МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ФИНАНСОВЫЙ ИНСТИТУТ

Ш.Ш.БАБАДЖАНОВ

МАТЕРИАЛЫ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ПО

«ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ»

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ БАКАЛАВРИАТА

ОБЛАСТИ ОБРАЗОВАНИЯ «БИЗНЕС И УПРАВЛЕНИЕ»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

-

Ташкент
«IQTISOD-MOLIYA»
2006

Материалы самостоятельных работ по «Теории вероятностей и математической статистики»: Учеб. пособие/ Ш. Ш. Бабаджанов; «IQTISOD-MOLIYA», Ташкент, 2006. 90 с.

Пособие посвящено методическому обеспечению самостоятельной работы студентов и включает в себя материалы 6 самостоятельных работ, из них: 3 по теории вероятностей и 3 по математической статистике. Самостоятельные работы носят обучающий характер и содействуют лучшему усвоению студентами вводимых в лекциях понятий; расширению теоретических знаний студентов.

Учебное пособие предназначено для студентов экономических вузов.

Печатается по решению научно-методического совета Ташкентского финансового института.

Рецензенты: **канд. физ.-мат. наук, доц. ТУИТ У. Н. Каландаров**
канд. физ.-мат. наук, доц. ТФИ Э.Н. Мамуров

ПРИДИСЛОВИЕ

Если путь твой к познанию мира ведет
Как бы ни был он долог и труден – вперед!
А. Фирдоуси

В учебном пособии содержатся дидактические материалы для организации самостоятельной работы студентов. Самостоятельные работы носят обучающий характер. Выполнения этих самостоятельных работ содействуют лучшему усвоению студентами вводимых в лекциях понятий; расширению теоретических знаний (студента), которые в силу ограниченности объема не освещены в лекциях.

Самостоятельная работа студента проводится внеаудиторное время.

Автор

Самостоятельная работа 1

КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Классическая вероятностная схема - схема урн.

Всякий эксперимент (опыт), удовлетворяющий тому условию, что соответствующее ему множество элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ представляет собой конечное множество равновероятных исходов, называется классической схемой[1] или схемой урн.

Вероятность любого события $A = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, ..., \omega_{k_m}\} \subset \Omega$ определяется по формуле классической вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1)$$

где m - число элементов множества A (число всех благоприятствующих событию A исходов), n - число элементов множества Ω (число всех исходов эксперимента).

Классическая схема является математической формализацией опытов, в которых элементарные исходы обладают определенной симметрией по отношению к условиям опыта, так что нет оснований считать какой-либо из исходов более вероятным, чем другой. Таким свойством, например, обладают опыты по извлечению наудачу определенного числа шаров из урны,

[1]Этим способом пользовались французские математики XVII в. Блез Паскаль и Пьер Ферма, рассматривавшие формулу (1) как определение вероятности. В далекое от нашей эпохи время трудно было предвидеть роль понятия вероятности, разнообразие и серьезность будущих приложений теории вероятностей к естествознанию, технике и экономике. Первоначальным материалом, на котором «отрабатывались» простейшие факты теории, были азартные игры. С тех пор задачи о бросании игральной кости, об извлечении карт из колоды, шаров из урны и т. п. стали традиционными для теории вероятностей. Заметим, что и по сей день, эти задачи сохраняют свою роль как тренировочные упражнения, а в некоторых случаях – как наглядные модели для более серьезных вероятностных схем.

содержащей заданное количество неразличимых на ощупь шаров (отсюда и название - схема урн).

Пример. Брошены две игральные кости. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятность события $A = \{$сумма выпавших очков делится на 6$\}$.

Решение. Исход эксперимента (опыта) можно описать парой чисел $\omega_{ij} = (i, j)$, где i-число очков, выпавших на первой кости, а j- на второй ($i, j = 1,2,...,6$). Поэтому множество элементарных исходов $\Omega = \{\omega_{ij} = (i, j) : i = 1,2,...,6; \quad j = 1,2,...,6\}$. Нетрудно проверить, что число элементов множества Ω (число всех исходов эксперимента) - $n = 36$. Другими словами общее число элементарных событий $n = 36$. Событие A соответствует подмножеству $\{(1,5), \quad (5,1), \quad (2,4), \quad (4,2), \quad (3,3), \quad (6,6)\} \subset \Omega$. Другими словами

$$A = \{(1,5), \quad (5,1), \quad (2,4), \quad (4,2), \quad (3,3), \quad (6,6)\} \subset \Omega \quad .$$

Так как число элементов множества A (число всех благоприятствующих событию A исходов) - $m = 6$, то по формуле классической вероятности получаем

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

В этом примере помимо нахождения n - число элементов множества Ω (число всех исходов эксперимента) и m - число элементов множества A (число всех благоприятствующих событию A исходов) нам удалось, полностью описать то из чего состоят множества Ω и A. Однако во многих случаях описания содержания этих множеств является практически невозможным. Следует отметить, что это и не является обязательным. Обязательным является нахождение чисел m и n. Нахождение этих чисел, следовательно, вычисление вероятностей в классической схеме часто облегчается, если применить элементы комбинаторики.

Комбинаторный метод вычисления вероятностей в классической схеме

Решение вероятностных задач на классическую схему часто облегчается использованием комбинаторных формул. Каждая из комбинаторных формул определяет общее число элементарных исходов в некотором опыте, состоящем в выборе наудачу $\boldsymbol{k}$ элементов из $\boldsymbol{l}$ различных элементов исходного множества $\boldsymbol{E}=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{l}}\}$. При этом в постановке каждого такого опыта строго оговорено, каким способом производится выбор и что понимается под различными выборками.

Существуют **две принципиально различные схемы** выбора. **В первой схеме** выбор осуществляется без возвращения элементов (это значит, что отбираются либо сразу все $\boldsymbol{k}$ элементов, либо последовательно по одному элементу, причем каждый отобранный элемент исключается из исходного множества). **Во второй схеме** выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге и тщательным перемешиванием исходного множества перед следующим выбором. После того как выбор тем или иным способом осуществлен, отобранные элементы (или их номера) могут быть либо упорядочены (т. е. выложены в последовательную цепочку), либо нет. В результате получаются следующие **четыре различные постановки эксперимента** по выбору наудачу $\boldsymbol{k}$ элементов из общего числа $\boldsymbol{l}$ различных элементов множества $\boldsymbol{E}$.

I. Схема выбора, приводящая к сочетаниям. Если опыт состоит в выборе $\boldsymbol{k}$ элементов без возвращения и без упорядочивания, то различными исходами следует считать $\boldsymbol{k}$ -элементные подмножества множества $\boldsymbol{E}$, имеющие различный состав. Получаемые при этом комбинации элементов (элементарные исходы) носят название сочетания из $\boldsymbol{l}$ элементов по $\boldsymbol{k}$, а их общее число определяется по формуле

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{k}}=\frac{\boldsymbol{l}!}{\boldsymbol{k}!(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k})!}=\frac{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{l}-1)...(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k}+1)}{\boldsymbol{k}!}.$$

Для чисел C_l^k, называемых также биномиальными коэффициентами, справедливы следующие тождества, часто оказывающиеся полезными при решении задач:

$C_l^k = C_l^{l-k}$ (свойство симметрии),

$C_{l+1}^r = C_l^r + C_l^{r-1}$, $\quad C_l^0 = 1$ (рекуррентное соотношение),

$C_l^0 + C_l^1 + ... + C_l^l = 2^l$ (следствие биномиальной формулы Ньютона).

Пример. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают три изделия для контроля. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$в полученной выборке ровно одно изделие бракованное$\}$, $B = \{$в полученной выборке нет ни одного бракованного изделия$\}$.

Решение. Занумеруем изделия числами от 1 до 10, и пусть множество номеров $E_1 = \{1,2,...,7\}$ соответствует годным изделиям, а множество номеров $E_2 = \{8,9,10\}$ - бракованным изделиям.

Согласно описанию эксперимента производится выбор без возвращения и без упорядочивания трех элементов из множества $E = E_1 \cup E_2 = \{1,2,...,10\}$. Поэтому $n = C_{10}^3 = 120$.

Событию A благоприятствуют только такие исходы, когда один элемент выборки принадлежит E_2, а остальные два элемента - множеству E_1. По формуле прямого произведения множеств получаем, что число всех таких исходов $m = C_3^1 \cdot C_7^2 = 63$, поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}.$$

Событию B благоприятствуют только такие исходы, когда все три отобранных элемента принадлежат множеству E_1, поэтому $m = C_7^3 = 35$. Отсюда следует, что

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}.$$

II. Схема выбора, приводящая к размещениям. Если опыт состоит в выборе k элементов без возвращения, но с упорядочиванием их по мере выбора в последовательную цепочку, то различными исходами данного опыта будут упорядоченные k-элементные подмножества множества E, отличающиеся либо набором элементов, либо порядком их следования. Получаемые при этом комбинации элементов (элементарные исходы) называются размещениями из l элементов по k, а их общее число определяется формулой

$$A_l^k=C_l^k\cdot k!=\frac{l!}{(l-k)!}=l(l-1)...(l-k+1).$$

В частном случае $k=l$ опыт фактически состоит в произвольном упорядочивании множества E, т. е. сводится к случайной перестановке элементов всего множества. При этом

$$P_l=A_l^l=l!.$$

Пример. Множество E состоит из 10 первых букв русского алфавита. Опыт состоит в выборе без возвращения 4 букв и записи слова в порядке поступления букв. Сколько 4-буквенных слов может быть получено в данном опыте? Какова вероятность того, что наудачу составленное слово будет оканчиваться буквой a?

Решение. n число всех 4-буквенных слов в данном опыте - равно числу 4-элементных упорядоченных подмножеств из 10 элементов, т. е.

$$n=A_{10}^4=10\cdot9\cdot8\cdot7=5040.$$

Пусть событие $A=\{$наудачу составленное слово из 4 букв множества E оканчивается буквой $a\}$. Число элементов множества A равно числу способов разместить на три оставшиеся места по одному символу из 9 (символ a исключен из рассмотрения, поскольку его место уже определено); таким образом,

$$m=A_9^3=9\cdot8\cdot7=504$$

и

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{504}{5040}=\frac{1}{10}.$$

III. Схема выбора, приводящая к сочетаниям с повторениями. Если опыт состоит в выборе с возвращением k элементов множества $E=\{e_1,e_2,...,e_l\}$, но без последующего упорядочивания, то различными исходами такого опыта будут всевозможные k-элементные наборы, отличающиеся составом. При этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Например, при $k=4$ наборы $\{e_1,e_1,e_2,e_1\}$ и $\{e_2,e_1,e_1,e_1\}$ неразличимы для данного эксперимента, а набор $\{e_1,e_1,e_3,e_1\}$ отличен от любого из предыдущих. Получающиеся в результате данного опыта комбинации называются сочетаниями с повторениями, а их общее число определяется формулой

$$C_{l+k-1}^{k}.$$

Пример. В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т. д., всего по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равновозможен, найти вероятности следующих событий: $A=\{$заказаны книги из различных разделов науки$\}$, $B=\{$заказаны книги из одного и того же раздела науки$\}$.

Решение. Число всех равновероятных исходов данного эксперимента равно, очевидно, числу сочетаний с повторениями из 16 элементов по 4, т. е.

$$n=C_{16+4-1}^{4}=C_{19}^{4}.$$

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно числу способов отобрать без возвращения четыре элемента из 16, т.е. $m=C_{16}^{4}$, поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{16}^{4}}{C_{19}^{4}}=\frac{455}{969}\approx 0{,}47.$$

Число исходов, благоприятствующих событию B, равно числу способов выбрать один элемент из шестнадцати, поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{16}^{1}}{C_{19}^{4}}=\frac{4}{969}\approx 0{,}004.$$

IV. Схема выбора, приводящая к размещениям с повторениями. Если выбор k элементов из множества $E=\{e_1,e_2,...,e_l\}$ производится с возвращением и с упорядочиванием их в последовательную цепочку, то различными исходами будут всевозможные k-элементные наборы (вообще говоря, с повторениями), отличающиеся либо составом элементов, либо порядком их следования. Например, при $k=4$ множества $\{e_1,e_1,e_2,e_1\}$, $\{e_2,e_1,e_1,e_1\}$, и $\{e_1,e_1,e_3,e_1\}$ являются различными исходами данного опыта. Получаемые в результате комбинации называются размещениями с повторениями, а их общее число определяется формулой l^k.

Пример. 7 одинаковых шариков случайным образом рассыпаются по 4 лункам (в одну лунку может поместиться любое число шариков). Сколько существует различных способов распределения 7 шариков по 4 лункам? Какова вероятность того, что в результате данного опыта первая лунка окажется пустой (при этом может оказаться пустой и еще какая-либо лунка)?

Решение. Занумеруем лунки и шарики. Можно считать, что опыт состоит в 7-кратном выборе с возвращением номера лунки и записи 7-буквенного слова. При этом каждому порядковому номеру буквы (номеру шарика) будет поставлена в соответствие одна из четырех букв алфавита (номер лунки).

Так, например, слово

1	1	3	1	4	4	2

1 2 3 4 5 6 7

означает, что в первую лунку попали шары № 1, № 2 и № 4, во вторую лунку - шар № 7, в третью - шар № 3, в четвертую - шары № 5 и № 6. Таким образом, число всех способов распределить 7 шариков по 4 лункам равно числу различных 7-буквенных слов из алфавита в 4 буквы, т. е. $\boldsymbol{n} = 4^7$.

Событие $\boldsymbol{A} = \{$первая лунка окажется пустой$\}$ соответствует такому выбору, когда символ 1 (номер первой лунки) удален из алфавита. Поэтому $\boldsymbol{m} = 3^7$ и

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}} = \frac{3^7}{4^7} = \left(\frac{3}{4}\right)^7 \approx 0{,}133.$$

Замечание. Очевидно, что комбинаторный метод вычисления вероятностей может быть использован не только в классической схеме, а также при вычислении условной вероятности ([1-7]) и вероятности сложных событий.

Сложным событием называется событие, выраженное через другие события, наблюдаемые в том же опыте с помощью допустимых алгебраических операций.

Вероятность осуществления того или иного события вычисляется по правилам, основу которых составляют теоремы (формулы) сложения и умножения вероятностей ([1-7]).

Пример. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимается два шара. Какова вероятность, что вынутые шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар?

Решение. Всего в ящике лежат 30 шаров. Пусть

$\boldsymbol{A} = \{\textbf{\textit{пара шаров разного цвета}}\}$;

$\boldsymbol{B} = \{\textbf{\textit{пара шаров, не содержащая синего цвета}}\}$.

Тогда

$$P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\dfrac{12\cdot 8}{C_{30}^2}}{\dfrac{C_{20}^2}{C_{30}^2}}=\frac{48}{95}\approx 0{,}5053.$$

Пример. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность события $A=\{$хотя бы один из учебников окажется в переплете$\}$.

Решение. Очевидно, что событие A произойдет, если произойдет любое из следующих трех несовместных событий: $B=\{$один учебник в переплете$\}$, $C=\{$два учебника в переплете$\}$, $D=\{$три учебника в переплете$\}$. Это означает, что интересующее нас событие A можно представить в виде суммы событий: $A=B+C+D$. По теореме сложения,

$$P(A)=P(B)+P(C)+P(D). \qquad (*)$$

Найдем вероятности событий B, C, D:

$$P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{45}{91};\quad p(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{20}{91};\quad P(D)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}.$$

Подставляя эти вероятности в равенство (*) получим

$$P(A)=\frac{45}{91}+\frac{20}{91}+\frac{2}{91}=\frac{67}{91}.$$

Задание

Изучить материалы, приведенные выше и **решить** следующий вариант задач.

Вариант №1

1. Два равных по силе противника играют матч из n партий в теннис. Каждая партия заканчивается выигрышем, либо проигрышем

одного из участников. Все исходы данного матча считаются равновероятными. Найти вероятность того, что первый игрок выиграет ровно $\boldsymbol{m}$ партий ($\boldsymbol{m} \le \boldsymbol{n}$).

2. Числа 1, 2, ..., 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$числа будут записаны в порядке возрастания$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$числа 3, 6 и 9 будут следовать друг за другом и в порядке возрастания$\}$.

3. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал:

а) пирожные одного вида;

б) пирожные разных видов;

в) по два пирожных различных видов.

4. Бросается 10 одинаковых игральных костей. Вычислить вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$ни на одной кости не выпадет 6 очков$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$хотя бы на одной кости выпадет 6 очков$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$ровно на 3 костях выпадет 6 очков$\}$.

Вариант №2

1. Из урны, содержащей $\boldsymbol{m}_1$ шаров с номером 1, $\boldsymbol{m}_2$ шаров с номером 2,3,...,$\boldsymbol{m}_s$ шаров с номером $\boldsymbol{s}$, наудачу без возвращения извлекается $\boldsymbol{n}$ шаров. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$появляется $\boldsymbol{n}_1$ шаров с номером 1, $\boldsymbol{n}_2$ шаров с номером 2, … $\boldsymbol{n}_s$ шаров с номером $\boldsymbol{s}\}$; $\boldsymbol{B} = \{$не появятся шары с номерами 1 или 2$\}$.

2. Числа 1, 2, ..., 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$числа будут записаны в порядке возрастания$\}$, $\boldsymbol{D} = \{$на четных местах будут стоять четные числа$\}$, $\boldsymbol{E} = \{$сумма каждых двух чисел, стоящих на одинаковом расстоянии от концов, равна 10$\}$.

3. Из общего количества костей домино, содержащих числа $0,1,2,...,\boldsymbol{n}$, наудачу извлекли одну кость. Оказалось, что это не дубль. Какова вероятность $\boldsymbol{p_n}$ того, что вторую извлеченную также наудачу кость домино можно будет приставить к первой. Найти числовые значения вероятности для $\boldsymbol{n} = 6$ (обычный набор домино) и $\boldsymbol{n} = 9$ (расширенный набор).

4. Опыт состоит в четырехкратном выборе с возвращением одной из букв алфавита $\boldsymbol{E} = \{$а, б, к, о, м$\}$ и выкладывании слова в порядке поступления букв. Какова вероятность того, что в результате будет выложено слово **«мама»?**

Вариант №3

1. Из колоды в 52 карты извлекаются наудачу 4 карты. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$в полученной выборке все карты бубновой масти$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$окажется хотя бы один туз$\}$.

2. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места за круглым столом в случайном порядке. Какова вероятность того, что при этом два определенных лица окажутся сидящими рядом?

3. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал:

а) пирожные одного вида;

б) пирожные разных видов;

в) по два пирожных различных видов.

4. В подъезде дома установлен замок с кодом. Дверь автоматически отпирается, если в определенной последовательности набрать три цифры из имеющихся десяти. Некто вошел в подъезд и, не зная кода, стал наудачу пробовать различные комбинации из трех цифр. На каждую попытку он тратит 20 секунд. Какова вероятность события $\boldsymbol{A} = \{$вошедшему удастся открыть дверь за один час$\}$?

Вариант №4

1. Для уменьшения числа игр $2\boldsymbol{n}$ футбольных команд, среди которых 2 призера предыдущего чемпионата, путем жеребьевки разбиваются на две подгруппы (первую и вторую) по $\boldsymbol{n}$ команд каждая. Какова вероятность $\boldsymbol{q_n}$ того, что обе команды-призеры попадут в разные группы?

2. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом, если

а) число мест равно 8;

б) число мест равно 12.

3. Из общего количества костей домино, содержащих числа $0,1,2,...,\boldsymbol{n}$, наудачу извлекли одну кость. Оказалось, что это не дубль. Какова вероятность $\boldsymbol{p_n}$ того, что вторую извлеченную также наудачу кость домино можно будет приставить к первой. Найти числовые значения вероятности для $\boldsymbol{n}=6$ (обычный набор домино) и $\boldsymbol{n}=9$ (расширенный набор).

4. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, причем все комбинации цифр равновероятны, найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A}=\{$четыре последние цифры телефонного номера одинаковы$\}$, $\boldsymbol{B}=\{$все цифры различны$\}$.

Вариант №5

1. Из урны, содержащей $\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2$ шаров, из которых $\boldsymbol{m}_1$ белых и $\boldsymbol{m}_2$ черных, наудачу отбирают $\boldsymbol{m}$ шаров $(\boldsymbol{m}\le\min(\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2))$ и откладывают в сторону. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{C}=\{$вынут хотя бы один белый шар$\}$, $\boldsymbol{D}=\{$вынуто не менее $\boldsymbol{k}$ белых шаров $(\boldsymbol{k}\le\boldsymbol{m})\}$.

2. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в

ряд слева направо. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A}=\{$появится число 123$\}$, $\boldsymbol{B}=\{$появится число, не содержащее цифры 3$\}$.

3. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал:

а) пирожные одного вида;

б) пирожные разных видов;

в) по два пирожных различных видов.

4. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, причем все комбинации цифр равновероятны, найти вероятности событий:
$\boldsymbol{C}=\{$номер начинается с цифры 5$\}$, $\boldsymbol{D}=\{$номер содержит три цифры 5, две цифры 1 и две цифры 2$\}$.

Вариант №6

1. Из урны, содержащей $\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2$ шаров, из которых $\boldsymbol{m}_1$ белых и $\boldsymbol{m}_2$ черных, наудачу отбирают $\boldsymbol{m}$ шаров $(\boldsymbol{m}\le \min(\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2))$ и откладывают в сторону. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A}=\{$все отложенные шары белые$\}$, $\boldsymbol{B}=\{$среди отложенных шаров ровно $\boldsymbol{k}$ белых $(\boldsymbol{k}\le\boldsymbol{m})\}$.

2. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в ряд слева направо. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{C}=\{$появится число, состоящее из последовательных цифр$\}$, $\boldsymbol{D}=\{$появится четное число$\}$, $\boldsymbol{E}=\{$появится число, содержащее хотя бы одну из цифр 2 или 3$\}$.

3. Из общего количества костей домино, содержащих числа $0,1,2,...,\boldsymbol{n}$, наудачу извлекли одну кость. Оказалось, что это не дубль. Какова вероятность $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}}$ того, что вторую извлеченную также наудачу кость домино можно будет приставить к первой. Найти числовые значения вероятности для $\boldsymbol{n}=6$ (обычный набор домино) и $\boldsymbol{n}=9$ (расширенный набор).

4. Шесть человек вошли в лифт на первом этаже семиэтажного дома. Считая, что любой пассажир может с равной вероятностью выйти на 2-м, 3-м, ..., 7-м этажах, найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$на втором, третьем и четвертом этажах не выйдет ни один из пассажиров$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$трое пассажиров выйдут на седьмом этаже$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$на каждом этаже выйдет по одному пассажиру$\}$, $\boldsymbol{D} = \{$все пассажиры выйдут на одном этаже$\}$.

Вариант №7

1. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$будут выбраны одни третьекурсники$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$все первокурсники попадут на конференцию$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$не будет выбрано ни одного второкурсника$\}$.

2. $\boldsymbol{n}$ человек входят в комнату, где имеется всего $\boldsymbol{m}$ стульев ($\boldsymbol{m} \le \boldsymbol{n}$), и рассаживаются случайным образом, но так, что все стулья оказываются занятыми.

а) Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся без места?

б) Какова вероятность того, что $\boldsymbol{k}$ определенных лиц будут сидеть ($\boldsymbol{k} \le \boldsymbol{m}$)?

3. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал:

а) пирожные одного вида;

б) пирожные разных видов;

в) по два пирожных различных видов.

4. К четырехстороннему перекрестку с каждой стороны подъехало по одному автомобилю. Каждый автомобиль может с равной вероятностью совершить один из четырех маневров на перекрестке: развернуться и поехать обратно, поехать прямо, налево или направо. Через некоторое время все

автомобили покинули перекресток. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$все автомобили поедут по одной и той же улице$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$по определенной улице поедут ровно три автомобиля$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$ по крайней мере по одной из улиц не поедет ни один автомобиль$\}$.

Вариант №8

1. Из десяти первых букв русского алфавита наудачу составляется новый алфавит, состоящий из пяти букв. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$в состав нового алфавита входит буква $\boldsymbol{a}\}$, $\boldsymbol{B} = \{$в состав нового алфавита входят только согласные буквы$\}$.

2. $\boldsymbol{n}$ мужчин и $\boldsymbol{n}$ женщин случайным образом рассаживаются в ряд на $2\boldsymbol{n}$ мест. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$никакие два мужчины не будут сидеть рядом$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$все мужчины будут сидеть рядом$\}$.

3. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал:

а) пирожные одного вида;

б) пирожные разных видов;

в) по два пирожных различных видов.

4. Из разрезной азбуки выкладывается слово математика. Затем все буквы этого слова тщательно перемешиваются и снова выкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово **«математика»**?

Вариант №9

1. Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность, что среди них окажется, по крайней мере, одна кость с шестью очками?

2. 10 вариантов контрольной работы, написанные каждый на отдельной карточке, перемешиваются и распределяются случайным образом среди восьми студентов, сидящих в одном ряду, причем каждый получает по одному

варианту. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$варианты с номерами 1 и 2 останутся неиспользованными$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$варианты 1 и 2 достанутся рядом сидящим студентам$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$будут распределены последовательные номера вариантов$\}$.

3. Из общего количества костей домино, содержащих числа $0,1,2,...,\boldsymbol{n}$, наудачу извлекли одну кость. Оказалось, что это не дубль. Какова вероятность $\boldsymbol{p_n}$ того, что вторую извлеченную также наудачу кость домино можно будет приставить к первой. Найти числовые значения вероятности для $\boldsymbol{n} = 6$ (обычный набор домино) и $\boldsymbol{n} = 9$ (расширенный набор).

4. 52 карты раздаются четырем игрокам (каждому по 13 карт). Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$каждый игрок получит туза$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$один из игроков получит все 13 карт одной масти$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$ все тузы попадут к одному из игроков$\}$, $\boldsymbol{D} = \{$двое определенных игроков не получат ни одного туза$\}$.

Вариант №10

1. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$будут выбраны одни третьекурсники$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$все первокурсники попадут на конференцию$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$не будет выбрано ни одного второкурсника$\}$.

2.12 студентов, среди которых Иванов и Петров, случайным образом занимают очередь за учебниками в библиотеку. Какова вероятность, что между Ивановым и Петровым в образовавшейся очереди окажутся ровно 5 человек?

3. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал:

а) пирожные одного вида;

б) пирожные разных видов;

в) по два пирожных различных видов.

4. В подъезде дома установлен замок с кодом. Дверь автоматически отпирается, если в определенной последовательности набрать три цифры из имеющихся десяти. Некто вошел в подъезд и, не зная кода, стал наудачу пробовать различные комбинации из трех цифр. На каждую попытку он тратит 20 секунд. Какова вероятность события $\boldsymbol{A} = \{$вошедшему удастся открыть дверь за один час$\}$?

Вариант №11

1. Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность, что среди них окажется, по крайней мере, одна кость с шестью очками?

2. 10 вариантов контрольной работы, написанные каждый на отдельной карточке, перемешиваются и распределяются случайным образом среди восьми студентов, сидящих в одном ряду, причем каждый получает по одному варианту. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$варианты с номерами 1 и 2 останутся неиспользованными$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$варианты 1 и 2 достанутся рядом сидящим студентам$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$будут распределены последовательные номера вариантов$\}$.

3. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал:

а) пирожные одного вида;

б) пирожные разных видов;

в) по два пирожных различных видов.

4. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, причем все комбинации цифр равновероятны, найти вероятности событий:
$\boldsymbol{C} = \{$номер начинается с цифры 5$\}$, $\boldsymbol{D} = \{$номер содержит три цифры 5, две цифры 1 и две цифры 2$\}$.

Вариант №12

1. Из десяти первых букв русского алфавита наудачу составляется новый алфавит, состоящий из пяти букв. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A}=\{$в состав нового алфавита входит буква $\boldsymbol{a}\}$, $\boldsymbol{B}=\{$в состав нового алфавита входят только согласные буквы$\}$.

2. $\boldsymbol{n}$ мужчин и $\boldsymbol{n}$ женщин случайным образом рассаживаются в ряд на $2\boldsymbol{n}$ мест. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A}=\{$никакие два мужчины не будут сидеть рядом$\}$, $\boldsymbol{B}=\{$все мужчины будут сидеть рядом$\}$.

3. Из общего количества костей домино, содержащих числа $0,1,2,...,\boldsymbol{n}$, наудачу извлекли одну кость. Оказалось, что это не дубль. Какова вероятность $\boldsymbol{p_n}$ того, что вторую извлеченную также наудачу кость домино можно будет приставить к первой. Найти числовые значения вероятности для $\boldsymbol{n}=6$ (обычный набор домино) и $\boldsymbol{n}=9$ (расширенный набор).

4. Шесть человек вошли в лифт на первом этаже семиэтажного дома. Считая, что любой пассажир может с равной вероятностью выйти на 2-м, 3-м, ..., 7-м этажах, найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A}=\{$на втором, третьем и четвертом этажах не выйдет ни один из пассажиров$\}$, $\boldsymbol{B}=\{$трое пассажиров выйдут на седьмом этаже$\}$, $\boldsymbol{C}=\{$на каждом этаже выйдет по одному пассажиру$\}$, $\boldsymbol{D}=\{$все пассажиры выйдут на одном этаже$\}$.

Вариант №13

1. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A}=\{$будут выбраны одни третьекурсники$\}$, $\boldsymbol{B}=\{$все первокурсники попадут на конференцию$\}$, $\boldsymbol{C}=\{$не будет выбрано ни одного второкурсника$\}$.

2. $\boldsymbol{n}$ человек входят в комнату, где имеется всего $\boldsymbol{m}$ стульев ($\boldsymbol{m}\le\boldsymbol{n}$), и рассаживаются случайным образом, но так, что все стулья оказываются занятыми.

а) Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся без места?

б) Какова вероятность того, что $\boldsymbol{k}$ определенных лиц будут сидеть ($\boldsymbol{k} \le \boldsymbol{m}$)?

3. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал:

а) пирожные одного вида;

б) пирожные разных видов;

в) по два пирожных различных видов.

4. К четырехстороннему перекрестку с каждой стороны подъехало по одному автомобилю. Каждый автомобиль может с равной вероятностью совершить один из четырех маневров на перекрестке: развернуться и поехать обратно, поехать прямо, налево или направо. Через некоторое время все автомобили покинули перекресток. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$все автомобили поедут по одной и той же улице$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$по определенной улице поедут ровно три автомобиля$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$по крайней мере по одной из улиц не поедет ни один автомобиль$\}$.

Вариант №14

1. Из урны, содержащей $\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2$ шаров, из которых $\boldsymbol{m}_1$ белых и $\boldsymbol{m}_2$ черных, наудачу отбирают $\boldsymbol{m}$ шаров ($\boldsymbol{m} \le \min(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2)$) и откладывают в сторону. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$все отложенные шары белые$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$среди отложенных шаров ровно $\boldsymbol{k}$ белых ($\boldsymbol{k} \le \boldsymbol{m}$)$\}$.

2. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в ряд слева направо. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{C} = \{$появится число, состоящее из последовательных цифр$\}$, $\boldsymbol{D} = \{$появится четное число$\}$, $\boldsymbol{E} = \{$появится число, содержащее хотя бы одну из цифр 2 или 3$\}$.

3. Из общего количества костей домино, содержащих числа $0,1,2,\ldots,\boldsymbol{n}$, наудачу извлекли одну кость. Оказалось, что это не дубль. Какова вероятность $\boldsymbol{p_n}$ того, что вторую извлеченную также наудачу кость домино можно будет приставить к первой. Найти числовые значения вероятности для $\boldsymbol{n}=6$ (обычный набор домино) и $\boldsymbol{n}=9$ (расширенный набор).

4. Из разрезной азбуки выкладывается слово математика. Затем все буквы этого слова тщательно перемешиваются и снова выкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово **«математика»**?

Вариант №15

1. Из урны, содержащей $\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2$ шаров, из которых $\boldsymbol{m}_1$ белых и $\boldsymbol{m}_2$ черных, наудачу отбирают $\boldsymbol{m}$ шаров $(\boldsymbol{m} \le \min(\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2))$ и откладывают в сторону. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{C}=\{$вынут хотя бы один белый шар$\}$, $\boldsymbol{D}=\{$вынуто не менее $\boldsymbol{k}$ белых шаров $(\boldsymbol{k} \le \boldsymbol{m})\}$.

2. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в ряд слева направо. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A}=\{$появится число 123$\}$, $\boldsymbol{B}=\{$появится число, не содержащее цифры 3$\}$.

3. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал:

а) пирожные одного вида;

б) пирожные разных видов;

в) по два пирожных различных видов.

4. 52 карты раздаются четырем игрокам (каждому по 13 карт). Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A}=\{$каждый игрок получит туза$\}$, $\boldsymbol{B}=\{$один из игроков получит все 13 карт одной масти$\}$, $\boldsymbol{C}=\{$ все тузы попадут к одному из игроков$\}$, $\boldsymbol{D}=\{$двое определенных игроков не получат ни одного туза$\}$.

Вариант №16

1. Для уменьшения числа игр $2\boldsymbol{n}$ футбольных команд, среди которых 2 призера предыдущего чемпионата, путем жеребьевки разбиваются на две подгруппы (первую и вторую) по $\boldsymbol{n}$ команд каждая. Какова вероятность $\boldsymbol{q_n}$ того, что обе команды-призеры попадут в разные группы?

2. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом, если

а) число мест равно 8;

б) число мест равно 12.

3. Из общего количества костей домино, содержащих числа $0,1,2,...,\boldsymbol{n}$, наудачу извлекли одну кость. Оказалось, что это не дубль. Какова вероятность $\boldsymbol{p_n}$ того, что вторую извлеченную также наудачу кость домино можно будет приставить к первой. Найти числовые значения вероятности для $\boldsymbol{n}=6$ (обычный набор домино) и $\boldsymbol{n}=9$ (расширенный набор).

4. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, причем все комбинации цифр равновероятны, найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A}=\{$четыре последние цифры телефонного номера одинаковы$\}$, $\boldsymbol{B}=\{$все цифры различны$\}$.

Вариант №17

1. Из колоды в 52 карты извлекаются наудачу 4 карты. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A}=\{$в полученной выборке все карты бубновой масти$\}$, $\boldsymbol{B}=\{$окажется хотя бы один туз$\}$.

2. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места за круглым столом в случайном порядке. Какова вероятность того, что при этом два определенных лица окажутся сидящими рядом?

3. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал:

а) пирожные одного вида;

б) пирожные разных видов;

в) по два пирожных различных видов.

4. Опыт состоит в четырехкратном выборе с возвращением одной из букв алфавита $\boldsymbol{E} = \{$а, б, к, о, м$\}$ и выкладывании слова в порядке поступления букв. Какова вероятность того, что в результате будет выложено слово **«мама»?**

Вариант №18

1 Из урны, содержащей $\boldsymbol{m}_1$ шаров с номером 1, $\boldsymbol{m}_2$ шаров с номером $2,3,...,\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{s}}$ шаров с номером $\boldsymbol{s}$, наудачу без возвращения извлекается $\boldsymbol{n}$ шаров. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$появляется $\boldsymbol{n}_1$ шаров с номером 1, $\boldsymbol{n}_2$ шаров с номером 2, … $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{s}}$ шаров с номером $\boldsymbol{s}\}$; $\boldsymbol{B} = \{$не появятся шары с номерами 1 или 2$\}$.

2 Числа 1, 2, ..., 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$числа будут записаны в порядке возрастания$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$числа 3, 6 и 9 будут следовать друг за другом и в порядке возрастания$\}$.

3. Из общего количества костей домино, содержащих числа $0,1,2,...,\boldsymbol{n}$, наудачу извлекли одну кость. Оказалось, что это не дубль. Какова вероятность $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}}$ того, что вторую извлеченную также наудачу кость домино можно будет приставить к первой. Найти числовые значения вероятности для $\boldsymbol{n} = 6$ (обычный набор домино) и $\boldsymbol{n} = 9$ (расширенный набор).

4. Бросается 10 одинаковых игральных костей. Вычислить вероятности следующих событий: $\boldsymbol{A} = \{$ни на одной кости не выпадет 6 очков$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$хотя

бы на одной кости выпадет 6 очков}, $\boldsymbol{C} = \{$ровно на 3 костях выпадет 6 очков$\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1999.

2. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ, 2001.

3. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ИНФРА, 1997.

4. Бабаджанов Ш.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций. Ташкент: ТФИ, 2004.

5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.- М.: Высшая школа, 1998.

6. Адиров Т.Х. Мамуров Э.Н. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан маърузалар матни. Ташкент: ТМИ,2001.

7. Адиров Т.Х., Мамуров Э.Н. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Ўқув қўлланма. Ташкент: IQNBSJD - MOLIYA, 2005.

Самостоятельная работа 2

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайные события могут быть представлены через случайные величины. Понятие «случайная величина» расширяет область применения методов теории вероятностей в решении практических задач. Поэтому понятие «случайная величина» является одним из важнейших понятий теории вероятностей.

Основные определения и понятия связанные с случайными событиями приведены в лекциях №6, №7 и №8 ([4,6]). Известно, что случайные величины, помимо законов распределения, могут также описываться числовыми характеристиками. Некоторые из них: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение приведены в этих лекциях. Кроме математического ожидания, дисперсии и среднее квадратического отклонения, в теории вероятностей применяется еще ряд числовых характеристик: мода, медиана, квантили, моменты, асимметрия, эксцесс, квантили и критические точки распределения, которые отражают те или иные особенности распределения.

Прежде чем привести их определения, отметим, что среди числовых характеристик различают **характеристики положения** (математическое ожидание мода, медиана и др.) и **характеристики рассеивания** (дисперсия, среднее квадратическое отклонение, различные моменты распределения порядка выше первого и др.).

Модой непрерывной случайной величины X называется действительное число $Mo(X)$, определяемое как точка максимума плотности распределения вероятностей $f(x)$.

Мода дискретной случайной величины определяется как такое возможное значение x_m, для которого

$$P(X = x_m) = \max_k \{P(X = x_k)\}.$$

Таким образом, мода дискретной случайной величины есть ее наиболее вероятное значение в случае, если такое значение единственно. Мода может не существовать, иметь единственное значение (унимодальное распределение) или иметь множество значений (мультимодальное распределение).

Медианой непрерывной случайной величины X называется действительное число $Me(X)$, удовлетворяющее условию

$$P(X < Me(x)) = P(X \geq Me(x)),$$

т. е. корень уравнения

$$F(x) = \frac{1}{2}.$$

Так как данное уравнение может иметь множество корней, то медиана определяется, вообще говоря, неоднозначно.

Случайная величина X называется центрированной (обозначается $\dot{X}$), если $M(X) = 0$. Случайная величина X называется стандартизованной, если $M(X) = 0$ и $\sigma(X) = 1$.

Начальным моментом m-го порядка ($m = 1,2,...$) распределения случайной величины X (если он существует) называется действительное число ν_m, определяемое по формуле

$\nu_m = M(X^m) = \sum_k x_k^m p_k$, если X-дискретная случайная величина и

$\nu_m = M(X^m) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x)dx$, если X-непрерывная случайная величина.

Центральным моментом m-го порядка распределения случайной величины X (если он существует), называется число μ_m, определяемое по формуле

$\mu_m = M[X - M(X))^m] = \sum_k (x_k - M(X))^m p_k$, если X-дискретная случайная величина и

$$\mu_m = M[X - M(X))^m] = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - M(X))^m f(x)dx,$$ если X-непрерывная случайная величина.

Из определений моментов, в частности, следует, что

$$\nu_0 = \mu_0 = 1, \quad M(X) = \nu_1, \quad D(X) = \sigma^2 = \mu_2 = \nu_2 - [M(X)]^2 .$$

Отметим еще две важные характеристики распределения, связанные с моментами высшего порядка:

$a = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ (коэффициент асимметрии или «скошенности» распределения),

$e = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ (коэффициент эксцесса или «островершинности» распределения).

Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то коэффициент асимметрии $a = 0$.

Число 3 вычитается из отношения $\dfrac{\mu_4}{\sigma^4}$ потому, что для наиболее часто встречающегося нормального распределения отношение $\dfrac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$. Кривые, островершинные, чем нормальная, обладают положительным эксцессом, более плосковершинные – отрицательным эксцессом.

Квантилю порядка p (симметричной квантилю порядка p) распределения непрерывной случайной величины X называется действительное число x_p (действительное число $\hat{x}_p$), удовлетворяющее уравнению

$$P(X < x_p) = p \qquad \left(P(X < \hat{x}_p)\right).$$

В частности, из определения медианы следует, что $Me(X) = x_{0,5}$.

Критической точкой порядка p (симметричной критической точкой порядка p) распределения непрерывной случайной величины X называется действительное число κ_p $(\widehat{\kappa}_p)$, удовлетворяющее уравнению

$$P(X \ge \kappa_p) = p \qquad \left(P(X \ge \widehat{\kappa}_p)\right).$$

Квантиль и критическая точка одного и того же распределения связаны простым соотношением:

$$\kappa_p = x_{1-p} \quad (\widehat{\kappa}_p = \widehat{x}_{1-p}).$$

Некоторые квантили получили особое название. Медиана случайной величины есть квантиль порядка 0,5. Квантили $x_{0,25}$ и $x_{0,75}$ получили название, соответственно, верхнего и нижнего квартилей. В литературе встречаются также термины: децили, под которыми понимаются квантили $x_{0,1}, x_{0,2}, ..., x_{0,9}$ и процентили – квантили $x_{0,01}, x_{0,02}, ..., x_{0,99}$.

Задание

Изучить материалы лекций №6, №7 и №8 ([4,6]), а также материалы приведенные выше и **решить** следующий вариант задач.

Вариант №1

1. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй – 0,8, третьей – 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете и вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2. Даны законы распределения двух независимых случайных величин

X :

x_i	0	1	3
p_i	0,2	0,5	?

Y :

y_j	2	3
p_j	0,4	?

Найти вероятности, с которыми случайные величины принимают значение 3, а затем составить закон распределения случайной величины $3X - 2Y$ и проверить выполнение свойств математических ожиданий и дисперсий:

$$M(3X - 2Y) = 3M(X) - 2M(Y), \quad D(3X - 2Y) = 9M(X) + 4M(Y).$$

3. Непрерывная случайная величина X имеет распределение Парето с параметрами $a > 0$ и $x_0 > 0$, если ее функция распределения вероятностей имеет следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad x \le x_0, \\ 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right) & \textit{если} \quad x > x_0. \end{cases}$$

а) Выяснить, при каких значениях параметра a для данного распределения существуют математическое ожидание, дисперсия и вычислить их;

б) Вычислить для распределения Парето характеристики $Mo(X)$ и $Me(X)$, а также квантиль x_p порядка $p = 0{,}75$;

в) В некоторых странах с рыночной экономикой действует закон о налогообложении, распространяемый на тех частных предпринимателей, годовой доход, которых превосходит некоторый установленный законом уровень x_0. Считая , что годовой доход наудачу выбранного лица, облагаемого налогом, является случайной величиной X, распределенной по закону Парето с параметрами $a = 4, \quad x_0 = 1000$, найти вероятности следующих событий:

$$A = \{Me(X) \le X \le M(X)\}, \quad B = \{|X - M(X)| < \sigma(X)\}.$$

Критической точкой, какого порядка для данного распределения является математическое ожидание?

Вариант №2

1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1. Составить закон распределения числа попаданий в цель, если сделано три выстрела. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

2. На двух автоматических станках производятся одинаковые изделия. Даны законы распределения числа бракованных изделий, производимых в течение смены на каждом из них:

а) для первого

X:

x_i	0	1	2
p_i	0,1	0,6	0,3

б) для второго

Y:

y_j	0	2
p_j	0,5	0,5

Составить закон распределения числа производимых в течение смены бракованных изделий обоими станками. Проверить свойство математического ожидания суммы случайных величин.

3. Случайная величина X распределена по закону **Коши**, определяемому функцией распределения вероятностей

$$F(x) = b + c \cdot arctg\,\frac{x}{a} \quad при \quad -\infty < x < +\infty .$$

а) Выбрать коэффициенты a, b, c таким образом, чтобы данное распределение соответствовало непрерывной случайной величине;

б) Вычислить плотность вероятности распределения Коши. Существуют ли математическое ожидание и моменты более высокого порядка у данного распределения?

в) Найти моду, медиану и квантиль x_p порядка $p = 0{,}75$ распределения Коши.

Вариант №3

1. Произведено два выстрела в мишень. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8, вторым - 0,7, Составить закон распределения числа попаданий в мишень. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения этой случайной величины и построить ее график (каждый стрелок делает по одному выстрелу).

2. Сделано два высокорисковых вклада: 10 тыс. ден.ед. в компанию А и 15 тыс. ден. ед. в компанию В. Компания А обещает 50 % годовых, но может «лопнут» с вероятностью 0,2. Компания В обещает 40 % годовых, но может «лопнут» с вероятностью 0,15. Составить закон распределения случайной величины – общей суммы прибыли (убытка), полученной от двух компаний через год, и найти ее математическое ожидание.

3. Известно, что при стрельбе по плоской мишени в неизменных условиях случайная величина R- расстояние от точки попадания до центра мишени - подчиняется закону распределения Рэлея с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & если \quad x \le 0, \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & если \quad x > 0, \end{cases}$$

где $\sigma > 0$ параметр, характеризующий распределение.

а) Построить эскиз графика плотности вероятности $f(x)$, проверить условие нормировки и вычислить математическое ожидание и дисперсию;

б) Для случайной величины R, распределенной по закону Рэлея, вычислить моду, медиану и коэффициент асимметрии и выяснить взаимное расположение характеристик $M(X)$, $Mo(X)$ и $Me(X)$.

Вариант №4

1. Найти закон распределения числа пакетов трех акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равен, соответственно, 0,5, 0,6, 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины построить функцию распределения.

2. В первой урне содержится 6 белых и 4 черных шара, а во второй – 3 белых и 7 черных шаров. Из первой урны берут наудачу два шара и перекладывают во вторую урну, затем из второй урны берут наудачу один шар и перекладывают в первую урну. Составить законы распределения числа белых шаров в первой и второй урнах.

3. Случайная величина X подчиняется закону **арксинус**а с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad |x| \geq a, \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} & \text{если} \quad |x| < a. \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения и вычислить математическое ожидание и дисперсию;

б) Для случайной величины, распределенной по закону арксинуса, вычислить $Mo(X)$, $Me(X)$ и $\hat{\kappa}_{0,75}$.

Вариант №5

1. Из пяти гвоздик две белые. Составить закон распределения и найти

функцию распределения случайной личины, выражающей число белых гвоздик среди одновременно взятых. Найти математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины построить функцию.

2. Законы распределения случайных величин X и Y приведены ниже:

x_i	1	2
p_i	0,8	0,2

y_j	-1	0	1	2
p_j	0,2	0,3	0,3	0,2

Определить ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y.

3 Случайная величина X непрерывного типа распределена по закону **Лапласа** с параметрами $m \in R^1$ и $\sigma > 0$, если ее плотность распределения вероятностей задается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{|x-m|\sqrt{2}}{2}} \quad при \quad -\infty < x < +\infty .$$

а) Выразить характеристики $M(X)$ и $\sigma(X)$ через параметры распределения.

б) Случайная величина X распределена по закону Лапласа с параметрами $m = 0$ и $\sigma > 0$. Построить функции распределения и вычислить вероятности $p_k = P(|X|) < k\sigma$ для $k = 1,2,3$.

в) Для случайной величины X вычислить коэффициент асимметрии и коэффициент эксцесса.

Вариант №6

1. Среди 15 собранных агрегатов 6 нуждаются в дополнительной смазке. Составить закон распределения числа агрегатов, нуждающихся в дополнительной смазке среди пяти наудачу отобранных из общего числа.

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

2. Даны законы распределения двух независимых случайных величин

X :

x_i	0	1	3
p_i	0,2	0,5	?

Y :

y_j	2	3
p_j	0,4	?

Найти вероятности, с которыми случайные величины принимают значение 3, а затем составить закон распределения случайной величины $3X-2Y$ и проверить выполнение свойств математических ожиданий и дисперсий:

$$M(3X-2Y)=3M(X)-2M(Y), \quad D(3X-2Y)=9M(X)+4M(Y).$$

3. Случайная величина X, сосредоточенная на интервале (1;4), задана квадратичной функцией $F(x)=ax^2+bx+c$, имеющей максимум при $x=4$.

а) Найти параметры a,b,c и вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал (2;3);

б) Найти моду и медиану случайной величины X;

в) Найти квантиль $x_{0,4}$ и 20%-ную точку распределения X;

г) Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины X.

Вариант №7

1. В магазине продаются 5 отечественных и 3 импортных телевизора. Составить закон распределения случайно величины - числа импортных из четырех наудачу выбранных телевизоров. Найти функцию распределения

этой случайной величины и построить ее график.

2. Одна из случайных величин задана законом распределения

x_i	-1	0	1
p_i	0,1	0,8	0,1

а другая имеет биномиальное распределение с параметрами $n=2,\quad p=0{,}6$. Составить закон распределения их суммы и найти математическое ожидание этой случайной величины.

3. Случайная величина X имеет **гамма -**распределение с параметрами $a>0$ и $b>0$ (для краткости говорят: X подчиняется закону $\Gamma(a,b)$), если она непрерывная случайная величина и ее плотность распределения вероятностей имеет следующий вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{если} \quad x\le 0, \\ \dfrac{b^a}{\Gamma(a)}x^{\alpha-1}e^{-bx} & \textit{если} \quad x>0, \end{cases}$$

где $\Gamma(a)=\int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}dt$ - гамма-функция Эйлера.

Хорошо нам известное **показательное** распределение с параметром λ является частным случаем гамма - распределения с параметрами $a=1,\quad b=\lambda>0$.

Другой частный случай гамма - распределения с параметрами $a=\dfrac{n}{2}$, ($n-$ *натуральное число*), $b=\dfrac{1}{2}$ называется распределением **хи - квадрат** с n степенями свободы (пишут $\chi^2(n)$). Распределение $\chi^2(n)$ играет большую роль в математической статистике.

Случайная величина X распределена по закону $\Gamma(a,b)$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию;

б) Найти коэффициент асимметрии и эксцесс этой случайной величины.

Вариант №8

1.Торговый агент имеет 5 телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4. Составить закон распределения числа телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2. В первой урне содержится 6 белых и 4 черных шара, а во второй – 3 белых и 7 черных шаров. Из первой урны берут наудачу два шара и перекладывают во вторую урну, затем из второй урны берут наудачу один шар и перекладывают в первую урну. Составить законы распределения числа белых шаров в первой и второй урнах.

3. Непрерывная случайная величина $\boldsymbol{X}$ подчиняется закону распределения **Вейбулла** с параметрами $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^1$, $\boldsymbol{b} > 0$, если ее плотность распределения вероятностей записывается в виде

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \textbf{\textit{если}} \quad \boldsymbol{x} \le 0, \\ \dfrac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{b}}\left(\dfrac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{e}^{-\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{n}}} & \textbf{\textit{если}} \quad \boldsymbol{x} > 0. \end{cases}$$

Распределение Вейбулла в ряде случаев характеризует срок службы радиоэлектронной аппаратуры и, кроме того, применяется для аппроксимации различных несимметричных распределений в математической статистике.

Случайная величина $\boldsymbol{X}$ подчиняется распределению Вейбулла с параметрами $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} > 0$. Вычислить математическое ожидание и моду распределения.

Вариант №9

1. Каждый поступающий в институт должен сдать 3 экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена 0,9, второго - 0,8, третьего - 0,7.

Следующий экзамен поступающий сдает только в случае успешной сдачи предыдущего. Составить закон распределения числа экзаменов, сдававшихся поступающим в институт. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

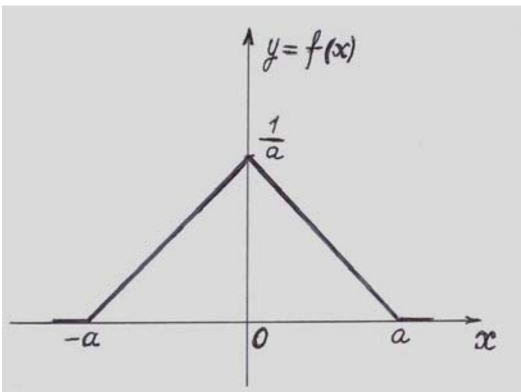
2. Законы распределения случайных величин X и Y приведены ниже:

x_i	1	2
p_i	0,8	0,2

y_j	-1	0	1	2
p_j	0,2	0,3	0,3	0,2

Определить ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y.

3. Случайная величина X распределена по закону **равнобедренного треугольника** в интервале $(-a, a)$ (закон **Симпсона**), если она непрерывная случайная величина и ее плотность распределения вероятностей имеет вид, изображенный на следующем рисунке.



а) Написать выражение для $f(x)$, вычислить функцию распределения вероятностей.

б) Для случайной величины, распределенной по закону Симпсона, найти математическое ожидание, дисперсию, моду, медиану и коэффициент эксцесса.

Вариант №10

1. Из поступивших в ремонт 10 часов 7 нуждаются в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в чистке, рассматривает их поочередно и, найдя такие часы, прекращает дальнейший просмотр. Составить закон распределения числа просмотренных часов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2. Случайные величины X и Y независимы и имеют один и тот же закон распределения:

Значение	1	2	3
Вероятность	0,2	0,3	0,5

Составить закон распределения случайных величин $2X$ и $X+Y$. Убедиться в том, что $2X \neq X+Y$, но $M(2X) = M(X+Y)$.

3. Случайная величина X имеет **гамма -**распределение с параметрами $a > 0$ и $b > 0$ (для краткости говорят: X подчиняется закону $\Gamma(a,b)$), если она непрерывная случайная величина и ее плотность распределения вероятностей имеет следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad x \le 0, \\ \dfrac{b^{a}}{\Gamma(a)} x^{\alpha - 1} e^{-bx} & \textit{если} \quad x > 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(a) = \int\limits_{0}^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ -гамма-функция Эйлера.

Хорошо нам известное **показательное** распределение с параметром λ является частным случаем гамма - распределения с параметрами $\boldsymbol{a}=1, \quad \boldsymbol{b}=\lambda>0$.

Другой частный случай гамма - распределения с параметрами $\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{n}}{2}, \ (\boldsymbol{n}-\textit{натуральное} \quad \textit{число}), \ \boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$ называется распределением **хи - квадрат** с $\boldsymbol{n}$ степенями свободы (пишут $\chi^2(\boldsymbol{n})$). Распределение $\chi^2(\boldsymbol{n})$ играет большую роль в математической статистике.

Если $\boldsymbol{X}$ подчиняется закону $\chi^2(\boldsymbol{n})$, то ее плотность распределения вероятностей записывается в виде

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases} 0, & \textit{если} \quad \boldsymbol{x}\le 0, \\ \dfrac{1}{2^{\frac{2}{\boldsymbol{n}}}\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{n}}{2}\right)}\boldsymbol{x}^{\frac{\boldsymbol{n}}{2}-1}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{x}}{2}} & \textit{если} \quad \boldsymbol{x}>0. \end{cases}$$

Случайная величина $\boldsymbol{X}$ распределена по закону $\chi^2(4)$.

а) Вычислить математическое ожидание, дисперсию и медиану;

б) Критической точкой какого порядка является значение $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})$.

Вариант №11

1. Имеются 4 ключа, из которых только один подходит к замку. Составить закон распределения числа попыток открывания замка, если испробованный ключ в последующих попытках не участвует. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

2. Одна из случайных величин задана законом распределения

x_i	-1	0	1
p_i	0,1	0,8	0,1

а другая имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 2, \quad p = 0,6$. Составить закон распределения их суммы и найти математическое ожидание этой случайной величины.

3. Непрерывная случайная величина X имеет **бета** - распределение с параметрами $a > 0, \quad b > 0$, если ее плотность распределения вероятностей записывается в виде

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & \textit{если} \qquad 0 < x < 1, \\ 0, & \textit{если} \quad x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty), \end{cases}$$

где $\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ -гамма-функция Эйлера.

Частным случаем бета - распределения при $a = 1, \quad b = 1$ является, хорошо нам известное, **равномерное** распределение на отрезке [0, 1].

Случайная величина X подчиняется бета - распределению с параметрами $a > 0, \quad b > 0$. Вычислить математическое ожидание и дисперсию.

Вариант №12

1. Абонент забыл последнюю цифру нужного ему номера телефона, однако помнит, что она нечетная. Составить закон распределения числа сделанных им наборов номера телефона до попадания на нужный номер, если последнюю цифру он набирает наудачу, а набранную цифру в дальнейшем не набирает. Найти математическое ожидание и функцию распределения этой случайной величины.

2. Два стрелка сделали по два выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго - 0,7.

Необходимо: а) составить закон распределения **общего** числа попаданий; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Вариант №13

1. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна, 0,6, при каждом последующем - уменьшается на 0,1. Необходимо: а) составить закон распределения числа патронов, израсходованных охотником; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2. Пусть X, Y, Z - случайные величины: X - выручка фирмы, Y - ее затраты, $Z = X - Y$ - прибыль. Найти распределение прибыли Z, если затраты и выручка независимы и заданы распределениями:

X:

x_i	3	4	5
p_i	1/3	1/3	1/3

Y:

y_j	1	2
p_j	1/2	1/2

3. Случайная величина X распределена по закону **Коши**, определяемому функцией распределения вероятностей

$$F(x) = b + c \cdot arctg\frac{x}{a} \quad при \quad -\infty < x < +\infty .$$

а) Выбрать коэффициенты a, b, c таким образом, чтобы данное распределение соответствовало непрерывной случайной величине;

б) Вычислить плотность вероятности распределения Коши. Существуют ли математическое ожидание и моменты более высокого порядка у данного распределения?

в) Найти моду, медиану и квантиль x_p порядка $p = 0{,}75$ распределения Коши.

Вариант №14

1. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, для первого станка равна 0,9, для второго – 0.8, для третьего – 0,75 и для четвертого – 0,7. Составить закон распределения случайной величины X - числа станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа.

2. Одна из случайных величин задана законом распределения

x_i	-1	0	1
p_i	0,1	0,8	0,1

а другая имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 2$, $p = 0{,}6$. Составить закон распределения их суммы и найти математическое ожидание этой случайной величины.

3. Непрерывная случайная величина X подчиняется закону распределения **Вейбулла** с параметрами $n \in N$, $a \in R^1$, $b > 0$, если ее плотность распределения вероятностей записывается в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ \dfrac{n}{b}\left(\dfrac{x-a}{b}\right)^{n-1} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{n}} & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Распределение Вейбулла в ряде случаев характеризует срок службы радиоэлектронной аппаратуры и, кроме того, применяется для аппроксимации различных несимметричных распределений в математической статистике.

Случайная величина X подчиняется распределению Вейбулла с параметрами n, a, $b > 0$. Вычислить математическое ожидание и моду распределения.

Вариант №15

1. Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных деталей). Составить закон распределения числа проверенных деталей. Найти его математическое ожидание и дисперсию, если известно, что вероятность брака для каждой детали равна 0,01.

2. Законы распределения случайных величин X и Y приведены ниже:

x_i	1	2
p_i	0,8	0,2

y_j	-1	0	1	2
p_j	0,2	0,3	0,3	0,2

Определить ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y.

3. Случайная величина X, сосредоточенная на интервале (1;4), задана квадратичной функцией $F(x) = ax^2 + bx + c$, имеющей максимум при $x = 4$.

а) Найти параметры a, b, c и вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал [2;3];

б) Найти моду и медиану случайной величины X;

в) Найти квантиль $x_{0,4}$ и 20%-ную точку распределения X;

г) Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины X.

Вариант №16

1. Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных деталей). Составить закон распределения числа проверенных деталей. Найти его математическое ожидание и дисперсию, если известно, что вероятность брака для каждой детали равна 0,01.

2. В первой урне содержится 6 белых и 4 черных шара, а во второй – 3 белых и 7 черных шаров. Из первой урны берут наудачу два шара и перекладывают во вторую урну, затем из второй урны берут наудачу один шар и перекладывают в первую урну. Составить законы распределения числа белых шаров в первой и второй урнах.

3. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ непрерывного типа распределена по закону **Лапласа** с параметрами $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{R}^1$ и $\sigma > 0$, если ее плотность распределения вероятностей задается формулой

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \boldsymbol{e}^{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}|\sqrt{2}}{2}} \qquad \boldsymbol{при} \quad -\infty < \boldsymbol{x} < +\infty.$$

а) Выразить характеристики $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})$ и $\sigma(\boldsymbol{X})$ через параметры распределения.

б) Случайная величина $\boldsymbol{X}$ распределена по закону Лапласа с параметрами $\boldsymbol{m} = 0$ и $\sigma > 0$. Построить функции распределения и вычислить вероятности $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{P}(|\boldsymbol{X}|) < \boldsymbol{k}\sigma$ для $\boldsymbol{k} = 1,2,3$.

в) Для случайной величины $\boldsymbol{X}$ вычислить коэффициент асимметрии и коэффициент эксцесса.

Вариант №17

1. Из поступивших в ремонт 10 часов 7 нуждаются в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в чистке, рассматривает их поочередно и, найдя такие часы, прекращает дальнейший просмотр. Составить закон распределения числа

просмотренных часов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2. Сделано два высокорисковых вклада: 10 тыс. ден.ед. в компанию А и 15 тыс. ден. ед. в компанию В. Компания А обещает 50 % годовых, но может «лопнут» с вероятностью 0,2. Компания В обещает 40 % годовых, но может «лопнут» с вероятностью 0,15. Составить закон распределения случайной величины – общей суммы прибыли (убытка), полученной от двух компаний через год, и найти ее математическое ожидание.

3. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ подчиняется закону **арксинус**а с плотностью распределения вероятностей

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{если} \quad |\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{a}, \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{x}^2}} & \boldsymbol{если} \quad |\boldsymbol{x}| < \boldsymbol{a}. \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения и вычислить математическое ожидание и дисперсию;

б) Для случайной величины, распределенной по закону арксинуса, вычислить $\boldsymbol{Mo}(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{Me}(\boldsymbol{X})$ и $\hat{\kappa}_{0,75}$.

Вариант №18

1. Абонент забыл последнюю цифру нужного ему номера телефона, однако помнит, что она нечетная. Составить закон распределения числа сделанных им наборов номера телефона до попадания на нужный номер, если последнюю цифру он набирает наудачу, а набранную цифру в дальнейшем не набирает. Найти математическое ожидание и функцию распределения этой случайной величины.

2. На двух автоматических станках производится одинаковые изделия. Даны законы распределения числа бракованных изделий, производимых в течение смены на каждом из них:

а) для первого

X:

x_i	0	1	2
p_i	0,1	0,6	0,3

б) для второго

Y:

y_j	0	2
p_j	0,5	0,5

Составить закон распределения числа производимых в течение смены бракованных изделий обоими станками. Проверить свойство математического ожидания суммы случайных величин.

3. Известно, что при стрельбе по плоской мишени в неизменных условиях случайная величина R - расстояние от точки попадания до центра мишени - подчиняется закону распределения Рэлея с плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{если} \quad x\le 0, \\ \dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \textit{если} \quad x>0, \end{cases}$$

где $\sigma>0$ параметр, характеризующий распределение.

а) Построить эскиз графика плотности вероятности $f(x)$, проверить условие нормировки и вычислить математическое ожидание и дисперсию;

б) Для случайной величины R, распределенной по закону Рэлея, вычислить моду, медиану и коэффициент асимметрии и выяснить взаимное расположение характеристик $M(X)$, $Mo(X)$ и $Me(X)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1999.

2. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ, 2001.

3. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ИНФРА, 1997.

4. Бабаджанов Ш.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций. Ташкент: ТФИ, 2004.

5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1998.

6. Адиров Т.Х., Мамуров Э.Н. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан маърузалар матни.Ташкент: ТМИ,2001.

7. Адиров Т.Х., Мамуров Э.Н. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Ўқув қўлланма. Ташкент: IQNBSJD - MOLIYA, 2005.

Самостоятельная работа 3

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

1. Из повседневного опыта известно, что массовые случайные явления обладают свойствами устойчивости средних. Это означает, что при независимых испытаниях случайной величины *X* среднее арифметическое $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ полученных значений при больших n стабилизируется. Случайные колебания значений каждого испытания взаимно компенсируются и случайная величина $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, где X_i есть *i*-е испытание величины *X (i=1, 2, ..., n),* при больших n теряет свой случайный характер. Теоремы, описывающие такие ситуации называются законами больших чисел.

Закон больших чисел играет важную роль в теоретическом обосновании методов математической статистики и ее приложений.

В теории вероятностей существуют разные формы закона больших чисел ([1-7]).

Два варианта закона больших чисел — теоремы Бернулли и Чебышева приведены в лекции №9 [4].

Замечание. Кроме различных форм закона больших чисел в теории вероятностей имеются разные формы так называемого «усиленного закона больших чисел», где показывается не «сходимость по вероятности», а «сходимость с вероятностью 1» различных средних величин к неслучайным средним. Однако этот усиленный закон представляет больше интерес в теоретических исследованиях и не столь важен для его приложений в экономике.

2. Кроме законов больших чисел, описывающих устойчивость средних значений и упомянутых в п.1, в теории вероятностей имеет место еще одно замечательное явление. Как и законы больших чисел, это явление заключается в том, что при большом количестве случайных слагаемых, каждое из которых вносит лишь небольшой вклад в общую сумму, распределение каждого из слагаемых не влияет на суммарный результат. Точнее, при указанных условиях вид распределения суммы не зависит от распределения слагаемых. Оказывается, что при некоторых условиях совокупное действие случайных величин приводит к определенному, а именно – к **нормальному закону распределения.**

Центральная предельная теорема представляет группу теорем, посвященных установлению условий, при которых возникает нормальный закон распределения. Среди теорем важнейшее место принадлежит теореме Ляпунова.

В теории вероятностей существуют различные варианты теоремы Ляпунова. Один из простых вариантов этой теоремы приведен в лекции №9 [4]. С другими вариантами можно ознакомиться, например, в [1-3,5-7].

Замечание. Необходимо соблюдать известную осторожность, применяя центральную предельную теорему в статистических исследованиях. Так, если сумма $\sum_{i=1}^{n} X_i$ при $n \to \infty$ всегда имеет нормальный закон распределения, то **скорость** сходимости к нему существенно завесит от типа распределения.

Опираясь на центральную предельную теорему, можно утверждать, что случайные величины, имеющие законы распределения – биномиальный, Пуассона, гипергеометрический, «хи-квадрат», Стьюдента при $n \to \infty$ распределены нормально.

Задание

Изучить материалы лекций №9 ([4,6]), а также материалы приведенные в [1-3,5-7] и **решить** следующий вариант задач.

Вариант №1

Длина изготовляемых изделий представляет случайную величину, среднее значение которой (математическое ожидание) равно 90 см. Дисперсия этой величины равна 0,0225. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что: а) отклонение длины изготовленного изделия от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0,4; б) длина изделия выразится числом, заключенным между 89,7 и 90,3 см.

Вариант №2

Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна 0,05. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время t окажется меньше двух.

Вариант №3

Последовательность независимых случайных величин $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}, ...$ задана законом распределения:

$$\begin{array}{lcc} \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}: & \boldsymbol{a} & -\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{p}: & \dfrac{\boldsymbol{n}}{2\boldsymbol{n}-1} & \dfrac{\boldsymbol{n}+1}{2\boldsymbol{n}+1} \end{array}.$$

Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева?

Вариант №4

Дана последовательность независимых случайных величин $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}, ...$Случайная величина $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}, (\boldsymbol{i} = 1,2,...)$ может принимать только три значения: $-\sqrt{\boldsymbol{n}}$, 0, $\sqrt{\boldsymbol{n}}$ с вероятностями, равными, соответственно,

$\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n}$, $\frac{1}{n}$. Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева?

Вариант №5

Среднее изменение курса акции компании в течение одних биржевых торгов составляет 0,3%. Оценить вероятность того, что на ближайших торгах курс изменится более, чем на 3%.

Вариант №6

Отделение банка обслуживает в среднем 100 клиентов в день. Оценить вероятность того, что сегодня в отделении банка будет обслужено: а) не более 200 клиентов; б) более 150 клиентов.

Вариант №7

Электростанция обслуживает сеть на 1600 электроламп, вероятность включения каждой из которых вечером равна 0,9. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что число ламп, включенных в сеть вечером, отличается от своего математического ожидания не более чем на 100 (по абсолютной величине). Найти вероятность того же события, используя следствие из интегральной теоремы Муавра—Лапласа.

Вариант №8

Вероятность того, что акции, переданные на депозит, будут востребованы, равны 0,08. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что среди 1000 клиентов от 70 до 90 востребуют свои акции.

Вариант №9

Среднее значение длины детали 50 см, а дисперсия -0,1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине не менее 49,5 и не более 50,5 см. Уточнить вероятность того же события, если известно, что длина случайно взятой детали имеет нормальный закон распределения.

Вариант №10

Оценить вероятность того, что отклонение любой случайной величины от ее математического ожидания будет не более двух средних квадратических отклонений (по абсолютной величине).

Вариант №11

В течение времени t эксплуатируются 500 приборов. Каждый прибор имеет надежность 0,98 и выходит из строя независимо от других. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что доля надежных приборов отличается от 0,98 не более чем на 0,1 (по абсолютной величине).

Вариант №12

Вероятность сдачи в срок всех экзаменов студентом факультета равна 0,7. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что доля сдавших в срок все экзамены из 2000 студентов заключена в границах от 0,66 до 0,74.

Вариант №13

Бензоколонка N заправляет легковые и грузовые автомобили. Вероятность того, что проезжающий легковой автомобиль подъедет на заправку, равна 0,3. С помощью неравенства Чебышева найти границы, в которых с вероятностью, не меньшей 0,79, находится доля заправившихся в течение 2 ч легковых автомобилей, если за это время всего заправилось 100 автомобилей.

Вариант №14

В среднем 10% работоспособного населения некоторого региона — безработные. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что уровень безработицы среди обследованных 10 000 работоспособных жителей города будет в пределах от 9 до 11 % (включительно).

Вариант №15

Выход цыплят в инкубаторе составляет в среднем 70% числа заложенных яиц. Сколько нужно заложить яиц, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, ожидать, что отклонение числа вылупившихся цыплят от математического ожидания их не превышало 50 (по абсолютной величине)? Решить задачу с помощью: а) неравенства Чебышева; б) интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

Вариант №16

Опыт работы страховой компании показывает, что страховой случай приходится примерно на каждый пятый договор. Оценить с помощью неравенства Чебышева необходимое количество договоров, которые следует заключить, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что доля страховых случаев отклонится от 0,1 не более чем на 0,01 (по абсолютной величине). Уточнить ответ с помощью следствия из интегральной теоремы Муавра - Лапласа.

Вариант №17

В целях контроля из партии в 100 ящиков взяли по одной детали из каждого ящика и измерили их длину. Требуется оценить вероятность того, что вычисленная по данным выборки средняя длина детали отличается от средней длины детали во всей партии не более чем на 0,3 мм, если известно, что среднее квадратическое отклонение не превышает 0,8 мм.

Вариант №18

Сколько нужно произвести измерений, чтобы с вероятностью, равной 0,9973, утверждать, что погрешность средней арифметической результатов этих измерений не превысит 0,01, если измерение характеризуется средним квадратическим отклонением, равным 0,03?

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1999.

2. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ, 2001.

3. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ИНФРА, 1997.

4. Бабаджанов Ш.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций. Ташкент: ТФИ, 2004.

5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1998.

6. Адиров Т.Х., Мамуров Э.Н. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан маърузалар матни. Ташкент: ТМИ,2001.

7. Адиров Т.Х., Мамуров Э.Н. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Ўқув қўлланма. Ташкент.: IQNBSJD - MOLIYA, 2005.

Самостоятельная работа 4

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ ПО ВЫБОРКЕ

Основная задача математической статистики состоит в нахождении распределения наблюдаемой случайной величины X по данным выборки. Во многих случаях вид распределения X можно считать известным, и задача сводится к получению приближенных значений – оценок неизвестных параметров этого распределения. Рассматривают оценки характеристик распределения двух видов: **точечную и интервальную**.

●●●

Определение понятия точечной оценки и основные требования, предъявляемые к точечным оценкам: несмещенность, эффективность и состоятельность приведены в лекции №11 ([4]).

Основными методами нахождения точечных оценок являются:

- **метод подстановки или аналогии;**
- **метод максимального правдоподобия;**
- **метод моментов;**
- **метод наименьших квадратов.**

Метод подстановки или аналогии – состоит в том, что в качестве оценки той или иной числовой характеристики (среднего, дисперсии и др.) генеральной совокупности берут соответствующую характеристику распределения выборки – выборочную характеристику. Точечные оценки, рассмотренные в лекции №11 ([4]) , получены методом подстановки (или аналогии). Изучение других методов нахождения точечных оценок - метод максимального правдоподобия, метод моментов, метод наименьших квадратов предусмотрено самостоятельно.

Задание 1

Самостоятельно изучить ([2,3]) другие методы нахождения точечных оценок - метод максимального правдоподобия, метод моментов, метод наименьших квадратов. Подробно **описать** (письменно) сущность, преимущества и недостатки каждого из этих методов. **Решить** следующий вариант задач.

Вариант №1

1. Найти методом максимального правдоподобия точечные оценки математического ожидания m и дисперсии σ^2 нормально распределенной генеральной совокупности.

2. Найти методом моментов точечные оценки неизвестных параметров a и b для Γ - распределения с плотностью

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, & x > 0. \end{cases}$$

Вариант №2

1. Найти методом максимального правдоподобия точечную оценку параметра λ распределения Пуассона.

2. По выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ объема n методом моментов найти точечную оценку параметра λ распределения Пуассона.

Вариант №3

1. Найти методом максимального правдоподобия точечную оценку параметра σ по выборке объема n из нормально распределенной генеральной

совокупности с известным математическим ожиданием m. Показать, что полученная оценка является смещенной.

2. По выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ объема n методом моментов найти точечные оценки параметров нормального распределения.

Вариант №4

1. Пусть x - наблюдаемое значение случайной величины, имеющей биномиальное распределение или, другими словами, x - число «успехов» в n независимых испытаниях, причем p - вероятность «успеха» в одном испытании. Найти точечную оценку параметра p методом максимального правдоподобия. Показать, что полученная оценка является несмещенной, состоятельной и эффективной.

2. По выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ объема n методом моментов найти точечную оценку параметра λ пуассоновского распределения.

Вариант №5

1. Пусть x - число автолюбителей, заправившихся на данной станции в течение n часов. Предположим, что число автолюбителей, подъезжающих на заправку, есть случайная величина X, имеющая распределение Пуассона с параметром $n\lambda$, где λ-ожидаемое число заправляющихся автолюбителей в течение одного часа. Найти точечную оценку параметра λ. Показать, что полученная оценка является несмещенной, состоятельной и эффективной.

2. Пусть x - наблюдаемое значение случайной величины, имеющей биномиальное распределение или, другими словами, x - число «успехов» в n независимых испытаниях, причем p - вероятность «успеха» в одном испытании. Найти точечную оценку параметра p методом моментов.

Вариант №6

1. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ - выборка из генеральной совокупности, имеющей равномерное распределение

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]. \end{cases}$$

Методом максимального правдоподобия найти точечные оценки параметров a и b по выборке.

2. По выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ объема n методом моментов найти точечную оценку параметра λ показательного распределения.

Вариант №7

1. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, \sqrt{\dfrac{2}{k}}], \\ kx, & x \in [0, \sqrt{\dfrac{2}{k}}]. \end{cases}$$

Методом максимального правдоподобия найти точечную оценку математического ожидания X по выборке объема n.

2. Найти методом моментов точечную оценку параметра p (вероятности) геометрического распределения $P\left(X = x_i\right) = (1-p)^{x_i - 1} \cdot p$, где x_i -число испытаний, произведенных до появления события; p - вероятность появления события в одном испытании.

Вариант №8

1. Найти методом максимального правдоподобия по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечную оценку параметра a (параметр σ известен) распределения Кэптейна, плотность которого

$$f(x) = \frac{g'(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[g(x)-a]^2/(2\sigma^2)},$$

где $g(x)$ - дифференцируемая функция.

2. По выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ объема n методом моментов найти точечную оценку параметра λ показательного распределения.

Вариант №9

1. Найти методом максимального правдоподобия по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечную оценку параметра σ (параметр a известен) распределения Кэптейна, плотность которого

$$f(x) = \frac{g'(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[g(x)-a]^2/(2\sigma^2)},$$

где $g(x)$ - дифференцируемая функция.

2. Найти методом моментов точечные оценки неизвестных параметров a и b для Γ - распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, & x > 0. \end{cases}$$

Вариант №10

1. При помощи n различных приборов получены n измерений случайной величины X. В предположении, что X имеет нормальное распределение, а дисперсия i-го измерения известна и равна σ_i^2, $i = 1, 2, ..., n$, найти методом максимального правдоподобия точечную оценку математического ожидания m случайной величины X. Показать, что полученная оценка является несмещенной, и вычислить ее дисперсию.

2. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ - выборка из генеральной совокупности, имеющей равномерное распределение

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]. \end{cases}$$

Методом моментов найти точечные оценки параметров $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по выборке.

Вариант №11

1. Найти методом максимального правдоподобия точечную оценку параметра σ по выборке объема $\boldsymbol{n}$ из нормально распределенной генеральной совокупности с известным математическим ожиданием $\boldsymbol{m}$. Показать, что полученная оценка является смещенной.

2. По выборке $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}$ объема $\boldsymbol{n}$ методом моментов найти точечные оценки параметров нормального распределения.

Вариант №12

1. Пусть $\boldsymbol{x}$ - наблюдаемое значение случайной величины, имеющей биномиальное распределение или, другими словами, $\boldsymbol{x}$ - число «успехов» в $\boldsymbol{n}$ независимых испытаниях, причем $\boldsymbol{p}$ - вероятность «успеха» в одном испытании. Найти точечную оценку параметра $\boldsymbol{p}$ методом максимального правдоподобия. Показать, что полученная оценка является несмещенной, состоятельной и эффективной.

2. По выборке $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}$ объема $\boldsymbol{n}$ методом моментов найти точечную оценку параметра λ пуассоновского распределения.

Вариант №13

1. Пусть $\boldsymbol{x}$ - число автолюбителей, заправившихся на данной станции в течение $\boldsymbol{n}$ часов. Предположим, что число автолюбителей, подъезжающих на заправку, есть случайная величина $\boldsymbol{X}$, имеющая распределение Пуассона с параметром $\boldsymbol{n}\lambda$, где λ-ожидаемое число заправляющихся автолюбителей в

течение одного часа. Найти точечную оценку параметра λ. Показать, что полученная оценка является несмещенной, состоятельной и эффективной.

2. Пусть $\boldsymbol{x}$ - наблюдаемое значение случайной величины, имеющей биномиальное распределение или, другими словами, $\boldsymbol{x}$ - число «успехов» в $\boldsymbol{n}$ независимых испытаниях, причем $\boldsymbol{p}$ - вероятность «успеха» в одном испытании. Найти точечную оценку параметра $\boldsymbol{p}$ методом моментов.

Вариант №14

1. Пусть $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}$ - выборка из генеральной совокупности, имеющей равномерное распределение

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]. \end{cases}$$

Методом максимального правдоподобия найти точечные оценки параметров $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по выборке.

2. По выборке $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}$ объема $\boldsymbol{n}$ методом моментов найти точечную оценку параметра λ показательного распределения.

Вариант №15

1. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ имеет плотность распределения

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{x} \notin [0, \sqrt{\dfrac{2}{\boldsymbol{k}}}] \\ \boldsymbol{kx}, & \boldsymbol{x} \in [0, \sqrt{\dfrac{2}{\boldsymbol{k}}}] \end{cases}$$

Методом максимального правдоподобия найти точечную оценку математического ожидания $\boldsymbol{X}$ по выборке объема $\boldsymbol{n}$.

2. Найти методом моментов точечную оценку параметра $\boldsymbol{p}$ (вероятности) геометрического распределения $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}\right) = (1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}} - 1} \cdot \boldsymbol{p}$, где

x_i -число испытаний, произведенных до появления события; p - вероятность появления события в одном испытании.

Вариант №16

1. Найти методом максимального правдоподобия по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечную оценку параметра a (параметр σ известен) распределения Кэптейна, плотность которого

$$f(x) = \frac{g'(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[g(x)-a]^2/(2\sigma^2)},$$

где $g(x)$ - дифференцируемая функция.

2. По выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ объема n методом моментов найти точечную оценку параметра λ показательного распределения.

Вариант №17

1. Найти методом максимального правдоподобия по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечную оценку параметра σ (параметр a известен) распределения Кэптейна, плотность которого

$$f(x) = \frac{g'(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[g(x)-a]^2/(2\sigma^2)},$$

где $g(x)$ - дифференцируемая функция.

2. Найти методом моментов точечные оценки неизвестных параметров a и b для Γ - распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, & x > 0. \end{cases}$$

Вариант №18

1. При помощи n различных приборов получены n измерений случайной величины X. В предположении, что X имеет нормальное распределение, а

дисперсия $\boldsymbol{i}$-го измерения известна и равна $\sigma_{\boldsymbol{i}}^2$, $\boldsymbol{i}=1,2,...,\boldsymbol{n}$, найти методом максимального правдоподобия точечную оценку математического ожидания $\boldsymbol{m}$ случайной величины $\boldsymbol{X}$. Показать, что полученная оценка является несмещенной, и вычислить ее дисперсию.

2. Пусть $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}$ - выборка из генеральной совокупности, имеющей равномерное распределение

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]. \end{cases}$$

Методом моментов найти точечные оценки параметров $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по выборке.

●●●

Определения интервальной оценки и понятий связанные с ней приведены в лекции №12 ([4]). Здесь же рассмотрены доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения а) при известном среднем квадратическом отклонении σ; б) при неизвестном среднем квадратическом отклонении σ, а также доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения. Если распределение генеральной совокупности не является нормальным, то в отдельных случаях по выборкам большого объема можно построить доверительные интервалы для неизвестных параметров приближенно, используя при этом предельные теоремы теории вероятностей ([1- 5]) и вытекающие из них асимптотические распределения и оценки. К таковым относятся:

● **доверительные интервалы для вероятности успеха в схеме Бернулли (биномиальное распределение);**

● **доверительные интервалы для параметра λ распределения Пуассона.**

Кроме этого в литературе часто приводят

● **доверительные интервалы для коэффициента корреляции** ρ двумерной нормально распределенной совокупности и др.

Задание 2

Самостоятельно изучить [1-5] и **описать** (письменно) схему построения доверительных интервалов для вероятности успеха в схеме Бернулли (биномиальное распределение), доверительных интервалов для параметра λ распределения Пуассона и доверительных интервалов для коэффициента корреляции ρ двумерной нормально распределенной совокупности. Решить вариант задачи.

Вариант№1

При проверке 100 деталей из большой партии обнаружено 10 бракованных деталей.

а) Найти 95%-ный приближенный доверительный интервал для доли бракованных деталей во всей партии.

б) Какой минимальный объем выборки следует взять для того, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что доля бракованных деталей по всей партии отличается от частоты появления бракованных деталей в выборке не более чем на 1%?

Вариант№2

Из большой партии транзисторов одного типа были случайным образом отобраны и проверены 100 штук. У 36 транзисторов коэффициент усиления оказался меньше 10. Найти 95%-ный доверительный интервал для доли таких транзисторов во всей партии.

Вариант№3

С автоматической линии, производящей подшипники, было отобрано 400 штук, причем 10 оказалось бракованными. Найти 90 %-ный доверительный интервал для вероятности появления бракованного подшипника. Сколько подшипников надо проверить, чтобы с вероятностью 0,9973 можно было утверждать, что вероятность появления бракованного подшипника не отличается от частоты более чем на 5%?

Вариант№4

В 10 000 сеансах игры с автоматом выигрыш появился 4000 раз. Найти 95%-ный доверительный интервал для вероятности выигрыша. Сколько сеансов игры следует провести, чтобы с вероятностью 0,99 вероятность выигрыша отличалась от частоты не более чем на 1%?

Вариант№5

При осмотре 60 ящиков обнаружено 10 поврежденных. Найти 90%-ный доверительный интервал для доли поврежденных ящиков во всей партии.

Вариант№6

Из урны, содержащей неотличимые на ощупь черные и белые шары в неизвестной пропорции, случайным образом извлекается 100 шаров (с возвращением). Найти: а) 90%-ный и б) 95%-ный доверительные интервалы для доли черных шаров, если среди вынутых шаров оказалось 30 черных.

Вариант№7

Построить доверительные интервалы для коэффициентов корреляции ρ двумерной нормально распределенной совокупности по следующим данным: $\boldsymbol{r} = -0{,}687, \quad \boldsymbol{n} = 50, \quad \gamma = 0{,}95.$

Вариант№8

На каждой из 36 АТС города в период с двух до трех часов было зафиксировано в среднем 2 вызова. Считая, что число вызовов для каждой АТС имеет распределение Пуассона с одним и тем же параметром Х, приближенно найти доверительный интервал для Х с доверительной вероятностью 0,9.

Вариант№9

Среднее число сбоев в сутки для 100 компьютеров одного типа равно 2,3. В предположении, что число сбоев имеет распределение Пуассона с параметром λ, приближенно найти 95%-ный доверительный интервал для λ.

Вариант№10

Выборочный коэффициент корреляции, вычисленный по выборке объема 10, выборочный коэффициент корреляции $r = -0{,}64$. Найти 90% - ный доверительный интервал для коэффициента корреляции ρ.

Вариант№11

Производится независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Найти доверительный интервал для оценки вероятности p с надежностью 0,95, если в 60 испытаниях событие A появилось 15 раз.

Вариант№12

Производятся независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Найти доверительный интервал для оценки вероятности p с надежностью 0,99, если в 100 испытаниях событие A появилось 60 раз.

Вариант№13

Изготовлен экспериментальный игровой автомат, который должен обеспечить появление выигрыша в одном случае из 100 бросаний монеты в автомат. Для проверки пригодности автомата произведено 400 испытаний, причем выигрыш появился 5 раз. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность появления выигрыша с надежностью y = 0,999.

Вариант№14

Произведено 300 испытаний, в каждом из которых неизвестная вероятность p появления события A постоянна. Событие A появилось в 250 испытаниях. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p с надежностью 0,95.

Вариант№15

В 360 испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события одинакова и неизвестна, событие A появилось 270 раз. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p с надежностью 0,95.

Вариант№16

Среди 250 деталей, изготовленных станком-автоматом, оказалось 32 нестандартных. Найти доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,99 неизвестную вероятность p изготовления станком нестандартной детали.

Вариант№17

При испытаниях 1000 элементов зарегистрировано 100 отказов. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p отказа элемента с надежностью: а) 0,95; б) 0,99.

Вариант№18

Построить доверительные интервалы для коэффициентов корреляции ρ двумерной нормально распределенной совокупности по следующим данным: $\boldsymbol{r} = -0{,}64, \quad \boldsymbol{n} = 50, \quad \gamma = 0{,}95$.

ЛИТЕРАТУРА

1.Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1999.

2.Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ, 2001.

3.Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: ИНФРА, 1997.

4.Бабаджанов Ш.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций. Ташкент: ТФИ, 2004.

5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1998.

6.Калинина В.Н., Панкин В.Н. Математическая статистика. М.: Высшая школа, 1998.

Самостоятельная работа №5

РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ (ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ)

Задание

Изучить материал п.1 лекции №14 ([4]). По аналогии используя метод наименьших квадратов найти формулы для вычисления параметров указанных регрессионных уравнений и составить указанные регрессионные уравнения.

По заданной таблице значений признаков X и Y методом наименьших квадратов построить указанные два разных регрессионных уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Замечание. Из двух разных приближений, следуя принципу наименьших квадратов, лучшим нужно считать то, для которого сумма

$$\sigma = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \varepsilon_{\boldsymbol{i}}^{2}$$

имеет наименьшее значение. Здесь $\varepsilon_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{y}_i$.

Следует отметить, что для выполнения работы требуется произвести немало вычислений с использованием значительного количества числовых значений, порождаемых главным образом в процессе самого счета (исходными данными здесь являются только числа из заданной таблицы). Очевидно, что наиболее подходящими инструментами в этом случае являются персональные компьютеры и специализированные программируемые микрокалькуляторы. Если при выполнении работы использованы и указанные инструменты, то необходимо указать вид ПК или СПМ и описать операции необходимые для выполнения вычислений.

Пример. По заданной таблице значений признаков X и Y

Таблица 1

x_i	1,1	1,7	2,4	3,0	3,7	4,5	5,1	5,8
y_i	0,3	0,6	1,1	1,7	2,3	3,0	3,8	4,6

методом наименьших квадратов построить линейную $Y = \rho x + b$ и степенную $Y = b_0 x^{b_1}$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество приближений.

Решение. Значения параметров ρ и b линейной регрессии находятся (см. лек. №14 из [4]) из системы:

$$\left.\begin{aligned} &(\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i)\rho + (\sum_{i=1}^{n} x_i)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &(\sum_{i=1}^{n} x_i)\rho + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

или по формуле

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \\ b &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Значения параметров ρ и b находим, например, из системы (*), коэффициенты которой вычисляются из исходной таблицы 1. Для вычисления коэффициентов системы по заданной таблице 1 составим вспомогательную таблицу 2.

Таблица 2

x_i	y_i	$x_i \quad y_i$	$x_i^{\ 2}$
1,1	0,3	0,33	1,21
1,7	0,6	1,02	2,89
2,4	1,1	2,64	5,76
3,0	1,7	5,10	9,00
3,7	2,3	8,51	13,69
4,5	3,0	13,50	20,25
5,1	3,8	19,38	26,01
5,8	4,6	26,68	33,64
27,3	17,4	77,16	112,45

Теперь составим систему вида (*)

$$\left.\begin{array}{l} 112{,}45\rho + 2{,}73\boldsymbol{b} = 77{,}16 \\ 27{,}3\rho + 8\boldsymbol{b} = 17{,}4 \end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} 14{,}056\rho + 3{,}412b = 9{,}645 \\ 3{,}412\rho + b = 2{,}175 \end{array}\right\}.$$

Решив эту систему, получаем**:** $\rho = 0{,}921$, $\boldsymbol{b} = -0{,}968$**.** Отсюда следует, что линейное уравнение регрессии $\boldsymbol{Y}$ на $\boldsymbol{X}$ имеет вид**:**

$$\boldsymbol{Y} = 0{,}921\boldsymbol{x} - 0{,}968. \tag{1}$$

Для нахождения параметров $\boldsymbol{b_0}$ и $\boldsymbol{b_1}$ степенного уравнения регрессии $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{b}_0 \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_1}$ используем метод наименьших квадратов.

Имеем

$$F(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} (\text{Y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (b_0 x_i^{b_1} - y_i)^2 \to \min \ .$$

Необходимое условие экстремума.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial b_0} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial b_1} = 0 \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (b_0 x_i^{b_1} - y_i) x_i^{b_1} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (b_0 x_i^{b_1} - y_i) x^{b_1} \ln x_i = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему можно найти значения параметров b_0 и b_1.

Для нахождения b_0 и b_1 можно поступить иначе: Предполагая, что в исходной таблице 1 значения аргумента и значения функции положительны, прологарифмируем равенство.

$$Y = b_0 x^{b_1} \qquad (2)$$

при условии $b_0 > 0$:

$$\ln Y = \ln b_0 x^{b_1};$$

$$\ln Y = \ln b_0 + \ln x^{b_1};$$

$$\ln \boldsymbol{Y} = \ln \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 \ln \boldsymbol{x}.$$

Введя новые переменные

$$\boldsymbol{u} = \ln \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{Z} = \ln \boldsymbol{y}, \qquad (3)$$

получим

$$\mathrm{Z} = \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{u} + \ln \boldsymbol{b}_0, \qquad (4)$$

т.е. задача свелась к отысканию значения параметров линейной (4). Тогда с учетом замены получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{n} (\ln x_i)^2\right) b_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right) \ln b_0 = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \ln y_i \\ &\left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right) b_1 + n \ln b_0 = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

или

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \sum_{i=1}^{n} \ln y_i - n \sum_{i=1}^{n} \ln x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} (\ln x_i)^2} \\ b_0 &= e^{\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln y_i - b \sum_{i=1}^{n} \ln x_{i1}}{n}} \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Для нахождения коэффициентов (5) составим таблицу 3. Используем натуральный логарифм; вычисления ведутся на МК с тремя знаками после запятой.

Таблица 3

u_i	z_i	$u_i z_i$	u_i^2
0,095	-1,204	-0,114	0,009
0,531	-0,511	-0,271	0,282
0,875	0,095	0,083	0,766
1,099	0,531	0,584	1,208
1,308	0,833	1,090	1,711
1,504	1,099	1,653	2,262
1,629	1,335	2,175	2,654
1,758	1,526	2,683	3,091
8,799	3,704	7,883	11,983

Разделив элементы последней строки таблицы 3 на 8 получаем

$$1,498\, b_1 + 1,1 \ln b_0 = 0,985$$
$$1,1 b_1 + \ln b_0 = 0,463$$

Её решение

$$b_1 = 1,656\ ; \quad \ln b_0 = -1,359\ .$$

Таким образом, значения параметров уравнения степенной регрессии $Y = b_0 x^{b_1}$:

$$b_0 = e^{-1.359} = 0,257; \quad b_1 = 1,656.$$

Следовательно уравнение степенной регрессии Y на X имеет вид:

$$Y = 0,257 x^{1,656} \qquad (7)$$

Для сравнения качества приближений (1) и (7) вычислим сумму квадратов отклонений

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{\ 2}, \qquad \text{где} \quad \varepsilon_i = Y_i - y_i\ .$$

Вычисления приведены в таблице 4.

Таблица 4.

x_i	y_i	$Y_i^{(1)} =$ $0{,}9621x - 0{,}968$	$\varepsilon_i^{\,1}$	$\varepsilon_i^{\,2}$	$Y_i^{(2)} =$ $= 0{,}257x^{1,65}$	$\varepsilon_i^{\,1}$	$\varepsilon_i^{\,2}$
1,1	0,3	0,451	0,2459	0,0650	0,3009	-0,0009	0,0000
1,7	0,6	0,5977	0,0023	0,0000	0,6188	0,0188	0,0004
2,4	1,1	1,2424	-0,1424	0,0203	1,0954	0,0046	0,0000
3,0	1,7	1,7950	-0,0950	0,0090	1,5851	0,1149	0,0132
3,7	2,3	2,4397	-0,1397	0,0195	2,2432	0,0568	0,0032
4,5	3,0	3,1765	-0,1765	0,0312	3,1021	-0,1021	0,0104
5,1	3,8	3,7291	0,0709	0,0050	3,8165	-0,0165	0,0003
5,8	4,6	4,3738	0,2262	0,0512	4,7225	-0,1225	0,0150
				0,2012			0,0425

Как следует из таблицы 4, сумма отклонений для (1) – линейной функции $\delta = 0{,}2012$, а для (7) – остепененное $-\,\delta = 0{,}0425$.

Сравнивая качество приближений (в смысле МНК), находим, что приближение в виде степенной функции в данном случае предпочтительнее.

Рассмотренный пример показывает, что для решения поставленной задачи методом наименьших квадратов требуется произвести немало вычислений с использованием значительного количества числовых значений, порождаемых главным образом в процессе самого счёта (исходными данными здесь являются только числа из таблицы №1). Очевидно, что наиболее подходящим вычислительным инструментом в этом случае является ПК.

Можно составить программу на языке Бейсик, для расчёта параметров уравнения регрессии, каждого из указанных двух типов

Вариант №1

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	1,1	1,7	2,4	3,0	3,7	4,5	5,1	5,8
y_i	0,3	0,6	1,1	1,7	2,3	3,0	3,8	4,6

методом наименьших квадратов построить линейную и степенную $Y = b_0 x^{b_1}$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №2

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	5,67	4,45	3,84	3,74	3,73	2,18
y_i	6,8	8,5	10,5	10,2	6,8	11,8

методом наименьших квадратов построить линейную и гиперболическую $Y = b_0 + \frac{b_1}{x}$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №3

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	2	3	8	10	14	15
y_i	14,39	9,45	7,05	5,32	16,94	1,97

методом наименьших квадратов построить линейную и показательную $Y = ab^x$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №4

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	4	12	3	7	6
y_i	8,75	3,41	13,37	8,22	9,39

методом наименьших квадратов построить линейную и экспоненциальную $Y = b_0 e^{b_1 x}$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №5

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	0	2	4	6	8	10
y_i	5	-1	$-0,5$	1,5	4,5	8,5

методом наименьших квадратов построить линейную и параболическую $Y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №6

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	2,7	4,6	6,3	7,8	9,2	10,6
y_i	17,0	16,2	13,3	13,0	9,7	9,9

методом наименьших квадратов построить линейную и дробно-линейную $Y = \dfrac{1}{b_0 x + b_1}$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №7

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	2,11	2,45	2,61	2,73	2,75	2,81

методом наименьших квадратов построить линейную и логарифмическую

$Y = b_0 + b_1 \lg x$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №8

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	7,9	11,6	12,8	14,8	16,3	18,6
y_i	13,0	22,8	24,8	28,7	31,6	38,7

методом наименьших квадратов построить линейную и следующую нелинейную $Y = \dfrac{x}{b_0 + b_1 x}$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №9

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
y_i	7,7	9,4	11,4	13,6	15,6	18,7

методом наименьших квадратов построить параболическую $Y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ и следующую нелинейную $Y = b_0 e^{\frac{b_1}{x}}$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №10

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	0,21	0,32	0,58	1,2	1,76	2,68

методом наименьших квадратов построить линейную и следующую нелинейную $Y = b_0 + b_1 x^n$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №11

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	10	11	12	13	145	15
y_i	8,32	10,21	12,33	14,58	17,7	19,53

методом наименьших квадратов построить линейную и следующую нелинейную $Y = b_0 10^{b_1 x}$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №12

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	16,50	13,75	13,31	12,50	13,52	12,75

методом наименьших квадратов построить гиперболическую $Y = b_0 + \frac{b_1}{x}$ и степенную $Y = b_0 x^{b_1}$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №13

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	0,07	0,31	0,61	0,99	1,29	1,78
y_i	1,34	1,08	0,94	1,06	1,25	2,01

методом наименьших квадратов построить показательную $Y = ab^x$ и параболическую $Y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №14

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	4,67	3,45	2,84	2,74	2,73	1,18
y_i	5,8	7,5	9,5	9,2	5,8	10,8

методом наименьших квадратов построить линейную и гиперболическую $Y = b_0 + \frac{b_1}{x}$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №15

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	3	4	9	11	15	16
y_i	13,3	8,4	6,05	4,3	15,9	0,9

методом наименьших квадратов построить линейную и показательную $Y = ab^x$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №16

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	4,1	2,1	3	7	6
y_i	7,1	3,4	13,3	8,22	9,3

методом наименьших квадратов построить линейную и экспоненциальную $Y = b_0 e^{b_1 x}$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №17

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	2	4	6	7	9	10
y_i	17	16	13	13,5	9,7	9,9

методом наименьших квадратов построить линейную и дробно-линейную $Y = \dfrac{1}{b_0 x + b_1}$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

Вариант №18

По заданной таблице значений признаков X и Y

x_i	2	3	4	5	6	7
y_i	2,1	2,4	2,6	2,7	2,7	2,8

методом наименьших квадратов построить линейную и логарифмическую $Y = b_0 + b_1 \lg x$ регрессионные уравнения Y на X и сравнить качество полученных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1.Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1999.

2.Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ, 2001.

3.Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ИНФРА, 1997.

4.Бабаджанов Ш.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций. Ташкент: ТФИ, 2004.

5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1998.

6.Калинина В.Н., Панкин В.Н. Математическая статистика. М.: Высшая школа, 1998.

Самостоятельная работа 6

КРИТЕРИИ ЗНАЧИМОСТИ И ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

Основные понятия и определения (нулевая гипотеза, альтернативная гипотеза, ошибки при проверке гипотез, критерии значимости, односторонние и двусторонние критерии и.т.д.) освещены в лекции №17(.[4]), а также в [1-3] и др.

1. Параметрические критерии

При **сравнении двух выборочных дисперсий из нормальных генеральных совокупностей** рассматривается статистическая гипотеза о параметре нормального распределения. Рассмотрим постановку задачи.

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально. По независимым выборкам объемов n_1 и n_2, извлеченным из этих совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии S_X^2 и S_Y^2. Требуется по исправленным дисперсиям, при заданном уровне значимости α, проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0 : D(X) = D(Y).$$

Учитывая, что исправленные дисперсии являются несмещенными оценками генеральных дисперсий (лек.№11 из [4]), т. е.

$$M\left(S_X^2\right) = D(X), \quad M\left(S_Y^2\right) = D(Y),$$

нулевую гипотезу можно записать так:

$$H_0 : M\left(s_X^2\right) = M\left(s_Y^2\right) .$$

Таким образом, требуется проверить, что математические ожидания исправленных выборочных дисперсий равны между собой. Такая задача ставится потому, что обычно исправленные дисперсии оказываются различными.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы можно использовать $\boldsymbol{F}$ - критерий Фишера.

Условия и применения $\boldsymbol{F}$-критерия Фишера подробно приведены в лекции №17([4]).

Критерий Фишера относится к параметрическим критериям, так как он используется для проверки гипотезы о параметре распределения.

Параметрические критерии используются при:

● **сравнении выборочного среднего значения со средним значением генеральной совокупности;**

● **сравнении двух выборочных средних значений для независимых выборок;**

● **сравнении двух выборочных средних значений для связанных выборок**.

Выделенные последние вопросы в лекции №17 не рассматривались, следовательно, параметрические критерии, используемые для проверки гипотез, которые выдвигаются в связи с этими вопросами, там не приведены, но они изложены в другой литературе (например, [1-3,5,6]).

2. Критерии согласия

Все упомянутые выше критерии значимости являются оптимальными, т.е. обеспечивают наивысшую достоверность статистических выводов только в тех случаях, когда выборки получены из нормально распределенной генеральной совокупности. При отклонениях от нормального распределения точность оптимальных критериев существенно падает, поэтому, чтобы уверенно применять оптимальные критерии, необходимо проверить предположение о нормальном распределении генеральной совокупности. Для этого используются критерии **согласия**. Здесь нулевая гипотеза H_0 представляет собой утверждение о том, что распределение генеральной совокупности, из которой получена выборка, не отличается от нормального. Существуют несколько разновидностей критериев согласия. Перечислим ниже те из них, которые получили наибольшее распространение на практике:

- **критерий согласия χ^2;**
- **критерий согласия λ Колмогорова- Смирнова;**
- **критерий согласия W Шапиро – Уилки**.

Условия и порядок применения критерий χ^2 приведены в лекции №18. Условия и порядок применения других критерий согласия в этой лекции не приводятся. Их можно изучить самостоятельно (например, [1-3, 5,6]).

3. Непараметрические критерии

Применение параметрических критериев для проверки гипотез, выдвигаемых при сравнении двух выборочных дисперсий, сравнении выборочного среднего значения с средним значением генеральной совокупности, сравнении двух выборочных средних значений для независимых выборок, сравнении двух выборочных средних значений для связанных выборок будет связано с целым рядом допущений. Например, сравнивая выборочные средние значения с помощью T критерия Стьюдента, принимаются следующие предположения: обе выборки являются случайными, т. е. каждая из них получена в результате независимых измерений; обе выборки получены из генеральных совокупностей, имеющих нормальное распределение; дисперсии генеральных совокупностей равны между собой.

На практике эти предположения строго никогда не выполняются, поэтому применение параметрических критериев всегда связано с опасностью ошибочных выводов, возникающей из-за нарушения принятых допущений.

В последнее время в математической статистике по этой причине интенсивно разрабатываются непараметрические методы, которые строятся так, чтобы их применение зависело от возможно меньшего числа допущений.

Отметим в связи с этим еще одно важное обстоятельство. Параметрические критерии значимости применимы только для сравнения выборочных данных, представляющих собой результаты измерений, выраженные в единицах метрических шкал. Но в экономических исследованиях часто приходится иметь дело с данными, выраженными в шкалах наименований или порядка. Такие данные нельзя сравнивать с помощью параметрических критериев, а непараметрические критерии могут быть успешно применены и к данным этого типа. Если рассматривать только те случаи, когда выборки можно считать полученными из нормально распределенных совокупностей, непараметрические критерии всегда поигрывают соответствующим параметрическим критериям, оптимальным в этих случаях, потому что применение непараметрических критериев обычно связано с потерей части информации об измеренных значениях признаков. Поэтому вводится **показатель эффективности критерия** ($\boldsymbol{E}$). Он представляет собой отношение объема выборки параметрического критерия к объему выборки непараметрического критерия при одинаковой мощности критериев в условиях нормального распределения генеральной совокупности. Этим показателем и принято оценивать эффективность непараметрических критериев.

Важную группу непараметрических критериев составляют **ранговые критерии.** Они хорошо разработаны, и эффективность их оказывается очень высокой (для большинства из них при больших объемах выборки эффективность близка к единице). В то же время они очень просты в пользовании и не требуют сложных математических вычислений.

Задание

1. **Опишите условия и порядок применения** соответствующих параметрических критериев для проверки гипотез, выдвигаемых при сравнении

двух выборочных дисперсии, сравнении выборочного среднего значения с среднем значением генеральной совокупности, сравнении двух выборочных средних значений для независимых выборок, сравнении двух выборочных средних значений для связанных выборок.

2. **Опишите условия и порядок применения** критерий согласия λ Колмогорова- Смирнова, критерий согласия $\boldsymbol{W}$ Шапиро – Уилки.

3. **Перечислить** несколько из параметрических критериев. **Опишите условия и порядок применения** одного из них, например, критерий Вилкоксона для независимых выборок (критерий иногда называют критерием Уайта).

4. **Покажите** применения критерия Вилкоксона на конкретном примере.

ЛИТЕРАТУРА

1.Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1999.

2.Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ, 2001.

3.Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ИНФРА, 1997.

4.Бабаджанов Ш.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций. Ташкент: ТФИ, 2004.

5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1998.

6. Калинина В.Н., Панкин В.Н. Математическая статистика. М.: Высшая школа, 1998.

7. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. М. Финансы и статистика, 1983.

СОДЕРЖАНИЕ

БАБАДЖАНОВ ШОПУЛАТ ШОМАШРАБОВИЧ

МАТЕРИАЛЫ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ПО «ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ»

Редактор Э. С. Хуснутдинова

Темплан 2006 года

Подписано в печать 31.03.06. Формат 30х 42 $\frac{1}{4}$.
Оперативная печать. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 5,8.
Тираж 300 экз. Заказ № 18. Цена договорная.

Ташкентский финансовый институт. 700084. Ташкент, ул. Х. Асомова, 7.

Издательство "IQTISOD-MOLIYA". 700084. Ташкент, ул. Х, Асомова, 7.

Отпечатано в типографии ТФИ. 700084. Ташкент, ул. Х, Асомова, 7.