Поскольку задача (3), (4) нормальна, то для точки X^0 выполняется необходимое условие минимума второго порядка. Далее, применяя теорему 5.1 из §5 получим следующее утверждение.

Теорема 6.1. (необходимые условия минимума в задаче с ограничениями типа неравенств). Пусть скалярная функция $f(X)$ и m-

мерная функция $g(X)$ определены и непрерывны вместе с двумя первыми производными по $X \in R^n$. Пусть X^0 — точка относительного минимума в задаче

$$f(X) \to \min$$
$$g_i(X) \le 0, \quad i = 1,2,...,m,$$

является обыкновенной допустимой и в этой точке активны ограничения с номерами $i_1,...,i_k$. Тогда:

1) найдется неотрицательный множитель $\Lambda = (\lambda_1,....,\lambda_m) \ge 0$ такой, что для функции Лагранжа $F(X,\Lambda) = f(X) + \Lambda' g(X)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda)}{\partial X} = 0;$$

2) выполняются условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_i g_i(X^0) = 0, \quad i = 1,2,...,m;$$

3) квадратичная форма

$$Y' \frac{\partial^2 F(X^0,\Lambda)}{\partial X^2} Y$$

неотрицательна на гиперплоскости, заданных уравнениями

$$\frac{\partial g'_{i_1}(X^0)}{\partial X} Y = 0,....,\frac{\partial g'_{i_k}(X^0)}{\partial X} Y = 0.$$

6.3. Достаточное условие минимума. Допустимая точка X^* называется условно-стационарной в задаче минимизации с ограничениями типа неравенств (1), (2), если при некотором m- мерном векторе $\Lambda \ge 0$ выполняются условия

$$\frac{\partial F(X^*,\Lambda)}{\partial X} = 0, \quad \lambda_i g_i(X^*), \quad i = 1,2,...,m.$$

Теорема 6.2. Для того чтобы условно – стационарная точка X^* была точкой относительного минимума, достаточно, чтобы квадратичная форма

$$Y' \frac{\partial^2 F(X^0,\Lambda)}{\partial X^2} Y$$

была определенно положительной на гиперплоскости

$$\frac{\partial g'_{i_1}(X^*)}{\partial X} Y = 0,....,\frac{\partial g'_{i_k}(X^*)}{\partial X} Y = 0, \quad \|Y\| \ne 1,$$

где номерами $i_1,...,i_k$ ограничений, активных в точке X^*

Доказательство. Ясно, что найдется такое $\varepsilon > 0$, когда для любой точки X из ε-окрестности точки X^* выполняются ограничения, пассивные в точке X^*, т. е. $g_i(X) < 0$, если $i \ne i_1,...,i_k$; $\|X - X^*\| \le \varepsilon$. Поэтому, повторив рассуждения из доказательства теоремы 5.2 о достаточном условии минимума в задаче на условный минимум (см. § 5) с учетом равенств $\lambda_i = 0, \quad i \ne i_1,...,i_k$, получим утверждение теоремы 6.2.

Ключевые слова

Нелинейное программирование, система ограничения, допустимые точки, глобальный (абсолютный) условный минимум, локальный (относительный) условный минимум, стационарная точка, сепарабельная функция, квадратичная функция, функция Лагранжа, нормальная функция Лагранжа, нормальные задачи, нормальные точки минимума , обыкновенные допустимые точки, условно-стационарные точки, активные (жесткие) ограничения, пассивные (нежесткие) ограничения, условия дополняющей нежесткости (условия дополняющей пассивности).

Вопросы для самоконтроля

1.Сформулируйте постановку задачи нелинейного программирования в общем случае.

2.Приведите необходимые условия минимума в задаче на безусловный минимум.

3.Приведите достаточное условие минимума в задаче на безусловный минимум.

3. В чем состоит суть решения задачи на условный минимум методом исключения?

4.На чем основана возможность применения метода исключения?

5.Приведите определение функции Лагранжа. Сформулируйте правило множителей Лагранжа.

6.Приведите определение нормальной функции Лагранжа. В чем преимущества нормальной функции Лагранжа от функции Лагранжа?

7.Дайте определения нормальной точки минимума и нормальной задачи на условный минимум.

8. Дайте определения обыкновенной допустимой точки.

9.Приведите критерий нормальности задачи на условный минимум.

10. Сформулируйте правило множителей Лагранжа для нормальной задачи на условный минимум.

11.Дайте экономическую интерпретацию множителей Лагранжа.

12. Приведите необходимое условие второго порядка минимума в задаче на условный минимум.

13. Приведите достаточное условие второго порядка минимума в задаче на условный минимум.

14.Как решается задача на условный минимум с ограничениями типа неравенств?

15.Когда ограничение называется жестким (активным)?

16. Когда ограничение называется нежестким (пассивным)?

17.Какие условия называются условиями дополняющей нежесткости?

18. Приведите необходимое условие второго порядка минимума в задаче на условный минимум с ограничениями типа неравенств.

19. Приведите достаточное условие второго порядка минимума в задаче на условный минимум с ограничениями типа неравенств.

Задачи

Решить следующие задачи:

2.1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min,$
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$

2.2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \to \min,$
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$

2.3. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 12x_1 x_2 + 2x_2^2 \to \min,$
$4x_1^2 + x_2^2 = 25.$

2.4. $f(x_1, x_2) = e^{ax_1 x_2} \to \min,$ $(a < 0)$
$x_1^3 + x_2^3 + x_1 + x_2 - 4 = 0.$

2.5. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \to \min,$
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1.$

2.6. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to \min,$
$8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 40,$
$-2x_1 + x_2 - x_3 + 3 = 0,$ $x_2 \ge 2.$

<u>ГЛАВА III</u>

ВЫПУКЛОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Раздел нелинейного программирования, в котором задачи минимизации формулируются в терминах выпуклых функций и выпуклых множеств, называется выпуклым программированием.

§1.Необходимые сведения из анализа.

1.1. Выпуклые множества. Основные сведения о выпуклых множествах приведены нами п.2 §2 главы I. Здесь приведем лишь определения выпуклого множества.

Определение. Множество $K \subset R^n$ называется выпуклым, если оно наряду с любыми двумя своими точками содержит соединяющий их отрезок. Другими словами, если $X^1, X^2 \in K$, то $X(\lambda) = \lambda X^1 + (1-\lambda)X^2 \in K$ для любого $\lambda,\ \ 0 \le \lambda \le 1$.

1.1. Выпуклые функции.

Определение. Функция $f(X)$, определенная на выпуклом множестве K, называется выпуклой, если для любых $X^1, X^2 \in K$ и любого $\lambda,\ \ 0 \le \lambda \le 1$, выполняется неравенство

$$f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) \le \lambda f(X^1) + (1-\lambda)f(X^2). \tag{1}$$

Выпуклая функция $f(X)$, $X \in K$, называется строго выпуклой, если неравенство

$$f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) < \lambda f(X^1) + (1-\lambda)f(X^2)$$

выполняется для каждых двух точек $X^1, X^2 \in K,\quad X^1 \ne X^2$ и числа $\lambda,\ \ 0 < \lambda < 1$. Иными словами, график строго выпуклой функции не содержит прямолинейных отрезков.

Лемма 1.1. Если $f(X)$ - выпуклая функция, то множество

$$K = \{X : f(X) \le c\}$$

при любом c выпукло (или пусто).

Доказательство. Действительно, пусть $X^1, X^2 \in K$, $\lambda,\ \ 0 \le \lambda \le 1$. Тогда $f(X^1) \le c,\quad f(X^2) \le c$ и в силу выпуклости функции $f(X)$

$$f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) \le \lambda f(X^1) + (1-\lambda)f(X^2) \le \lambda c + (1-\lambda)c = c,$$

т. е. точка $\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2$ принадлежит множеству K. Поскольку X^1, X^2, λ выбирались произвольными в пределах ограничений, то полученный факт означает выпуклость множества K. Доказанное свойство не полностью характеризует связь между выпуклыми множествами и выпуклыми функциями. Она полностью раскрывается в следующем утверждении.

Теорема 1.1. Для того чтобы функция $f(X)$, определенная на выпуклом множестве K, была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы было выпуклым множество

$$\overline{K} = \{X, Y: \quad X \in K, \quad Y \geq f(X)\}.$$

На геометрическом языке: функция $f(X)$, определенная на выпуклом множестве K, выпукла тогда и только тогда, когда ее надграфик представляет выпуклое множество.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(X), \ X \in K$ - выпуклая функция. Возьмем две точки X^1, X^2 множества $\overline{K}$:

$$\overline{X}^1 = \begin{pmatrix} X^1 \\ Y^1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{X}^2 = \begin{pmatrix} X^2 \\ Y^2 \end{pmatrix},$$

где $X^1, X^2 \in K, \quad Y^1 \geq f(X^1), \quad Y^2 \geq f(X^2)$. Составим отрезок

$$\overline{X}(\lambda) = \lambda \overline{X}^1 + (1-\lambda)\overline{X}^2 = \lambda \begin{pmatrix} X^1 \\ Y^1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} X^2 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X^1 (1-\lambda) X^2 \\ \lambda Y^1 + (1-\lambda) Y^2 \end{pmatrix}, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Поскольку K - выпуклое множество, то $\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2 \in K$. Далее, в силу определения множества $\overline{K}$ и выпуклости функции $f(X)$

$$\lambda Y^1 + (1-\lambda)Y^2 \geq \lambda f(X^1) + (1-\lambda) f(X^2) \geq f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2),$$

т.е. $\overline{X}(\lambda)$ принадлежит множеству $\overline{K}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть множество $\overline{K}$ выпукло. Рассмотрим две его точки:

$$\overline{X}^1 = \begin{pmatrix} X^1 \\ f(X^1) \end{pmatrix}, \qquad \overline{X}^2 = \begin{pmatrix} X^2 \\ f(X^2) \end{pmatrix}.$$

При любом $\lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\lambda \overline{\boldsymbol{X}}^1 + (1-\lambda)\overline{\boldsymbol{X}}^2 = \lambda \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}^1 \\ \boldsymbol{Y}^1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}^2 \\ \boldsymbol{Y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \boldsymbol{X}^1 (1-\lambda) \boldsymbol{X}^2 \\ \lambda \boldsymbol{Y}^1 + (1-\lambda) \boldsymbol{Y}^2 \end{pmatrix},$$

принадлежит множеству $\overline{\boldsymbol{K}}$. По определению множества $\overline{\boldsymbol{K}}$ это означает, что

$$f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) \leq \lambda f(X^1) + (1-\lambda) f(X^2)$$

Но это неравенство было положено в определение выпуклой функции. Теорема доказана.

Функция $f(X)$, определенная на выпуклом множестве K, называется вогнутой, если функция $g(X) = -f(X), \ X \in K$, выпукла. Основные свойства вогнутых функций непосредственно следуют из свойств выпуклых функций.

1.2. Свойства выпуклых функций. Перечислим свойства, которые понадобятся в дальнейшем. Большинство из них доказывается в курсах анализа.

1) Выпуклая функция $f(X)$, непрерывна во всех относительно внутренних точках множества K. Это значит, что выпуклая функция может иметь разрыв лишь на границе множества K.

2) Если функции $f_i(X)$, $i=1,2,...,m;$ $X \in K$ выпуклы, то при любых $\alpha_i \geq 0$ выпуклы и функции

$$f(X)=\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(X), \qquad (2)$$

$$f(X)=\max_{1\leq i\leq m} f_i(X). \qquad (3)$$

Докажем второе свойство. Для функции (2)

$$f(\lambda X^1+(1-\lambda)X^2)=\sum_{ш=1}^{ь}\alpha_i f_i(\lambda X^1+(1-\lambda)X^2) \leq \sum_{i=1}^{m}\alpha_i[\lambda f_i(X^1)+(1-\lambda)f_i(X^2)]=$$

$$=\lambda\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(X^1)+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(X^2)=\lambda f(X^1)+(1-\lambda)f(X^2),$$

т. е. функция (2) выпукла. Аналогично для (3)

$$f(\lambda X^1+(1-\lambda)X^2)=\max_{1\leq i\leq m} f_i(\lambda X^1+(1-\lambda)X^2)\leq \max_{1\leq i\leq m}[\lambda f_i(X^1)+(1-\lambda)f_i(X^2)]\leq$$

$$\leq\lambda\max_{1\leq i\leq m} f_i(X^1)+(1-\lambda)\max_{1\leq i\leq m} f_i(X^2)=\lambda f(X^1)+(1-\lambda)f(X^2).$$

3) Выпуклая функция $f(X)$ не может иметь двух различных локальных минимумов (локальный минимум является и глобальным); у строго выпуклой функции минимум может достигаться в единственной точке.

Действительно, если $X^1, X^2 \in K$ - точки локального минимума выпуклой функции $f(X)$ и $f(X^1)>f(X^2)$, то для точки $X(\lambda)=\lambda X^1+(1-\lambda)X^2$, $0<\lambda<1$

$$f(\lambda X^1+(1-\lambda)X^2)\leq\lambda f(X^1)+(1-\lambda)f(X^2)\leq\lambda f(X^1)+(1-\lambda)f(X^1)=f(X^1). \qquad (4)$$

При достаточно малых $\lambda, \lambda>0$, точка $X(\lambda)$ попадает в сколь угодно малую окрестность точки X^1 и поэтому соотношение (4) противоречит тому, что X^1 - точка локального минимума. Значит, $f(X^1)=f(X^2)$.

Предположим, что у строго выпуклой функции $f(X)$ имеются две разные точки минимума $X^1, X^2 \in K$, $X^1 \neq X^2$, $f(X^1)\neq f(X^2)$. Тогда при $0<\lambda<1$ имеем соотношение

$$f(\lambda X^1+(1-\lambda)X^2)<\lambda f(X^1)+(1-\lambda)f(X^2)=\min_{X\in K} f(X)$$

Значит, в точке $\lambda X^1+(1-\lambda)X^2 \in K$ функция $f(X)$ принимает значение, меньшее, чем $\min_{X\in X} f(X)$. Противоречие доказывает утверждение: $X^1=X^2$.

Доказанные свойства означают, что график выпуклой функции может быть «плоским» в окрестности точки минимума, у строго выпуклой функции этого не может быть. Более того, множество точек минимума выпуклой функции выпукло и состоит из единственной точки, если функция строго выпуклая.

4) Если $f(X)\in C^{(2)}$, то для выпуклости функции $f(X)$ на открытом выпуклом множестве необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2}, \quad X\in K, \qquad (5)$$

была неотрицательной. Если матрица (5) положительна, то функция $f(X)$ строго выпукла.

5) В каждой точке $X^* \in K$ выпуклая функция имеет опорную функцию, т. е. существует линейная функция $C'(X - X^0)$ такая, что для всех $X \in K$ выполняется неравенство

$$f(X) - f(X^*) \geq C'(X - X^*).$$

Если $f(X) \in C^{(1)}$, то $C = \nabla f(X^*)$.

6) Выпуклая функция $f(X)$ в любой относительно внутренней точке множества K дифференцируема по всем направлениям l, $\|l\| = 1$, и

$$\frac{\partial f(X)}{\partial l} = \max C'l, \ \ C \in \Omega(X),$$

где $\Omega(X)$ - множество нормалей опорных функций к $f(X)$ в точке X.

7) Пусть K - выпуклое множество. Вектор l, $l \neq 0$, назовем допустимым направлением в точке X, $X \in K$, относительно множества K, если найдется число ε_1, $\varepsilon_1 > 0$, такое, что $X + \varepsilon l \in K$ при всех ε, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$.

Для того чтобы точка $X^0 \in K$ была точкой минимума выпуклой дифференцируемой по всем направлениям функции $f(X)$ на множестве K, необходимо и достаточно, чтобы производная функции $f(X)$ по любому допустимому направлению в точке $X^0 \in K^0$ была неотрицательной.

Следствие. Из этого свойства, в частности, следует, что каждая стационарная точка X^* $\left(\frac{\partial f(X^*)}{\partial X} = 0\right)$ выпуклой гладкой функции $f(X)$ является ее точкой минимума.

§ 2. Теорема Куна – Таккера

В данном параграфе основная теорема для гладких задач выпуклого программирования получается как следствие теорем нелинейного программирования.

2.1. Постановка задачи. Пусть в пространстве R^n заданы выпуклые функции $f(X), g_1(X), ..., g_m(X)$ и выпуклое множество Q. Задача выпуклого программирования: найти точку X^0, $X^0 \in Q$, $g(X^0) \leq 0$, удовлетворяющую соотношению

$$f(X^0) = \min_{\substack{g(X) \leq 0, \\ X \in Q}} f(X). \tag{1}$$

Допустимые точки в задаче выпуклого программирования задаются соотношениями

$$g(X) \leq 0, \quad X \in Q.$$

Поскольку функции $g_i(X)$, $i = 1,2,...,m$, выпуклы, то в силу приведенных в §1 данной главы свойств выпуклых множеств и функций множество K допустимых точек представляет выпуклое множество. Как доказано в том же параграфе, выпуклая функция $f(X)$ на множестве K может иметь один локальный минимум, который является и глобальным.

Лемма 2.1. Множество решений задачи выпуклого программирования - выпуклое множество.

Доказательство. Действительно, если

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}^1) = \min_{\boldsymbol{X}\in \boldsymbol{K}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}), \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}^2) = \min_{\boldsymbol{X}\in \boldsymbol{K}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}), \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}^1) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}^2) = \alpha,$$

то для всех $\lambda, \quad 0 \le \lambda \le 1$,

$$f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) \le \lambda f(X^1) + (1-\lambda) f(X^2) \le \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \min_{X\in K} f(X),$$

Поскольку строгое неравенство в последнем выражении противоречит определению минимума, то получаем равенство

$$f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) = \min_{X\in K} f(X),$$

в силу которого точка $\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2$ есть решение задачи (1). Лемма 2.1доказана.

Следствие. Из леммы следует, что если задача - (1) имеет два решения, то она имеет и континуум решений.

2. 2. Седловая точка функции Лагранжа и решение задачи выпуклого программирования. Функция

$$F(X,\Lambda) = f(X) + \Lambda' g(X), \qquad \Lambda \in R^m, \quad \Lambda \ge 0, \tag{2}$$

называется нормальной функцией Лагранжа для задачи выпуклого программирования. Совокупность (X^*, Λ^*) векторов X^*, $\Lambda^* \ge 0$, называется седловой точкой функции Лагранжа, если для всех $X \in Q$, $\Lambda \ge 0$, выполняются неравенства

$$F(X^*,\Lambda) \le F(X^*,\Lambda^*) \le F(X,\Lambda^*). \tag{3}$$

Теорема 2.1. Если (X^*,Λ^*), $X^* \in Q$, $\Lambda^* \ge 0$ - седловая точка функции Лагранжа (2), то X^* - решение- задачи выпуклого программирования (1}.

Доказательство. Запишем неравенства (3) более подробно (в исходных функциях):

$$f(X^*) + \Lambda' g(X^*) \le f(X^*) + \Lambda^{*'} g(X^*) \le f(X) + \Lambda^{*'} g(X), \qquad X \in Q, \quad \Lambda \ge 0. \tag{4}$$

Из левого неравенства следует

$$\Lambda' g(X^*) \le \Lambda^{*'} g(X^*). \tag{5}$$

Для выполнения (5) необходимо, чтобы

$$g(X^*) \le 0$$

ибо если при некотором $i, \ 1 \le i \le m, \ g_i(X^*) > 0$, то, полагая $\lambda_j = 0, \quad j \ne i, \quad j = 1,2,...,m$, и выбирая λ_i, достаточно большим, получаем слева в (5) сколь угодно большое положительное число. Из (5) следует условие дополняющей нежесткости:

$$\Lambda^{*'} g(X^*) = 0. \tag{6}$$

Действительно, если допустить, что $\Lambda^{*'}g(X^*) \le 0$, то, положив $\Lambda = \dfrac{\Lambda^*}{2}$, из (5) имеем противоречивые неравенства $0 \le \dfrac{1}{2}\Lambda^{*'}g(X^*) < 0$.

С учетом (6) из правого неравенства в (4) получаем

$$f(X^*) \le f(X) + \Lambda^{*'}g(X)$$

Отсюда следует, что для всех $X \in Q$, удовлетворяющих неравенству $g(X) \le 0$, должно выполняться неравенство

$$f(X^*) \le f(X)$$

Это значит, что X^* - решение задачи выпуклого программирования. Теорема доказана.

Замечание. В доказательстве не использовалась выпуклость функций $f(X)$, $g(X)$ множества Q. Эта теорема верна и для невыпуклых функций и множеств.

Согласно теореме 2.1 решение задачи выпуклого программирования сводится к нахождению седловых точек функции Лагранжа. Теоремы о существовании седловых точек функции Лагранжа называют теоремами Куна - Таккера, по имени ученых, получивших первые результаты такого типа.

2.3. Теорема Куна - Таккера для частной задачи. Пусть выпуклая скалярная функция $f(X)$, $X \in R^n$, и выпуклые компоненты m-мерной векторной функции $g(X)$, $X \in R^n$, определены и непрерывны вместе с производными до второго порядка включительно. Рассмотрим задачу

$$f(X) \to \min, \tag{7}$$

$$g(X) \le 0. \tag{8}$$

Данная задача отличается от общей задачи выпуклого программирования (1) предположением гладкости функций и отсутствием ограничения $X \in Q$.

Пусть вектор X^0 (решение задачи (7), (8)) является обыкновенной допустимой точкой по ограничениям типа неравенств (8). Тогда в силу теоремы 6.1 о необходимых условиях минимума (§ 6 гл.II) в задачах нелинейного программирования найдется m- мерный вектор Λ^0, $\Lambda^0 \ge 0$, такой, что выполняются условия:

$$\Lambda^{*'}g(X^0) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial X} = 0. \tag{10}$$

Поскольку $f(X), g_1(X), ..., g_m(X)$ - выпуклые функции и $\Lambda^0 \ge 0$,то функция $F(X, \Lambda^0)$ по свойству 2 из § 1 также выпукла по X.

Следовательно, точка X^0, удовлетворяющая условию (10), является по свойству 7 из § 1 точкой минимума функции Лагранжа (11)

$$F(X^0, \Lambda^0) \le F(X, \Lambda^0) \quad \text{для всех} \quad X \in R^n. \tag{12}$$

По предположению $g(X^0) \le 0$, поэтому для всех $\Lambda \ge 0$ выполняется неравенство $\Lambda' g(X^0) \le 0$. С другой стороны, выполняется равенство (9), таким образом,

$$F(X^0, \Lambda) = f(X^0) + \Lambda' g(X^0) \le f(X^0) + \Lambda^0 g(X^0) = F(X^0, \Lambda^0). \tag{13}$$

Объединяя (12) и (13), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.2. Если обыкновенная допустимая, точка X^0 является решением задачи выпуклого программирования (7), (8), то существует вектор Λ, $\Lambda \ge 0$, такой, что пара (X^0, Λ^0) составляет седловую точку функции Лагранжа, т. е. для всех $\Lambda \ge 0$ и $X \in R^n$ выполняются неравенства

$$F(X^0, \Lambda) \le F(X^0, \Lambda^0) \le F(X, \Lambda^0).$$

Замечания 1. В силу доказанной теоремы точка условного минимума в задаче выпуклого программирования является и точкой безусловного минимума функции Лагранжа. Известно, что в общем случае задач нелинейного программирования это утверждение неверно.

Следствие. Если ограничения (8) линейны

$$A_i' X + b_i \le 0, \quad i = 1,2,...,m,$$

то теорема 2.2 верна без предположения о том, что X^0- обыкновенная допустимая точка.

2.4. Задача выпуклого программирования с дополнительным ограничением. Сохраняя предположение о гладкости функций $F(X)$, $g(X)$, вместо (7), (8) рассмотрим задачу

$$f(X) \to \min, \tag{14}$$

$$g(X) \le 0, \quad X \ge 0. \tag{15}$$

Точка X^* называется обыкновенной допустимой по ограничениям (15), если она обыкновенная допустимая по ограничениям $g(X) \le 0$, т. е. в точке X^* векторы

$$\frac{\partial g_{i_1}(X^*)}{\partial X}, ..., \frac{\partial g_{i_k}(X^*)}{\partial X}, \tag{16}$$

составленные из функций ограничений, активных в точке X^*, линейно независимы.

Каждое из дополнительных ограничений

$$x_i \ge 0, \quad i = 1,2,...,m,$$

с помощью функций $g_{m+i} = -x_i$ можно записать в виде неравенства

$$g_{m+i} \le 0. \tag{17}$$

Поэтому вводя $(n+m)$-мерную векторную функцию задачу (14), (15) запишем в виде

$$f(X) \to \min, \tag{18}$$

$$\bar{g}(X) \le 0. \tag{19}$$

Если точка X^* - обыкновенная допустимая по ограничениям (15), то она обыкновенная допустимая по ограничениям (19), так как все дополнительные ограничения линейны.

Компоненты функции $\overline{g}(X)$ являются выпуклыми функциями. Поэтому, в силу теоремы 2.2, найдется неотрицательный $(n+m)$-мерный вектор $\overline{\Lambda}^0 = (\Lambda^{0'}, \lambda^0_{m+1}, ..., \lambda^0_{m+n})$ такой, что пара (X^0, Λ^0), где X^0- решение задачи (18), (19) составляет седловую точку функции Лагранжа

$$F(X, \overline{\Lambda}) = f(X) + \Lambda' g(X) - \sum_{ш=1}^{m} \lambda_{ь+ш} x_i \,.$$

Точнее, для всех $X \in R^n$, $\Lambda, \lambda_{m+i} \geq 0$, $i = 1,2,...,n$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} & f(X^0) + \Lambda' g(X^0) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{m+i} x_i^0 \leq f(X^0) + \Lambda^{0'} g(X^0) - \sum_{i=1}^{n} \lambda^0_{m+i} x_i^0 \leq \\ & \leq f(X) + \Lambda^{0'} g(X) - \sum_{i=1} \lambda^0_{m+i} x_i. \end{aligned} \tag{20}$$

Докажем, что из (20) следуют неравенства

$$f(X^0) + \Lambda' g(X^0) \leq f(X^0) + \Lambda^{0'} g(X^0) \leq f(X) + \Lambda^{0'} g(X) \text{ для всех } \Lambda \geq 0, \ X \geq 0 \,. \quad (21)$$

Действительно, если при некотором $\widetilde{\Lambda}$, $\widetilde{\Lambda} \geq 0$, имеем

$$f(X^0) + \widetilde{\Lambda}' g(X^0) > f(X^0) + \Lambda^{0'} g(X^0) \,,$$

то в (20) левое неравенство при $\Lambda = \widetilde{\Lambda}$ и достаточно малых λ_{m+i}, $i = 1,2,...,n$, нарушится. Отсюда следует, что $\Lambda^{0'} g(X^0) = 0$ (п. 2). По той же причине из (20) следует

$$\Lambda^{0'} g(X^0) - \sum_{ш=1}^{m} \lambda^0_{m+i} x_i^0 = 0 \,.$$

Поэтому, из правого неравенства в (20) получаем

$$f(X^0) + \Lambda' g(X^0) \leq f(X^0) + \Lambda^{0'} g(X^0) - \sum_{i=1}^{n} \lambda^0_{m+i} x_i^0 \leq f(X) + \Lambda^{0'} g(X)$$

для всех x_i, $x_i \geq 0$. Неравенства (21) доказаны. Следовательно, справедлива

Теорема 2.3. Пусть $f(X), g(X) \in C^{(2)}$. Для того чтобы обыкновенная допустимая точка X^0 была решением задачи (14), (15), необходимо и достаточно существование неотрицательного вектора Λ^0, $\Lambda^0 \geq 0$, такого, что для всех $X \geq 0$, $\Lambda \geq 0$, выполнялись неравенства

$$F(X^0, \Lambda) \leq F(X^0, \Lambda^0) \leq F(X, \Lambda^0) \,,$$

где $F(X, \Lambda) = f(X) + \Lambda' g(X)$.

Таким образом, в задаче выпуклого программирования (14), (15) дополнительные ограничения $X \geq 0$ можно не вносить в функцию Лагранжа, а перенести в формулировку результата.

Теорема 2.4. Теорема 2.3 для случая линейных ограничений верна без предположения о линейной независимости векторов (16).

Действительно, в этом случае вместо теоремы 2.2 можно использовать результаты из §6 главы II.

§ 3. Основная теорема выпуклого программирования

Ниже приведем основную теорему выпуклого программирования без предположения о гладкости функций. Метод доказательства, основан на теореме об отделимости выпуклых множеств, а это выходит за рамки математической подготовки студента - экономиста. Поэтому эту теорему приведем без доказательства.

3.1. Условие Слейтера. Основная теорема. Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$f(X) \to \min, \tag{1}$$

$$g(X) \le 0, \ \ X \in Q, \tag{2}$$

где $f(X)$ и компоненты m-мерной функции $g(X)$ - выпуклые функции при $X \in Q$; Q - выпуклое множество.

Говорят, что ограничения (2) удовлетворяют условию Слейтера, если существует вектор X^*, $X^* \in Q$, такой, что

$$g(X^*) < 0.$$

Теорема 3.1. Пусть ограничение (2) задачи (1), (2) удовлетворяет условию Слейтера. Тогда для того чтобы вектор X^0, $X^0 \in Q$ был решением задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор Λ^0, $\Lambda^0 \ge 0$, такой, что пара (X^0, Λ^0) составляла седловую точку функции Лагранжа $F(X,\Lambda) = f(X) + \Lambda' g(X)$.

Другими словами, теорема утверждает, что для всех $X \in Q$, $\Lambda \ge 0$, выполняются неравенства

$$F(X^0,\Lambda) \le F(X^0,\Lambda^0) \le F(X,\Lambda^0).$$

3.2. Заключительные замечания. Сравнивая теорему 3.1 с результатами §2, видим, что это теорема верна для выпуклых функций без дополнительных предположений типа гладкости. Уже отмечалось, что для невыпуклых функций теорема неверна. Однако она справедлива и не для всех выпуклых функций $f(X), g(X)$.

Предположение о том, что ограничения удовлетворяют условию Слейтера, существенно. Действительно, пусть $f(x) = -x$, $g(x) = x^2$ и точка $x^0 = 0$ является решением задачи (1), (2). Составим функцию Лагранжа $F(x,\lambda) = -x + \lambda x^2$.

Допустим, что теорема Куна - Таккера верна. Тогда существует число λ^0, $\lambda^0 \ge 0$, такое, что для всех x, $x \ge 0$, выполняется неравенство

$$F(x^0,\lambda^0) \le F(x^0,\lambda), \text{ т.е. } 0 \le -x + \lambda^0 x^2.$$

Ясно, что при любом $\lambda^0 \ge 0$ найдется достаточное малое число $x > 0$ такое, что $-x + \lambda^0 x^2 < 0$. Значит, теорема Куна - Таккера для этого примера неверна. В примере условие Слейтера не выполняется, ибо $g(x) = x^2$ при всех $x \ge 0$.

Условие Слейтера является довольно стеснительным. Оно не выполняется при любой функции $g(X)$ для ограничений

$$g^1(X) \le 0, \;\; g^2(X) \le 0, \qquad \left(g^1(X) = g(X), \quad g^2(X) = -g(X)\right)$$

полученных из ограничения $g(X) = 0$. Однако можно показать, что если функция $g(X)$ линейна, то теорема верна без условия Слейтера. Это расширяет область ее применения.

Как и в случае гладких задач, смысл основного результата, содержащегося в теореме Куна - Таккера, состоит в том, что точка условного минимума X^0 задачи выпуклого программирования при некотором Λ^0, $\Lambda^0 \ge 0$, является точкой безусловного минимума функции Лагранжа па множестве Q.

Ключевые слова

Выпуклое программирование, выпуклое множество, выпуклая функция, свойства выпуклых функций, гладкая задача выпуклого программирования, теорема Куна – Таккера, седловая точка функции Лагранжа, условие Слейтера.

Вопросы для самоконтроля

1.Дайте определения: а) выпуклой функции; б) строго выпуклой функции.

2.Какая связь имеется между выпуклыми множествами и выпуклыми функциями? Приведите утверждения, в которых эта связь раскрывается.

3.Приведите свойства выпуклых функций.

4.Сформулируйте постановки задачи выпуклого программирования.

5.Что можно утверждать о множестве решений задачи выпуклого программирования?

6.Дайте определения Седловой точки функции Лагранжа.

7.Как решается задача выпуклого программирования? Сформулируйте теорему Куна-Таккера – основную теорему задачи выпуклого программирования в частном случае.

8. Как решается задача выпуклого программирования с дополнительным ограничением?

9. Что представляет условие Слейтера?

10.Сформулируйте теорему Куна-Таккера – основную теорему задачи выпуклого программирования без предположения о гладкости функций.

11.Известно, что теорема 3.1 неверна для невыпуклых функции. Верна ли эта теорема для всех выпуклых функций?

12. Почему условие Слейтера является стеснительным?

13.В чем состоит смысл основного результата содержащего в теореме Куна-Таккера как в случае гладких, так и в случае негладких задач?

Задачи

Решить следующие задачи выпуклого программирования:

3.1. $$\begin{aligned} & f = x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \to \min, \\ & x_1 + 2x_2 \le 12, \\ & 3x_1 + x_2 \le 15, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

3.2. $$\begin{aligned} & f = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 - 8x_2 \to \min, \\ & x_1 + x_2 \le 7, \\ & x_2 \le 5, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

3.3. $$\begin{aligned} & f = 2x_1 - 8x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 \to \min, \\ & x_1 + 2x_2 \le 12, \\ & -x_1 + x_2 \ge -8, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

3.4. $$\begin{aligned} & f = -2x_1 - 4x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 \to \min, \\ & x_1 + 2x_2 \le 8, \\ & 2x_1 - x_2 \le -8, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

3.5. $$\begin{aligned} & f = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2 - 8x_3 \to \min, \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \\ & x_2 \le 12, \\ & x_1 + x_3 \le 14, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

ГЛАВА IV

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАННИЕ

Динамическое программирование – раздел математики, посвященный теории и методам решения многошаговых задач оптимального управления.

§ 1. Введение

1.1. Основные понятия. Экономический процесс во всех задачах линейного и нелинейного программирования, рассмотренных нами в предыдущих главах считался статическим, т.е. не зависящим от времени, поэтому оптимальное решение находилось только на один этап планирования. Такие задачи называются одноэтапными или одношаговыми задачами.

В задачах динамического программирования экономический процесс зависит от времени (от нескольких периодов (этапов) времени), поэтому находится ряд оптимальных решений (последовательно для каждого этапа), обеспечивающих оптимальное развитие всего процесса в целом. Задачи динамического программирования называются многоэтапными или многошаговыми. Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, позволяющий осуществлять оптимальное планирование многошаговых управляемых процессов и процессов, зависящих от времени.

Экономический процесс называется управляемым, если можно влиять на ход его развития.

Управлением называется совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход процесса. В экономических процессах управление заключается в распределении и перераспределении средств на каждом этапе. Например, выпуск продукции любым предприятием - управляемый процесс, так как он определяется изменением состава оборудования, объемом поставок сырья, величиной финансирований и т. д. Совокупность решений, принимаемых в начале каждого года планируемого периода по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, размерам финансирования и т. д., является управлением. Казалось бы, для получения максимального объема выпускаемой продукции проще всего вложить максимально возможное количество средств и использовать на полную мощность оборудование. Но это привело бы к быстрому изнашиванию оборудования и, как следствие, к уменьшению выпуска продукции. Следовательно, выпуск продукции надо спланировать так, чтобы избежать нежелательных эффектов. Необходимо предусмотреть мероприятия, обеспечивающие пополнение оборудования по мере изнашивания, т.е. по периодам времени. Последнее хотя и приводит к уменьшению первоначального объема выпускаемой продукции, но обеспечивает в дальнейшем возможность расширения производства. Таким образом, экономический процесс выпуска продукции можно считать состоящим из нескольких этапов (шагов), на каждом из которых осуществляется влияние на его развитие.

Началом этапа (шага) управляемого процесса считается момент принятия решения (о величине капитальных вложений, о замене оборудования определенного вида и т. д.). Под этапом обычно понимают хозяйственный год.

Планируя многоэтапный процесс, исходят из интересов всего процесса в целом, т. е. при принятии решения на отдельном этапе всегда необходимо иметь в виду конечную цель.

Пример 1.1. Пусть планируется деятельность некоторой системы $\boldsymbol{S}$ промышленных предприятий $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, ..., \boldsymbol{P}_n$ на некоторый период времени $\boldsymbol{T}$, состоящий из k хозяйственных лет $\boldsymbol{t}_i$, $\boldsymbol{i} = 1,2,...,\boldsymbol{k}$, причем $\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{t}_i$. В начале периода T на развитие предприятий выделены основные средства $\boldsymbol{D}$. В начале каждого хозяйственного года производится финансирование, всей системы предприятий, т. е. выделяется доля основных средств. Известны первоначальное состояние системы $\boldsymbol{S}_0$, характеризуемое количеством средств, уже вложенных в предприятия, и конечное состояние $\boldsymbol{S}_k$, характеризуемое всей дополнительно вложенной суммой $\boldsymbol{D}$. Как следует распределить по предприятиям и годам основные средства $\boldsymbol{D}$, чтобы к концу периода $\boldsymbol{T}$ суммарный доход W от всей системы предприятий был максимальным?

Решение. Обозначим через $\boldsymbol{x}_{ij}$ сумму, выделяемую в начале $\boldsymbol{i}$-го года $\boldsymbol{j}$-му предприятию $(\boldsymbol{i} = 1,2,...,\boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{j} = 1,2,...,\boldsymbol{n})$. Предположим, что средства на $\boldsymbol{i}$-м этапе распределены, т. е. выбрано определенное управление $\boldsymbol{U}^i$ которое состоит в том, что в начале $\boldsymbol{i}$-го года предприятию $\boldsymbol{P}_1$ выделены средства $\boldsymbol{x}_{i1}$, предприятию $\boldsymbol{P}_2$ - средства $\boldsymbol{x}_{i2}$ и т.д. Тогда вектор $\boldsymbol{U}^i = (\boldsymbol{x}_{i1}, \boldsymbol{x}_{i2}, ..., \boldsymbol{x}_{in})$ определяет распределение средств на $\boldsymbol{i}$-м этапе. Совокупность выделенных средств (управлений) на $\boldsymbol{k}$ шагах выразится системой векторов $\boldsymbol{n}$-мерного векторного пространства

$$\boldsymbol{U}^1 = (\boldsymbol{x}_{11} . \boldsymbol{x}_{12}, ..., \boldsymbol{x}_{1n}),$$
$$\boldsymbol{U}^2 = (\boldsymbol{x}_{21}, \boldsymbol{x}_{22}, ..., \boldsymbol{x}_{2n}),$$
$$.................................$$
$$\boldsymbol{U}^k = (\boldsymbol{x}_{k1}, \boldsymbol{x}_{k2}, ..., \boldsymbol{x}_{kn}).$$

Суммарный доход за $\boldsymbol{k}$ лет зависит от совокупности управлений, т.е является функцией от $\boldsymbol{U}^1, \boldsymbol{U}^2, ..., \boldsymbol{U}^k$:

$$\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{U}^1, \boldsymbol{U}^2, ..., \boldsymbol{U}^k).$$

Задача состоит в следующем: на каждом этапе необходимо выбрать такое управление, чтобы суммарный доход от всей системы предприятий был максимальным.

Замечание. В общем случае начальное $\boldsymbol{S}_0$ и конечное $\boldsymbol{S}_k$ состояния системы точно не задаются, а указывается целая область начальных $\widetilde{\boldsymbol{S}}_0$ и конечных $\widetilde{\boldsymbol{S}}_k$ состояний.

Сформулированную задачу, на первый взгляд, можно решить непосредственно, объединив все этапы. Действительно, $\boldsymbol{W}$ можно рассматривать как функцию от элементов управлений на каждом этапе:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}_{11},...,\boldsymbol{x}_{1n},\boldsymbol{x}_{21},...,\boldsymbol{x}_{2n},...,\boldsymbol{x}_{k1},...,\boldsymbol{x}_{kn}),$$

т. е. как функцию многих переменных. Теперь решение задачи заключается в нахождении такой совокупности значений аргументов $\boldsymbol{x}_{ij}$, при которой функция $\boldsymbol{W}$ достигает максимального значения. Казалось бы, найдя частные производные функции $\boldsymbol{W}$ по всем аргументам, приравняв их к нулю и решив систему уравнений $\dfrac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{x}_{ij}} = 0$ получим значения, $\boldsymbol{x}_{ij}$ при которых функция $\boldsymbol{W}$ имеет локальный максимум.

Однако этот метод имеет существенные недостатки: во-первых, при большом количестве этапов решение полученной системы довольно громоздко; во-вторых, с его помощью можно найти критические точки только внутри области, так как метод не позволяет исследовать граничные точки; в-третьих, метод вообще неприменим, если $\boldsymbol{x}_{ij}$ - дискретные величины.

Таким образом, для большинства задач динамического программирования классические методы анализа или вариационного исчисления оказываются неэффективными, поскольку приводят первоначально поставленную задачу отыскания максимального значения функции к задаче, которая не проще, а сложнее, исходной. Динамическое программирование, используя поэтапное планирование, позволяет не только упростить решение задач, но и решить те из них, к которым нельзя применить методы математического анализа. Упрощение решения достигается за счет значительного уменьшения количества исследуемых вариантов, так как вместо того, чтобы один раз решать сложную многовариантную задачу, метод поэтапного планирования предполагает многократное решение относительно простых задач.

Однако динамическое программирование имеет и свои недостатки. В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным, в динамическом программировании такого метода не существует. Каждая задача имеет свои трудности, и в каждом случае необходимо найти наиболее подходящую методику решения. Недостаток динамического программирования заключается также в трудоемкости решения многомерных задач.

1.2.Общая постановка задачи динамического программирования. Пусть некоторая физическая управляемая система $\boldsymbol{S}$ находится в первоначальном состоянии $\boldsymbol{S}_0 \in \widetilde{\boldsymbol{S}}_0$. С течением времени ее состояние меняется и система приходит в конечное состояние $\boldsymbol{S}_k \in \widetilde{\boldsymbol{S}}_k$. С процессом изменения состояния системы связан некоторый численный критерий $\boldsymbol{W}$. Необходимо так организовать процесс, чтобы критерий достиг оптимального значения.

Обозначим множество возможных управлений через $\boldsymbol{U}$. Тогда задача состоит в том, чтобы из множества возможных управлений $\boldsymbol{U}$ найти такое управление $\boldsymbol{U}^*$, которое позволит перевести систему $\boldsymbol{S}$ из начального состояния $\boldsymbol{S}_0 \in \widetilde{\boldsymbol{S}}_0$ в конечное $\boldsymbol{S}_k \in \widetilde{\boldsymbol{S}}_k$ так, что критерий $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{U})$ принимает оптимальное значение $\boldsymbol{W}^*$.

1.3. Геометрическая интерпретация задачи динамического программирования. Состояние физической системы $\boldsymbol{S}$ можно описать числовыми параметрами, например, расходом горючего и скоростью, количеством вложенных средств и т. д. Назовем эти параметры координатами системы; тогда состояние системы можно изобразить точкой $\boldsymbol{S}$, а переход из одного состояния $\boldsymbol{S}_1$ в другое $\boldsymbol{S}_2$ - траекторией точки S. Управление U означает выбор определенной траектории перемещения точки $\boldsymbol{S}$ из $\boldsymbol{S}_1$ в $\boldsymbol{S}_2$, т. е. установление определенного закона движения точки $\boldsymbol{S}$.

Совокупность состояний, в которые может переходить система, называется областью возможных состояний. В зависимости от числа параметров, характеризующих состояние системы, область возможных состояний системы может быть различной.

Если состояние системы $\boldsymbol{S}$ характеризуется двумя параметрами (x_1 и x_2), то областью возможных состояний системы служит плоскость $\boldsymbol{R}^2$ или ее часть, а управление изобразится линией на плоскости, по которой точка $\boldsymbol{S}$ перемещается из $\boldsymbol{S}_0 \in \widetilde{\boldsymbol{S}}_0$ в $\boldsymbol{S}_k \in \widetilde{\boldsymbol{S}}_k$ (рис. 1.1).

Рис.1.1

В общем случае, когда состояние системы описывается n параметрами $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{i} = 1,2,...,\boldsymbol{n}$, областью возможных состояний служит $\boldsymbol{n}$-мерное пространство, а управление изображается перемещением точки $\boldsymbol{S}$ из какой-то начальной области $\widetilde{S}_0$ в конечную $\widetilde{S}_k$ по некоторой «траектории» этого пространства.

Таким образом, задаче динамического программирования можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Из всех траекторий, принадлежащих области, возможных состояний системы и соединяющих области $\widetilde{S}_0$ и $\widetilde{S}_k$, необходимо выбрать такую, на которой критерий W принимает оптимальное значение.

Знакомство с методом динамического программирования проще всего начать с задачи о ресурсах.

§ 2. Задача о распределении ресурсов

2.1. Постановка задачи и решение. Пусть имеется n технологических процессов, в которых расходуется некоторое сырье, запасы его равны c. Выделение x_i сырья па i-й процесс приносит $f_i(x_i)$ единиц прибыли, где $f_i(x)$ - известная функция. Как распределить весь запас сырья по технологическим процессам, чтобы общая прибыль была максимальной?

Нетрудно показать, что математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max, \\ &x_i \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,n; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = c. \end{aligned} \tag{1}$$

Первый шаг в решении задачи методом динамического программирования состоит во вложении конкретной задачи в семейство подобных задач. Этот шаг называется инвариантным погружением задачи. Для задачи (1) инвариантное погружение означает следующее: вместо фиксированного числа n процессов рассматривается произвольное число τ процессов, вместо фиксированного количества с сырья рассматривается произвольное количество y. Для задачи (1) при инвариантном погружении получается семейство задач

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\tau} f_i(x_i) \to \max, \\ &x_i \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,\tau; \quad \sum_{i=1}^{\tau} x_i = y. \end{aligned} \tag{2}$$

Введем функцию

$$B(y,\tau) = \max_{\substack{x_i \geq 0,\, i=1,2,\dots,\tau; \\ \sum_{i=1}^{\tau} x_i = y}} \sum_{i=1}^{\tau} f_i(x_i), \tag{3}$$

которая имеет экономический смысл наибольшей прибыли, достигаемой на τ процессах при использовании y единиц сырья.

Ее принято называть функцией Беллмана.

Второй шаг в решении задачи (1) методом динамического программирования состоит в применении принципа оптимальности. Оставляя до §3 полную формулировку принципа, опишем его суть на конкретной задаче (1). Выделим для процесса семейства (2) с номером τ сырье в количестве x_τ и оставим пока его, а сосредоточим внимание на оставшихся $\tau-1$ процессах. Для них осталось $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_\tau$ единиц сырья. Предположим, что нам удалось для выделенных процессов получить максимальную прибыль

$$\sum_{i=1}^{\tau-1} \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_i) \to \max,$$

$$\boldsymbol{x}_i \geq 0, \quad \boldsymbol{i} = 1,2,...,\tau-1; \quad \sum_{i=1}^{\tau-1} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_\tau.$$

Согласно обозначению (3), эта прибыль равна $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_\tau,\tau-1)$ и зависит от количества x_τ сырья, которое было выделено на τ-й процесс.

Общая прибыль от описанного распределения ресурсов будет равна

$$\boldsymbol{f}_\tau(\boldsymbol{x}_\tau)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_\tau,\tau-1) \tag{4}$$

и также зависит от размера $\boldsymbol{x}_\tau$ выделенного сырья.

Поскольку первоначальная цель распределения ресурсов - максимизация прибыли по всем τ технологическим процессам, то, очевидно, объем $\boldsymbol{x}_\tau$ надо выбрать так, чтобы величина (4) стала максимальной. Выбор $\boldsymbol{x}_\tau$ ограничен имеющимся запасом $\boldsymbol{y}$, $0 \leq \boldsymbol{x}_\tau \leq \boldsymbol{y}$. Используя опять обозначение (3) для максимальной прибыли от τ процессов при запасе сырья в $\boldsymbol{y}$ единиц, из (4) получаем

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\tau) = \max_{0\leq \boldsymbol{x}_\tau \leq \boldsymbol{y}}\left\{\ \boldsymbol{f}_\tau(\boldsymbol{x}_\tau)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_\tau,\tau-1)\ \right\}. \tag{5}$$

Справа в (5) по переменной $\boldsymbol{x}_\tau$ берется операция max, значит, она «немая» и для упрощения записи уравнение (5) можно представить в виде

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\tau) = \max_{0\leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}}\left\{\ \boldsymbol{f}_\tau(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},\tau-1)\ \right\}. \tag{6}$$

Полученное рекуррентно-функциональное уравнение для функции Беллмана называется уравнением Беллмана в задаче о распределении ресурсов. Оно является математическим выражением принципа оптимальности.

Для решения уравнения (6) следует знать краевое условие. Оно получается из (3) при $\tau = 1$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},1) = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{y}). \tag{7}$$

Уравнения (6) и краевого условия (7) достаточно, чтобы полностью решить исходную задачу (1). Полагаем $\tau = 2$ в (6):

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},2) = \max_{0\leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}}\left\{\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},1)\right\}. \tag{8}$$

Поскольку функция $\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})$ задана, значения функции $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},1)$ уже найдены в (7), то правая часть в (8) может быть вычислена. Следовательно, из (8) находим функцию $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},2)$. Полагая далее в (6) переменную τ равной 3, 4,..., через $n-1$ шагов получаем функцию $B(y,n)$. По определению (3) функции Беллмана величина $B(c,n)$ равна максимальной прибыли, достигаемой с использованием n процессов при запасе в c единиц сырья.

Найдем теперь количество сырья, выделяемого на каждый из n процессов для получения максимальной прибыли. Полагаем $y=c$, $\tau=n$ в (6):

$$B(c,n)=\max_{0\le x\le c}\{\ f_n(x)+B(c-x,n-1)\ \}. \tag{9}$$

Пусть x_n - число, на котором справа в (9) достигается максимум. По смыслу выражения, стоящего в фигурных скобках, который был выяснен при обсуждении выражения (4), величина x_n равна оптимальному размеру сырья, выделенному на n-й технологический процесс; после выделения x_n единиц сырья на n-й процесс остается $n-1$ процессов, на которые можем израсходовать $c-x_n$ единиц сырья. Полагая $y=c-x_n$, $\tau=n-1$, из (6) получаем

$$B(c-x_n,n-1)=\max_{0\le x\le c-x_n}\{f_{n-1}(x)+B(c-x_n-x,n-2)\}. \tag{10}$$

По аналогии с предыдущим убеждаемся, что число x_{n-1}, на котором в (10) достигается максимум, равно оптимальному размеру сырья, выделяемому на технологический процесс с номером $n-1$. Продолжая рассуждения, получим числа

$$x_n,x_{n-1},....,x_1 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n}x_i=c\right),$$

равные оптимальным размерам сырья, выделяемым на каждый технологический процесс для получения максимальной прибыли.

2.2. Обсуждение. Исходная задача (1) о распределении ресурсов - это весьма трудная задача минимизации скалярной функции общей прибыли по n переменных $x_1,x_2,....,x_n$.

Динамическое программирование привело к n задачам максимизации выражений в (6) по одной переменной x. Каждая из этих задач значительно проще исходной. Получившаяся редукция сложной задачи к более простым задачам называется декомпозицией.

Как следует из приведенного решения задачи (1), совсем не используются аналитические свойства функций $f_i(x)$, последние могут быть любой природы и задаваться таблично, графически, алгоритмически и т. п.

Использование динамического программирования позволяет наряду с решением конкретной задачи (1) получить решение ряда задач с другими значениями c и n. Это облегчает анализ полученного решения с точки зрения чувствительности к изменению параметров.

§ 3. Принцип инвариантного погружения. Принцип оптимальности. Уравнение Беллмана

Основные элементы динамического программирования, описанные для частной задачи в §2, излагаются ниже для общей задачи оптимизации дискретных процессов управления.

3.1. Инвариантное погружение. Рассмотрим следующую задачу оптимизации дискретной системы:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t}),\quad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad \boldsymbol{t}\in\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{t}_1-1],\\ &\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{t}),\quad \boldsymbol{I}(\boldsymbol{u})=\varphi(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_1))\to\min. \end{aligned} \tag{1}$$

Совокупность $\{\boldsymbol{s},\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s})\}$ называется состоянием системы (1). Задачу (1) вложим в семейство задач

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t}),\quad \boldsymbol{x}(\tau)=\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{t}\in[\tau,\boldsymbol{t}_1-1],\\ &\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{t}),\quad \boldsymbol{I}(\boldsymbol{u})=\varphi(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_1))\to\min \end{aligned} \tag{2}$$

зависящих от скаляра τ и $\boldsymbol{n}$- мерного вектора $\boldsymbol{y}$. Переход от задачи (1) к задаче (2) называется принципом инвариантного погружения.

Функция

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\tau)=\min\varphi(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_1)), \tag{3}$$

определенная с помощью минимизации по допустимым управлениям задачи (2), называется функцией Беллмана для задачи (1).

3.2. Принцип оптимальности. Пусть $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{t}),\ \boldsymbol{t}\in[\tau,\boldsymbol{t}_1-1]$- оптимальное управление для состояния $\{\tau,\boldsymbol{y}\}$ системы (2), где τ,y- произвольные число и $\boldsymbol{n}$- мерный вектор. Вычислим положение $\boldsymbol{x}^0(\boldsymbol{s}),\ \boldsymbol{s}>\tau$, траектории $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ системы, соответствующее управлению $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{t}),\ \boldsymbol{t}\in[\tau,\boldsymbol{t}_1-1]$. Принцип оптимальности Беллмана гласит: при любых $\tau,\boldsymbol{y},\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}>\tau$, управление $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{t}),\ \boldsymbol{t}\in[\tau,\boldsymbol{t}_1-1]$, будет оптимальным для состояния $\{\boldsymbol{s},\boldsymbol{x}^0(\boldsymbol{s})\}$. Другими словами, последний кусок оптимальной траектории является оптимальной траекторией. Доказательство принципа оптимальности для задачи (1) проводится рассуждением от противного.

3.3. Уравнение Беллмана. Используя принцип оптимальности, получим уравнение для функции Беллмана (3). Согласно принципу оптимальности

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\tau)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^0(\tau+1),\tau+1)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^0(\tau),\tau),\tau+1),\\ &\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\tau)\le\boldsymbol{B}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\tau),\tau+1),\qquad \boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U}(\tau). \end{aligned}$$

Значит,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\tau)=\min_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U}(\tau)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\tau),\tau+1). \tag{4}$$

Рекуррентно-функциональное уравнение (4) и есть уравнение Беллмана. Для него граничное условие получается из (3)

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}_1)=\varphi(\boldsymbol{y}). \tag{5}$$

3.4. Решение исходной задачи. Сначала решаем уравнение Беллмана (4) с граничным условием (5). В силу рекуррентности уравнения (4) решение легко строится по шагам. Функция $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}_1)$ известна из соотношения (5). Полагаем $\tau = \boldsymbol{t}_1 - 1$ в (4):

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}_1 - 1) = \min_{\boldsymbol{u}\in U(\boldsymbol{t}_1 - 1)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}_1 - 1),\boldsymbol{t}_1).$$

Справа нужно минимизировать известную (из первого шага) функцию $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}_1)$ по переменной $\boldsymbol{z}$, меняющейся в области $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}_1 - 1),\boldsymbol{t}_1 - 1)$. Элемент, на котором достигается минимум, обозначим через

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}_1 - 1). \tag{6}$$

Результат будет равен

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t} - 1_1). \tag{7}$$

Перебирая значения $\boldsymbol{n}$- мерного вектора $\boldsymbol{y}$, получаем функции (6), (7) при разных $\boldsymbol{y}$. Далее полагаем $\tau = \boldsymbol{t}_1 - 2$ в (4). По аналогии с предыдущим получим функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}_1 - 2)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t} - 2_1)$. Через $\boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_0$ шагов описанная процедура дает

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}_1 - 1),\ldots,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}_0),\\ &\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}_1 - 1),\ldots,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}_0). \end{aligned} \tag{8}$$

Из определения (3) функции Беллмана следует, что число $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t}_0)$ равно минимальному значению критерия качества в задаче (1).

Функции (8) доставляют оптимальный закон управления. С его помощью оптимальная траектория $\boldsymbol{x}^0(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{t}_1]$, получается как решение уравнения

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t}),\quad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{x}_0.$$

Получение оптимального закона управления $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ (оптимального управления типа обратной связи) - это главное достоинство результата динамического программирования.

Недостаток метода в том, что необходимо запоминать в процессе решения функции $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\tau)$ многих переменных. Беллман называет этот недостаток «проклятием размерности».

3.5. Распространение на другие задачи. Динамическое программирование является чрезвычайно общим методом исследования. Однако нельзя думать, что для всех задач оптимизации можно составить уравнение Беллмана. С усложнением задач оптимизации усложняется и это уравнение. Однако оказывается, что с увеличением ограничений упрощается задача решения уравнения Беллмана [5].

Ключевые слова

Динамическое программирование, многошаговые управляемые процессы, управление, начальное и конечное состояния, область

возможных состояний системы, принцип оптимальности, рекуррентно-функциональное уравнение, уравнение Беллмана, инвариантное погружение, принцип инвариантного погружения.

Вопросы для самоконтроля

1.Дайте формулировку задачи динамического программирования.

2.Дайте геометрическую интерпретацию задачи динамического программирования.

3.Разясните принцип инвариантного погружения.

4.Сформулируйте принцип оптимальности.

5.Что такое реккурентно-функциональное уравнение Беллмана и как это уравнение получают?

6.Перечисляйте достойнства и недостатки метода динамического программирования.

Задачи

Сформулируйте задачи 4.1- 4.3 в терминах общей задачи динамического программирования.

4.1. Для увеличения объемов выпуска пользующейся повышенным спросом продукции, изготовляемой предприятиями, выделены капиталовложения в объеме S д.е. Использование i-м предприятием x_i, д.е. из указанных средств обеспечивает прирост выпуска продукции, определяемый значением нелинейной функции $f_i(x)$.

Найти распределение капиталовложений между предприятиями, обеспечивающее максимальное увеличение выпуска продукции.

4.2. В состав производственного объединения входят два предприятия, связанные между собой кооперированными поставками. Вкладывая дополнительные средства в целях развития этих предприятий, можно улучшить технико-экономические показатели деятельности производственного объединения в целом, обеспечив тем самым получение дополнительной прибыли. Величина этой прибыли зависит от того, сколько выделяется средств каждому предприятию и как эти средства используются.

Считая, что на развитие i-го предприятия в начале k-го года выделяется a_i^k д.е., найти такой вариант распределения средств между предприятиями в течение N лет, при котором обеспечивается получение за данный период времени максимальной прибыли.

4.3. В производственном объединении в начале каждого года полностью распределяется между входящими в его состав m предприятиями созданный в объединении централизованный фонд развития производства. При этом благодаря выделению из этого фонда i-му предприятию x_i д.е. обеспечивается получение дополнительной прибыли, равной $f_i(x_i)$ д.е. К началу планового периода, состоящего из N лет, централизованному фонду развития производства выделено A д.е. В каждый последующий год этот фонд формируется за счет отчислений в него от полученной прибыли. Эти отчисления для i-го предприятия составляют $\varphi_{ш}(x_i)$ д.е.

Найти такой вариант распределения централизованного фонда развития производства между предприятиями объединения, при котором общая прибыль, полученная за N лет, является максимальной.

4.4. Найти решение задачи 4.1, если S=700д.е., n= 3, а значения x_i, $f_i(x_i)$ приведены в таблице:

Объем капитало-вложений x_i д.е.	Прирост выпуска продукции $f_i(x_i)$ в зависимости от объема капиталовложений (д.е.)		
	предприятие 1	предприятие 2	предприятие 3
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

4.5. Составить оптимальный план распределения капиталовложений между четырьмя предприятиями в условиях задачи 4.1 при исходных данных относительно x_i, $f_i(x_i)$ приведенных в таблице, а также с учетом того, что S = 100 д.е.

Объем капитало-вложений x_i (д.е.)	Прирост выпуска продукции $f_i(x_i)$ в зависимости от капиталовложений (д.е.)			
	Предп. 1	Предп.2	Предп. 3	Предп. 4
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48

80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

ГЛАВА V

ТЕОРИЯ ИГР И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

§1. Основные понятия

Рассмотренные задачи линейного программирования формулировались и решались в предположении наличия полной информации. Их можно отнести к совокупности задач принятия решений в условиях определенности. Например, в транспортной задаче стоимость перевозки (издержки) c_{ij} связанные с доставкой груза от i-го поставщика к j-му потребителю, считались фиксированной величиной. Если x_{ij} - оптимальное значение переменной, определяющей объем перевозок груза от i-го поставщика к j-му потребителю, то общий вклад в издержки от транспортировки грузов равен произведению c_{ij} которое также является фиксированной величиной при заданном значении x_{ij}. В реальных экономических условиях приходится решать отдельные задачи при ограниченности, неточности исходной информации о самом объекте и внешней среде, в которой он функционирует и развивается.

При принятии управленческих решений о функционировании и развитии экономического объекта необходимо учитывать важную характеристику внешней среды - неопределенность.

Под **неопределенностью** следует понимать отсутствие, неполноту, недостаточность информации об объекте, процессе, явлении или неуверенность в достоверности информации. В условиях рыночной экономики существует множество источников возникновения неопределенности для различных экономических объектов. Например, к основным источникам возникновения неопределенности на транспорте можно отнести следующие.

1. Существенная зависимость транспортного процесса от погодных условий. Например, погодные условия могут вызвать не предвиденные последствия в перевозках сельскохозяйственной продукции.
2. Наличие, кроме транспортного предприятия, других участников транспортного процесса — поставщиков грузов, потребителей грузов, ГАИ и др. Результат их влияния на транспортный процесс носит неопределенный и неоднозначный характер.
3. Наличие в работе автотранспорта элементов вероятности и случайности (надежность подвижного состава, неравномерность спроса на транспортные услуги во времени и др.).
4. Недостаточность, неполнота информации об объекте, процессе, явлении, по отношению к которому принимается решение: ограниченность в сборе и обработке информации, постоянная ее изменчивость.
5. Наличие в общественной жизни страны противоборствующих

тенденций, столкновение противоречивых интересов.

6. Невозможность однозначной оценки объекта при сложившихся в данных условиях уровне и методах научного познания.

7. Относительная ограниченность сознательной деятельности лица, принимающего решение, существующие различия в социально-психологических установках, идеалах, намерениях, оценках, стереотипах поведения.

Неопределенность обусловливает появление ситуаций, не имеющих однозначного исхода (решения). Среди различных видов ситуаций, с которыми в процессе производства сталкиваются предприятия, особое место занимают ситуации риска.

Под **ситуацией риска** следует понимать сочетание, совокупность различных обстоятельств и условий, создающих обстановку того или иного вида деятельности. Ей сопутствуют три условия. Это

-наличие неопределенности;

-необходимость выбора альтернативы (отказ от выбора таковых является разновидностью альтернативы);

-возможность оценить вероятность осуществления выбираемых альтернатив.

Таким образом, если существует возможность количественно и качественно определить степень вероятности того или иного варианта, то это и будет ситуация риска.

Для того чтобы снять ситуацию риска, руководители предприятий вынуждены принимать решения и стремиться реализовать их. Этот процесс находит свое выражение в понятии «риск». Несмотря на то, что риск объективно присутствует во всех сферах общественной жизни и в большинстве видов управленческой деятельности, обнаруживается, что понятие «риск» до сих пор не получило универсальной трактовки.

Следует упомянуть об экономическом риске применительно к процессам принятия решений в условиях неопределенности и риска, иными словами, в условиях дефицита информации или неуверенности в достоверности информации. В этом случае риск предстает в виде совокупности вероятных экономических, политических, нравственных и других положительных и неблагоприятных последствий, которые могут наступить при реализации выбранных решений. Определим риск как целенаправленные действия, в ходе которых имеется возможность количественно и качественно оценить вероятность достижения желаемого результата, неудачи и отклонения от цели (положительного или отрицательного свойства).

Процесс установления рыночных отношений в нашей стране порождает различные виды рисковых ситуаций, более того, в работе предприятий риск становится необходимым и обязательным его компонентом.

Чтобы проиллюстрировать различие между ситуациями, когда приходится принимать решения в условиях риска или в условиях неопределенности, рассмотрим задачу оптимального выбора ассортимента выпускаемой продукции.

В условиях риска доход c_j - от реализации единицы продукции j не является фиксированной величиной. Напротив, это случайная величина, точное числовое значение которой не известно, но описывается с помощью функции распределения $f(c_j)$. Часть дохода, $c_j x_j$ определяемая продукцией j, также случайная величина, если даже значение переменной x_j определяющей уровень выпуска продукции j, задано.

В условиях неопределенности функция распределения $f(c_j)$ неизвестна. В действительности неопределенность не означает полного отсутствия информации о задаче. Например, известно, что c_j может принимать пять значений, но неизвестны вероятности этих значений. Эта ситуация рассматривается как принятие решений в условиях неопределенности.

Таким образом, с точки зрения полноты исходных данных определенность и неопределенность представляют два крайних случая, а риск определяет промежуточную ситуацию, в которой приходится принимать решение.

Степень неинформированности данных определяет, каким образом задача формализуется и решается.

При решении задач в условиях неопределенности внешней среды наиболее часто возникают две ситуации. При первой ситуации сама система препятствует принятию решений, например задача составления графика выпуска на работу подвижного состава, занимающегося перевозкой сельхозпродукции, в зависимости от того, будет дождь или нет. В этой задаче природа будет восприниматься как «доброжелательный» противник.

Во второй ситуации возможно наличие конкуренции, когда два (или более) участника находятся в конфликте, и каждый стремится как можно больше выиграть у другого (других). Эта ситуация отличается от обычных процессов принятия решений в условиях неопределенности тем, что лицу, принимающему решение, противостоит мыслящий противник. Теория, в которой рассматриваются задачи принятия решений в условиях неопределенности при наличии противника («доброжелательного» или мыслящего), известна как теория игр.

Теория игр принадлежит к наиболее молодым математическим дисциплинам. Ее возникновение относится к 1944 г., когда вышла в свет монография Неймана и Моргенштерна «Теория игр и экономического поведения». В дальнейшем теория игр превратилась в самостоятельное математическое направление, имеющее практическое приложение.

Теория игр - это теория математических моделей, интересы участников которых различны, причем они достигают своей цели различными путями. Столкновение противоположных интересов участников приводит к возникновению конфликтных ситуаций. Необходимость анализировать такие ситуации, в свою очередь, привела к возникновению теории игр, задачей которой является выработка рекомендаций по рациональному образу действия участников конфликта.

Чтобы исключить трудности, возникающие при анализе практических конфликтных ситуаций в результате наличия многих несущественных факторов, строится упрощенная модель ситуации. Такая модель называется игрой. Конфликтная ситуация в игровой модели развивается по определенным правилам.

§2. Принятие решений в условиях полной определенности

Математические модели исследуемых явлений или процессов могут быть заданы в виде таблиц, элементами которых являются значения частных критериев эффективности функционирования системы, вычисленные для каждой из сравниваемых стратегий при строго заданных внешних условиях. Для рассматриваемых условий принятие решений может производиться:

- по одному критерию;
- по нескольким критериям.

Пример 2.1. Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по обеспечению нового производства оборудованием. С помощью экспериментальных наблюдений были определены значения частных критериев функционирования соответствующего оборудования (a_{ij}), выпускаемого тремя заводами-изготовителями. Рассмотрим данные для выбора оптимальной стратегии в условиях полной определенности:

Варианты оборудования (стратегии, решения)	Частные критерии эффективности оборудования			
	производи-тельность, д.е	стоимость оборудоов. д.е	энергоем-кость, д.е	надежность, у.е
Оборудование завода 1, x_1	$a_{11} = 5$	$a_{12} = 7$	$a_{13} = 5$	$a_{14} = 6$
Оборудование завода 2, x_2	$a_{21} = 3$	$a_{22} = 4$	$a_{23} = 7$	$a_{24} = 3$
Оборудование завода 3, x_3	$a_{31} = 4$	$a_{32} = 6$	$a_{33} = 2$	$a_{34} = 4$

На основе экспертных оценок были также определены веса частных критериев $\lambda_j, \quad j = 1,2,3,4$:

Очевидно, выбор оптимальной стратегии (варианта оборудования) по одному критерию в данной задаче не вызывает затруднений. Например, если оценивать оборудование по надежности, то лучшим является оборудование завода 1 (стратегия x_1).

Выбор оптимального решения по комплексу нескольких критериев (в нашем примере - по четырем критериям) является **задачей многокритериальной.**

Один из подходов к решению многокритериальных задач управления связан с процедурой образования обобщенной функции $F_i(a_{i1};a_{i2};a_{i3};...;a_{in})$ монотонно зависящей от критериев $a_{i1};a_{i2};a_{i3};...;a_{in}$. Данная процедура называется **процедурой (методом) свертывания критериев**. Существует несколько методов свертывания, например:

-метод аддитивной оптимизации;

-метод многоцелевой оптимизации и др.

Рассмотрим подробнее метод **аддитивной оптимизации**.

Пусть

$$F(a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij} . \qquad (1)$$

Здесь выражение (1) определяет аддитивный критерий оптимальности. Величины λ_j являются весовыми коэффициентами, которые определяют в количественной форме степень предпочтения j- го критерия по сравнению с другими критериями. Другими словами, коэффициенты λ_j определяют важность j- го критерия оптимальности. При этом более важному критерию приписывается больший вес, а общая важность всех критериев равна единице, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \ge 0, \quad j = 1,2,...,n . \qquad (2)$$

Обобщенная функция цели (1) может быть использована для свертывания частных критериев оптимальности, если:

-частные (локальные) критерии количественно соизмеримы по важности, т. е. каждому из них можно поставить в соответствие некоторое число λ_j, которое численно характеризует его важность по отношению к другим критериям;

-частные критерии являются однородными (имеют одинаковую размерность; в нашем примере критерии «стоимость оборудования» и «производительность оборудования» в условных денежных единицах будут однородными).

В этом случае для решения задачи многокритериальной оптимизации оказывается справедливым применение аддитивного критерия оптимальности.

Допустим, в примере 2.1 необходимо выбрать оптимальный вариант оборудования по двум однородным локальным критериям:

-производительность (д. е.);

-стоимость оборудования (д. е.).

На основе экспертных оценок были определены весовые коэффициенты этих двух частных критериев: $\lambda_1 = 0{,}667$; $\lambda_2 = 0{,}333$. Вычислим аддитивный критерий оптимальности для трех вариантов:

$$F_1\left(a_{1j}\right) = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} = 0{,}667 \cdot 5 + 0{,}333 \cdot 7 = 5{,}666;$$

$$F_2\left(a_{2j}\right) = \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} = 0{,}667 \cdot 3 + 0{,}333 \cdot 4 = 3{,}333;$$

$$F_3\left(a_{3j}\right) = \lambda_1 a_{31} + \lambda_2 a_{32} = 0{,}667 \cdot 4 + 0{,}333 \cdot 6 = 4{,}666.$$

Очевидно, первый вариант оборудования по двум частным стоимостным критериям будет оптимальным, так как $F_{\min} = F_1\left(a_{1j}\right) = 5{,}666$. В примере 2.1 четыре локальных критерия не однородны, т.е. имеют различные единицы измерения. В этом случае требуется нормализация критериев. Под **нормализацией критериев** понимается такая последовательность процедур, с помощью которой все критерии приводятся к единому, безразмерному масштабу измерения. К настоящему времени разработано большое количество схем нормализации. Рассмотрим некоторые из них.

Определим максимум и минимум каждого локального критерия, т. е.

$$a_j^+ = \max a_{ij}, \quad i = 1,2,...,m; \tag{3}$$

$$a_j^- = \min a_{ij}, \quad i = 1,2,...,m \tag{4}$$

Выделим группу критериев $a_j, \quad j = 1,2,..,l$, которые максимизируются при решении задачи, и группу критериев $a_j, \quad j = l+1, l+2,...,n$, которые минимизируются при решении задачи.

Тогда в соответствии с принципом максимальной эффективности нормализованные критерии определяются из следующих соотношений:

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = 1,2,...,l; \tag{5}$$

$$\hat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = l+1,...,n; \tag{6}$$

или

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-}, \quad j = 1,2,...,l; \tag{7}$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-}, \quad j = l+1,...,n. \tag{8}$$

Оптимальным будет тот вариант (стратегия), который обеспечивает максимальное значение функции цели:

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{a}_{ij}, \quad i = 1,2,...,m. \tag{9}$$

В соответствии с принципом минимальной потери нормализованные критерии определяются из соотношений

$$\hat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \qquad j = 1,2,...,l; \tag{10}$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \qquad j = l+1,...,n; \tag{11}$$

или

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-}, \qquad j = 1,2,...,l; \tag{12}$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-}, \qquad j = l+1,...,n. \tag{13}$$

При этом оптимальным будет тот вариант (стратегия), который обеспечивает минимальное значение функции цели (9).

Пример 2.2.. Используя данные примера 2.1, определите оптимальную стратегию выбора оборудования из трех возможных ($m = 3$) с учетом четырех локальных критериев ($n = 4$).

Решение.

1.Определим max и min каждого локального критерия:

$$a_1^+ = 5; \quad a_2^+ = 7; \quad a_3^+ = 7; \quad a_4^+ = 6.$$

При решении задачи максимизируются первый (производительность) и четвертый (надежность) критерии, а минимизируются второй (стоимость оборудования) и третий (энергоемкость) критерии.

Исходя из принципа максимизации эффективности, нормализуем критерии:

$$\hat{a}_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_1^+}: \quad \hat{a}_{11} = \frac{a_{11}}{a_1^+} = \frac{5}{5} = 1; \quad \hat{a}_{21} = \frac{a_{21}}{a_1^+} = \frac{3}{5} = 0{,}6; \quad \hat{a}_{31} = \frac{a_{31}}{a_1^+} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

$$\hat{a}_{i4} = \frac{a_{i4}}{a_4^+}: \quad \hat{a}_{14} = \frac{a_{14}}{a_4^+} = \frac{6}{6} = 1; \quad \hat{a}_{24} = \frac{a_{24}}{a_4^+} = \frac{3}{6} = 0{,}5; \quad \hat{a}_{34} = \frac{a_{34}}{a_4^+} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$\hat{a}_{i2} = 1 - \frac{a_{12}}{a_2^+}: \quad \hat{a}_{21} = \frac{a_{12}}{a_2^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0; \quad \hat{a}_{22} = 1 - \frac{a_{22}}{a_2^+} = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}; \quad \hat{a}_{32} = 1 - \frac{a_{32}}{a_2^+} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}.$$

$$\hat{a}_{i3} = 1 - \frac{a_{i3}}{a_3^+}: \quad \hat{a}_{13} = 1 - \frac{a_{13}}{a_3^+} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}; \quad \hat{a}_{23} = 1 - \frac{a_{23}}{a_3^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0; \quad \hat{a}_{33} = \frac{a_{33}}{a_3^+} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$

Определим обобщенную функцию цели по каждому варианту:

$$F_1 = \lambda_1\hat{a}_{11} + \lambda_2\hat{a}_{12} + \lambda_3\hat{a}_{13} + \lambda_4\hat{a}_{14} = 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot \frac{2}{7} + 0{,}3 \cdot 1 \approx 0{,}729;$$

$$F_2 = \lambda_1\hat{a}_{21} + \lambda_2\hat{a}_{22} + \lambda_3\hat{a}_{23} + \lambda_4\hat{a}_{24} = 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot \frac{3}{7} + 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 \approx 0{,}476;$$

$$F_3 = \lambda_1\hat{a}_{31} + \lambda_2\hat{a}_{32} + \lambda_3\hat{a}_{33} + \lambda_4\hat{a}_{34} = 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot \frac{1}{7} + 0{,}1 \cdot \frac{5}{7} + 0{,}3 \cdot \frac{2}{3} \approx 0{,}603.$$

Оптимальным является первый вариант оборудования, так как $F_{\max} = F_1 = 0{,}729$.

Рассмотренный подход к решению многокритериальных задач зачастую применяется при решении экономических задач, связанных с оценкой качества промышленной продукции и оценкой уровня технического совершенства технических устройств и систем по нескольким показателям.

Другим возможным методом решения многокритериальных задач является **метод последовательных уступок.** В начале критерии ранжируются и нумеруются в порядке убывания важности. Абсолютное значение коэффициентов важности λ_j на этом этапе не играет никакой роли. Оптимизируется первый по важности критерий, и определяется его экстремальное значение a_1*. Затем назначается величина допустимого отклонения критерия от оптимального значения (уступка) Δa_1, и ищется экстремальное значение второго по важности критерия a_2 при условии, что отклонение первого от оптимального значения не превзойдет величины уступки. Затем назначается уступка для второго критерия, и задача оптимизируется по третьему критерию и т. д. Таким образом, многокритериальная задача оптимизации заменяется последовательностью однокритериальных задач. Решение каждой предыдущей задачи используется при решении последующих для формирования дополнительных условий, состоящих в ограничении на величину уступки.

§3. Принятие решений в условиях риска

Основными критериями оценки принимаемых решений в условиях риска являются:

-ожидаемое значение результата;

-ожидаемое значение результата в сочетании с минимизацией его дисперсии;

-известный предельный уровень результата;

-наиболее вероятное событие (исход) в будущем.

Критерий ожидаемого значения используется в случаях, когда требуется определить экстремальное значение (max или min) результативного показателя (прибыль, расходы, экономические потери и т. д.). Применение этого критерия рассмотрим на конкретном примере, связанном с постановкой задачи проведения ремонтно-профилактических воздействий автомобилей. Оптимальное количество ремонтных воздействий, определенное минимизацией суммарных затрат на заданной наработке L_k с учетом рисков пропуска отказов и выполнения лишних ТО, приравнивается к количеству ТО на указанном пробеге. Модель данной задачи является моделью вероятностного спроса на ремонты с мгновенным восстановлением. Здесь минимизируются суммарные издержки за пробег L_k, которые определяются затратами на плановый ремонт

S_p, профилактику S_{TO} и незапланированный аварийный ремонт $S_{Ш}$, рассматриваемый как штраф за пропуск отказа:

$$S = S_p + S_{TO} + S_{Ш} \to \min . \qquad (14)$$

Составляющие суммарных затрат формулы (9.14) зависят от количества ремонтно-профилактических операций за наработку L_K, определяемых по формуле

$$n = \frac{L_k}{L_{OT}}, \qquad (15)$$

где L_{OT} - наработка до отказа.

Наработка до отказа - величина случайная, определяемая плотностью распределения $f(L_{OT})$, $L_{OT} < L_k$. В силу случайности L_{OT} величина n также будет случайной с плотностью распределения

$$f(n) = \left| -\frac{L_k}{n^2} \right| \cdot f\left(\frac{L_k}{n}\right) . \qquad (16)$$

Используя $f(n)$ как весовую функцию и выражая составляющие суммарных затрат через соответствующие стоимости из (14), получим

$$S = C_p \cdot n_p + \int_0^{n_p} C_{TO}(n_p - n) f(n) dn + \int_{n_p}^{\infty} C_{Ш}(n - n_p) f(n) dn \to \min, \qquad (17)$$

где

C_p - средняя стоимость предупредительного (планового) ремонта;

C_{TO} - средняя стоимость профилактики (или убыток от недоиспользования ресурса замененных при ТО деталей);

$C_{Ш}$ - ущерб (штраф) от пропуска отказа (или стоимость устранения аварийного отказа). Очевидно, $C_{Ш} > C_{TO}$.

Интеграл (16) в пределах $[0, n_p]$ соответствует риску выполнения лишних ТО (избыточность затрат на ТО), а интеграл в пределах $[n_p, \infty)$ - риску пропуска аварийных отказов (избыточность затрат на ТР по потребности). Из уравнения (17) находим оптимальное количество ремонтов n_p на пробеге L_k (обычно L_k - пробег до КР). Далее, заменяя необходимые ремонты обслуживаниями, при которых выполняется комплекс операций по предупреждению отказов, включая предупредительные замены деталей, получим

$$L_{TO} = \frac{L_k}{n_P}. \qquad (18)$$

Пример 2.3. Определить оптимальную периодичность ТО (у. е.) при $L_k = 200$ тыс. км, $C_{Ш} = 69$, $C_p = 24$, $C_{TO} = 15$, если наработки до отказа имеют нормальное распределение с параметрами $\overline{L}_{OT} = 20$ тыс. км и $\sigma_L = 5$ тыс. км.

$$f(L_{OT}) = \frac{1}{\sigma_L \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{L_{OT} - \overline{L}_{OT}}{\sigma_L}\right)^2} \qquad (19)$$

Решение. Выполнив преобразование распределения (19) по формуле (15), получим $(n \geq 1)$:

$$f(n) = \frac{1}{n^2 \sigma_L \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{L_l/n - \bar{L}_{OT}}{\sigma_L}\right)^2} . \qquad (20)$$

После подстановки выражения (20) в (17) получим задачу оптимизации, для решения которой воспользуемся математическим пакетом EUREKA.

Решая задачу, получим оптимальную периодичность $L_{TO} = 15{,}3$ тыс.км при $n_p = 13{,}08$, которая обеспечивает минимальные суммарные издержки S.

Критерий ожидаемого значения позволяет получить достоверные оценки в случае, когда одно и то же решение приходится принимать достаточно большое число раз, так как замена математического ожидания выборочными данными правомерна лишь при большом объеме выборки.

Если необходимость в принятии решения встречается редко, то выборочное значение может значительно отличаться от математического ожидания, а применения критерия ожидаемых значений может приводить к ошибочным результатам. В таких случаях рекомендуется применять следующий вид:

$$\begin{aligned} M(X) + K \cdot D(X) &\to \min \\ M(X) + K \cdot D(X) &\to \max \end{aligned} \qquad (21)$$

где

X - случайная величина (например, суммарные издержки);

$D(X)$- дисперсия этой случайной величины;

K - заданная постоянная.

Постоянную K иногда интерпретируют как уровень несклонности к риску. Считается, что K определяет «степень важности» дисперсии $D(X)$ по отношению к $M(X)$. Например, предприниматель, особенно остро реагирующий на большие отрицательные отклонения прибыли вниз от $M(X)$, может выбрать K много больше единицы. Это придает больший вес дисперсии и приводит к решению, уменьшающему большие потери прибыли.

Критерий предельного уровня не позволяет получить оптимальное решение, найти максимум прибыли и минимум расходов. Этот критерий дает возможность определить приемлемый (допустимый) способ действий. Например, транспортная фирма распродает автомобили, бывшие в эксплуатации. По каждой модели автомобиля определенного возраста определяется лимитная цена, т. е. минимально допустимая цена продажи автомобиля. Продажа автомобилей по цене ниже лимитной приведет к убыточной работе транспортной фирмы. Это и есть предельный уровень, позволяющий транспортной фирме согласиться на первое же превышающее этот уровень предложение цены. Такой критерий не определяет оптимальное решение, поскольку одно из последующих предложений может оказаться более выгодным, чем принятое.

Одно из преимуществ критерия предельного уровня заключается в том, что для него нет необходимости задавать в явном виде плотность распределения случайных величин. В нашем примере случайная величина - рыночная цена автомобиля. Транспортная фирма располагает информацией о распределении рыночных цен на подобные автомобили в неявном виде. Иначе при полном отсутствии информации о распределении рыночных цен фирма установила бы предельные цены на автомобили очень высокими или, наоборот, очень низкими.

Критерий наиболее вероятного события (исхода) основан на преобразовании случайной ситуации в детерминированную путем замены случайной величины единственным значением, имеющим наибольшую вероятность реализации.

§4. Принятие решений в условиях неопределенности

Неопределенность является характеристикой внешней среды (природы), в которой принимается управленческое решение о развитии (или функционировании) экономического объекта. Здесь будем рассматривать неопределенность «природы», вызванную отсутствием, недостатком информации о действительных условиях (факторах), при которых развивается объект управления. Внешняя среда («природа») может находиться в одном из множества возможных состояний. Это множество может быть конечным и бесконечным. Будем считать, что множество состояний конечно или по крайней мере количество состояний можно пронумеровать.

Пусть S_i - состояние «природы», при этом $i = 1,2,...,n$, где n-число возможных состояний. Все возможные состояния известны, не известно только, какое состояние будет иметь место в условиях, когда планируется реализация принимаемого управленческого решения. Будем считать, что множество управленческих решений (планов) R_j также конечно и равно m. Реализация R_j плана в условиях, когда «природа» находится в S_i состоянии, приводит к определенному результату, который можно оценить, введя количественную меру. В качестве этой меры могут служить выигрыши от принимаемого решения (плана); потери от принимаемого решения, а также полезность, риск и другие количественные критерии.

Данные, необходимые для принятия решения в условиях неопределенности, обычно задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям (управленческим решениям) R_j, а столбцы - возможным состояниям «природы» S_i.

Допустим, каждому R_j-му действию и каждому возможному S_i-му состоянию «природы» соответствует результат (исход), определяющий результат (выигрыш, полезность) при выборе j-го действия и реализации i-го состояния, - V_{ji}.

	S_1	S_2	$\dots$	S_i	$\dots$	S_n

R_1	V_{11}	V_{12}		V_{1i}		V_{1n}
R_2	V_{21}	V_{22}		V_{2i}		V_{2n}
…						
R_j	V_{j1}	V_{j2}		V_{ji}		V_{jn}
…						
R_m	V_{m1}	V_{m2}		V_{mi}		V_{mn}

(22)

Следовательно, математическая модель задачи принятия решений определяется множеством состояний $\{S_i\}$, множеством планов (стратегий) $\{R_j\}$ и матрицей возможных результатов (V_{ji}). В качестве результатов в отдельных задачах рассматривается матрица рисков (r_{ji})

Риск - мера несоответствия между разными возможными результатами принятия определенных стратегий (действий).

Элементы матрицы рисков (r_{ji}) связаны с элементами матрицы полезностей (выигрышей) следующим соотношением:

$$r_{ji} = V_i - V_{ji}, \tag{23}$$

где $V_i = \max\limits_j V_{ji}$ - максимальный элемент в столбце i матрицы полезностей.

Если матрица возможных результатов (V_{ji}) представляет собой матрицу потерь (затрат), то элементы матрицы рисков (r_{ji}) следует определять по формуле

$$r_{ji} = V_{ji} - V_i, \tag{24}$$

где $V_i = \min\limits_j V_{ji}$ - минимальный элемент в столбце i матрицы потерь (результатов).

Таким образом, риск – это разность между результатом, который можно получить, если знать действительное состояние «природы», и результатом, который будет получен при j-й стратегии.

Матрица рисков дает более наглядную картину неопределенной ситуации, чем матрица выигрышей (полезностей).

Непосредственный анализ матриц выигрышей (V_{ji}) или рисков (r_{ji}) не позволяет в общем случае принять решение по выбору оптимальной стратегии (плана), за исключением тривиального случая, когда выигрыши при одной стратегии выше, чем при любой другой для каждого состояния «природы» (элементы матрицы выигрышей в некоторой строке больше, чем в любой из других). Другими словами, имеется в наличие «доминирующая» стратегия.

Для принятия решения в условиях неопределенности используется ряд критериев. Рассмотрим некоторые из них. Это критерий Лапласа, критерий Вальда, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица.

4.1.Критерий Лапласа

Этот критерий опирается на «принцип недостаточного основания» Лапласа, согласно которому все состояние «природы»

S_i, $i = 1,2,...,n$ полагаются равновероятными. В соответствии с этим принципом каждому состоянию S_i ставится вероятность q_i, определяемая по формуле

$$q_i = \frac{1}{n} . \qquad (25)$$

При этом исходной может рассматриваться принятие решения в условиях риска, когда выбирается действия R_j, дающее наибольший ожидаемый выигрыш. Для принятия решения для каждого действия R_j вычисляют среднее арифметическое значение выигрыша:

$$M_j(R) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_{ji} . \qquad (26)$$

Среди $M_j(R)$ выбирают максимальное значение, которое будет соответствовать оптимальной стратегии R_j.

Другими словами, находится действие R_j*, соответствующее

$$\max_{R_j}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_{ji}\right\}. \qquad (27)$$

Если в исходной задаче матрица возможных результатов представлена матрицей рисков (r_{ji}), то критерий Лапласа принимает следующий вид:

$$\min_{R_j}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{ji}\right\}. \qquad (28)$$

Пример 4.1. Одно из транспортных предприятий должно определить уровень своих провозных возможностей так, чтобы удовлетворить спрос клиентов на транспортные услуги на планируемый период. Спрос на транспортные услуги не известен, но ожидается (прогнозируется), что он может принять одно из четырех значений: 10, 15, 20 или 25 тыс. т. Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень провозных возможностей транспортного предприятия (с точки зрения возможных затрат). Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам либо из-за превышения провозных возможностей над спросом (из-за простоя подвижного состава), либо из-за неполного удовлетворения спроса на транспортные услуги. Ниже приводится таблица, определяющая возможные прогнозируемые затраты на развитие провозных возможностей:

Варианты провозных возможностей транспортного предприятия	Варианты спроса на транспортные услуги			
	1	2	3	4
1	6	12	20	24
2	9	7	9	28
3	23	18	15	19
4	27	24	21	15

Необходимо выбрать оптимальную стратегию.

Решение. Согласно условию задачи, имеются четыре варианта спроса на транспортные услуги, что равнозначно наличию четырех состояний «природы»: $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$. Известны также четыре стратегии развития провозных возможностей транспортного предприятия: $R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4$. Затраты на развитие провозных возможностей при каждой паре S_i и R_j заданы следующей матрицей:

$$V = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 20 & 24 \\ 9 & 7 & 9 & 28 \\ 23 & 18 & 15 & 19 \\ 27 & 24 & 21 & 15 \end{pmatrix}.$$

Принцип Лапласа предполагает, что $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ равновероятны. Следовательно, $p_i = P\{S = S_i\} = \frac{1}{n} = \frac{1}{4} = 0{,}25; \quad i = 1{,}2{,}3{,}4$ и ожидаемые затраты при различных действиях $R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4$ составляют:

$$W\{R_1\} = 0{,}25 \cdot (6 + 12 + 20 + 24) = 15{,}5;$$
$$W\{R_2\} = 0{,}25 \cdot (9 + 7 + 9 + 28) - 13{,}25;$$
$$W\{R_3\} = 0{,}25 \cdot (23 + 18 + 15 + 19) = 18{,}75;$$
$$W\{R_4\} = 0{,}25 \cdot (27 + 24 + 21 + 15) = 21{,}75.$$

Таким образом, наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с критерием Лапласа будет R_2

4.2. Критерий Вальда (минимаксный или максиминный критерий) Применение данного критерия не требует знания вероятностей состояний S_i. Этот критерий опирается на принцип наибольшей осторожности, поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_j.

Если в исходной матрице (по условию задачи) результат V_{ji} представляет потери лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется минимаксный критерий. Для определения оптимальной стратегии R_j необходимо в каждой строке матрицы результатов найти наибольший элемент $\max_i\{V_{ji}\}$, а затем выбирается действие R_j, (строка j), которому будет соответствовать наименьший элемент из этих наибольших элементов, т. е. действие, определяющее результат, равный

$$W = \min_j \max_i \{V_{ji}\}. \quad (29)$$

Если в исходной матрице по условию задачи результат V_{ji} представляет выигрыш (полезность) лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется максиминный критерий.

Для определения оптимальной стратегии R_j в каждой строке матрицы результатов находят наименьший элемент $\min_j\{V_{ji}\}$, а затем выбирается действие

R_j (строка j), которому будут соответствовать наибольшие элементы из этих наименьших элементов, т. е. действие, определяющее результат, равный

$$W = \max_j \min_i \{V_{ji}\}. \tag{30}$$

Пример 4.2. Рассмотрим пример 4.1. Так как V_{ji} в этом примере представляет потери (затраты) применяем минимаксный критерий. Необходимые результаты вычисления приведены в следующей таблице:

S_i / R_j	Затраты, д.е. (V_{ji})				$\max\{V_{ji}\}$	$W = \min\max\{V_{ji}\}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	6	12	20	24	24	-
R_2	9	7	9	28	28	-
R_3	23	18	15	19	19	23
R_4	27	24	21	15	15	-

Таким образом, наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с минимаксным критерием «лучшим из худших» будет третья, т. е. R_3.

Минимаксный критерий Вальда иногда приводит к нелогичным выводам из-за своей чрезмерной «пессимистичности». «Пессимистичность» этого критерия исправляет критерий Сэвиджа.

4.3.Критерий Сэвиджа использует матрицу рисков (r_{ji}). Элементы данной матрицы можно определить по формулам (23), (24), которые перепишем в следующем виде:

$$\boldsymbol{r_{ji}} = \begin{cases} \max\limits_j\{\boldsymbol{V_{ji}}\} - \boldsymbol{V_{ji}}, & \boldsymbol{\textit{если}} \quad \boldsymbol{V} - \boldsymbol{\textit{выигрыш}} \\ \boldsymbol{V_{ji}} - \min\limits_j\{\boldsymbol{V_{ji}}\}, & \boldsymbol{\textit{если}} \quad \boldsymbol{\textit{потери}}. \end{cases} \tag{31}$$

Это означает, что r_{ji} есть разность между наилучшим значением в столбце i и значениями V_{ji} при том же i. Отметим, что независимо от того, является ли V_{ji} доходом (выигрышем) или потерями (затратами), r_{ji} в обоих случаях определяет величину потерь лица, принимающего решение. Следовательно, можно применять к r_{ji} только минимаксный критерий. Критерий Сэвиджа рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию R_j, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).

Пример 4.3. Рассмотрим пример 4.1. Заданная матрица определяет потери (затраты). По формуле (31) вычислим элементы матрицы рисков (r_{ji}):

$$\left(r_{ji}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 11 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 13 \\ 17 & 11 & 6 & 4 \\ 21 & 17 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Полученные результаты вычислений с использованием критерия минимального риска Сэвиджа оформим в следующей таблице:

S_i / R_j	Величина риска, д.е. (V_{ji})				$\max\{r_{ji}\}$	$W=\min\max\{r_{ji}\}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	0	5	11	9	11	11
R_2	3	0	0	13	13	-
R_3	17	11	6	4	17	-
R_4	21	17	12	0	21	-

Введение величины риска r_{ji} привело к выбору первой стратегии R_1, обеспечивающей наименьшие потери (затраты) в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).

Применение критерия Сэвиджа позволяет любыми путями избежать большого риска при выборе стратегии, а значит, избежать большего проигрыша (потерь).

4.4. Критерий Гурвица основан на следующих двух предположениях: «природа» может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью ($1-\alpha$) и в самом выгодном состоянии с вероятностью α, где α - коэффициент доверия. Если результат V_{ji} - прибыль, полезность, доход и т. п., то критерий Гурвица записывается так:

$$W=\max_j\left\lfloor\alpha\max_i V_{ji}+(1-\alpha)\min_i V_{ji}\right\rfloor. \tag{32}$$

Когда V_{ji} представляет затраты (потери), то выбирают действие,

$$W_{\min}=\min_j\left\lfloor\alpha\min_i V_{ji}+(1-\alpha)\max_i V_{ji}\right\rfloor. \tag{33}$$

Если $\alpha=0$, получим пессимистический критерий Вальда.

Если $\alpha=1$, то приходим к решающему правилу вида $\max_j\min_i V_{ji}$ или к так называемой стратегии «здорового оптимиста», т. е. критерий слишком оптимистичный.

Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем взвешивания обоих способов поведения соответствующими весами ($1-\alpha$) и α, где $0\le\alpha\le1$. Значение α от 0 до 1 может определяться в зависимости от склонности лица, принимающего решение, к пессимизму или к оптимизму. При отсутствии ярко выраженной склонности $\alpha=0{,}5$ представляется наиболее разумной.

Пример 4.4. Критерий Гурвица используем в примере 4.1. Положим $\alpha = 0{,}5$. Результаты необходимых вычислений приведены ниже:

W_j	$\min\limits_i V_{ji}$	$\max\limits_i V_{ji}$	$\alpha \min\limits_i V_{ji} + (1-\alpha)\max\limits_i V_{ji}$	$\min\limits_j W_j$
W_1	6	24	15	15
W_2	7	28	17,5	-
W_3	15	23	19	-
W_4	15	27	21	-

Оптимальное решение заключается в выборе W.

Таким образом, в примере предстоит сделать выбор, какое из возможных решений предпочтительнее:

по критерию Лапласа — выбор стратегии R_2;

по критерию Вальда — выбор стратегии R_3;

по критерию Сэвиджа — выбор стратегии R_1;

по критерию Гурвица при $\alpha = 0{,}5$-выбор стратегии R_1, а если лицо, принимающее решение, — пессимист ($\alpha = 0$), то выбор стратегии R_3.

Это определяется выбором соответствующего критерия (Лапласа, Вальда, Сэвиджа или Гурвица).

Выбор критерия принятия решений в условиях неопределенности является наиболее сложным и ответственным этапом в исследовании операций. При этом не существует каких-либо общих советов или рекомендаций. Выбор критерия должно производить лицо, принимающее решение, с учетом конкретной специфики решаемой задачи и в соответствии со своими целями, а также опираясь на прошлый опыт и собственную интуицию.

В частности, если даже минимальный риск недопустим, то следует применять критерий Вальда. Если, наоборот, определенный риск вполне приемлем и лицо, принимающее решение намерено вложить в некоторое предприятие столько средств, чтобы потом оно не сожалело, что вложено слишком мало, то выбирают критерий Сэвиджа.

§5. Теория игр

В отличие от рассмотренных выше задач принятия решений в условиях определенности, риска и неопределенности, в которых внешняя среда (природа) предполагалась пассивной, в конфликтных ситуациях имеются противодействующие стороны, интересы которых противоположны. При конфликтных ситуациях решения принимаются в условиях неопределенности двумя и более разумными противниками, каждый из которых стремится оптимизировать свои решения за счет других. Теория, занимающаяся принятием решений в условиях конфликтных ситуаций, называется теорией игр. Математическая модель конфликтной ситуации представляет собой игру.

Игра - это совокупность правил, описывающих сущность конфликтной ситуации. Эти правила устанавливают:

-выбор образа действия игроков на каждом этапе игры;

-информацию, которой обладает каждый игрок при осуществлении таких выборов;

-плату для каждого игрока после завершения любого этапа игры.

Игру можно определить следующим образом:

-имеются n конфликтующих сторон (игроков), принимающих решения, интересы которых не совпадают;

-сформулированы правила выбора допустимых стратегий, известные игрокам;

-определен набор возможных конечных состояний игры (например, выигрыш, ничья, проигрыш);

-всем игрокам (участникам игры) заранее известны платежи, соответствующие каждому возможному конечному состоянию. Платежи задаются в виде матрицы $\overline{A} = (a_{ij})$.

В зависимости от числа конфликтующих сторон игры делятся на парные (с двумя игроками) и множественные (имеющие не менее трех игроков). Каждый игрок имеет некоторое множество (конечное или бесконечное) возможных выборов, т. е. стратегий.

Стратегией игры называется совокупность правил, определяющих поведение игрока от начала игры до ее завершения. Стратегии каждого игрока определяют результаты или платежи в игре. Игра называется игрой с нулевой суммой, если проигрыш одного игрока равен выигрышу другого, в противном случае она называется игрой с ненулевой суммой.

В этом параграфе рассматриваются только игры двух лиц с нулевой суммой. Задание стратегий (А и В) двух игроков в парной игре полностью определяет ее исход, т. е. выигрыш одного или проигрыш другого. Игра называется конечной, если у каждого игрока имеется конечное число стратегий. Результаты конечной парной игры с нулевой суммой можно задавать матрицей, строки и столбцы которой соответствуют различным стратегиям, а ее элементы - выигрышам одной стороны (равные проигрышам другой). Эта матрица называется платежной матрицей или матрицей игры.

Если первый игрок имеет m стратегий, а второй - n стратегий, то говорят, что мы имеем дело с игрой $m \times n$. Рассмотрим игру $m \times n$. Пусть заданы множество стратегий: для первого игрока $\{A_i\}$, для второго игрока B_j, платежная $m \times n$ матрица $\overline{A} = (a_{ij})$, где a_{ij} - выигрыш первого игрока или проигрыш второго игрока при выборе ими стратегий $\boldsymbol{A}_i$ и $\boldsymbol{B}_j$ соответственно. Каждый из игроков выбирает однозначно с вероятностью 1 некоторую стратегию, т.е. пользуется при выборе решения чистой стратегией. При этом решение игры будет в чистых стратегиях. Поскольку интересы игроков противоположны, то первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, а второй игрок, наоборот, минимизировать свой проигрыш.

Решение игры состоит в определении наилучшей стратегии каждым игроком. Выбор наилучшей стратегии одним игроком проводится при полном отсутствии информации о принимаемом решении вторым игроком. Следует отметить, что и первый, и второй игрок являются разумными противниками, которые находятся в состоянии конфликта. Поэтому для решения игры двух лиц с нулевой суммой используется очень «пессимистичный» критерий, так называемый критерий минимакса-максимина. Этот критерий рассмотрен в §4. Основное отличие заключается в том, что ранее «природа» не рассматривалась как активный противник, тогда как в теории игр каждый игрок действует разумно и, следовательно, пытается активно помешать своему противнику. Так, если первый игрок применяет стратегию $\{A_i\}$, то второй будет стремиться к тому, чтобы выбором соответствующей стратегии B_j свести выигрыш первого игрока к минимуму, что равнозначно сведению своего проигрыша к минимуму. Величина этого минимума

$$\alpha_i = \min_j \boldsymbol{a_{ij}}, \qquad \boldsymbol{i} = 1,2,...,\boldsymbol{m}. \tag{34}$$

Первый игрок (при любых ответах противника) будет стремиться найти такую стратегию, при которой а, обращается в максимум:

$$\alpha = \max_j \alpha_i = \max_i \min_j \boldsymbol{a}_{ij}. \tag{35}$$

Величина α называется нижней ценой игры. Ей соответствует максиминная стратегия, придерживаясь которой первый игрок при любых стратегиях противника обеспечит себе выигрыш, не меньший α. Другими словами, нижняя цена игры является гарантированным выигрышем первого игрока при любых стратегиях второго игрока.

Аналогично определим по каждому столбцу матрицы $\beta_j = \max_i a_{ij}, \quad j = 1,2,...,n$, найдем минимальное значение :

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}. \tag{36}$$

Величина β называется верхней ценой игры. Ей соответствует минимаксная стратегия второго игрока. Величина β представляет собой гарантированный проигрыш второго игрока при любой стратегии первого игрока.

Пример 5.1. Дана платежная матрица 3×4, которая определяет выигрыши игрока А. Вычислить нижнюю и верхнюю цены заданной игры.

$$\overline{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 11 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 20 \\ 6 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Решение. Представим нашу игру в виде следующей таблицы:

Стратегии первого игрока	Стратегии второго игрока				Значение α_i	α
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	10	4	11	7	4	-
A_2	7	6	8	20	6	6
A_3	6	2	1	11	1	-
Значение β_j	10	6	11	20	-	-
β	-	6	-	-	-	-

Если игрок А выбирает первую стратегию, он может получить выигрыш в размере 10, 4, 1 или 7 д. е. в зависимости от выбранной стратегии игроком В. При этом выигрыш игрока будет не меньше $\alpha_i = \min\{10{,}4{,}11{,}7\} = 4$ д. е. независимо от поведения игрока В. Аналогично при выборе игроком А второй стратегии гарантированный выигрыш $\alpha_2 = \min\{7{,}6{,}8{,}20\} = 6$ д.е. При выборе игроком А третьей стратегии выигрыш $\alpha_3 = \min\{6{,}23{,}1{,}11\} = 1$ д. е.

Таким образом, минимальные значения α_i, $i = 1{,}2{,}3$ определяют минимально гарантированный выигрыш для игрока А, если он выбирает соответствующую стратегию i. Величина $\max\limits_i \alpha_i = \max\{4;6;1\} = 6$ д.е. будет гарантированным выигрышем игрока А при любых стратегиях игрока В. Выбранная игроком А вторая стратегия называется максиминной стратегией, а соответствующее ее значение выигрыша $\alpha_2 = 6$ д. е. будет нижней ценой игры.

Второй игрок стремится минимизировать свой проигрыш. Выбрав первую стратегию β_1 игрок В может проиграть не более чем $\beta_1 = \max\{10;7;6\} = 10$ д. е. независимо от выбора стратегии игроком А. Аналогично рассуждая, получим следующие результаты (д. е.):

$$\beta_2 = \max\{4;6;2\} = 6; \quad \beta_3 = \{11;8;1\} = 11; \quad \beta_4 = \max\{7;20;11\} = 20 .$$

Игрок В выбирает стратегию β_2, которая минимизирует его максимальные проигрыши:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min\{10;6;11;20\} = 6 \text{ д.е.}$$

Величина $\beta = 6$ д. е. будет гарантированным проигрышем игрока В при любых стратегиях игрока А. Выбранная игроком В вторая стратегия называется минимаксной стратегией, а соответствующее ее значение проигрыша $\beta_2 = 6$ д. е. будет верхней ценой игры.

Следует отметить, что для любой матрицы $\overline{A} = (a_{ij})$ выполняется неравенство

$$\beta \geq \alpha . \tag{37}$$

Если $\beta = \alpha$, т. е. верхняя цена равна нижней цене игры, то соответствующие чистые стратегии называются оптимальными, а про игру говорят, что она имеет седловую точку. Седловая точка является минимальным элементом соответствующей строки и максимальным элементом соответствующего столбца. Эта точка есть точка равновесия игры, определяющая однозначно оптимальные стратегии. Оптимальность здесь означает, что ни один игрок не стремится изменить свою стратегию, так как его противник может на это ответить выбором другой стратегии, дающей худший для первого игрока результат.

Величина $C = \beta = \alpha$ называется ценой игры. Она определяет средний выигрыш игрока А, средний проигрыш игрока В при использовании ими оптимальных стратегий. В нашем примере цена игры С = 6 д. е., оптимальная пара стратегий - A_2 и B_2.

Если в платежной матрице $\overline{A}$ все элементы строки $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ не меньше соответствующих элементов строки $A_k = (a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kn})$ ..., й£,,), а по крайней мере один строго больше, то строка A_i, называется доминирующей, а строка A_k - доминируемой.

Аналогичны понятия «доминирующий столбец» и «доминируемая строка».

Первому игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминируемые строки; второму игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминирующие столбцы. Поэтому при решении игры можно уменьшить размеры платежной матрицы путем удаления из нее доминирующих столбцов и доминируемых строк.

Пример 5.2. Для игры с платежной матрицей

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

найдите стратегии игроков и цену игры.

Решение. Элемент $a_{32} = -1$ является наименьшим в третьей строке и наибольшим во втором столбце, т. е. он является седловой точкой. Поэтому цена игры $C = -1$, а оптимальные стратегии игроков; первого - A_3, а второго - B_2.

Используя понятия доминируемых строк и доминирующих столбцов, задачу можно решить следующим образом.

В матрице А третья строка доминирует над второй, поэтому вторую можно изъять из платежной матрицы. В результате получится матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_1 первый и третий столбцы доминируют над вторым, следовательно, их можно изъять. В результате платежная матрица принимает вид

$$A_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_2 вторая строка доминирует. После вычеркивания получится матрица A_3, состоящая из одного элемента:

$A_3 = (-1)$.

Элемент матрицы A_3 и определяет решение нашей задачи.

Отдельные игры могут не иметь седловых точек, т. е. у каждого игрока не существует единственной, наиболее надежной стратегии. В этом случае используют смешанную стратегию. Смешанная стратегия состоит в том, что в ходе игры происходит случайный выбор стратегии из некоторого множества смешанных стратегий и для каждой смешанной стратегии указывается вероятность ее выбора. Смешанная стратегия для игрока А представляет собой

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_m \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где p_i - вероятность выбора i-й стратегии игроком и удовлетворяет следующим условиям:

$$p_i \geq 0, \quad i = 1,2,...,m; \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \tag{39}$$

Аналогично смешанная стратегия игрока В представляет собой вектор

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}, \tag{40}$$

где q_j - вероятность выбора j - й стратегии игроком В – удовлетворяет следующим условиям;

$$q_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,n; \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{41}$$

Платежная матрица игры имеет следующий вид:

B / A	q_1	q_2	$\dots$	q_n
p_1 p_2 ... p_m	a_{11} a_{21} ... a_{m1}	a_{12} a_{22} ... a_{m2}	... ...	a_{1n} a_{2n} ... a_{mn}

Игрок А выбирает стратегию p_i так, чтобы максимизировать наименьший ожидаемый выигрыш по столбцам платежной матрицы, тогда как игрок В выбирает стратегию q_j с целью минимизировать наибольший ожидаемый проигрыш по строкам. Математически критерий минимакса при смешанных стратегиях может быть описан следующим образом. Игрок А выбирает стратегию p_i дающую

$$\max_{p_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\cdot p_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\cdot p_i, ..., \sum_{i=1}^{m} a_{in}\cdot p_i\right)\right\} . \qquad (43)$$

Игрок В выбирает стратегию q_j дающую

$$\min_{q_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j1}\cdot q_j, \sum_{j=1}^{n} a_{j2}\cdot q_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\cdot q_j\right)\right\} . \qquad (44)$$

Когда стратегии p_i^0 и q_j^0 оптимальны, то выполняется строгое равенство между максиминным ожидаемым выигрышем и минимаксным проигрышем, а результирующее значение равно оптимальному (ожидаемому) значению игры.

Этот вывод следует из теоремы фон Неймана о минимаксе. Теорема утверждает, что выражения (43), (44) имеют одно и то же значение $M(P_0,Q_0)$, называемое ценой игры. Если p_i^0 и q_j^0- оптимальные решения для обоих игроков, каждому элементу платежной матрицы a_{ij} соответствует вероятность (a_{ij}). Следовательно, оптимальное ожидаемое значение игры

$$M(P_0,Q_0)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot p_i^0\cdot q_j^0 . \qquad (45)$$

Цена игры заключена между нижней и верхней ценами, т. е.

$$\alpha \le M(P_0,Q_0) \le \beta .$$

Решить конечную игру — это значит нужно найти векторы P и Q {оптимальные стратегии), удовлетворяющие теореме о минимаксе, а следовательно, получить величину ожидаемого платежа $M(P_0,Q_0)$ цену игры.

Свойство оптимальности означает, что любое отступление одного из игроков от оптимальной стратегии (при условии, что второй игрок продолжает придерживаться своей оптимальной стратегии) при многократном повторении игры может только уменьшить его средний выигрыш (увеличить средний проигрыш).

Решение игры обладает одним важным свойством: если игрок А использует свою оптимальную стратегию, а игрок В смешивает свои стратегии в любых пропорциях, то средний выигрыш игрока А не уменьшается. Стратегии, которые смешиваются для получения оптимальной стратегии, будем называть полезными. Доказано, что у игры $m\times n$ существует такое оптимальное решение, что число полезных стратегий с каждой стороны не превосходит минимального из чисел m и n. Известно несколько методов нахождения оптимальных стратегий в играх двух лиц с нулевой суммой. Рассмотрим один из методов — метод линейного программирования для нахождения решения игр.

Пусть игра $m \times n$ не имеет оптимального решения непосредственно в чистых стратегиях, т. е. отсутствует седловая точка $(\alpha \neq \beta)$. Оптимальное решение необходимо искать в области смешанных стратегий. Предположим, что все m стратегий игрока А полезные. Определим вероятности их применения в смешанной оптимальной стратегии. Обозначим эти вероятности через p_i, $i = 1,2,...,m$, а цену игры - через M. Оптимальная смешанная стратегия игрока А определяется из условия (43):

$$\max_{p_i} \left\{ \min \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} \cdot p_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \cdot p_i, ..., \sum_{i=1}^{m} a_{in} \cdot p_i \right) \right\}.$$

Пусть

$$M = \min \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} \cdot p_i, \sum_{i=1}^{m} a_{2i} \cdot p_i, \sum_{i=1}^{m} a_{in} \cdot p_i \right). \tag{46}$$

Поскольку при оптимальной стратегии средний выигрыш не меньше M при любой стратегии противника, то справедлива система n неравенств:

$$\begin{aligned} &a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \geq M, \\ &a_{12}p_1 + a_{22.}p_2 + ... + a_{m2}p_m \geq M, \\ &.. \\ &a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \geq M, \end{aligned} \tag{47}$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq M, \qquad j = 1,2,...,n. \tag{48}$$

Тогда задача отыскания оптимальной смешанной стратегии игрока А может быть сформулирована в виде задачи линейного программирования.

Для этого необходимо максимизировать $Z = M$ при ограничениях

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq M, \qquad j = 1,2,...,n; \\ &\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \qquad p_i \geq 0, \quad i = 1,2,...,m. \end{aligned} \tag{49}$$

Введем новые неизвестные:

$$x_1 = \frac{p_1}{M}, \quad x_2 = \frac{p_2}{M}, ..., \quad x_m = \frac{p_m}{M}.$$

Чтобы исключить возможность деления на нуль, увеличим цену игры на положительное число C. Для этого достаточно ко всем элементам матрицы (a_{ij}) прибавить одно и то же положительное число C, при этом все элементы a_{ij} сделать положительными. Следует отметить, что эта операция не меняет искомых оптимальных стратегий.

Поскольку $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, то $\sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{M}$.

Разделим левую и правую части неравенств (48) и (49) на M, получим:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1, \\ &a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq 1, \\ &.. \\ &a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq 1, \end{aligned} \qquad (50)$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{M}. \qquad (51)$$

В силу того, что $\max M = \min\frac{1}{M} = \min\{x_1 + x_2 + ... + x_m\}$ задача принимает вид

$$Z = x_1 + x_2 + ... + x_m \to \min \qquad (52)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq 1, \quad j = 1,2,...,n. \qquad (53)$$

Для игрока В оптимальная стратегия определяется из условия (44):

$$\min_{q_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j1}\cdot q_j, \sum_{j=1}^{n} a_{j2}\cdot q_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\cdot q_j\right)\right\}$$

при ограничениях

$$q_1 + q_2 + ... + q_n = 1. \qquad (54)$$

Эта задача записывается как симметрическая двойственная задача линейного программирования к задаче (52)-(53):

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + ... + \boldsymbol{y}_n \to \max \qquad (55)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{y}_j \leq 1, \\ &\boldsymbol{y}_j \geq 0, \quad \boldsymbol{j} = 1,2,...,\boldsymbol{n}, \end{aligned} \qquad (56)$$

где $\boldsymbol{G} = \frac{1}{\boldsymbol{M}}, \quad \boldsymbol{y}_j = \frac{\boldsymbol{q}_j}{\boldsymbol{M}}, \quad \boldsymbol{j} = 1,2,...,\boldsymbol{n}.$

Задача игроков А и В решают обычным симплексным методом.

Пример 5.3. Рассмотрим игру 3×4:

Стратегии первого игрока	Стратегии второго игрока				Значение α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	2	-5	-5
A_2	-2	5	-1	4	-2
A_3	-3	2	-3	6	-3
Значение β_j	4	5	2	6	-

Нижняя цена игры равна максимину $\alpha = -2$, верхняя цена игры равна минимаксу $\beta = 2$. Так как $\alpha \neq \beta$, то седловая точка игры отсутствует, задача должна решатся в смешанных стратегиях.

Нижняя цена игры – число отрицательное $(\alpha = -2)$, поэтому, возможно, значение игры M не будет положительным. Число C,которое необходимо прибавить ко всем элементам матрицы принимает вид

Стратегии первого игрока	Стратегии второго игрока			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	9	8	1
A_2	4	11	5	10
A_3	3	8	3	12

Задача игрока В записывается в форме задачи линейного программирования

$$\begin{aligned}
&G = y_1 + y_2 + y_3 + y_\$ \to \max \\
&10y_1 + 9y_2 + 8y_3 + y_4 \leq 1, \\
&4y_1 + 11y_2 + 5y_3 + 10y_4 \leq 1, \\
&3y_1 + 8y_2 + 3y_3 + 12y_4 \leq 1, \\
&y_j \geq 0; \quad j = 1,2,3,4.
\end{aligned}$$

Решая задачу симплексным методом, получим:

$$Y_{opt} = (0; \quad 0; \quad 0{,}12; \quad 0{,}04), \quad G_{\max} = 0{,}16.$$

Таким образом, решением исходной задачи будет следующее:

$$M = \frac{1}{G} - C = \frac{1}{0{,}16} - 6 = 0{,}25;$$

$$q_1^0 = \frac{y_1}{G} = \frac{0}{0{,}16} = 0;$$

$$q_2^0 = \frac{y_2}{G} = \frac{0}{0{,}16} = 0;$$

$$q_3^0 = \frac{y_3}{G} = \frac{0{,}12}{0{,}16} = 0{,}75;$$

$$q_4^0 = \frac{y_4}{G} = \frac{0{,}04}{0{,}16} = 0{,}25.$$

В нашем примере первая и вторая стратегии игрока В бесполезны, так как $q_1^0 = q_2^0 = 0$. При случайном чередовании третьей и четвертой стратегии с относительными частотами $q_3^0 = 0{,}75$ и $q_4^0 = 0{,}25$, соответственно, игроку В обеспечен средний выигрыш в размере $M = 0{,}25$.

Оптимальные стратегии игрока А получаются из решения двойственной задачи.

Замечание

В этой главе мы рассмотрели простейший случай парных игр с нулевой суммой. В настоящее время развитие теории игр вышло далеко за пределы рассмотренного нами простейшего случая. Ограниченный объем книги не позволяет дать представление о более сложных разделах современной теории игр, таких, как множественные коалиционные игры, дифференциальные игры и другие.

Ключевые слова

Неопределенность – характеристика внешней среды, ситуация риска, теория игр, многокритериальная задача, процедура (метод) свертывания критериев, аддитивная оптимизация, нормализация критериев, метод последовательных уступок, критерий ожидаемого значения, критерий предельного уровня, критерий наиболее вероятного события (исхода), критерий Лапласа, критерий Вальда, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица, конфликтная ситуация, игра конфликтующих сторон (игроков), стратегия игры, игры с нулевой суммой, цена игры, нижняя цена игры, верхняя цена игры, максиминная стратегия, минимаксная стратегия, седловая точка, чистая стратегия, смешанная стратегия.

Вопросы для самоконтроля

1. Что следует понимать под неопределенностью?
2. Что следует понимать под ситуацией риска?
3. Что такое теория игр?
4. Что является задачей многокритериальной?
5. Что называется методом свертывания критериев? Перечислите методы свертывания.
6. Что понимается под нормализацией критериев?
7. Разъясните метод последовательных уступок.
8. Назовите основные критерии оценки принимаемых решений в условиях риска? Разъясните, в каких случаях используют каждое из этих критерий?
9. На что опирается критерий Лапласа?
10. На что опирается критерий Вальда?
11. Что использует критерий Сэвиджа?
12. На каких предположениях основан критерий Гурвица?
13. Что называется стратегией игры?

14. Что называется игрой с нулевой суммой?
15. Что называется платежной матрицей?
16. Что называется нижней ценой игры?
17. Что называется верхней ценой игры?
18. Что называется максиминной стратегией?
19. Что называется минимаксной стратегией?
20. Что следует понимать, когда говорят, что игра имеет седловую точку?
21. В чем состоит смешанная стратегия? Что такое чистая стратегия?

Задачи

5.1. Для пяти проектов технических систем определены относительные единичные показатели технического совершенства конструкции и коэффициенты весомости единичных показателей. Численные значения единичных показателей и коэффициентов весомости приведены в следующей таблице:

Варианты технических систем	Относительные единичные показатели					
	слож-ности	веса	времени подго-товки	автома-тизации	мощно-сти	унифика-ции
I	1,0	0,088	1,0	1,0	0,72	0,614
11	0,72	1,0	0,8	0,78	0,81	0,420
III	0,658	0,358	0,765	0,782	0,525	0,915
IV	0,425	0,97	0,755	0,70	0,98	0,31
V	0,467	0,555	0,865	0,705	0,865	0,650
Коэффици-енты веса	0,157	0,124	0,210	0,195	0,174	0,140

Проведите ранжирование проектов технических систем по комплексному критерию.

5.2. Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению процесса управления производством. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии функционирования необходимого оборудования. Исходные данные представлены в следующей таблице:

Варианты оборудования	Локальные критерии эффективности оборудования*			
	производи-тельность, д. е.	стоимость оборудования, д. е.	объем памяти, у. е.	Надежность, у. е.
1	100	5	5	8
(I	150	6	8	5
III	120	4	6,5	6
IV	200	7	6	4
Коэффици-енты веса	0,25	0,20	0,32	0,23
* Значения локальных критериев даны в условных единицах.				

5.3. Для шести проектов транспортных устройств определены относительные единичные показатели технического совершенства конструкций. Численные значения единичных показателей и соответствующие весовые коэффициенты приведены в следующей таблице:

Варианты транспорт-ных устройств	Относительные единичные показатели					
	скоро ти, $К_1$	прочно-сти, $К_2$	пере-грузки, $К_3$	устойчи вости, $К_4$	металло емкости, $К_5$	мощно-сти, $К_6$
1	1,0	0,798	0,92	1,0	1,0	0,77
II	1,0	1,0	0,65	0,92	0,94	0,92
111	1,0	0,93	0,924	1,0	0,98	0,95
IV	0,87	0,96	0,91	0,915	0,99	0,85
V	0,85	0,97	1,0	0,90	0,7	0,82
VI	0,88	0,78	0,75	0,967	0,8	ко
Коэффици-енты веса	0,210	0,195	0, 1 74	0,157	0,124	0,140

Проведите ранжировку проектов технических систем по комплексному критерию.

5.4. Рассмотрим следующую платежную матрицу (матрицу доходов):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\
R_1 & 15 & 12 & 1 & -3 & 18 & 20 \\
R_2 & 2 & 15 & 9 & 7 & 1 & 3 \\
R_3 & 0 & 6 & 15 & 21 & -2 & 5 \\
R_4 & 8 & 20 & 12 & 3 & 0 & 4
\end{array}$$

Вероятности состояний природы $\{S_i\}$ неизвестны. Определите оптимальную стратегию R_i, используя критерии Лапласа и максимина. Сравните полученные решения.

5.5. Сравните решения в задаче 5.4 при использовании критериев Сэвиджа и Гурвица (положите $\alpha = 0{,}4$).

5.6. Намечается крупномасштабное производство легковых автомобилей. Имеются четыре варианта проекта автомобиля R_j, $j = 1{,}2{,}3{,}4$,4. Определена экономическая эффективность V_{ji} каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении трех сроков S_i, $i = 1{,}2{,}3$ рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в следующей таблице (д. е.):

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	25	15
R_2	25	24	10
R_3	15	28	12
R_4	9	30	20

Требуется выбрать лучший проект легкового автомобиля для производства, используя критерии Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица при $\alpha = 0{,}4$. Сравните решения и сделайте выводы.

5.7. Фирма рассматривает вопрос о строительстве станции технического обслуживания (СТО) автомобилей. Составлена смета расходов на строительство станции с различным количеством обслуживаемых автомобилей, а также рассчитан ожидаемый доход в зависимости от удовлетворения прогнозируемого спроса на предлагаемые услуги СТО (прогнозируемое количество обслуженных автомобилей в действительности). В зависимости от принятого решения - проектного количества обслуживаемых автомобилей в сутки (проект СТО) R_j и величины прогнозируемого спроса на услуги СТО

- построена нижеследуюшая таблица ежегодных финансовых результатов (доход, д. е.):

Проекты СТО	Прогнозируемая величина удовлетворяемости спроса					
	0	10	20	30	40	50
20	-120	60	240	250	250	250
30	-160	15	190	380	390	390
40	-210	-30	150	330	500	500
50	-270	-80	100	280	470	680

Определите наилучший проект СТО с использованием критериев Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица (при $\alpha = 0{,}5$).

5.8. Найдите седловую точку и значение игры для каждой из двух следующих игр. Платежные матрицы имеют вид:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -4 & 6 \\ -5 & -6 & -7 & -1 \\ 5 & 10 & -3 & -5 \\ 7 & 2 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

5.9. Определите, будут ли значения следующих игр больше, меньше или равны нулю:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 9 & 6 \\ -5 & 3 & -2 & -4 \\ 8 & 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}; \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 & -3 \\ 5 & 9 & 1 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 5 & 7 \\ -3 & 9 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ 8 & -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \overline{D} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

5.10. В следующих задачах решите игру с платежной матрицей.

$$a)\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \qquad б)\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}; \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1.Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х кн. М.:Мир,1991.

2.Walras L. Elements d'Economie Politique pure, Lausanne, 1874.(англ. перевод: Elements of Pure Economies. London, 1954. Illionis,1954.)

3.Вентцель Е.С.,Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. М.: Радио и связь, 1983.

4.Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщение и применения. М.:Прогресс,1966.

5.Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука,1965.

6.Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. М.: Высшая школа,1980.

7.Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд. БГУ, 1975.

8.Бережной В.И., Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем. М.: Финансы и статистика,2001.

9. Сафаева К. Математик дастурлаш. Тошкент: Ибн Сино,2004.

10.Бережной В.И., Бережная Е.В. Экономико- математические методы и модели в примерах и задачах. Ставрополь: Интеллект-сервис,1966.

11.Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа,1993.

12.Сафаева К.,Мамуров Э., Бабаджанов Ш.Ш., Шомансурова Ф. Математик программалаш фанидан масалалар тўплами. Тошкент: ТМИ,2004.

13. Математическое программирование / Под. ред. Н.Ш. Кремера М.:Финстатинформ,1996.

14.Уотшем Т. Дж., Парраноу К. Количественные методы в финансах. М.:Финансы, 1999.

15. Хазанова Л. Э. Модели и методы исследования операций. Часть1.Линейная оптимизация и транспортные сети. М.: Станкин, 1994.

16.Хазанова Л. Э. Математическое моделирование экономических систем. Динамическое программирование – М.: ИНЭУП, 1997.

17.Хазанова Л. Э. Математическое моделирование в экономике М.: БЕК, 1998.

18. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. М:Аудит, 1997.