Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан
Ташкентский финансовый институт

Ш.Ш.БАБАДЖАНОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ I

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ТАШКЕНТ 2008

Высшая математика. Часть I: Учебное пособие / Ш.Ш. Бабаджанов; «IQTISOD – MOLIYA», Ташкент, 2008. 336 с.

В учебном пособии обстоятельно излагаются основы линейной алгебры и элементы аналитической геометрии в доступной форме для экономиста – бакалавра.

Учебное пособие предназначено бакалаврам всех направлений области образования «Бизнес и управление» и написано в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта.

Печатается по решению научно–методического совета Ташкентского финансового института

Рецензенты: канд.физ.-мат.наук, доц. ТУИТ Х. А. Абдуваитов;
канд.физ.-мат.наук, доц. ТФИ А. Р. Роишев

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучай, познавай, не пугаясь преград:
Познающему – трудное станет легко.
Доказательства сделай кольчугой своей
Крепких доводов щит подними высоко!
Носири Хисрав (1004-1088)

Настоящая книга является первой частью учебного пособия по дисциплине «Высшая математика», которая состоит из двух частей; вторая часть выйдет в свет отдельно несколько позднее.

В первой части обстоятельно излагаются основы линейной алгебры и элементы аналитической геометрии в доступной форме для экономиста – бакалавра. В ней по возможности подробно рассмотрены теории матриц, определителей, $\boldsymbol{n}$– мерных векторных пространств и их линейных преобразований, а также теория систем линейных уравнений. Она адресована бакалаврам всех направлений области образования «Бизнес и управление» и написана в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта.

При написании учебного пособия автор руководствовался принципом повышения уровня фундаментальности подготовки студентов – бакалавров с усилением ее прикладной экономической направленности. Поэтому в учебном пособии:

– приводятся **доказательства** большинства теорем;

– имеются указания приложений линейной алгебры и элементов аналитической геометрии к вопросам экономики.

Изложение материалов очень строгое, вместе с тем, доступное для студентов первого курса. В каждом параграфе рассматривается достаточно большое количество иллюстрирующих теоретический материал примеров с решениями, которые способствуют лучшему его усвоению. Каждый параграф заканчивается перечнем ключевых слов и словосочетаний, вопросами для самопроверки и задачами для самостоятельного решения.

Автор выражает глубокую признательность за советы рецензентам доцентам Х. А. Абдуваитову и А. Р. Роишеву.

Автор

ГЛАВА I
МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§1. Основные сведения о матрицах. Действия над матрицами

Планирование[1] производства должно основываться на надлежащим образом упорядоченной системе информации, с помощью которой просто и сжато описываются зависимости, имеющие место в материальном производстве. Эту упорядоченную систему информации можно наглядно представить в виде соответствующей таблицы.

Рассмотрим, например, систему информации о взаимных поставках продукции отраслей материального производства. Если через $\boldsymbol{i} = 1,2,...,6$ обозначить соответственно номера отдельных отраслей, то таблица взаимных поставок продукции принимает следующий вид:

Таблица 1

Отрасль	1	2	3	4	5	6
1	$\boldsymbol{v}_{11}$	$\boldsymbol{v}_{12}$	$\boldsymbol{v}_{13}$	$\boldsymbol{v}_{14}$	$\boldsymbol{v}_{15}$	$\boldsymbol{v}_{16}$
2	$\boldsymbol{v}_{21}$	$\boldsymbol{v}_{22}$	$\boldsymbol{v}_{23}$	$\boldsymbol{v}_{24}$	$\boldsymbol{v}_{25}$	$\boldsymbol{v}_{26}$
3	$\boldsymbol{v}_{31}$	$\boldsymbol{v}_{32}$	$\boldsymbol{v}_{33}$	$\boldsymbol{v}_{34}$	$\boldsymbol{v}_{35}$	$\boldsymbol{v}_{36}$
4	$\boldsymbol{v}_{41}$	$\boldsymbol{v}_{42}$	$\boldsymbol{v}_{43}$	$\boldsymbol{v}_{44}$	$\boldsymbol{v}_{45}$	$\boldsymbol{v}_{46}$
5	$\boldsymbol{v}_{51}$	$\boldsymbol{v}_{52}$	$\boldsymbol{v}_{53}$	$\boldsymbol{v}_{54}$	$\boldsymbol{v}_{55}$	$\boldsymbol{v}_{56}$
6	$\boldsymbol{v}_{61}$	$\boldsymbol{v}_{62}$	$\boldsymbol{v}_{63}$	$\boldsymbol{v}_{64}$	$\boldsymbol{v}_{65}$	$\boldsymbol{v}_{66}$

[1] Мировая система хозяйствования в настоящее время активно использует возможности не только прогнозирования, но и планирования. При разработке планов применяются: а) макропланирование; б) мезопланирование, т.е. планирование отраслей, подотраслей, территориально-производственных комплексов, промузлов, исходящих от «метакорпораций», к которым относятся межотраслевые, межрегиональные и международные финансово-промышленные группы; в) территориальное планирование, т.е. прогнозы, бюджетные планы и программы региональных и местных властей; г) микропланирование на уровне фирмы. Особого внимания заслуживает опыт индикативного планирования, который уже несколько десятилетий плодотворно используется в ряде стран мира [1].

В таблице через v_{ij} $(i=1,2,...,6;\ j=1,2,...,6)$ обозначены объемы поставок продукции из i–й отрасли в j– ю отрасль. Так, например, $v_{11},\ v_{12},\ldots,v_{16}$ обозначают поставки продукции отрасли 1 всем отраслям материального производства, $v_{21},\ v_{22},\ldots,\ v_{26}$– поставки отрасли 2 всем отраслям материального производства и т. д.

Подобным же образом планирование на предприятии обосновывают, пользуясь нормами как системой информации. Если, например, на предприятии производятся четыре продукта 1, 2, 3, 4 и для их производства используются материалы 1, 2, 3, то система норм материальных затрат, которая представляет собой основу плана снабжения, может быть представлена в виде таблицы:

Таблица 2

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & {}_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix}$$

где a_{ij} $(i=1,2,3;\ j=1,2,3,4)$ – есть норма расхода i –го материала на производство j–го продукта. Так, норма расхода материала 1 на единицу продукта 1, 2, 3, 4, соответственно равна $a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14}$; норма расхода материала 2 на единицу продукта, соответственно, составляет $a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24}$, норма расхода материала 3 на единицу продукта, соответственно, составит $a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ a_{34}$.

Табл. 1 и 2 – частные случаи так называемых **матриц,** рассматриваемых математикой. Они находят широкое применение в экономических исследованиях, особенно в планировании производства, значительно облегчают работу, связанную с планированием, снижают трудоемкость этой работы, позволяют быстро разработать разные варианты плана и, кроме того, облегчают изучение зависимостей между разными экономическими показателями.

Следует отметить, что основное внимание исследователей с момента зарождения теории финансов как науки (20-30-е годы XX – го столетия) и по настоящее время направлено на совершенствование методологии прогнозирования, разработку новых методов, применяемых при прогнозировании различных финансовых показателей. Одним из таких является коллокационные модели - модели, построенные на базе методов коллокации. Коллокационные модели обладают большой универсальностью и позволяют решать задачи прогнозирования, используя при этом самую разнообразную информацию об объекте (в частности, при прогнозировании характеристик ценных бумаг использовать информацию о курсах, ценах, объемов продаж, индексов и т.д.). Основное достоинство коллокационных моделей в том, что методика прогноза по любой из них сводится к простейшим матричным операциям [2].

Приведенные и перечисленные примеры не исчерпывают всех приложений матриц, однако они в определенной степени помогли нам показать важность и полезность матриц.

Теперь приступим к изучению матриц.

1.1. Основные определения

Определение. Матрицей[2] называется прямоугольная таблица чисел, расположенных строками и столбцами и записывается так:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Каждая матрица имеет определенные размеры, т.е. определенное количество строк и столбцов. В приведенной выше матрице $\boldsymbol{A}$ имеется $\boldsymbol{m}$ строк и $\boldsymbol{n}$ столбцов. Значит, эта матрица размера $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$.

В матрице (1) числа a_{ij} называются ее **элементами (**первый индекс означает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент; $\boldsymbol{i}=1,2,\dots,\boldsymbol{m}$; $\boldsymbol{j}=1,2,\dots,\boldsymbol{n}$).

Употребляется также сокращенное обозначение матриц. Например, пишут $A=(a_{ij})_{mn}$. Это значит, что матрица состоит из

---

[2] Понятие матриц впервые введено в работах английских математиков У.Гамильтона (1805 – 1865) и А. Кели (1821 – 1895). В настоящее время матрицы служат важным аппаратом математического исследования, в частности, экономико-математического моделирования. Выше мы это попытались объяснить.

элементов a_{ij}, причем $i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$.

Матрица называется **прямоугольной**, если $m \neq n$. Если же $m = n$, то матрица называется **квадратной**[3], а число n – ее **порядком**[4].

Матрицы называются **равными**, если у них одинаковое число строк и столбцов и все соответствующие элементы совпадают.

Матрица называется **нулевой** (или **нуль - матрицей**), если все ее элементы равны нулю. Нулевую матрицу обозначают символом Θ. Например, следующие матрицы:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются, соответственно, нулевой матрицей 3-го порядка, нулевой матрицей размера 3×4 и нулевой матрицей размера 2×3.

Матрица, состоящая из одной строки (т.е. матрица размера $1 \times n$) или из одного столбца (т.е. матрица размера $m \times 1$), называется, соответственно, **вектор – строкой** или **вектор – столбцом.**

Вектор – столбцы и вектор – строки называют также просто **векторами**. Элементы векторов будем называть их **компонентами**.

Замечание. В дальнейшем, если отдельно не отмечено, всегда будем считать вектор заданным в виде вектора – столбца, хотя часто для экономии места компоненты вектора будут записываться в строку.

Матрица A', которая получается из матрицы A заменой в ней местами строк и столбцов, называется **транспонированной** относительно матрицы A. Таким образом, для матрицы (1) транспонированной служит матрица

[3] Следует иметь в виду, что матрицы не имеют какой-либо геометрической интерпретации. Термины «квадратная» и «прямоугольная» матрицы являются просто удобной характеристикой вида расположения и количества элементов матрицы.

[4] Иногда термин «порядок матрицы» употребляют по отношению не только к квадратной, но и к прямоугольной матрице (например, порядка $m \times n$). Однако в нашей математической литературе (имеется в виду стран СНГ) принято термин «порядок» употреблять только относительно квадратных матриц. Что же касается прямоугольных матриц, то по отношению к ним указывается число строк и столбцов или же при необходимости употребляется слово «размерность».

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{m2} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Операция перехода к матрице A', транспонированной относительно матрицы A, называется **транспонированием** матрицы A. Для матрицы размера $m \times n$ транспонированной является матрица размера $n \times m$.

Транспонированной относительно матрицы A', очевидно, служит матрица A, т. е. $(A')' = A$.

Главной диагональю квадратной матрицы называется воображаемая прямая, соединяющая ее элементы, у которых оба индекса одинаковы (т.е. $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$). Эти элементы называются **диагональными.**

Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется **диагональной и** записывается так**:**

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если все элементы α_{ii} диагональной матрицы равны между собой, то матрицу называют **скалярной.** Такая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}.$$

В случае, если $\alpha = 1$, скалярная матрица называется единичной и обозначается буквой E, т.е.

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Иногда для записи элементов единичной матрицы используется **символ Кронекера**

$$\delta_{\boldsymbol{ij}}=\begin{cases}1 & \boldsymbol{при} \quad \boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\ 0 & \boldsymbol{при} \quad \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j}.\end{cases}$$

При помощи этого символа можно написать

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}=\left(\delta_{\boldsymbol{ij}}\right).$$

Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы стоящие выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю. При этом матрица

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_{11} & \boldsymbol{b}_{12} & \dots & \boldsymbol{b}_{1\boldsymbol{n}}\\ 0 & \boldsymbol{b}_{22} & \dots & \boldsymbol{b}_{2\boldsymbol{n}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{nn}}\end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{ij}}=0$ при $\boldsymbol{i}>\boldsymbol{j}$, называется **правой (**или **верхней) треугольной** матрицей, а матрица

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}_{11} & 0 & \dots & 0\\ \boldsymbol{c}_{21} & \boldsymbol{c}_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{n}1} & \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{n}2} & \dots & \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{nn}}\end{pmatrix},$$

где $c_{ij} = 0$ при $i < j$, называется **левой (**или **нижней) треугольной** матрицей.

Симметрической матрицей называется квадратная матрица A, для которой $A = A'$.

Ясно, что симметрическая матрица симметрична относительно диагонали, т.е. отражение от главной диагонали не изменяет матрицу. Симметрическая матрица n–го порядка не может состоять из произвольных n^2 элементов, так как $a_{ij} = a_{ji}$, но выше или ниже главной диагонали ее элементы произвольны. Число элементов, стоящих выше главной диагонали, равно $\frac{n^2 - n}{2}$. Элементы главной диагонали также произвольны. Таким образом, общее число произвольных элементов в симметрической матрице n-го порядка равно

$$\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Пример. Следующая матрица - симметрическая:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кососимметрической матрицей называется квадратная матрица A, для которой $A = -A'$.

Очевидно, что элементы кососимметрической матрицы симметрично расположены относительно ее главной диагонали, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т.е. $a_{ij} = -a_{ji}$.

Ясно, что все элементы главной диагонали являются нулями: $a_{ii} = 0$. Число произвольных элементов в кососимметрической матрице n–го порядка равно

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Пример. Следующая матрица является кососимметрической:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Действия над матрицами

Основные операции над матрицами следующие: умножение матриц на число, сложение матриц, умножение матриц.

1.2.1. Линейные операции над матрицами

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ **на число** λ называется матрица, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением на число λ**:**

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mj} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти матрицу $2A$ для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. В соответствии с определением получим

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 10 & 6 & -2 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $-A=(-1)\cdot A$ называется **противоположной** матрице A**.**

Суммой двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинаковой размерности $m\times n$ называется матрица C такой же размерности, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, **т.е.**

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2j}+b_{2j} & \dots & a_{2n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mj}+b_{mj} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется **разность** матриц:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1j}-b_{1j} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2j}-b_{2j} & \dots & a_{2n}-b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}-b_{i1} & a_{i2}-b_{i2} & \dots & a_{ij}-b_{ij} & \dots & a_{in}-b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mj}-b_{mj} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти сумму и разность матриц

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. В соответствии с определением получим

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3+4 & 1-1 & 0+2 & 2-2 \\ 1-3 & 4+0 & 3+4 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3-4 & 1+1 & 0-2 & 2+2 \\ 1+3 & 4-0 & 3-4 & 1-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим **одно интересное свойство матриц.**

Любая квадратная матрица может быть выражена как сумма симметрической и кососимметрической матриц:

$$A = A + \frac{A'}{2} - \frac{A'}{2} = \frac{A + A'}{2} + \frac{A - A'}{2}.$$

Далее

$$\left(\frac{A + A'}{2}\right)' = \frac{A + A'}{2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{A - A'}{2}\right)' = -\frac{A - A'}{2}.$$

Если

$$A_s = \frac{A + A'}{2} \quad \text{и} \quad A_a = -\frac{A - A'}{2},$$

то матрица A_s является симметрической и A_a является кососимметрической. Таким образом, мы выразили квадратную матрицу A в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \\ 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \frac{A + A'}{2} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{15}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{15}{2} \\ \frac{15}{2} & \frac{15}{2} & 9 \end{pmatrix}, \qquad \frac{A - A'}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{A + A'}{2} + \frac{A - A'}{2}.$$

Легко проверить, что операции сложения и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1^0. $A + B = B + A$;
2^0. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3^0. $A + \Theta = A$;
4^0. $A + (-A) = \Theta$;
5^0. $1 \cdot A = A$;
6^0. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
7^0. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
8^0. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,

здесь A, B и C матрицы, α и β - числа, Θ - нулевая матрица.

1.2.2. Умножение матриц

Произведение $A \cdot B$ (в дальнейшем, просто AB) матрицы A на матрицу B определяется в предположении, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Пусть даны матрица A размерности $m \times p$ и матрица B размерности $p \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

или в сокращенной записи

$$A = (a_{ij}), \qquad B = (b_{jk}),$$

где $i = 1,2,\dots,m$; $j = 1,2,\dots,p$; $k = 1,2,\dots,n$.

Произведением двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{jk})$ заданных в определенном порядке (A – первая, B – вторая), называется следующая матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой определяются по следующему правилу:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ip}b_{pk},$$

где $i = 1,2,\dots,m$; $k = 1,2,\dots,n$.

Таким образом, произведение AB имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Правило умножения матриц. Чтобы получить элемент, стоящий в i –й строке и k –м столбце произведения двух матриц, нужно элементы i –й строки первой матрицы умножить на соответствующие элементы k –го столбца второй и полученные произведения сложить.

Пример. Умножить матрицу A на матрицу B, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

1) Элемент первой строки и первого столбца новой матрицы $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ представляет собой сумму произведений элементов 1-й строки матрицы $\boldsymbol{A}$ на элементы 1–го столбца матрицы $\boldsymbol{B}$, а именно:

$$c_{11} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6 .$$

2) Элемент первой строки и второго столбца новой матрицы представляет собой сумму произведений элементов 1–й строки матрицы $\boldsymbol{A}$ на элементы 2–го столбца матрицы $\boldsymbol{B}$:

$$c_{12} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 2 .$$

3) Элемент первой строки и третьего столбца определяется так:

$$c_{13} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1 .$$

4) Элемент второй строки и первого столбца новой матрицы получается последовательным умножением элементов 2–й строки матрицы $\boldsymbol{A}$ на элементы 1–го, 2–го и 3–го столбцов матрицы $\boldsymbol{B}$ и суммированием получаемых произведений:

$$c_{21} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6 ;$$
$$c_{22} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 1 ;$$
$$c_{23} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 .$$

5) Аналогично получаются элементы 3–й строки матрицы $\boldsymbol{C}$:

$$c_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8 ;$$
$$c_{32} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -1 ;$$
$$c_{33} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 4 .$$

Итак,

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример. Умножить матрицу $\boldsymbol{A}$ на матрицу $\boldsymbol{B}$, если

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2+2\cdot 1+8\cdot 0+1\cdot 3 & 3\cdot(-1)+2\cdot(-3)+8\cdot 1+1\cdot 1 \\ 1\cdot 2+(-4)\cdot 1+0\cdot 0+3\cdot 3 & 1\cdot(-1)+(-4)\cdot(-3)+0\cdot 1+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Следует иметь в виду, что умножение матриц **некоммутативно** (не обладает свойством перестановочности), т.е. $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

Пример

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Как видим, в результате перестановки умноженных матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ получены различные результаты. **Необходимо поэтому указывать, как умножаются матрицы (слева или справа).**

В отдельных случаях произведение матриц в противоположном порядке вообще невозможно. Например,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 19 & 13 & 7 \\ 46 & 31 & 19 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{BA} \text{ - не существует.}$$

В тех случаях, когда $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называются **коммутативными (перестановочными).** Так, например, единичная матрица $\boldsymbol{E}$ перестановочна с любой квадратной матрицей $\boldsymbol{A}$ того же порядка, причем

$$\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A}.$$

Следует заметить, что единичная матрица среди всех квадратных матриц данного порядка играет в операции умножения такую же роль, как число единица при умножении чисел.

Пример

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&3&2\\1&4&3\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}2&1&3\\5&3&2\\1&4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\5&3&2\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&3&2\\1&4&3\end{pmatrix},$$

т.е. $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$.

Можно проверить, что умножение матриц обладает следующими свойствами:

1^0. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$;

2^0. $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$;

3^0. $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$;

4^0. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$,

где $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ матрицы, λ - число.

При этом предполагается, что все написанные произведения матриц имеют смысл.

Имеет место следующее правило транспонирования произведения двух матриц:

$$(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{A}'.$$

Ступенчатой матрицей называется матрица, обладающая тем свойством, что если в какой-либо из ее строк первый отличный от нуля элемент стоит на $\boldsymbol{k}$–м месте, то во всех следующих строках на первых $\boldsymbol{k}$ местах стоят нули, например:

$$\begin{pmatrix}2&1&3&2&5\\0&0&1&0&3\\0&0&0&2&7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Канонической матрицей называется матрица, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю, например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы прервем изучение матриц для того, чтобы изложить некоторые аспекты теории определителей, которые нам понадобятся для дальнейшего изложения теории матриц.

Ключевые слова и словосочетания

Матрица, прямоугольная матрица, квадратная матрица, порядок квадратной матрицы, нулевая матрица, вектор – строка, вектор – столбец, транспонирование матриц, диагональная матрица, скалярная матрица, правая (или верхняя) треугольная матрица, левая (или **нижняя) треугольная матрица, симметрическая матрица, кососимметрическая матрица, линейные операции над матрицами, умножение матриц, ступенчатая матрица, каноническая матрица.**

Вопросы для самопроверки

1. Что называется матрицей?
2. Какая матрица называется прямоугольной?
3. Какая матрица называется квадратной?
4. Что представляет собой нулевая матрица?
5. Какая матрица называется диагональной?
6. Что представляет собой скалярная матрица?
7. Что представляет собой единичная матрица?
8. Какая матрица называется (правой (или верхней), левой (или нижней)) треугольной матрицей?
9. Какая матрица называется симметрической?
10. Какая матрица называется кососимметрической?

11. Что называется транспонированием матрицы?

12. Каким образом квадратная матрица может быть выражена с помощью симметрической и кососимметрической матриц?

13. Какими свойствами обладают операции сложения и умножения матрицы на число? Перечислите их.

14. Что называется произведением двух матриц?

15. Сформулируйте правило умножения двух матриц.

16. Когда матрицы называются коммутативными (перестановочными)?

17. Какими свойствами обладает умножение матриц? Перечислите их.

18. Приведите правило транспонирования произведения двух матриц.

19. Какая матрица называется ступенчатой?

20. Какая матрица называется канонической?

Задачи для самостоятельного решения

1. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; ***б***) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; ***в***) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; ***д***) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти произведения $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{BA}$, если

а) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$

в) $\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};$

г) $\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

3. Найти матрицу

$$\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E},$$

где

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix},$$

а $\boldsymbol{E}$ - единичная матрица второго порядка.

4. Вычислить $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$, если

а) $\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

б) $\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$

5. Выполнить действие:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2.$$

6. Произвести умножение матриц в указанном порядке:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$; ***б***) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; ***в***) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; ***д***) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

7. Вычислить выражение:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^5$; ***б***) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{\boldsymbol{n}}$; ***в***) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & -\boldsymbol{a} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{n}}$, где $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{bc} = 1$;

с) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\boldsymbol{n}}$.

8. Как изменится матрица

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix},$$

если умножить ее слева на одну из матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; ***б***) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; ***в***) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ***г***) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

9. Найти матрицу:

а) $\boldsymbol{A}^2 - 12\boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\quad (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$, где $\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};$

в) $\quad \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$, где $\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}.$

§2. Понятие определителя n-го порядка

Часто в математике бывает полезно охарактеризовать объект, определяемый многими параметрами, с помощью одной величины. Определитель[5] – пример такого рода. Он вводится только для квадратных матриц. Существуют разные, но, естественно, эквивалентные способы его определения. Мы рассмотрим один из этих способов.

---

[5] Зарождение теории определителей относят к концу XVII в. В 1693 г. Лейбниц, изучая линейные уравнения со многими неизвестными, впервые подметил общий закон составления определителей. В письме к Лопиталю от 28 апреля 1693 г. Лейбниц сообщает, что своему открытию он обязан особому способу обозначения коэффициентов уравнения. Этот способ обозначения состоял в том, что каждый коэффициент обозначался двумя числами (система двойных индексов). Эти результаты Лейбница не были опубликованы, и потому они остались неизвестными его современникам.

В 1750 г. женевским ученым Крамером была опубликована работа, посвященная теории алгебраических кривых. В приложении, помещенном в конце своего сочинения, Крамер указывает общий закон составления определителей и приводит общую формулу решения системы $\boldsymbol{n}$ линейных уравнений с $\boldsymbol{n}$ неизвестными – эту формулу мы выведем позже в §5.

Однако ни Лейбниц, ни Крамер не дали более или менее законченной теории определителей. Первые шаги в этом направлении были сделаны французским математиком Вандермондом в мемуаре, доложенном Парижской Академии наук в 1771 г.

Дальнейшее и притом значительное развитие теория определителей получила в 1812 г., когда появились работы двух французских математиков Бине и Коши, причем особенно важное значение имел мемуар Коши.

С этого момента определители становятся одним из важных орудий математического исследования. В настоящее время нет почти ни одной отрасли математики, в которой определители не имели бы приложений. Мы их встречаем в других отраслях науки, в том числе и в экономике.

Пусть дана квадратная матрица n- го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

По определенным правилам сопоставим матрице A некоторое число, которое называют определителем (детерминантом) n- го порядка и обозначают одним из следующих символов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=|A|=\det A=\Delta\,. \qquad (1)$$

Элементы матрицы A, ее диагонали, строки и столбцы называют, соответственно, элементами, диагоналями, строками и столбцами определителя $|A|$, т.е. горизонтальные ряды в определителе (1) называются **строками**, вертикальные **столбцами**, числа a_{ij}- **элементами определителя** (первый индекс означает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент; $i=1,2,...,n;\ \ j=1,2,...,n$). **Порядок определителя** - это число строк и столбцов.

Воображаемая прямая, соединяющая элементы определителя, у которых оба индекса одинаковы (т.е. $a_{11},a_{22},...,a_{nn}$) называется **главной (первой) диагональю**, другая диагональ – **побочной (второй).**

Определение. Определителем (детерминантом) матрицы A называется число, являющееся алгебраической суммой $n!$ ($n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots n$) членов, каждый из которых – произведение n элементов, взятых только по одному из каждой из n строк и из каждого из n столбцов взятых со знаком плюс или минус.

Для выведения правила выбора знаков для членов определителя требуются новые понятия и определения.

Определение. Всякое расположение чисел $1,2,...,\boldsymbol{n}$ называется их **перестановкой.**

Количество возможных перестановок равно $\boldsymbol{n}!$. При $\boldsymbol{n}=2$ возможны лишь две перестановки - либо 1,2, либо 2,1. В данном случае число перестановок равно $1\cdot 2=2!$. При $\boldsymbol{n}=3$, число возможных перестановок будет равно 6 (1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 2, 1; 3, 1, 2), т. е. $1\cdot 2\cdot 3=3!$

Определенное утверждение можно сделать при любом значении $\boldsymbol{n}$.

Если это утверждение справедливо для числа элементов $\boldsymbol{n}$, то оно справедливо и для числа элементов $\boldsymbol{n}+1$.

Предположим, что наше утверждение уже доказано для $\boldsymbol{n}$, т.е. $\boldsymbol{n}$ элементов дают $\boldsymbol{n}!$ перестановок. Рассмотрим все перестановки из $\boldsymbol{n}+1$ элементов $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,...\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}+1}$. Тогда перестановок, у которых на первом месте стоит элемент $\boldsymbol{a}_1$ будет (по предположению) $\boldsymbol{n}!$ перестановок, у которых на первом месте стоит элемент $\boldsymbol{a}_2$, тоже будет $\boldsymbol{n}!$. Поступая аналогично со всеми $\boldsymbol{n}+1$ элементами, получим, что число перестановок будет $\boldsymbol{n}!(\boldsymbol{n}+1)=1\cdot 2\cdot 3\cdots \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+1)=(\boldsymbol{n}+1)!$

Рассмотрим произвольную перестановку $\boldsymbol{n}$ чисел

$$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,...\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}.$$

Выберем в ней два числа $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}$ и $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{j}}$. Если окажется, что большее из этих чисел расположено впереди (левее) меньшего, то числа $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}$ и $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{j}}$ образуют инверсию (беспорядок).

Определение. Инверсией (беспорядком) в перестановке называют такое положение, при котором большее число стоит впереди (левее) меньшего. В противном случае числа инверсии (беспорядка) не образуют.

Рассмотрим перестановку четырех первых чисел натурального ряда 3, 2, 1, 4. Здесь беспорядок образуют следующие пары чисел: 3 и 2, 3 и 1, 2 и 1. Значит, в данной перестановке число всех инверсий (беспорядков) три. В перестановке 2, 4, 3, 1 имеется четыре инверсии.

Для подсчета числа беспорядков воспользуемся следующим приемом. Определим количество чисел, стоящих впереди 1. Пусть их будет $\boldsymbol{k}_1$. Вычеркнем единицу и определим количество чисел, стоящих впереди 2. Пусть их будет $\boldsymbol{k}_2$. Вычеркнем двойку и определим количество чисел, стоящих впереди 3 и т.д.

Пример. Подсчитайте число инверсий в перестановке

2, 1, 4, 3, 5, 6.

Решение

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = 0, \quad k_5 = 0. \quad k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 2.$$

Следовательно, в данной перестановке имеются две инверсии.

В общем случае число инверсий (t) равно:

$$t = \sum_{i=1}^{n-1} k_i \,.$$

Заметим, что впереди самого большого числа перестановки большее число стоять не может. Поэтому суммирование осуществляется до $n-1$.

Число инверсий может быть четным или нечетным.

Правило. Если в одном из членов определителя расположить множители так, чтобы первые индексы возрастали, то перед этим членом пишется знак плюс, когда число инверсий, образованных перестановкой вторых индексов, четное. И наоборот, если число инверсий нечетное, то ставится знак минус.

Пример. Определить знак члена определителя пятого порядка: $a_{32}, \quad a_{41}, \quad a_{53}, \quad a_{24}, \quad a_{15}$.

Решение. Расположим множители этого члена в порядке возрастания первых индексов: $a_{15}, \quad a_{24}, \quad a_{32}, \quad a_{42}, \quad a_{53}$.

Рассмотрим перестановку 5, 4, 2, 1, 3, составленную из вторых индексов, и определим число инверсий:

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 2, \quad k_4 = 1.$$

Число инверсий составит 3 + 2 + 2+1=8. Раз число инверсий четное, то перед этим членом определителя ставится знак плюс.

Пример. Пользуясь определением определителя, вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Задача, очевидно, сводится к тому, чтобы записать сумму отличных от нуля членов данного определителя. В качестве первого сомножителя таких членов можно взять из первой строки $\boldsymbol{a}_{12}$ или $\boldsymbol{a}_{13}$. Если берем $\boldsymbol{a}_{12}$, то из второй строки можно взять $\boldsymbol{a}_{21}$ или $\boldsymbol{a}_{24}$. Если берем $\boldsymbol{a}_{21}$, то из третьей строки можно взять только $\boldsymbol{a}_{34}$, а из четвертой $\boldsymbol{a}_{43}$. Перебирая так все возможности и учитывая знаки соответствующих подстановок, получим:

$$\Delta = \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{34}\boldsymbol{a}_{43} - \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{24}\boldsymbol{a}_{31}\boldsymbol{a}_{43} - \boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{34}\boldsymbol{a}_{42} + \boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{a}_{24}\boldsymbol{a}_{31}\boldsymbol{a}_{42}.$$

Замечание. Вычислять более сложные определители путем непосредственного применения определения было бы весьма неудобно. Для этого применяются специальные методы (см.§3).

В приложениях часто встречаются определители второго и третьего порядков. Определители второго порядка вычисляются согласно определению по формуле

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22} - \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{12},$$

которая иллюстрируется следующей схемой:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Для определителя третьего порядка соответствующая формула имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{a}_{33} + \boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{32} + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{23}\boldsymbol{a}_{31} - \boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{a}_{31} - \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{23}\boldsymbol{a}_{32} - \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{33}.$$

При его вычислении часто удобно пользоваться правилом треугольников (правилом Саррюса), которое символически можно записать так:

$$
\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} =
\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} +
\begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} +
\begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} -
\begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} -
\begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} -
\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} .
$$

Ключевые слова и словосочетания

Определитель, элементы определителя, главная диагональ, побочная диагональ, порядок определителя, перестановка, инверсия (беспорядок).

Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой определитель (детерминант) матрицы A?
2. Что называется главной (первой) диагональю определителя?
3. Что называется побочной (второй) диагональю определителя?
4. Что называется перестановкой чисел?
5. Что называется инверсией (беспорядком) в перестановке?
6. Приведите прием подсчета числа инверсий (беспорядков) в перестановке.
7. Как определяется знак члена определителя n- го порядка?
8. Как вычисляются определители второго порядка?
9. С помощью какого правила можно вычислить определители третьего порядка?

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить число инверсий в перестановках:

а) 2, 4, 3, 5, 1, 7, 6; ***б)*** 7, 5, 3, 6, 4, 2, 1;

в) 7, 4, 5, 3, 6, 2, 1, 8; ***г)*** 8, 6, 4, 2, 7, 5, 3, 1.

2. Выяснить какие из данных произведений являются членами определителя соответствующего порядка; указать при этом порядок определителя и знак члена:

а) $a_{34}a_{15}a_{23}a_{42}a_{51}$; ***б)*** $a_{15}a_{23}a_{34}a_{51}a_{42}$;

в) $a_{61}a_{52}a_{42}a_{33}a_{14}a_{25}$; *г)* $a_{53}a_{42}a_{31}a_{25}a_{34}a_{16}$.

3. Выбрать j и k так, чтобы произведение $a_{1j}a_{21}a_{32}a_{5k}a_{45}$ было отрицательным членом определителя пятого порядка.

4. Дополнить произведение элементов $a_{13}a_{24}a_{35}a_{46}a_{57}$ определителя 7- го порядка так, чтобы получить член этого определителя, входящий в него: а) со знаком плюс; б) со знаком минус.

5. Найти члены определителя

$$\begin{vmatrix} 3x & 1 & 2 \\ x & x & 1 \\ 2 & x & 2x \end{vmatrix}$$

содержащие x^3 и x^2.

6. Пользуясь определением определителя, вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 2 & 2 & ... & 2 \\ 0 & 0 & 3 & ... & 3 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & n \end{vmatrix}$; *б)* $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; *г)* $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; *д)* $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

7. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$; *б)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; *в)* $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$.

8. Вычислить определители третьего порядка:

$$а)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \qquad б)\ \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}; \qquad в)\ \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix};$$

$$г)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \qquad д)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}; \qquad е)\ \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

§3. Свойства определителей

Транспонированием определителя называется такое преобразование, при котором его строки делаются столбцами с тем же самым номером. Транспонирование есть поворот определителя около главной диагонали.

Свойство 1. Определитель не меняется при транспонировании, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство этого свойства основывается на следующих рассуждениях. Всякий член определителя имеет вид $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$, где $\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n$ перестановка вторых индексов. Знак члена определителя зависит от четности инверсий в перестановке вторых индексов. В транспонированном определителе члены состоят из тех же множителей, что и в исходном определителе, хотя они имеют иное расположение индексов, но четность инверсий в перестановке вторых индексов одинакова. Отсюда и вытекает свойство определителя не изменяться при транспонировании.

Следовательно, сроки и столбцы в определителе равноправны, и если выполняется некоторое свойство относительно строк, то такое же свойство существует и для столбцов. В дальнейшем такие два свойства будем формулировать одновременно.

Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Свойство 2. Если хотя бы одна из строк (столбцов) определителя состоит только из нулей, то определитель равен нулю.

Доказательство. Каждый член определителя содержит множитель из этой строки, все элементы которой равны нулю. Следовательно, все члены определителя и он сам равны нулю.

Свойство 3. Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то определитель изменит знак.

Доказательство. В результате этой операции изменится четность инверсий в перестановке вторых индексов. Все члены получать обратные знаки, следовательно, и определитель изменить свой знак на обратный.

Пример. Убедиться в справедливости свойства 3 для определителя

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

и определителя получаемого из него перестановкой 1-й и 3-й строк.

Решение. Пользуясь правилом треугольников, получим

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 30 + 0 + 3 + 0 - 40 = -11.$$

Найдем теперь определитель, полученный из данного перестановкой 1-й и 3-й строк:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3+40+4-30 = 11.$$

Выполнение свойства 3 очевидно.

Свойство 4. Если в определителе имеются две одинаковые строки (столбцы), то определитель равен нулю.

Доказательство. Если в определителе одинаковые строки поменять местами, то по свойству 3 он должен изменить знак на обратный. Однако в данном случае этого не произойдет, все члены определителя останутся в точности такими же, как и были и по величине и по знаку, а это возможно лишь тогда, когда определитель равен нулю.

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя умножить на какое-либо число, то сам определитель умножится на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Это свойство можно перефразировать так:

Общий множитель элементов строки (столбцов) можно выносить за символ определителя.

Доказательство. Каждый член определителя содержит множитель из этой строки. Значит, его можно вынести за знак определителя.

Например, имеем определитель второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Умножим вторую строку определителя на число b. Получим

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ba_{21} & ba_{22} \end{vmatrix}.$$

Члены этого определителя $a_{11}ba_{22} - a_{12}ba_{21}$. Вынесем общий множитель за скобки $b(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, тогда в скобках останутся члены исходного определителя. Значит,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ba_{21} & ba_{22} \end{vmatrix} = b \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство 6. Если две строки (два столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть две строки определителя пропорциональны, т .е. элементы одной получаются умножением элементов другой на коэффициент пропорциональности. После вынесения коэффициента пропорциональности за знак определителя по свойству 5, у определителя окажутся две одинаковые строки. А такой определитель (по свойству 4) равен нулю.

Свойство 7. Если все элементы некоторой строки (столбца) состоят из двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в одном из которых элементами этой строки (столбца) являются первые слагаемые, во втором – вторые, а остальные элементы такие же, как и в данном определителе, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Каждый член данного определителя содержит множитель, и притом только, из той строки, элементы которой состоят из двух слагаемых. Раскрыв скобки в этом члене, получим два слагаемых: в одном вместо суммы множителем служит первое слагаемое элемента рассматриваемой строки, в другом – второе. Все первые и все вторые слагаемые образуют определители. У первого из них элементами указанной строки служат первые слагаемые, у второго – вторые слагаемые, а остальные элементы обоих определителей совпадают с элементами данного определителя.

Свойство 8. Определитель не изменится, если к элементам какой – нибудь строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженное на любое число λ, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (*)$$

В правой части равенства (*) элементы i-й строки состоят из двух слагаемых. Поэтому, согласно свойству 7, справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{j1} & \lambda a_{j2} & \dots & \lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (**)$$

Но по свойству 4 второе слагаемое правой части этого равенства равно нулю, так как две строки определителя (i-я и j-я) одинаковы. Тогда из равенства (**) следует равенство (*).

Замечание. Перечисленные свойства широко используются для упрощения вычисления определителей.

Для того чтобы сформулировать последнее свойство определителей требуются новые понятия и определения.

Определение. Если в определителе n-го порядка выделить некоторый элемент, например a_{ij}, и вычеркнуть строку и столбец, в которых этот элемент находится (i-я строка и j-й столбец), то в результате останется определитель $(n-1)$-го порядка. Этот оставшийся определитель называется **минором** элемента a_{ij} и обозначается символом M_{ij}.

Например, для определителя 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Выделим элемент a_{32} и вычеркнем 3-ю строку и 2-й столбец, в которых находится этот элемент. Получим минор элемента a_{32}

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, количество миноров $(n-1)$ - го порядка будет столько, сколько элементов содержит определитель, т.е. $n \cdot n$.

Если в миноре $(n-1)$ - го порядка выбрать какой-либо элемент и вычеркнуть строку и столбец, в которых он находится, то получим минор $(n-2)$ - го порядка. Аналогично, можно говорить о минорах $(n-3)$ - го, $(n-4)$ - го порядка и т.д. минором 1-го порядка являются сами элементы определителя.

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение обозначается символом A_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример. Дан определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Выделим элемент 5 и вычеркнем строку и столбец, в которых он находится. Получим

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение этого элемента

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3.$$

Теперь приведем последнее свойство определителей (без доказательства).

Свойство 9 (теорема Лапласа). Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

или то же самое

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

Эта формула называется **формулой разложения определителя** Δ по элементам $\boldsymbol{i}$-й строки.

Очевидно, также имеет место **формула разложения определителя** Δ по элементам $\boldsymbol{j}$-го столбца:

$$\Delta = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} (-1)^{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}} \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{ij}}.$$

Следствие. Сумма произведений всех элементов некоторой строки (некоторого столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (или другого столбца) равна нулю.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложим его по элементам первой строки. Имеем

$$\Delta = 2\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{12} + 3\boldsymbol{A}_{13} = 2(-1)^{1+1} \cdot \boldsymbol{M}_{11} + (-1)^{1+2} \cdot \boldsymbol{M}_{12} + (-1)^{1+3} \cdot \boldsymbol{M}_{13} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(9-8) - (15-2) + 3(20-3) = 2 - 13 + 51 = 40.$$

Читатель может самостоятельно разложить определитель по другим строкам и столбцам определителя и убедится, что во всех случаях искомая величина будет равна 40.

Нетрудно заметить, что если у определителя какая-либо строка или столбец содержит нулевые элементы, то разложение удобнее осуществлять именно по этой строке или столбцу.

Например, дан определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Вычислить такой определитель весьма просто, если разложить его по элементам второй строки:

$$\Delta = 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 21 = 4 .$$

Пользуясь свойствами определителя, можно превращать некоторые элементы какой-либо строки или столбца в нули, что существенно упрощает вычисления.

Пример. Дан определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} .$$

Пользуясь свойством 8, прибавим к элементам первой строки соответствующие элементы третьей строки, умноженные на -1. От этого определитель не изменится:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} .$$

Как видим, среди элементов 1-й строки появился один нулевой. Теперь прибавим к элементам 2-го столбца соответствующие элементы третьего столбца, умноженные на -2. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} .$$

Полученный определитель также равноценен исходному. Но его 1-я строка и 2-й столбец содержит по два нулевых элемента. Разложив, например, этот определитель по элементам 2-го столбца, имеем:

$$\Delta = 0 \cdot A_{12} + (-1) \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (0+3) = -3 .$$

Ключевые слова

Транспонирование определителя, минор, алгебраическое дополнение, теорема Лапласа, формула разложения определителя.

Вопросы для самопроверки

1.Что такое транспонирование определителя? Докажите, что определитель не изменяется при транспонировании.

2. Чему равен определитель, если все элементы одной из его строк (или одного из его столбцов) равны нулю? Докажите это утверждение.

3. Почему определитель меняет знак, если в нем поменять местами две строки (или два столбца)?

4. Почему определитель равен нулю, если в нем имеются две одинаковые
строки или два одинаковых столбца?

5. Как изменится определитель, если все элементы некоторой его строки (или столбца) умножить на какое-либо число?

6. Почему определитель равен нулю, если две его строки (или два столбца) пропорциональны?

7. Чему равен определитель, у которого все элементы какой-либо строки
(или столбца) представляют собой сумму двух слагаемых?

8. Изменится ли определитель, если к элементам какой-либо его строки (или столбца) прибавить произведение соответствующих элементов другой строки (или столбца) на какое-либо постоянное число? Докажите это утверждение.

9. Что называется минором элемента определителя?

10. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя и как определяется его знак?

11. Как вычисляются определители с помощью алгебраических дополнений их элементов?

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{13} и a_{31} для определителя

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; ***б)*** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 4 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; ***в)*** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; ***б)*** $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; ***в)*** $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; ***д)*** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; ***е)*** $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; ***з)*** $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; ***и)*** $\begin{vmatrix} 4 & a & 1 & -5 \\ 3 & b & 2 & 1 \\ 2 & c & -3 & 4 \\ 1 & d & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Пользуясь свойствами определителей, включая разложение по строке или по столбцу, доказать тождество:

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

§4. Дальнейшее изучение матриц. Ранг матрицы. Обратная матрица

Теперь мы после изложения теории определителей продолжим дальнейшее изучение матриц.

4.1. Некоторые определения

Определение. Квадратная матрица называется **невырожденной** или **неособенной**, если ее определитель не равен нулю, и **вырожденной** или **особенной**, если ее определитель равен нулю.

Пример. Даны матрицы:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & -1\\ 5 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -5 & 10\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Установить, какие из них являются неособенными.

Решение. Вычислим определители данных матриц.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & -1\\ 5 & 0 & 0\end{vmatrix}=10-60=-50.\qquad |\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -5 & 10\end{vmatrix}=10-10=0.$$

$$|\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Следовательно, матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{E}$ - неособенные, а матрица $\boldsymbol{B}$ - особенная.

Замечание. Определитель единичной матрицы любого порядка, очевидно, равен единице.

Определение. **Присоединенной** к квадратной матрице $\boldsymbol{A}$ называется матрица $\overline{\boldsymbol{A}}$ того же порядка, элементами которой являются алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя матрицы $\boldsymbol{A}'$, транспонированной относительно матрицы $\boldsymbol{A}$. Таким образом, если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{m2} & \dots & a_{in} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{m2} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

найти присоединенную матрицу.

Решение. Найдем матрицу A', транспонированной относительно матрицы A:

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим элементы присоединенной матрицы:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=0, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-10, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Следовательно, матрица $\overline{A}$, присоединенная к матрице A, имеет вид

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ -5 & -15 & 1 \\ -20 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Отметим одно интересное свойство.

4.2. Определитель произведения двух матриц

Если A и B - квадратные матрицы одного и того же порядка, то $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.

Пример. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно вычислить, что

$$AB = \begin{pmatrix} 17 & 21 & 11 \\ 27 & 33 & 18 \\ 20 & 34 & 19 \end{pmatrix}; \qquad BA = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 16 \\ 32 & 29 & 25 \\ 28 & 23 & 23 \end{pmatrix}.$$

Несмотря на то, что полученные матрицы различны, их определители равны: $|AB| = |BA| = -120$. С другой стороны $|A| \cdot |B| = -3 \cdot 40 = -120$.

4.3. Ранг матрицы

4.3.1. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы методом окаймления

В матричном исчислении важное значение имеет понятие ранга матрицы. Сначала, прежде чем вводить понятие ранга матрицы введем понятие минора $\boldsymbol{k}$ - го порядка матрицы.

Выше отмечалось (см. §3), что определитель порядка $\boldsymbol{n}$ может иметь миноры различных порядков: $(\boldsymbol{n}-1)$, $(\boldsymbol{n}-2)$, $(\boldsymbol{n}-3)$ и т. д.

Аналогично обстоит дело и с минорами матриц.

Пусть дана матрица A размерностью $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \dots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \dots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \dots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней произвольно $\boldsymbol{k}$ строк и $\boldsymbol{k}$ столбцов. Тогда получим квадратную матрицу $\boldsymbol{k}$-то порядка. Определитель этой матрицы называется **минором $\boldsymbol{k}$ - го порядка матрицы** $\boldsymbol{A}$. Выбирая всевозможными способами по $\boldsymbol{k}$ строк и $\boldsymbol{k}$ столбцов, получаем всевозможные миноры $\boldsymbol{k}$-го порядка матрицы $\boldsymbol{A}$. Очевидно, что максимальный порядок минора может равняться меньшему числу из $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$.

Но миноры могут быть и других порядков: $(\boldsymbol{k}-1)$-го, $(\boldsymbol{k}-2)$-го, $(\boldsymbol{k}-3)$-го и т. д. вплоть до миноров 1-го порядка (каждый отдельный элемент матрицы $\boldsymbol{A}$).

Рангом матрицы A называется наибольшее из порядков миноров, отличных от нуля и обозначается $\boldsymbol{rangA}$ или $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$.

Таким образом, ранг матрицы определяется максимальным порядком минора, отличного от нуля. Если матрица $\boldsymbol{A}$ имеет ранг $\boldsymbol{r}$, то это означает, что существует в этой матрице минор порядка $\boldsymbol{r}$, отличный от нуля, а всякий минор порядка большего, чем $\boldsymbol{r}$, равен нулю (в противном случае именно он определял бы ранг матрицы).

Пусть выделенное из матрицы $\boldsymbol{A}$ максимальное количество произвольных $\boldsymbol{k}$ строк и $\boldsymbol{k}$ столбцов (предположим, что $\boldsymbol{n}<\boldsymbol{m}$ и поэтому $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n}$) составляет следующую квадратную матрицу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если определитель, составленный из элементов этой матрицы, не равен нулю, то это означает, что матрица A размерностью $m \times n$ имеет ранг, равный n. Если же этот определитель равен нулю, то ранг матрицы A меньше n.

Выделим в матрице элемент a_{ij} и вычеркнем строку и столбец, в которых он находится. Получим минор $(n-1)$-го порядка.

Количество миноров этого порядка, естественно, равно количеству элементов матрицы, т.е. $n \times n$. Если среди этих элементов имеется хотя бы один, отличный от нуля, то ранг матрицы равен $n-1$. Если же все миноры этого порядка равны нулю, то тогда надлежит рассмотреть все миноры $(n-2)$-го порядка и т. д.

Практический способ вычисления ранга матрицы (исходя из выше изложенного) состоит в следующем: в заданной матрице выбираем минор 2-го порядка, не равный нулю. Если такого минора нет, то ранг матрицы будет равен единице (если, конечно, матрица не нулевая, т.е. не все ее элементы равны нулю; нулевая матрица имеет ранг 0).

Затем находим значение миноров, окаймляющих выбранный. **Минором, окаймляющим данный минор**, называется минор высшего порядка по отношению к данному, если этот минор высшего порядка содержит данный минор. Если найдется минор, отличный от нуля, то продолжаем окаймление дальше, если же такого минора не окажется, то ранг равен 2 и т. д.

Пример. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим минор 2-го порядка, не равный нулю, например, минор, составленный из элементов, расположенных в левом верхнем углу матрицы:

$$\boldsymbol{M} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 .$$

Окаймляем его. Возможны четыре варианта окаймления, но во всех случаях эти миноры 3-го порядка оказываются равными нулю:

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 4 & 8 & 18 \\ 10 & 18 & 40 \end{vmatrix} = 0; \qquad \boldsymbol{M}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 10 & 18 & 17 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\boldsymbol{M}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 4 & 8 & 18 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix} = 0; \qquad \boldsymbol{M}_4 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг матрицы равен 2, так как наивысший порядок минора, отличного от нуля, равен 2.

Пример. Найти ранг матрицы:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Левый верхний минор 2-го порядка равен нулю

$$\boldsymbol{M} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Возьмем другой минор 2-го порядка, например

$$\boldsymbol{M} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Окаймляем его и получим минор 3-го порядка:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Продолжим окаймление. Здесь возможны два варианта, определить которые рекомендуется читателю. В обоих случаях миноры 4-го порядка окажутся равными нулю. Значит, матрица A имеет ранг 3,т.е. $r(A) = 3$.

Замечание. Такое вычисление ранга является, вообще громоздким, так как приходится часто рассматривать большое число миноров матрицы. Существуют более эффективные способы вычисления ранга матрицы, основанные на приведении матрицы к ступенчатому или каноническому виду. Их мы рассмотрим в п. 4.3.3.

4.3.2. Основные свойства ранга матрицы

Рассмотрим теперь те свойства ранга матрицы, которые упрощают его вычисление.

Свойство 1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

Свойство 2. Ранг матрицы не меняется при перестановке ее столбцов (или строк).

Свойство 3. Ранг матрицы не меняется при умножении всех элементов ее столбца (или строки) на отличное от нуля число.

Свойство 4. Ранг матрицы не изменится, если к одному из ее столбцов (или строк) прибавить другой столбец (соответственно строку), умножив его (ее) на некоторое число.

Доказательство. Обозначим через A исходную матрицу, через $\tilde{A}$ - преобразованную. Согласно определению ранга достаточно установить, что всякому отличному от нуля минору $\tilde{M}$ матрицы $\tilde{A}$ отвечает отличный от нуля минор M того же порядка в матрице A, и наоборот. Но поскольку все преобразования, о которых идет речь, обратимы (иначе говоря, матрица A может быть получена из матрицы $\tilde{A}$ преобразованием того же вида, что и $\tilde{A}$ из A), то в доказательстве нуждается только первая часть утверждения.

Итак, пусть $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ - отличный от нуля минор матрицы $\widetilde{\boldsymbol{A}}$. В случае преобразований 1 - 3 в матрице $\boldsymbol{A}$ найдется минор $\boldsymbol{M}$ того же порядка, удовлетворяющий одному из следующих соотношений:

$$\boldsymbol{M} = \widetilde{\boldsymbol{M}}', \quad \boldsymbol{M} = (-1)^{s}\widetilde{\boldsymbol{M}}, \quad \boldsymbol{M} = \mu\widetilde{\boldsymbol{M}}, \qquad \text{где } \mu \neq 0.$$

Если $\widetilde{\boldsymbol{M}} \neq 0$, то и $\boldsymbol{M} \neq 0$. Поэтому свойства 1 - 3 доказаны.

Для доказательства свойства 4, учитывая возможность перестановки столбцов, напишем:

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}_1 \quad \boldsymbol{C}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{C}_n); \qquad \widetilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{C}_1 + \lambda\boldsymbol{C}_2 \quad \boldsymbol{C}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{C}_n).$$

Рассмотрим следующие три случая:

1. Минор $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ матрицы $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ не содержит элементов ее первого столбца $\boldsymbol{C}_1 + \lambda\boldsymbol{C}_2$. Тогда, если $\boldsymbol{M}$ соответствующий (одинаково расположенный) минор матрицы $\boldsymbol{A}$, то, очевидно, $\boldsymbol{M} = \widetilde{\boldsymbol{M}} \neq 0$.

2. Минор $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ содержит элементы первых двух столбцов матрицы $\widetilde{\boldsymbol{A}}$. Если $\boldsymbol{M}$ - соответствующий минор матрицы $\boldsymbol{A}$, то

$$\widetilde{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} + \lambda\boldsymbol{M}_1,$$

где $\boldsymbol{M}_1 = 0$, так как содержит два одинаковых столбца - первый и второй. Значит, и в этом случае $\boldsymbol{M} = \widetilde{\boldsymbol{M}} \neq 0$.

3. Пусть, наконец, $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ содержит элементы первого столбца матрицы $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, но не содержит элементов ее второго столбца. Имеем опять

$$\widetilde{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} + \lambda\boldsymbol{M}_2,$$

где теперь и $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{M}_2$ - миноры матрицы $\boldsymbol{A}$ того же порядка, что и $\widetilde{\boldsymbol{M}}$. Так как $\widetilde{\boldsymbol{M}} \neq 0$, то или $\boldsymbol{M} \neq 0$, или $\boldsymbol{M}_2 \neq 0$. Следовательно, во всех случаях, ненулевому минору матрицы $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ можно поставить в соответствие ненулевой минор того же порядка матрицы $\boldsymbol{A}$. Как указывалось выше, в силу обратимости преобразования верно и обратное. Следовательно, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{r}(\widetilde{\boldsymbol{A}})$; свойство 4 доказано.

Свойство 5. Ранг матрицы не изменится, если удалить из нее столбец, равный нулю.

Действительно, все миноры матрицы $\boldsymbol{A}$, не входящие в преобразованную матрицу $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, содержат нулевой столбец и, значит, равны нулю. Поэтому максимальный порядок отличных от нуля миноров у этих матриц одинаков.

Свойство 6. Ранг матрицы не изменится, если удалить из нее столбец, являющийся линейной комбинацией других столбцов.

В самом деле, по свойству 4 можно, не меняя ранга, сделать этот столбец нулевым, после чего по свойству 5 удалить.

В формулировках свойств 5 и 6, разумеется, столбцы можно заменить строками.

4.3.3. Элементарные преобразования матрицы. Простейший метод вычисления ранга матрицы

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

1) перестановка двух любых столбцов (или строк);
2) умножение столбца (или строки) на отличное от нуля число;
3) прибавление к одному столбцу (или строке) линейной комбинации остальных столбцов (или строк).

Как было доказано в п.4.3.2, при элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.

Две матрицы называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью конечного множества элементарных преобразований.

Эквивалентные матрицы не являются, вообще говоря, равными, но их ранги равны. Если матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ эквивалентны, то это записывается так: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

Ступенчатой матрицей называется матрица, обладающая тем свойством, что если в какой-либо из ее строк первый отличный от нуля элемент стоит на $\boldsymbol{k}$-м месте, то во всех следующих строках на первых $\boldsymbol{k}$ местах стоят нули, например:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Любая матрица при помощи элементарных преобразований только строк приводится к ступенчатой. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Канонической матрицей называется матрица, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю, например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При помощи элементарных преобразований строк и столбцов любую матрицу можно привести к канонической. Ранг канонической матрицы равен числу единиц на ее главной диагонали.

Простейший метод вычисления ранга матрицы с числовыми элементами состоит в приведении ее элементарными преобразованиями к ступенчатой или канонической матрице.

Пример. Найти ранг матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение. При помощи элементарных преобразований приводим эту матрицу к ступенчатому виду.

Из второй строки вычтем первую и переставим эти строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Теперь из второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 2 и 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

из третьей строки вычтем вторую; получим ступенчатую матрицу

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая эквивалентна матрице A, так как получена из нее с помощью конечного множества эквивалентных преобразований.

Очевидно, что ранг матрицы B равен двум, а следовательно, и $r(A)=2$.

Матрицу B легко привести к канонической. Вычитая первый столбец, умноженный на подходящие числа, из всех последующих, обратим в нуль все элементы первой строки, кроме первого, причем элементы остальных строк не изменяются. Затем, вычитая второй столбец, умноженный на подходящие числа, из последующих, обратим в нуль все элементы второй строки, кроме второго, и получим каноническую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Процедура вычисления ранга матрицы методом элементарных преобразований позволяет решить и другую задачу: выделить из системы столбцов (строк) этой матрицы базис, а также найти выражения всех столбцов (строк) через базисные. Это мы покажем на примере в п. 4.4.2.

Замечание. В дальнейшем в п. 4.5.2 мы покажем применение элементарных преобразований к отысканию обратной матрицы.

4.4. Теорема о базисном миноре. Необходимое условие равенства нулю определителя

4.4.1. Линейная комбинация векторов. Теорема о линейной зависимости векторов

Напомним ранее введенные некоторые определения (см.§1) и несколько дополним их.

Вектором мы называем матрицу, состоящую из одного столбца (вектор-столбец) или из одной строки (вектор-строка). Элементы этой матрицы называются **компонентами вектора**. Число компонент вектора - это его размерность; вектор размерности n называется n-мерным. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, под словом «вектор» будем понимать вектор-столбец.

Вектор Y называется **линейной комбинацией векторов** $X_1, X_2, ..., X_n$, если имеет место равенство

$$\boldsymbol{Y} = \lambda_1 \boldsymbol{X}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{X}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{X}_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ числовые коэффициенты.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ называются **коэффициентами линейной комбинации.** Очевидно, что компоненты вектора $\boldsymbol{Y}$ представляют собой линейные комбинации соответствующих компонент векторов $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$.

Векторы $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$ называются **линейно зависимыми,** если существует равная нулевому вектору (нулю) линейная комбинация

$$\lambda_1 \boldsymbol{X}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{X}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{\Theta},$$

где не все коэффициенты λ_j равны нулю.

Заметим, что если некоторые из векторов $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$ линейно зависимы, то и все они линейно зависимы, так как остальные векторы можно включить в имеющуюся зависимость с нулевыми коэффициентами.

Векторы $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$, не являющиеся линейно зависимыми, называются **линейно независимыми.** Иначе говоря, векторы $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$ называются **линейно независимыми**, если равенство

$$\lambda_1 \boldsymbol{X}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{X}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{\Theta}$$

возможно лишь в случае, когда все коэффициенты λ_j равны нулю.

Между понятиями линейной комбинации и линейной зависимости существует следующая связь.

Теорема. Для того чтобы векторы $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Доказательство. Пусть векторы $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$ линейно зависимы. По определению это означает существование чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ не равных одновременно нулю, и таких, что

$$\lambda_1 \boldsymbol{X}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{X}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{\Theta}.$$

Для простоты записи предположим, что ненулевым является первый коэффициент λ_1. Умножив обе части предыдущего равенства на число $-\dfrac{1}{\lambda_1}$, получим

$$-\boldsymbol{X}_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{X}_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{\Theta},$$

или

$$\boldsymbol{X}_1=\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{X}_2+\cdots+\left(-\frac{\lambda_{\boldsymbol{n}}}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}},$$

а это соотношение означает, что вектор $\boldsymbol{X}_1$, является линейной комбинацией остальных векторов.

Обратно, пусть, например, вектор $\boldsymbol{X}_1$ является линейной комбинацией остальных, т. е.

$$\boldsymbol{X}_1=\mu_2\boldsymbol{X}_2+\mu_3\boldsymbol{X}_3+\cdots+\mu_4\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}.$$

Перенеся $\boldsymbol{X}_1$ в правую часть равенства, получим

$$\boldsymbol{\Theta}=(-1)\boldsymbol{X}_1+\mu_2\boldsymbol{X}_2+\mu_3\boldsymbol{X}_3+\cdots+\mu_4\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}$$

это означает линейную зависимость векторов.

Пример. Доказать, что векторы

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Решение. Равенство $\lambda_1\boldsymbol{X}_1+\lambda_2\boldsymbol{X}_2+\lambda_3\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{\Theta}$ равносильно совокупности следующих числовых равенств:

$$\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot 0+\lambda_3\cdot 0=0$$
$$\lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 1+\lambda_3\cdot 0=0$$
$$\lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 0+\lambda_3\cdot 1=0,$$

откуда $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

4.4.2.Теорема о базисном миноре

Пусть дана матрица $\boldsymbol{A}$ ранга $\boldsymbol{r}$. Тогда по определению ранга эта матрица содержит отличный от нуля минор $\boldsymbol{r}$-го порядка. Всякий такой минор будем называть **базисным минором** матрицы $\boldsymbol{A}$. Ясно, что у данной матрицы может быть несколько базисных миноров. Выберем и зафиксируем один из них. Столбцы и строки матрицы, на пересечении которых расположены элементы выбранного нами базисного минора, назовем **базисными столбцами и строками.**

Для любого базисного минора имеет место следующая важная теорема.

Теорема (Теорема о базисном миноре). Всякий столбец матрицы является линейной комбинацией ее базисных столбцов; сами базисные столбцы линейно независимы,

Доказательство. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай столбцов; транспонировав матрицу, получим то же утверждение для строк.

Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \vdots & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \vdots & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \vdots & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & & & \\ a_{r+11} & a_{r+12} & \cdots & a_{r+1r} & & a_{r+1r+1} & \cdots & a_{r+1n} \\ a_{r+21} & a_{r+22} & \cdots & a_{r+2r} & & a_{r+2r+1} & & a_{r+2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & & a_{mr+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В ней выделим один из базисных миноров M. Его порядок r равен рангу матрицы A. Будем для простоты обозначений предполагать, что он расположен на пересечении первых r столбцов и первых r строк матрицы A. Если это не так, то, переставляя столбцы и строки, мы всегда можем перевести выделенный минор в левый верхний угол матрицы A, а затем изменить надлежащим образом номера элементов. При этом очевидно, что если теорема верна после перестановки столбцов и строк, то она верна и до перестановки их.

Докажем сперва вторую часть теоремы. Предположим, вопреки доказываемому, что базисные столбцы матрицы A линейно зависимы. Но тогда, очевидно, линейно зависимы столбцы минора M, в силу чего он должен быть равен нулю. Это противоречит определению базисного минора. Следовательно, базисные столбцы матрицы A линейно независимы.

Теперь докажем, что любой столбец матрицы A является линейной комбинацией ее базисных столбцов. С этой целью дополним рассматриваемый базисный минор элементами еще одного, например, j-го столбца и одной, например, i-й строки; при этом номер добавленной строки может быть и меньше r.

Рассмотрим минор $(r+1)$-го порядка, расположенный на пересечении этих $r+1$ столбцов и $r+1$ строк:

$$M_{r+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1r} & a_{2r} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{pmatrix}.$$

Каковы бы ни были эти дополнительно выделенные столбец и строка, получившийся минор $(r+1)$-го порядка будет равен нулю.

Действительно, если добавленный столбец или строка входят в число базисных, то минор M_{r+1}будет иметь два одинаковых столбца (или строки). Если добавленные столбец и строка не входят в число базисных, то M_{r+1}будет одним из миноров матрицы A порядка $(r+1)$, большего, чем ранг этой матрицы. В этом случае $M_{r+1}=0$ по определению ранга.

Разложив этот минор по элементам его нижней строки, получим

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{ir}A_{ir} + a_{ij}A_{ij} = 0$$

где числа $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ir}, A_{ij}$ представляют собой алгебраические дополнения элементов нижней строки. В частности, число A_{ij}, представляет собой базисный минор $M \neq 0$. Поскольку алгебраические дополнения не зависят от элементов нижней строки (они будут такими же, если вместо элементов i-й строки поставить элементов любой другой строки), то обозначим их так:

$$A_{i1} = \alpha_1,\ \ A_{i2} = \alpha_2, ..., A_{ir} = \alpha_r,\ \ A_{ij} = \alpha_j.$$

Тогда равенство $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{ir}A_{ir} + a_{ij}A_{ij} = 0$ примет вид

$$\alpha_1 a_{i1} + \alpha_2 a_{i2} + \cdots + \alpha_r a_{ir} + \alpha_j a_{ij} = 0.$$

Разделив это равенство на $\alpha_j = M \neq 0$ и разрешив его относительно a_{ij} получим равенство

$$a_{ij} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_j}\right)_1 a_{i1} + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_j}\right) a_{i2} + \cdots + \left(-\frac{\alpha_r}{\alpha_j}\right) a_{ir},$$

которое справедливо для элементов любой строки, т.е. для любых значений $\boldsymbol{i}$, $1 \le \boldsymbol{i} \le \boldsymbol{m}$.

Подставляя в это равенство значения $\boldsymbol{i} = 1,2,...,\boldsymbol{m}$ и обозначая $\left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_j} \right)$ через λ_k $(\boldsymbol{k} = 1,2,...,\boldsymbol{r})$, мы получим систему из $\boldsymbol{m}$ равенств:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_{1j} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_{11} + \lambda_2 \boldsymbol{a}_{12} + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{a}_{1r}, \\
&\boldsymbol{a}_{2j} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_{21} + \lambda_2 \boldsymbol{a}_{22} + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{a}_{2r}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\boldsymbol{a}_{mj} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_{m1} + \lambda_2 \boldsymbol{a}_{m2} + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{a}_{mr}.
\end{aligned}$$

Полученная система эквивалентна следующему равенству:

$$\boldsymbol{A}_j = \lambda_1 \boldsymbol{A}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{A}_r,$$

где $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_r$ базисные столбцы, которое означает, что $\boldsymbol{j}$ - й столбец $\boldsymbol{A}_j$ матрицы А является линейной комбинацией базисных столбцов.

Остается заметить, что столбцы $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_r$ являются, конечно, линейными комбинациями столбцов $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_r$. Теорема доказана.

Замечание. Рассматривая приведенное доказательство, легко заметить, что, помимо известных свойств определителей, мы опирались только на два следующих положения:

а) в матрице $\boldsymbol{A}$ существует ненулевой минор $\boldsymbol{M}$ порядка $\boldsymbol{r}$ и

б) любой минор $(\boldsymbol{r}+1)$-го порядка матрицы $\boldsymbol{A}$, содержащий минор $\boldsymbol{M}$, равен нулю.

В то же время условие нашей теоремы: «минор $\boldsymbol{M}$ порядка $\boldsymbol{r}$ базисный» означает пока нечто большее, чем утверждения а) и б). Оно равносильно тому, что ранг данной матрицы равен $\boldsymbol{r}$, т.е. в частности, что все миноры этой матрицы как порядка $\boldsymbol{r}+1$, так и выше, содержащие и не содержащие минор $\boldsymbol{M}$, равны нулю.

Замечание. Теореме о базисном миноре можно придать также следующий вид. Пусть, например, $\boldsymbol{A}^{\Lambda}$ означает матрицу, полученную из данной матрицы $\boldsymbol{A}$ вычеркиванием всех строк, не входящих в число базисных. Тогда каждая строка матрицы $\boldsymbol{A}$ является линейной комбинацией строк матрицы $\boldsymbol{A}^{\Lambda}$:

$$
\begin{aligned}
&a_{i1} = \lambda_{i1}a_{11} + \lambda_{i2}a_{21} + \cdots + \lambda_{ir}a_{r1}, \\
&a_{i2} = \lambda_{i1}a_{12} + \lambda_{i2}a_{22} + \cdots + \lambda_{ir}a_{r2}, \qquad\qquad (i = 1,2,\ldots,m) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{in} = \lambda_{i1}a_{1n} + \lambda_{i2}a_{2n} + \cdots + \lambda_{ir}a_{rn}.
\end{aligned}
$$

Составив матрицу из коэффициентов этих линейных зависимостей $\Lambda = (\lambda_{ij})$, легко найдем, что

$$A = \Lambda A^{\Lambda}.$$

Таким образом, получаем следующую форму теоремы о базисном миноре:

Пусть A^{Λ} - матрица, составленная из базисных строк матрицы A. Тогда существует матрица Λ, удовлетворяющая соотношению $\Lambda A^{\Lambda} = A$.

Применяя те же соображения к матрице A' и транспонируя полученное равенство, установим существование матрицы M такой, что $A^{\Lambda}M = A$ (здесь A^{Λ} - матрица, составленная из базисных столбцов матрицы A).

Пример. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

найти базис системы строк и выразить небазисные строки через базисные –небазисные строки представить как линейную комбинацию базисных строк.

Решение. Эту задачу мы будем решать, используя процедуру вычисления ранга матрицы методом элементарных преобразований.

Подвергаем матрицу A элементарным преобразованиям. В получаемых матрицах справа от каждой строки пишем ее выражение через A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 - строки исходной матрицы A. Итак имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 + A_1 \\ A_3 \\ A_4 - 2A_1 \\ A_5 - A_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{25}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 + A_1 \\ A_3 - (A_2 + A_1) \\ A_4 - 2A_1 \\ A_5 - A_1 + \frac{3}{2}(A_2 + A_1) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{28}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 + A_1 \\ A_3 - A_2 - A_1 \\ A_4 - 2A_1 - (A_3 - A_2 - A_1) \\ A_5 + \frac{3}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{25}{2}(A_3 - A_2 - A_1). \end{array}$$

После всех преобразований четвертая строка матрицы A превратилась в нулевую. Значит, строки A_1, A_2, A_3, A_5 образуют базис системы строк. Тем самым ранг матрицы A равен 4. Далее, из равенства

$$A_4 - 2A_1 - (A_3 - A_2 - A_1) = 0$$

находим выражение вектора A_4 через базисные векторы:

$$A_4 = A_1 - A_2 + A_3 .$$

Другими словами, последнее соотношение представляет тот факт, что четвертая строка (вектор A_4) является линейной комбинацией базисных строк (базисных векторов A_1, A_2, A_3, A_5).

4.4.3. Необходимое условие равенства нулю определителя

В качестве следствия из теоремы о базисном миноре докажем следующее утверждение.

Теорема (необходимое условие равенства определителя нулю). Если определитель равен нулю, то его столбцы (и строки) линейно зависимы.

Доказательство. Пусть определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

равен нулю. Тогда ранг матрицы A заведомо меньше n, т.е. ее базисный минор имеет порядок $r < n$. Поэтому после выделения базисных столбцов в матрице A найдется столбец, не попавший в число базисных. Этот столбец линейно выражается через базисные столбцы. Следовательно, столбцы определителя $|A|$ линейно зависимы. Применяя это рассуждение к транспонированному определителю, получим линейную зависимость строк определителя $|A|$.

Замечание. Обратное утверждение, т. е. достаточность условия линейной зависимости строк или столбцов определителя для его равенства нулю, можно получить из свойств определителя (см.§3). Это утверждение можно сформулировать так:

Если столбцы (строки) определителя линейно зависимы, то данный определитель равен нулю.

Объединяя эти результаты, получаем:

Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы (или строки) линейно зависимы.

Стоит заметить, что согласно теореме (необходимое условие равенства определителя нулю) из линейной зависимости строк определителя следует линейная зависимость его столбцов.

4.5. Обратная матрица

Определение. Обратной матрицей для квадратной матрицы A порядка n называется квадратная матрица того же порядка, которая, будучи умноженной как справа, так и слева на данную матрицу, дает единичную матрицу.

Обозначим для матрицы A обратную ей матрицу A^{-1}. Тогда, по определению, имеем

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E .$$

Пример

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E};$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}.$$

Нахождение обратной матрицы для данной матрицы называется обращением данной матрицы. Существуют несколько методов обращения матриц.

Теорема. Для того чтобы матрица $\boldsymbol{A}$ имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была неособенной, т. е. ее определитель был отличен от нуля.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что матрица $\boldsymbol{A}$ имеет обратную $\boldsymbol{A}^{-1}$, т.е.

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}.$$

Тогда согласно утверждению об определителе произведения двух матриц (4.2) имеем

$$|\boldsymbol{A}|\cdot\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=|\boldsymbol{E}|=1,$$

откуда $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

Достаточность. Теперь предположим, что $|A|\neq 0$. Построим присоединенную матрицу

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{21}&\dots&\boldsymbol{A}_{i1}&\dots&\boldsymbol{A}_{n1}\\\boldsymbol{A}_{12}&\boldsymbol{A}_{22}&\dots&\boldsymbol{A}_{i2}&\dots&\boldsymbol{A}_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\\boldsymbol{A}_{1j}&\boldsymbol{A}_{2j}&\dots&\boldsymbol{A}_{ij}&\dots&\boldsymbol{A}_{nj}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\\boldsymbol{A}_{1n}&\boldsymbol{A}_{m2}&\dots&\boldsymbol{A}_{in}&\dots&\boldsymbol{A}_{nn}\end{pmatrix}$$

к квадратной матрице $\boldsymbol{A}$.

Рассмотрим произведение матриц $\boldsymbol{A}$ и $\overline{\boldsymbol{A}}$:

$$A\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{m2} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя общий элемент матрицы $A\overline{A}$ по правилу умножения матриц, получим, что он равен

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\dots+a_{in}A_{jn}.$$

Известно, что сумма произведений элементов некоторой строки определителя на их алгебраические дополнения равна определителю (свойство 9 определителей - теорема Лапласа, см. §3), а сумма произведений элементов некоторой строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю (следствие теоремы Лапласа, см. §3) , т.е.

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{js}=\delta_{ij}|A|,$$

где

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \textit{при} \quad i\neq j,\\ 0 & \textit{при} \quad i=j.\end{cases}$$

Поэтому в результате перемножения матриц A и $\overline{A}$ будет получена скалярная матрица

$$\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}=|A|\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A\overline{A}=|A|E. \qquad (*)$$

Аналогичным путем устанавливается равенство

$$\overline{A}A=|A|E. \qquad (**)$$

Таким образом, мы установили основное свойство присоединенной матрицы $\overline{A}$, выражаемое равенствами (*) и (**).

Из равенств (*) и (**) следует, что матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \overline{A},$$

или

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{i1}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{i2}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1j}}{|A|} & \frac{A_{2j}}{|A|} & \dots & \frac{A_{ij}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nj}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{m2}}{|A|} & \dots & \frac{A_{in}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \qquad (***)$$

является обратной для матрицы A.

Действительно, в силу (*)

$$AA^{-1} = A \cdot \frac{1}{|A|}\overline{A} = \frac{1}{|A|} A \cdot \overline{A} = E,$$

а из равенства (**) следует, что построенная матрица A^{-1} обладает также свойством

$$A^{-1}A = E.$$

Теорема доказана.

Равенство (***) дает возможность вычисления обратной матрицы.

Замечание. Для данной матрицы A ее обратная матрица A^{-1} является **единственной.** Действительно, если предположить, что существует матрица X такая, что $AX = E$, то, умножая это равенство на матрицу A^{-1} слева, получим, что $X = A^{-1}$. Если предположить, что $YA = E$, то, умножая справа на A^{-1}, получим $Y = A^{-1}$.

Теорема. Особенная матрица не имеет обратной.

Доказательство. По определению $A \cdot A^{-1} = E$. Тогда согласно утверждению об определителе произведения двух матриц (4.2) имеем

$$|A| \cdot \left|A^{-1}\right| = |E|.$$

Определитель особенной матрицы A равен нулю, а определитель единичной матрицы равен единице. Тогда согласно утверждению об определителе произведения двух матриц (4.2) имеем

$$0 \cdot \left| A^{-1} \right| = 1,$$

или $0 = 1$, что невозможно. Значит, особенная матрица не может иметь обратной.

Теорема доказана.

Пример. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

найти обратную матрицу.

Решение. Так как определитель матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

то матрица A неособенная.

Составим присоединенную матрицу

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

В данном случае

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Разделив все элементы матрицы $\overline{A}$ на $|A| = 5$, получим обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Пример. Для треугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

найти обратную.

Решение. Данная матрица неособенная, т.е. ее определитель отличен от нуля:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Составим присоединенную матрицу

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разделив все элементы матрицы $\overline{A}$ на $|A| = 2$, получим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что матрица обратная неособенной треугольной матрице, всегда представляет собой также треугольную матрицу того же типа. Это обстоятельство может быть использовано при вычислении обратной матрицы для заданной треугольной.

Замечание. Вычисление обратной матрицы по формуле (***) очень трудоемко, особенно для матриц высокого порядка. Поэтому равенство (***) важно лишь в теоретическом отношении, а на практике пользуются другими методами численного нахождения обратной матрицы. Одну из этих методов мы рассмотрим в п. 4.5.2.

4.5.1. Свойства обратных матриц

Легко проверить, что:

1) $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$;

2) $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$;

3) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$;

4) $(\boldsymbol{A}')^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)'$.

Для проверки, например, третьего равенства достаточно рассмотреть произведение

$$(\boldsymbol{AB})\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{BB}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{AE})\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{AB}^{-1} = \boldsymbol{E},$$

откуда

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{AB})^{-1}.$$

Для проверки четвертого равенства рассмотрим произведение

$$\boldsymbol{A}'\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)' = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)' = \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E},$$

откуда

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)' = (\boldsymbol{A}')^{-1}.$$

Для квадратных матриц введем одно определение, которое связанно с операциями транспонирования и обращения.

Определение. Квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ называется **ортогональной,** если $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, т.е. если транспонированная матрица обратна исходной. Отсюда, в частности, следует, что **каждая ортогональная матрица обратима.**

Так как $(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}$, то из $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ вытекает, что **обратная матрица к ортогональной матрице есть ортогональная матрица.**

Очевидно, что если $\boldsymbol{A}$ ортогональная матрица, то $|\boldsymbol{A}| = 1$**.**

Далее, если матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ортогональны, то

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^{-1}, \quad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}^{-1}$$

и, значит,

$$\left(\boldsymbol{AB}\right)' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}.$$

Иными словами**, произведение ортогональных матриц есть ортогональная матрица.**

4.5.2. Применение элементарных преобразований к отысканию обратной матрицы

Легко проверить, что всякое элементарное преобразование квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ эквивалентно умножению последней на неособенную матрицу специального вида, представляющую собой результат применения соответствующего элементарного преобразования к единичной матрице того же порядка, что и данная матрица $\boldsymbol{A}$. При этом, если преобразование производится над столбцами матрицы $\boldsymbol{A}$, то ее следует умножать справа на матрицу специального вида, а если преобразование производится над строками, то умножать слева.

Так, например, перестановка двух столбцов матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{pmatrix}$$

эквивалентна умножению этой матрицы справа на матрицу, полученную из единичной матрицы того же порядка перестановкой соответствующих столбцов, т.е.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{33} \end{pmatrix}.$$

Прибавление к третьему столбцу матрицы $\boldsymbol{A}$ линейной комбинации первых двух столбцов эквивалентно умножению матрицы $\boldsymbol{A}$ справа на матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что эта матрица получена из единичной матрицы того же порядка, что и матрица A, прибавлением к третьему столбцу линейной комбинации первых двух столбцов.

Выполним указанное умножение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha a_{11} + \beta a_{12} + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \alpha a_{21} + \beta a_{22} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \alpha a_{31} + \beta a_{32} + a_{33} \end{pmatrix}.$$

Любую неособенную матрицу A путем элементарных преобразований только столбцов (или только строк) можно привести к единичной матрице E. Если совершенные над матрицей A элементарные преобразования в том же порядке применить к единичной матрице E, то в результате получится обратная матрица A^{-1}.

Действительно, пусть в результате одинаковых элементарных преобразований, совершенных над столбцами матриц A и E в равенстве

$$A^{-1}A = E,$$

матрица A превратилась в единичную, а матрица E - в некоторую $\widetilde{E}$. Указанным преобразованиям отвечает умножение матриц A и E справа на матрицу $\widetilde{E}$, т. е. $\left(A^{-1}A\right)\widetilde{E} = E\widetilde{E}$. Учитывая, что $A\widetilde{E} = E$, имеем $A^{-1} = \widetilde{E}$, т.е. обратная матрица A^{-1} представляет собой преобразованную единичную матрицу.

Удобно совершать элементарные преобразования над матрицами A и E одновременно, записывая обе матрицы рядом через черту.

Отметим еще раз, что при отыскании канонического вида квадратной матрицы с целью нахождения ее ранга можно пользоваться преобразованиями строк и столбцов. В случае, когда одновременно надо найти обратную матрицу (если таковая существует), в процессе преобразований следует использовать только строки или только столбцы.

Пример. Методом элементарных преобразований найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поменяем местами первый и второй столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

К третьему столбцу прибавим первый, а ко второму – первый, умноженный на -2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & \vdots & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из первого столбца вычтем удвоенный второй, а из третьего – умноженный на 6 второй:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5 & -2 & 13 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прибавим третий столбец к первому и второму:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -8 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 18 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножим последний столбец на -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 18 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Полученная справа от вертикальной черты квадратная матрица является обратной к данной матрице A. Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.6. Характеристический многочлен матрицы

С каждой квадратной матрицей связаны два многочлена: характеристический и минимальный. Эти многочлены играют большую роль в различных вопросах теории матриц и задач, в том числе экономических, где используется теория матриц. Ниже вводится понятие характеристического многочлена, и приводятся самые простые его свойства. Введения понятия минимального многочлена матрицы и изучения его свойства выходит за рамки нашего курса. Эти вопросы более полно рассматриваются во всех книгах по теории матриц [3, 4]. Среди математической литературы для экономистов наиболее полезна книга [5].

Характеристическим или вековым уравнением матрицы $A = (a_{ij})$ называется уравнение вида

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Левая часть этого уравнения называется **характеристическим многочленом матрицы** A**.** Очевидно, степень этого многочлена равна n.

Характеристическое уравнение матрицы A можно записать в сокращенном виде

$$|A - \lambda E| = 0,$$

где E - единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Обозначим характеристический многочлен через $\varphi(\lambda)$**.** Тогда

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_k \lambda^{n-k} + \dots + p_n.$$

Можно показать, что коэффициенты характеристического многочлена следующим образом выражаются через элементы матрицы A:

$$p_k = (-1)^{n-k} S_k,$$

где S_k - сумма всех **главных миноров**, т.е. миноров симметрично расположенных относительно главной диагонали, порядка k матрицы A. В частности,

$$p_1 = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}), \quad p_n = |A|.$$

Сумма диагональных элементов $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ **называется следом матрицы** A и обозначается через SpA, т.е.

$$SpA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Корни характеристического многочлена **называются собственными значениями** или **характеристическими числами**[6] **матрицы** A.

Совокупность всех собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, где каждое число фигурирует столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена, **называется спектром матрицы** A.

Согласно формулам Виета произведение корней характеристического многочлена равно свободному члену, т.е.

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|.$$

Отсюда следует, что матрица A тогда и только тогда имеет хотя бы одно собственное значение, равное нулю, когда она вырождена $(|A| = 0)$.

Пример. Найти собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель третьего порядка, получим

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0, \qquad (\lambda + 1)^3 = 0.$$

[6] Термин «собственное значение» широко используется в инженерных и физических задачах. В математической и экономической литературе чаще пользуются термином «характеристическое число».

Откуда имеем

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Замечание. Численное нахождение собственных значений матрицы высокого порядка представляет значительные технические трудности. Практически удобные методы решения таких задач рассматриваются в книгах по вычислительным методам линейной алгебры.

Ключевые слова и словосочетания

Неособенная матрица, особенная матрица, присоединенная матрица,
ранг матрицы, минор k- го порядка матрицы, окаймляющий минор, ступенчатая матрица, каноническая матрица, линейная комбинация векторов, линейная зависимость и независимость векторов, базисный минор, обратная матрица, ортогональная матрица, характеристическое или вековое уравнение матрицы, характеристический многочлен матрицы, главные миноры, след матрицы, собственные значение или характеристические числа матрицы.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения вырожденной или особенной и невырожденной, или неособенной матриц.
2. Какая матрица называется присоединенной к квадратной матрице?
3. Что называется минором k- го порядка? Что называется рангом матрицы?
4. Какой минор называется окаймляющим?
5. Как вычисляется ранг матрицы?
6. Перечислите основные свойства ранга матрицы.
7. Что называется элементарным преобразованием матрицы?
8. Какие эффективные способы вычисления ранга матрицы вы знаете?
9. Какая прямоугольная матрица называется ступенчатой, канонической?

10. Какая связь существует между рангом ненулевой матрицы и числом строк ее ступенчатого вида?

11. Какая связь существует между рангом ненулевой матрицы и числом единиц на главной диагонали ее канонического вида?

12. Что называется линейной комбинацией векторов?

13. Дайте определения линейной зависимости и независимости векторов.

14. Какая связь существует между понятиями линейной комбинации и линейной зависимости? Эту связь сформулируйте в виде теоремы.

15. Сформулируйте теорему о базисном миноре. Прокомментируйте эту теорему.

16. Сформулируйте в виде утверждения следствие теоремы о базисном миноре.

17. Дайте определения обратной матрицы к данной матрице.

18. Приведите теорему существования и единственности обратной матрицы.

19. Какие методы нахождения обратной матрицы к данной матрице вы знаете?

20. Перечислите основные свойства обратных матриц.

21. Приведите определения и свойства ортогональных матриц.

22. Приведите пример ортогональной матрицы с размерами 2×2 не являющейся диагональной.

23. Что называется характеристическим или вековым уравнением матрицы?

24. Дайте определения характеристического многочлена матрицы.

25. Каким образом коэффициенты характеристического многочлена выражаются через элементы матрицы?

26. Что называется следом матрицы?

27. Дайте определения собственного значения или характеристического числа матрицы.

28. Что называется спектром матрицы?

29. Когда матрица имеет хотя бы одно собственное значение, равное нулю?

Задачи для самостоятельного решения

1. **П**ри помощи элементарных преобразований найти ранги следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; ***б***) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; ***в***) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; ***д***) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; ***е***) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$; ***з***) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 11 \\ -1 & -4 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; ***к***) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ -8 & -5 & -12 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 13 & -7 & 3 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & -7 & -1 & -5 & -2 \\ -1 & 2 & -7 & -5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; ***м***) $\begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & -39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}$.

2. Найти ранги следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \boldsymbol{a} & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; ***б***) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ \boldsymbol{a} & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 11 & 1 & 2\boldsymbol{a} \end{pmatrix}$; ***в***) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \boldsymbol{a} & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 2 & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$; ***д***) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 & \boldsymbol{a} \\ 1 & 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}^2 \end{pmatrix}$; ***е***) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \boldsymbol{a} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 1 & 4 \\ 1 & \boldsymbol{b} & 1 & 3 \\ 1 & 2\boldsymbol{b} & 1 & 4 \end{pmatrix}$; ***з***) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & 1 & 1 & \boldsymbol{b} \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 & \boldsymbol{c} \\ 1 & 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$; ***и***) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; ***л***) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

3. Найти значения λ, при которых матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший ранг.

4. Методом элементарных преобразований выделит в матрице базисные строки и найти выражения небазисных строк через базисные, т.е. небазисные строки представить как линейную комбинацию базисных строк.

а) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; ***б***) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; ***в***) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 2 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & -2 \\ 8 & -2 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}$; ***д***) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -6 & 2 \\ 6 & 3 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; ***е***) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 15 & 17 \\ 7 & -6 & -7 & 0 \end{pmatrix}$; ***з***) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 8 & -3 \\ 5 & 26 & -9 & -12 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$; ***к***) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 12 & 11 & -5 \\ 1 & -3 & 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; ***м***) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Найти обратные матрицы A^{-1}, если:

а) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $ad - bc \neq 0$; ***б***) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; ***г***) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

6. Найти обратные матрицы A^{-1}, если:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}$; ***б***) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$; ***в***) $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$; ***д***) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; ***е***) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 7 & -8\\ -1 & -3 & 4\end{pmatrix}$; ***з***) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

и) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\ 3 & 8 & 0 & -4\\ 2 & 2 & -4 & -3\\ 3 & 8 & -1 & -6\end{pmatrix}$; ***к***) $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 7 & 6 & -1\\ 1 & 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$;

л) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$; ***м***) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \boldsymbol{a} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{a} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{a} & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a} & 1\end{pmatrix}$;

н) $A=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}^3 & \cdots & \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\\ 0 & 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}^2 & \cdots & \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}-1}\\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$;

$$\boldsymbol{o})\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \boldsymbol{n}-1 & \boldsymbol{n} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \boldsymbol{n}-2 & \boldsymbol{n}-3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & \boldsymbol{n}-3 & \boldsymbol{n}-4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Примечание. В задачах л) – о) матрица $\boldsymbol{A}$ имеет порядок $\boldsymbol{n}$.

7. Укажите, какие из приведенных ниже матриц ортогональны:

$$\boldsymbol{a})\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{б})\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \sin 2 & 0 & \cos 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos 2 & 0 & \sin 2 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{в})\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{г})\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Определите такие $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, чтобы матрица

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \frac{1}{2} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

оказалась ортогональной.

9. При каком условии диагональная матрица является ортогональной?

10. Покажите, что любая ортогональная матрица второго порядка может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

11. Пусть $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ и $\boldsymbol{T}$ - ортогональная матрица, тогда матрицы $\boldsymbol{TAT'}$ и $\boldsymbol{TBT'}$ коммутативны. Покажите это.

12. Найти собственные значения следующих матриц:

а) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; ***б***) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; ***в***) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$;

г) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 8 & 1\end{pmatrix}$; ***д***) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 18\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

13. Найти собственные значения следующих матриц:

а) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$; ***б***) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$; ***в***) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -5 & -3\\ -1 & -2 & -3\\ 3 & 15 & 12\end{pmatrix}$;

г) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -4 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -4 & 4 & -2\end{pmatrix}$; ***д***) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 17 & 0\end{pmatrix}$; ***е***) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

ж) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 5 & 0 & 4\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$; ***з***) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8 & -2 & 2\\ -2 & 5 & -5\\ 2 & -5 & 5\end{pmatrix}$; ***и***) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 7 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 13 & 0\end{pmatrix}$;

к) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$; ***л***) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; ***м***) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ -1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

ГЛАВА II
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Если проследить историю развития естественных наук, то значительная ее часть представляет собой летопись непрерывного стремления человечества к обобщению понятий, которые позволили бы представить действительный мир в математических терминах. В истории развития социально – экономических наук (особенно экономических) в последнее время[7] также наблюдаются определенные попытки выдвижения количественно обоснованных теорий, использующих математические методы. Применение математических методов в экономике, однажды начавшись, не прекращалось никогда. Сейчас экономические исследования уже просто немыслимы без использования соответствующего математического аппарата. Создатели эффективных математических инструментов стали авторами самых существенных экономических результатов. В среде специалистов и научной общественности пользуются заслуженным уважением такие исследователи как П. Самуэльсон, Дж. Нейман, Т. Купманс, М. Моришима, Дж. Робинсон, В. Леонтьев, Х. Никайдо, Л.В. Канторович, А.А. Петров и многие другие, усилиями которых экономическая теория превратилась в современную науку.

Чтобы иллюстрировать математически некоторые законы действительного мира, необходимо создать соответствующие **математические модели** относительно одной или большего числа

[7] На протяжении всей истории человечества развитие и усложнение экономической структуры общества, процессов функционирования производства и процессов управления этим функционированием в рамках той или иной экономической формации требовали создание адекватных методов анализа экономических реалий и разработки вариантов решений. В силу этой потребности уже в древние века возникали определенные экономические теории и учения, некоторые из которых благополучно дожили до наших дней.

Со временем объективные потребности практической деятельности, по сути дела жесткая необходимость, привели к проникновению в экономические исследования все более сложных математических методов. Невозможно перечислить всех известных исследователей, в числе первых внесших свой вклад в использование математического аппарата для нужд экономического анализа. Их имена остались в истории науки навсегда, вспомним хотя бы таких ученых как Ф. Кенэ, Л. Вальрас, В. Парето и многих других.

рассматриваемых переменных. Целью модели может быть, например, определение расстояния от Земли до Солнца как функции времени, установление связи точки кипения воды с внешним давлением или выбор наилучшего пути очистки сырой нефти для получения авиационного и моторного топлива. Модель будет состоять из одного или большего числа уравнений или неравенств. Они могут включать только переменные величины или же одновременно и переменные величины и их производные (что дает дифференциальное уравнение) или переменные величины, связанные иными способами (например, интегральные или интегро-дифференциальные уравнения). Совершенно не обязательно, чтобы все переменные точно определялись моделью. Они могут быть случайными величинами, и тогда могут быть найдены лишь их вероятностные распределения.

Ни одна модель не может полностью отражать все стороны действительного мира. Приближения всегда необходимы. В некоторых случаях модели с высокой степенью точности могут соответствовать описываемому явлению. В других случаях доступные нам наилучшие модели дают величины, отличающиеся более чем на 100% от результатов действительных физических измерений. Фактически мы ожидаем иногда, что модель будет служить только для одной цели - предсказанию качественного поведения переменных величин. Точность, требуемая от модели, определяется конечной целью, для которой она создавалась.

Математические построения, возникающие в современной экономической теории, в большей или меньшей степени отличаются от соответствующих построений в физических науках. Поэтому будет неудивительно, если попытки изучения свойств экономических систем путем формального применения того аналитического аппарата, который был удобным в физике, окажутся малопродуктивными. Глубокое проникновение в сущность экономических закономерностей может быть обеспечено лишь с учетом специфических требований к математическому аппарату, предъявляемых самой природой экономических систем. Такова общая точка зрения специалистов, работающих в области современной математической экономики.

Эта экономико-математическая специфика очень часто находит формальное выражение в свойствах **линейности соответствующих математических объектов**. Так, например, законы постоянной или убывающей продуктивности выражаются в форме линейности и т. д.

Линейность представляет собой весьма общее понятие: существуют алгебраические линейные уравнения, линейные обыкновенные дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения в частных производных, линейные интегральные уравнения и др. Все линейные модели имеют свойства **аддитивности** и **гомогенности (однородности). Аддитивность** означает, что если переменная величина $\boldsymbol{x}_1$ производит эффект α_1 при ее одиночном использовании и переменная величина $\boldsymbol{x}_2$ производит эффект α_2 при одиночном использовании, то переменные величины $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ при их совместном использовании производят эффект $\alpha_1 + \alpha_2$. **Гомогенность** означает, что если переменная величина $\boldsymbol{x}_1$ производит эффект α_1, то при любом действительном числе λ, переменная величина $\lambda\boldsymbol{x}_1$ производит эффект $\lambda\alpha_1$.

С математической точки зрения, линейные модели имеют серьезные преимущества, так как в случае нелинейных систем при применении математических методов почти всегда возникают трудности при аналитическом изучении. С линейными моделями легко работать и получать аналитические и численные решения, представляющие интерес. Эти факторы делают линейные модели наиболее широко применимым математическим аппаратом в естественных и социальных науках.

Почти все линейные модели сводятся к системам алгебраических линейных уравнений или неравенств, хотя первоначальная модель может состоять из системы обычных дифференциальных или линейных дифференциальных уравнений.

Таким образом, в большинстве линейных моделей мы сталкиваемся с системами линейных уравнений. Чаще всего число уравнений будет равно числу неизвестных (как в случае экономической теории Леонтьева (рассмотрим позже в §11 данного курса) и статистических регрессивных моделей (рассматриваются в предметах читаемых в старших курсах, например, в курсе «Теории вероятностей и математическая статистика»)). В этих случаях мы будем в состоянии найти единственные значения неизвестных. Если число неизвестных больше числа уравнений (в задачах линейного программирования (курс «Математическое программирование», которое читается на 2-м курсе) мы сталкиваемся с такими примерами), то в общем случае может существовать бесконечное число решений. Иногда мы имеем системы уравнений, где число уравнений больше числа неизвестных.

Однако не все эти уравнения являются независимыми, поскольку некоторые из них могут быть получены как линейные комбинации других уравнений. При таких обстоятельствах желательно найти достаточное количество независимых уравнений с тем, чтобы, решив их, мы получили значения всех неизвестных.

В этой главе рассматривается теория систем линейных уравнений. Мы получим критерии для существования и единственности решения, а также изучим свойства решений. Мы начнем исследование с рассмотрения вопроса о методе нахождения решения систем уравнений.

§5. Основные понятия и методы решения систем линейных уравнений

Теоретический материал, изученный нами в первой главе, является основой для изучения систем линейных уравнений. В этом и в следующем параграфах мы ими воспользуемся.

5.1. Основные понятия

5.1.1. Матрицы системы

Определение. Уравнение относительно неизвестных $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$ называется **линейным**, если его можно записать в виде

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$- произвольно заданные числа, называемые **коэффициентами уравнения**, а $\boldsymbol{b}$ - произвольно заданное число, называемое **свободным членом уравнения.**

В этой главе мы будем заниматься изучением систем линейных уравнений, используя при этом уже рассмотренные нами матрицы и определители.

Система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{1n}\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{2n}\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{b}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{a}_{m1}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{m2}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{mn}\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{b}_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Коэффициенты при неизвестных снабжены двумя индексами; первый индекс указывает номер уравнения, в котором содержится данный коэффициент, а второй - номер неизвестной, при которой стоит этот коэффициент. Заметим, что число уравнений в рассматриваемой системе, вообще говоря, не предполагается равным числу неизвестных.

Теперь сопоставим системе (1) две матрицы: матрицу

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которую будем называть **основной матрицей системы (1),** или просто **матрицей системы**, и матрицу

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

которую будем называть **расширенной матрицей системы (1).**

Ясно, что основная матрица системы (1) содержит $\boldsymbol{n}$ столбцов и $\boldsymbol{m}$ строк, а расширенная матрица той же системы содержит $\boldsymbol{n}+1$ столбцов и $\boldsymbol{m}$ строк.

5.1.2. Матричная форма записи системы

Используя понятие произведения матриц, систему (1) можно записать в виде

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}, \tag{1'}$$

где $\boldsymbol{A}$ - основная матрица системы,

$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец из неизвестных,

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец из свободных членов.

Равенство (1′) будем называть **системой линейных уравнений в матричной форме.**

5.1.3. Решение системы

Определение. Решением системы (1) называется всякая совокупность чисел $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{\boldsymbol{n}}$, которая, будучи подставлена в систему (1) вместо неизвестных $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}$, превращает все уравнения системы в равенства (тождества).

Всякое решение системы нужно понимать как вектор-столбец

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix}.$$

Так, например, система

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 5 \\ 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 - 3\boldsymbol{x}_3 = -4 \end{cases}$$

имеет своим решением вектор-столбец

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Действительно, поставляя числа $\xi_1 = 5,\ \xi_2 = 2,\ \xi_3 = 4$ в последнюю систему вместо неизвестных $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$, получим верные числовые равенства.

Не всякая система линейных уравнений имеет решение. Например, система

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 3 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 7 \end{cases}$$

не имеет ни одного решения, так как левые части уравнений этой системы при любых значениях неизвестных равны между собой, а правые не равны.

Определение. Система уравнений вида (1) называется **совместной,** или **разрешимой,** если она имеет хотя бы одно решение; система называется **несовместной,** или **неразрешимой,** если она не имеет решений.

Совместная система может иметь одно решение или много решений. Если система совместна, то будем говорить, что **система определенная,** если она имеет единственное решение, и **неопределенная,** если она имеет более одного решения. В дальнейшем будет показано, что неопределенная система имеет бесчисленное множество решений.

В случае, когда система неопределенная, каждое ее решение будем называть **частным решением данной системы**. Множество всех частных решении назовем **общим решением.**

Примером определенной системы может служить система

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 = 7 \\ \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 4, \end{cases}$$

ибо ее единственным решением является вектор - столбец

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Примером неопределенной системы может служить система

$$\begin{cases} 3\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = 1 \\ 6\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 = 2. \end{cases}$$

Ее частными решениями являются, например, векторы-столбцы

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что при любом $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{R}^1$ из $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} \\ 3\boldsymbol{k} - 1 \end{pmatrix}$ можно найти другие частные решения.

Следовательно, вектор – столбец

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} \\ 3\boldsymbol{k} - 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{R}^1$$

представляет общее решение данной системы.

Две системы линейных уравнений называются **эквивалентными,** или **равносильными,** когда каждое решение первой системы, если оно существует, является решением второй, и наоборот. Таким образом, в частности, все несовместные системы эквивалентны.

5.1.4. Элементарные преобразования системы линейных уравнений

Элементарными преобразованиями системы называются следующие преобразования:

1) перестановка любых двух уравнений;
2) умножение обеих частей одного из уравнений на любое отличное от нуля число;
3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число.

Легко проверить, что элементарные преобразования переводят данную систему уравнений в эквивалентную систему.

Пусть, например, обе части первого уравнения системы (1) умноженные на число λ, прибавлены к обеим частям второго уравнения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (a_{21} + \lambda a_{11})x_1 + (a_{22} + \lambda a_{12})x_2 + \cdots + (a_{2n} + \lambda a_{1n})x_n = b_2 + \lambda b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

Пусть вектор-столбец

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

будет произвольным решением системы (1). Ясно, что этот вектор-столбец будет решением и системы (2). Последняя система отличается от системы (1) лишь вторым уравнением. Но вектор-столбец Ξ удовлетворяет и второму уравнению системы (2), так как оно выражается через второе и первое уравнения системы (1). Обратно, всякое решение системы (2) будет удовлетворять и системе (1).

Следовательно, системы уравнений (1) и (2) эквивалентны, т.е. они или обе несовместны, или же обе совместны и обладают одними и теми же решениями.

Ясно, что если к системе (1) будут несколько раз применены элементарные преобразования, то вновь полученная система уравнений остается эквивалентной исходной системе.

Может случиться, что после выполнения таких преобразований в рассматриваемой системе появится уравнение, все коэффициенты левой части которого равны нулю. Если и свободный член этого уравнения равен нулю, то уравнение удовлетворяется при любых значениях неизвестных, и поэтому, отбрасывая это уравнение, мы получим систему, эквивалентную исходной системе. Если же свободный член этого уравнения отличен от нуля, то уравнение не удовлетворяется никакими значениями неизвестных, а поэтому полученная нами система уравнений, а также и исходная система будут несовместными.

Системы линейных уравнений численно решаются точными и итерационными методами. Под точными методами подразумеваются такие, которые дают решение системы при помощи конечного числа элементарных арифметических операций. Итерационные методы дают возможность приближенного решения системы линейных уравнений. Итерационные методы в данном курсе мы рассматривать не будем.

5.2. Методы решения систем линейных уравнений

Исторически первым наиболее распространенным точным методом решения системы линейных уравнений является метод Гаусса.

5.2.1. Метод Гаусса или метод последовательного исключения неизвестных

Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему.

Ступенчатой системой (или **системой ступенчатого вида**) называется система линейных уравнений вида

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_m \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = b_m .
\end{cases} \tag{3}
$$

Коэффициенты a_{ii} называются **главными** или **ведущими** элементами системы. Например, система

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 3 \\
\quad 3x_2 - x_3 \qquad + x_5 = 5 \\
\qquad\quad x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \\
\qquad\qquad\quad x_4 + x_5 = 6
\end{cases}
$$

имеет ступенчатый вид.

Если $k = n$, то система (3) называется **треугольной.** Ясно, что в этом случае она будет определенной.

Если же $k < n$, то система (3) будет неопределенной. Действительно, рассмотрим базисный минор основной матрицы системы (3) (см.§4), который в нашем случае состоит из первых k столбцов основной матрицы системы (3). Выделим в этом миноре произвольную строку. Элементы этой строки являются коэффициентами при k первых неизвестных $x_1, x_2, ..., x_k$ в одном из уравнений системы (3). Эти k первых неизвестных $x_1, x_2, ..., x_k$ называют **базисными неизвестными** рассматриваемой системы уравнений. Они могут быть выражены через $n - k$ остальных неизвестных, называемых **«свободными».** Базисные неизвестные оставим в левых частях к уравнений, а члены, содержащее свободные неизвестные, перенесем вправо. Из полученной системы уравнений выразим базисные неизвестные через свободные. Полученные выражения базисных неизвестных через свободные называются **общим решением** системы уравнений. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, можно получить частные решения системы уравнений. Следовательно, система (3) имеет бесчисленное множество решений.

Если в общем решении системы свободным неизвестным придавать нулевые значения, то такое решение называется **базисным.**

Пусть дана произвольная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4}$$

Будем для определенности считать, что коэффициент $a_{11} \neq 0$. Если это не так, то надлежащим образом изменим нумерацию неизвестных. Преобразуем систему (4), исключая неизвестное x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого обе части первого уравнения умножим на число $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и вычтем из соответствующих частей второго уравнения, затем обе части первого уравнения, умноженные на число $\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$, вычтем из соответствующих частей третьего уравнения и т. д.

Предполагая после этого, что $a_{22} \neq 0$, аналогичным способом исключим неизвестное x_2 из всех уравнений, кроме второго, и т. д.

В результате таких преобразований мы или получим совместную ступенчатую систему, эквивалентную системе (4), или придем к несовместной ступенчатой системе, в которой одно из уравнений имеет отличный от нуля свободный член, а все коэффициенты левой части равны нулю. В этом случае система (4) также является несовместной. Легко видеть, что таким способом можно любую систему линейных уравнений привести к ступенчатому виду. Следовательно, решение любой системы сводится к решению ступенчатой системы.

Заметим еще раз, что в процессе приведения системы (4) к ступенчатому виду могут получаться уравнения вида $0 = 0$. Их можно отбрасывать, так как это, очевидно, приводит к системе уравнений, эквивалентной прежней.

При практическом решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя все преобразования над ее строками. Дело в том, что подвергая расширенную матрицу $\widetilde{A}$ тому или иному элементарному преобразованию строк, мы будем подвергать аналогичному преобразованию и уравнения системы (4). Так, если мы умножаем i -ю строку матрицы $\widetilde{A}$ на число $\lambda \neq 0$, то умножим на это число и i-е уравнение системы (4), если в матрице $\widetilde{A}$ переставляется i-я и j-я строки, то системе (4) будут переставляться i-е и j-е уравнения; если к i-й строке матрицы $\widetilde{A}$ прибавляется ее j-я строка, умноженная на некоторое число μ, то к i-му уравнению системы (4) будет прибавляться почленно ее j-е уравнение, умноженное на то же самое число μ. При выбрасывании нулевой строки матрицы $\widetilde{A}$ из системы (4) будет выбрасываться уравнение типа $0=0$, т.е. уравнение, у которого все коэффициенты при неизвестных и свободный член равны нулю.

Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 \qquad - 6x_4 = 9 \\ \qquad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 & \vdots & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & \vdots & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & \vdots & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

и произведем следующее элементарное преобразование над ее строками:

а) разделим элементы первой строки на 2, а затем из второй и четвертой строк вычтем первую:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 4 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & \vdots & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & \vdots & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 4 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{13}{2} & \vdots & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & \vdots & -5 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{11}{2} & \vdots & -4 \end{pmatrix};$$

б) разделим элементы второй строки на $\left(-\frac{7}{2}\right)$, а затем из третьей и четвертой строк вычтем вторую умноженную соответственно на 2 и $\frac{7}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} & \vdots & -\frac{10}{7} \\ 0 & 2 & -1 & 2 & \vdots & -5 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{11}{2} & \vdots & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} & \vdots & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{12}{7} & \vdots & -\frac{15}{7} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix};$$

в) разделим элементы третьей строки на $\frac{3}{7}$, а затем прибавим к четвертой строке элементы третьей, умноженной на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} & \vdots & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} & \vdots & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & \vdots & -9 \end{pmatrix}.$$

г) разделим элементы четвертой строки на -9.

В результате всех преобразований данная система линейных уравнений приводится к треугольному виду

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2 - \frac{5}{2}\boldsymbol{x}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_4 = 4 \\ \boldsymbol{x}_2 - \frac{5}{7}\boldsymbol{x}_3 + \frac{13}{7}\boldsymbol{x}_4 = -\frac{10}{7} \\ \boldsymbol{x}_3 - 4\boldsymbol{x}_4 = -5 \\ \boldsymbol{x}_4 = 1. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение. Из последнего уравнения имеем

$$\boldsymbol{x}_4 = 1.$$

Подставляем это значение $\boldsymbol{x}_4$ в предыдущее уравнение и находим из него

$$\boldsymbol{x}_3 = -1.$$

Далее из второго и первого уравнений находим

$$\boldsymbol{x}_2 = -4 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{x}_1 = 3.$$

Решение системы можно написать в векторном виде

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из рассмотренного примера видно, что решение линейной системы уравнений по методу Гаусса сводится к построению эквивалентной системы, имеющей треугольный вид. Необходимым и достаточным условием применимости метода Гаусса является неравенство нулю всех главных элементов системы.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 + 3\boldsymbol{x}_4 = 1 \\ 4\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4 = 5 \\ 6\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_4 = 9 \\ 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3 - 12\boldsymbol{x}_4 = 10. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & \vdots & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & \vdots & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & \vdots & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & \vdots & 10 \end{pmatrix}$$

и преобразуем ее.

Первую строку, умноженную, соответственно, на 2,3,1, вычтем из последующих строк:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & \vdots & 9 \end{pmatrix}.$$

Вторую строку, умноженную, соответственно, на 2, 3, вычтем из последующих строк:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Система свелась к ступенчатой, которая после отбрасывания двух уравнений вида $0=0$ превращается в следующую:

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 + 3\boldsymbol{x}_4 = 1 \\ \qquad\qquad\quad \boldsymbol{x}_3 - 5\boldsymbol{x}_4 = 3. \end{cases}$$

Здесь за базисные неизвестные примем $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_3$. Это можно сделать, так как определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ из коэффициентов при этих коэффициентов отличен от нуля, т.е. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Свободными неизвестными служат $\boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{x}_4$.

Из второго уравнения найдем выражение $\boldsymbol{x}_3$ через $\boldsymbol{x}_4$. Затем, подставив его в первое уравнение, найдем выражение $\boldsymbol{x}_1$ через $\boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{x}_4$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_4 + 2 \\ \boldsymbol{x}_3 = 5\boldsymbol{x}_4 + 3. \end{cases}$$

Следовательно, общее решение $\boldsymbol{X}$ данной системы можно записать в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda^4 + 2 \\ \lambda^2 \\ 5\lambda^4 + 3 \\ \lambda^4 \end{pmatrix},$$

где λ^2 и λ^4 - произвольные числа.

Если положить, например,

$$\lambda^2 = 2, \ \lambda^4 = 1,$$

то найдем одно из частных решений этой системы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если же положить

$$\lambda^2 = 0, \ \lambda^4 = 0,$$

то найдем другое из частных решений, которое называется базисным решением этой системы:

$$X_б = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим следующую модификацию метода Гаусса.

5.2.2. Метод Гаусса – Жордана или метод полных исключений неизвестных

В методе Гаусса вместо того чтобы исключить x_k только в уравнениях с номерами $k+1,...,n$, мы с одинаковым успехом можем исключить также x_k в уравнениях с номерами $1,...,k-1$, так что x_k появится только в k-м уравнении. В таком случае не будет необходимости в обратной подстановке. Эта модификация гауссовского исключения называется **методом Гаусса – Жордана или методом полных исключений неизвестных.**

Следующие примеры иллюстрируют применение метода Гаусса – Жордана.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

методом Гаусса – Жордана или методом полных исключений неизвестных.

Решение. Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & -5 & \vdots & 3 \\ 4 & -2 & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

и произведем следующее элементарное преобразование над ее строками:

а) разделим элементы первой строки на 2, а затем с помощью элементарных преобразований все элементы первого столбца, кроме первого превратим в нули. Это означает, что исключим x_1 из всех уравнений, кроме первого:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -8 & 10 & \vdots & -1 \end{pmatrix};$$

а) разделим элементы второй строки на -1, а затем с помощью элементарных преобразований все элементы второго столбца кроме второго превратим в нули. Это означает, что исключим x_2 из всех уравнений, кроме второго:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \vdots & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 18 & \vdots & -17 \end{pmatrix};$$

а) разделим элементы третьей строки на 18, а затем с помощью элементарных преобразований все элементы третьего столбца кроме третьего превратим в нули. Это означает, что исключим $\boldsymbol{x}_3$ из всех уравнений , кроме третьего:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \dfrac{7}{36} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\dfrac{19}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\dfrac{17}{18} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в результате всех этих преобразований данная система линейных уравнений приводится к следующему треугольному виду:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 & & & = & \dfrac{7}{36} \\ & \boldsymbol{x}_2 & & = & -\dfrac{19}{18} \\ & & \boldsymbol{x}_3 & = & -\dfrac{17}{18}, \end{cases}$$

т.е. найдено решение системы

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{36} \\ -\dfrac{19}{18} \\ -\dfrac{17}{18} \end{pmatrix}.$$

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 + 3\boldsymbol{x}_4 = 1 \\ 2\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + 5\boldsymbol{x}_3 + 2\boldsymbol{x}_4 = 4 \\ 3\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3 + 2\boldsymbol{x}_4 = -2 \end{cases}$$

методом Гаусса – Жордана.

Решение. Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 & \vdots & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & \vdots & -2 \end{pmatrix}$$

и к элементам которой применим метод полных исключений неизвестных или метод Гаусса – Жордана:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \vdots & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{14}{5} & \frac{19}{5} & \frac{4}{5} & \vdots & \frac{18}{5} \\ 0 & \frac{14}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \vdots & -\frac{13}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{5}{7} & \vdots & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{14} & -\frac{2}{7} & \vdots & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 4 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & \vdots & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{56} & \vdots & -\frac{53}{56} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \vdots & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Система свелась к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + \frac{3}{7}\boldsymbol{x}_4 = \frac{3}{7} \\ \boldsymbol{x}_2 + \frac{3}{56}\boldsymbol{x}_4 = -\frac{53}{56} \\ \boldsymbol{x}_3 + \frac{1}{4}\boldsymbol{x}_4 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Здесь за базисные неизвестные примем $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{x}_3$, ибо определитель, составленный из коэффициентов при этих неизвестных $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. (этот единичный определитель является базисным минором основной матрицы коэффициентов последней системы).

Свободным неизвестным служит $\boldsymbol{x}_4$.

Из последней системы находим:

$$x_1 = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4,$$
$$x_2 = -\frac{53}{56} - \frac{3}{56}x_4,$$
$$x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4.$$

Следовательно, общее решение X данной системы можно записать в виде

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4 \\ -\frac{53}{56} - \frac{3}{56}x_4 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4 \end{pmatrix}.$$

Если положить, например,

$$x_4 = 2,$$

то найдем одно из частных решений этой системы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{59}{56} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Базисное решение данной системы таково:

$$X_б = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{53}{56} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Оно получается из общего решения при $x_4 = 0$.

5.2.3. Правило Крамера. Матричный способ решения

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n известными $x_1, x_2, ..., x_n$, т. е. такую систему, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{5}$$

или короче

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in} = b_i, \qquad i = 1,2,...,n. \tag{5'}$$

Основная матрица A этой системы имеет n строк и n столбцов, т.е. является квадратной. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется **определителем системы.**

Заменим в определителе системы Δ какой-либо столбец, например, j-й, столбцом B из свободных членов. Полученный таким способом определитель $\Delta_j(B)$ будем обозначать через Δ_j, т. е.

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поясним сказанное на примере. Пусть дана система 3 уравнений с 3 неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -5 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если дана система уравнений (5), определитель которой отличен от нуля, то эта система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \qquad j = 1,2,...,n. \tag{6}$$

Доказательство. Обозначим через A основную матрицу системы, через B - столбец из свободных членов. Тогда данная система запишется в матричном виде

$$AX = B,$$

где X - столбец из неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Проведем доказательство теоремы в три этапа.

1. Существование решения. Так как матрица A по условию неособенная, то существует обратная к ней матрица A^{-1}. Рассмотрим вектор-столбец $\Xi = A^{-1}B$ и покажем, что он является решением данной системы. Действительно,

$$A\Xi = A\left(A^{-1}B)\right) = \left(AA^{-1}\right)B = EB = B.$$

Таким образом, при подстановке вектор – столбца Ξ в систему уравнений $AX = B$ вместо вектора-столбца X из неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ получается тождество. Значит, вектор-столбец Ξ является решением данной системы.

2. Единственность решения. Пусть вектор-столбец Y - произвольное решение системы $AX = B$. Покажем, что $Y = \Xi$.

В самом деле, раз вектор Y является решением системы, то имеет место тождество

$$AY = B.$$

Умножая обе части этого тождества слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1}(AY) = A^{-1}B,$$
$$(A^{-1}A)Y = \Xi,$$
$$Y = \Xi.$$

Итак, всякое решение данной системы совпадает с вектором $\Xi = A^{-1}B$. Иначе говоря, данная система имеет единственное решение.

Замечание. Отыскание решения системы по формуле $X = \Xi = A^{-1}B$ называют **матричным способом решения системы**.

3. **Формулы Крамера.** Матрица A^{-1}, обратная к основной матрице A системы, имеет вид
4.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\Delta = |A|$; A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A. Согласно правилу умножения матриц отсюда получаем

$$X = \Xi = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 & + A_{21}b_2 + & \cdots & + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 & + A_{22}b_2 & \cdots & + A_{n2}b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n}b_1 & + A_{2n}b_2 & \cdots & + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Но согласно теоремы Лапласа и ее следствия (см.§3), имеем

$$\begin{array}{l} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n = \Delta_1(B) = \Delta_1, \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 \cdots + A_{n2}b_n = \Delta_2(B) = \Delta_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 \cdots + A_{nn}b_n = \Delta_n(B) = \Delta_n. \end{array}$$

Таким образом, решением системы является вектор – столбец

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\frac{\Delta_1}{\Delta}\\ \frac{\Delta_2}{\Delta}\\ \vdots\\ \frac{\Delta_{\boldsymbol{n}}}{\Delta}\end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Пример. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=6\\ 2\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=3\\ \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_3=5.\end{cases}$$

Решение. Положим

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6\\3\\5\end{pmatrix}.$$

Тогда данная система уравнений запишется матричным уравнением

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}.$$

Поскольку определитель матрицы $\boldsymbol{A}$

$$|\boldsymbol{A}|=\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=5\neq 0,$$

то матрица $\boldsymbol{A}$ неособенная и потому имеет обратную

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}\\ -\frac{3}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Выполняя умножения в правой части, получим единственное решение заданной системы:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Пример. Решить по формулам Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Находим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

Следовательно, система определенная, т.е. она имеет единственное решение. Для нахождения ее решения вычисляем определители Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

По формулам Крамера находим:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{14}{14}=1; \qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{0}{14}=0; \qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-14}{14}=-1.$$

Итак,

$$X=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

- единственное решение данной системы.

5.2.4. Заключительное замечание

В пункте 5.2.3 мы получили достаточное условие совместности системы n линейных уравнений с n неизвестными и нашли формулы, явно выражающие решение этой системы через ее коэффициенты. Стоит заметить, что численное решение такой системы по формулам Крамера сводится к вычислению $n+1$ определителей порядка n, а матричным способом - к вычислению n^2 определителей порядка $n-1$ (алгебраических дополнений к элементам основной матрицы системы). Если число n велико, то вычисление определителей становится очень трудоемкой операцией. В таком случае выгоднее воспользоваться методом исключения неизвестных. Наоборот, при решении и особенно исследовании системы с буквенными коэффициентами метод исключения неизвестных, в свою очередь, приводит к весьма громоздким выкладкам, так что значительно удобнее пользоваться формулами Крамера или матричной записью решения.

Ключевые слова и словосочетания

Линейное уравнение, система линейных уравнений, основная матрица системы, расширенная матрица системы, решение системы, совместная (разрешимая) система, несовместная (неразрешимая) система, определенная система, неопределенная система, общее решение системы, частные решения системы, эквивалентные (равносильные) системы, элементарные преобразования системы линейных уравнений, метод Гаусса, ступенчатая система, треугольная система, базисные неизвестные, свободные неизвестные, метод Гаусса – Жордана , правило Крамера, матричный способ решения системы.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется линейным уравнением относительно неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$? Что называется коэффициентами линейного уравнения? Что называется свободным членом линейного уравнения?

2. Напишите вид систем m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$. Что называется основной матрицей или просто матрицей системы? Что называется расширенной матрицей системы?

3. Напишите матричную форму систем линейных уравнений.

4. Что называется решением системы линейных уравнений?

5. В каком случае система линейных уравнений называется совместной или разрешимой, несовместной, или неразрешимой, определенной и неопределенной?

6. Что называется частным, общим решением систем линейных уравнений? В каком случае эти понятия вводятся?

7. Когда две системы линейных уравнений называются эквивалентными, или равносильными?

8. Что называется элементарными преобразованиями системы?

9. Численно, какими методами решаются системы линейных уравнений? Что понимается под точными и итерационными методами?

10. Что представляет собой метод Гаусса или метод последовательного исключения неизвестных? В чем состоит суть этого метода?

11. Что называется ступенчатой системой или системой ступенчатого вида?

12. Что называются главными, или ведущими элементами системы?

13. Когда ступенчатая система будет определенной, неопределенной? Когда система линейных уравнений называется треугольной?

14. Какое решение называется базисным?

15. Что представляет собой метод Гаусса или метод полного исключения неизвестных? В чем состоит суть этого метода?

16. Сформулируйте правило Крамера.

17. Что называется матричным способом решения системы?

18. Для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными что выгоднее: воспользоваться методом исключения

неизвестных или пользоваться формулами Крамера или матричной записью решения.

Задачи для самостоятельного решения

Решить систему уравнений, пользуясь методом Гаусса:

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 \qquad = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + -4x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 = 11. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \qquad x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -15. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad - 4x_4 = -3, \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 24x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0, \\ 5x_1 \qquad + 21x_3 + 13x_4 = 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 15x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases}$

$$13.\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 = -4, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = -7. \end{cases}$$

$$14.\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \qquad + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 \qquad + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 \qquad\qquad - x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_1 \qquad + x_3 + x_4 - x_5 = 10. \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \qquad = 1. \end{cases}$$

Решить систему уравнений, пользуясь методом Жордана - Гаусса:

$$1.\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 = -6, \\ \qquad x_2 + x_3 + 34x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad = 6. \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 8, \\ \qquad x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 \qquad + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 \qquad + 5x_4 = 23. \end{cases}$$

$$4.\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$$

$$5.\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

$$6.\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ \qquad x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -15. \end{cases}$$

Решить систему уравнений по правилу Крамера и матричным методом

$$1.\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 \qquad = 5. \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

$$4.\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -16, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = -14. \end{cases}$$

5. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -8, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18, \\ 4x_1 + 5x_2 - 73x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad - 4x_4 = -3, \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 24x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0, \\ 5x_1 \qquad + 21x_3 + 13x_4 = 3. \end{cases}$

§6. Общая теория систем линейных уравнений

6.1. Разрешимость системы линейных уравнений

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

или в матричной форме

$$AX = B. \tag{1'}$$

Имеет место следующая основная теорема о совместности, или разрешимости системы линейных уравнений.

Теорема (теорема Кронекера - Капелли). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы этой системы.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что система (1) совместна. Значит, существует некоторое ее решение

$$x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, ..., x_n = \xi_n.$$

Если подставим это решение в уравнения системы (1) вместо неизвестных, то получим m равенств:

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{in}\xi_n = b_i, \quad i = 1,2,...,m \ . \tag{2}$$

Совокупность этих равенств эквивалентна следующему векторному равенству:

$$\xi_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \xi_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,...,m, \tag{2'}$$

которое означает, что последний столбец расширенной матрицы системы (1) является линейной комбинацией ее остальных столбцов.

Как известно (см. §4) ранг матрицы не меняется, если из нее удалить столбец, являющийся линейной комбинацией остальных столбцов.

Удалив из расширенной матрицы столбец свободных членов, мы получим основную матрицу системы. Значит, ранги расширенной и основной матриц равны, что и требовалось доказать.

Достаточность. Предположим теперь, что ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы системы, т. е.

$$r(A) = r(\widetilde{A}).$$

Выделим r базисных столбцов матрицы A; они будут базисными столбцами и матрицы $\widetilde{A}$. Без ограничения общности будем предполагать, что базисными являются первые r столбцов.

Согласно теореме о базисном миноре последний столбец матрицы $\widetilde{A}$ может быть представлен как линейная комбинация базисных столбцов. Это значит, что существуют числа

$$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r$$

такие, что

$$\xi_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \xi_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Это соотношение эквивалентно следующим m равенствам:

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{ir}\xi_r = b_i, \quad i = 1,2,...,m \ . \tag{2}$$

Если теперь в уравнениях системы (1) положить

$$x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \ldots, x_r = \xi_r, x_{r+1} = 0, \ldots, x_n = 0, \qquad (3)$$

то уравнения системы превратятся в равенства (2). Отсюда следует, что совокупность (3) значений неизвестных удовлетворяет всем уравнениям системы (1), т. е. система имеет решение. Теорема доказана.

Замечание. Иногда вместо того, чтобы находить условия, гарантирующие разрешимость системы линейных уравнений, находят условия, при которых она неразрешима.

Рассмотрим систему, записанную в виде матричного уравнения

$$AX = B. \qquad (1')$$

Отметим, что если вектор X удовлетворяет этой системе, то он должен удовлетворять также и соотношению

$$Y'AX = Y'B, \qquad (3')$$

где Y - произвольный m-мерный .вектор.

Если мы можем найти вектор Y такой, что

$$Y'A = 0, \qquad Y'B = 1, \qquad (4)$$

то из (3') мы получаем противоречие: «нуль равен единице», и, следовательно, система (1') не может иметь решений.

В противоположном случае система (1') действительно имеет решение.

6.2. Совместные системы

Исследуем вопрос о числе совместной системы линейных уравнений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m \qquad (1)$$

или в матричной записи

$$AX = B. \qquad (1')$$

Согласно теореме Кронекера - Капелли в этом случае ранг матрицы системы A и ранг ее расширенной матрицы $\widetilde{A} = (A \ \vdots \ B)$ совпадают. Их общее значение r будем называть **рангом данной системы.** Зафиксируем далее какой-либо базисный минор матрицы $\widetilde{A}$. Уравнения, соответствующие базисным строкам, назовем **базисными уравнениями данной системы**. Базисные уравнения образуют базисную систему. Неизвестные, отвечающие базисным столбцам, назовем базисными, а остальные - свободными.

Имеет место следующее очевидное утверждение.

Теорема. Система линейных уравнений эквивалентна системе своих базисных уравнений.

Доказательство. Действительно, по теореме о базисном миноре всякая строка расширенной матрицы $\boldsymbol{A}$ является линейной комбинацией $\boldsymbol{r}$ базисных строк этой матрицы. Иначе говоря, любое уравнение данной системы можно получить путем линейных операций из базисных уравнений. Значит, всякий вектор, удовлетворяющий базисной системе, удовлетворяет и любому уравнению данной системы.

Обратное утверждение очевидно: любое решение данной системы есть в то же время решение базисной системы. Теорема доказана.

Замечание. Выкладки, соответствующие первой части приведенного рассуждения, можно произвести в матричной форме.

Предположим для простоты записи, что в данной системе (1) базисными являются первые $\boldsymbol{r}$ уравнений. Как только что было доказано, система базисных уравнений

$$\boldsymbol{a}_{i1}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{i2}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{in}\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{b}_i, \quad \boldsymbol{i} = 1,2,\ldots,\boldsymbol{r} \tag{4}$$

эквивалентна данной системе (1). Поэтому достаточно исследовать систему (4), в которой число уравнений $\boldsymbol{r}$ равно ее рангу.

Очевидно, что ранг матрицы системы не может превосходить числа ее столбцов, т.е. $\boldsymbol{r} \le \boldsymbol{n}$. Иначе говоря, ранг совместной системы не превосходит числа неизвестных. При этом могут быть два случая: либо $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}$, либо $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{n}$.

1°. Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}$, т. е. число уравнений равно числу неизвестных. Поскольку определителем системы (4) в этом случае является базисный минор, то по теореме Крамера система (4), а следовательно, и система (1) имеют единственное решение.

Вывод 1. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

2°. Пусть $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{n}$. Перенесем в правую часть уравнений все члены, кроме тех, которые содержат базисные неизвестные $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$. Тогда система (4) примет вид

$$\boldsymbol{a}_{i1}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{i2}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{ir}\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{a}_{ir+1}\boldsymbol{x}_{r+1} - \cdots - \boldsymbol{a}_{in}\boldsymbol{x}_n. \tag{4′}$$

Если свободным неизвестным $\boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ придать некоторые числовые значения $\xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$, то систему (4) можно рассматривать как систему из $\boldsymbol{r}$ уравнений с $\boldsymbol{r}$ неизвестными $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$. Поскольку определителем этой системы является базисный минор, к ней применимо правило Крамера, и поэтому система имеет единственное решение $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, ..., x_r = \xi_r$. Тогда вектор $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r, \xi_{r+1}, ..., \xi_n)'$, являющийся решением базисной системы (4), является также решением исходной системы (1) в силу их эквивалентности. Так как значения свободных неизвестных мы можем выбирать произвольно, то различных решений системы (1) будет бесконечно много.

Вывод 2. Если ранг системы r меньше числа неизвестных n, то система имеет бесконечно много решений, при этом r неизвестных, (базисных) линейно выражаются через $n - r$ свободных неизвестных.

Замечание. А также справедливы и утверждения, обратные выводам 1 и 2. Доказательство предоставляется читателю.

Проведенное выше исследование общей системы линейных уравнений позволяет сформулировать следующее правило.

Правило решения произвольной системы линейных уравнений

1. Вычисляя ранги основной и расширенной матриц системы, выясняют вопрос о ее совместности. Если система совместна, то находят какой-либо базисный минор порядка r.

2. Берется r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор; остальные уравнения отбрасывают. Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют базисными и оставляют слева, а остальные $n - r$ неизвестных называют свободными, и переносят в правые части уравнений.

3. По правилу Крамера или методом Гаусса находят выражения базисных неизвестных через свободные. Полученные равенства представляют собой общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным любые числовые значения, находят соответствующие значения базисных неизвестных. Тем самым находят частные решения исходной системы уравнений.

Пример. Исследовать систему уравнений и решить ее, если она совместна:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \vdots & 3\\ 1 & 3 & -1 & \vdots & 1\\ 3 & 4 & -1 & \vdots & 5\end{pmatrix}.$$

Вычислим ранг основной матрицы системы. Очевидно, что минор второго порядка в левом верхнем углу

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5\neq 0,$$

содержащий его минор третьего порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & 4 & -1\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, ранг основной матрицы системы равен двум, т.е. $r(A)=2$. Для вычисления ранга расширенной матрицы $r(\widetilde{A})$ рассмотрим окаймляющий минор

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{vmatrix}=0$$

Следовательно, $r(\widetilde{A})=2$.

Таким образом, данная система линейных уравнений совместна и содержит два независимых уравнения, за которые принимаем первые два уравнения системы, так как в них лежит базисный минор.

Тогда

$$x_1-2x_2=3-x_3,$$
$$x_1+3x_2=1+x_3,$$

откуда (например, методом Гаусса или применяя формулы Крамера) получаем общее решение системы:

$$x_1=\frac{11-x_3}{5},$$
$$x_2=\frac{2(x_3-1)}{5},$$

или полагая $x_3 = u$ получим общее решение системы в виде

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{11-u}{5} \\ \dfrac{2(u-1)}{5} \\ u \end{pmatrix}, \quad \text{где } u \text{ - любое действительное число.}$$

Итак, система имеет бесконечно много решений. Если, например, положить $u = 1$, то получим частное решение системы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то получим частное решение системы.

Если же положить

$$u = 0,$$

то найдем базисное решение этой системы:

$$X_б = \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ -0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример. Исследовать систему уравнений и решить ее, если она совместна:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad = 3. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 14 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 2 & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 3 \end{pmatrix}.$$

Прибавим элементы второй строки к соответствующим элементам первой и четвертой строк, а затем разделим элементы первой строки на 4, а элементы четвертой строки на 5:

$$\widetilde{A}\sim\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & \vdots & 24 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 2 & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из элементов третьей строки соответствующие элементы первой строки, а из элементов пятой строки вычтем элементы четвертой строки; после этого отбросим (вычеркнем) третью и пятую строки:

$$\widetilde{A}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 3 \end{pmatrix}; \qquad A\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель последней матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Следовательно, $r(A)=3$. Ранг расширенной матрицы также равен 3, так как найденный определитель является минором матрицы $\widetilde{A}$.

Итак, система совместна; ранги основной и расширенной матриц данной системы совпадают – равно 3 и это совпадает с числом неизвестных. Согласно выводу 1 система имеет решение и притом единственное. Чтобы его найти, рассмотрим базисную систему, состоящую из первого, второго и четвертого уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 = 14 \\ 3\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = 10 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 5. \end{cases}$$

Так как определитель этой системы отличен от нуля, то, решая ее по правилу Крамера, получим единственное решение

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Пример. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 2 \\ 3\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 0 \\ -4\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Ранг основной матрицы этой системы $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = 2$, так как минор второго порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

А окаймляющий его минор третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг расширенной матрицы $\boldsymbol{r}(\widetilde{\boldsymbol{A}}) = 3$, так как

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 .$$

Таким образом, $\boldsymbol{r}(A) = 2$, а $\boldsymbol{r}(\widetilde{A}) = 3$. Поэтому система несовместна.

Пример. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 + 5\boldsymbol{x}_3 + 7\boldsymbol{x}_4 + 9\boldsymbol{x}_5 = 1 \\ \boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 - 4\boldsymbol{x}_4 + 5\boldsymbol{x}_5 = 2 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + 11\boldsymbol{x}_2 + 12\boldsymbol{x}_3 + 25\boldsymbol{x}_4 + 22\boldsymbol{x}_5 = 4. \end{cases}$$

Вычислим ранг расширенной матрицы

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \vdots & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & \vdots & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & \vdots & 4 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к элементам второй строки соответствующие элементы третьей строки, а затем разделим все элементы второй строки на 3:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \vdots & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & \vdots & 6 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \vdots & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \vdots & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & \vdots & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из элементов второй строки соответствующие элементы первой строки:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & \vdots & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранг основной матрицы. Очевидно, что

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $r(A) = 2$, $r(\widetilde{A}) = 3$, т.е. $r(A) \neq r(\widetilde{A})$; следовательно, система несовместна.

6.3. Базисные решения систем линейных уравнений

Пусть дана система линейных уравнений (1) и ее ранг r меньше числа неизвестных n. Следовательно, согласно выводу 2 п. 6.2, система (1) имеет бесчисленное множество решений.

Пусть A - основная матрица системы. Очевидно, что ее ранг равен r. Тогда согласно определению ранга эта матрица содержит отличный от нуля минор r-го порядка. Всякий такой минор, ранее в 4.4.2, мы называли базисным минором матрицы A. Ясно, что у данной матрицы может быть несколько базисных миноров. Выберем и зафиксируем один из них.

Предположим, что зафиксированный нами минор порядка r состоит из первых r строк и r столбцов основной матрицы. Столбцы и строки матрицы, на пересечении которых расположены элементы выбранного нами базисного минора, называют базисными столбцами и строками (см. 4.4.2).

Выделим в этом миноре произвольную строку. Элементы этой строки являются коэффициентами при r первых неизвестных $x_1, x_2, ..., x_r$ в одном из уравнений системы (1). Напомним (см. 5.2), что эти r первых неизвестных $x_1, x_2, ..., x_r$ называют базисными неизвестными рассматриваемой системы уравнений. Они могут быть выражены через $n - r$ остальных неизвестных, называемых «свободными». Базисные неизвестные в выделенной системе оставим в левых частях уравнений, а члены, содержащее свободные неизвестные, перенесем вправо. Из полученной системы уравнений выразим базисные неизвестные через свободные. Полученные выражения базисных неизвестных через свободные называются общим решением системы уравнений. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, можно получить частные решения системы уравнений.

Если в общем решении системы свободным неизвестным придавать нулевые значения, то такое решение называется базисным.

Выше уже отметили, что у данной матрицы может быть несколько базисных миноров. Тогда базисными могут быть разные группы из $\boldsymbol{r}$ неизвестных. Однако количество различных способов выбора $\boldsymbol{r}$ неизвестных из общего их числа $\boldsymbol{n}$ конечно. Оно равно числу сочетаний из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{r}$ в каждом, т.е. $\boldsymbol{C_n^r}$. Следовательно, количество способов разбиения неизвестных системы на базисные и свободные ограничено этим числом. Это количество равно $\boldsymbol{C_n^r}$, если все миноры $\boldsymbol{r}$-го порядка, основной матрицы отличны от нуля, и меньше этого числа, если хотя бы один из этих миноров равен нулю.

Каждому разбиению неизвестных системы (1) на базисные и свободные соответствует одно базисное решение. Следовательно, имеется не более чем $\boldsymbol{C_n^r}$ базисных решений системы.

Пример. а) Указать способы и число разбиений неизвестных системы

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 + 4\boldsymbol{x}_3 + 6\boldsymbol{x}_4 + 6\boldsymbol{x}_5 = 3 \\ 3\boldsymbol{x}_1 - 4\boldsymbol{x}_2 + 6\boldsymbol{x}_3 + 8\boldsymbol{x}_4 + 9\boldsymbol{x}_5 = 5 \end{cases}$$

на базисные и свободные; **б)** найти базисные решения данной системы.

Решение. а) Данная система содержит два уравнения и пять неизвестных $(\boldsymbol{m} = 2,\ \ \boldsymbol{n} = 5)$. Значит, группы базисных неизвестных состоять из двух неизвестных. Пять неизвестных на группы содержащих по два неизвестных, можно разбить десятью различными способами: $\boldsymbol{C}_5^2 = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{3!4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3!} = 10$. Эти группы: $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$; $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3$; $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_4$; $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_5$; $\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$; $\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_4$; $\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_5$; $\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$; $\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_5$; $\boldsymbol{x}_4,\boldsymbol{x}_5$. Однако из этих пар базисными неизвестными являются только те пары, определители из коэффициентов при которых отличны от нуля, т.е. базисными неизвестными являются только те пары, определители из коэффициентов при которых образуют базисные миноры. Вычислим все эти определители:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0;$$

$$\begin{vmatrix}-3 & 6\\ -4 & 8\end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix}-3 & 6\\ -4 & 9\end{vmatrix}=-3\neq 0; \quad \begin{vmatrix}4 & 6\\ 6 & 8\end{vmatrix}=-4\neq 0; \quad \begin{vmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix}6 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix}=6\neq 0.$$

Следовательно, неизвестные данной системы можно разбить на базисные и свободные шестью способами:

1) $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ - базисные, а $\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4,\boldsymbol{x}_5$ - свободные;

2) $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_4$ - базисные, а $\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_5$ - свободные;

3) $\boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{x}_3$ - базисные, а $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_4,\boldsymbol{x}_5$ - свободные;

4) $\boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{x}_5$ - базисные, а $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$ - свободные;

5) $\boldsymbol{x}_3$ и $\boldsymbol{x}_5$ - базисные, а $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_4$ - свободные;

6) $\boldsymbol{x}_4$ и $\boldsymbol{x}_5$ - базисные, а $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ - свободные.

б) Найдем базисные решения данной системы. Выше в пункте а) данного примера было установлено, что существует шесть способов разбиения неизвестных данной системы на базисных и свободных. Следовательно, она имеет шесть базисных решений. Первое базисное решение найдем, считая $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ - базисными, а свободные неизвестные $\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4,\boldsymbol{x}_5$ равными нулю. Тогда придем к системе

$$\begin{cases}2\boldsymbol{x}_1-3\boldsymbol{x}_2=3\\ 3\boldsymbol{x}_1-4\boldsymbol{x}_2=5.\end{cases}$$

Решая которую получим $\boldsymbol{x}_1=3,\quad \boldsymbol{x}_2=1.$ Таким образом, $\boldsymbol{X}_{1\boldsymbol{б}}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ - первое базисное решение.

Найдем второе базисное решение. Считая $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_4$ - базисными, а свободные неизвестные $\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_5$ равными нулю, придем к системе

$$\begin{cases}2\boldsymbol{x}_1+6\boldsymbol{x}_4=3\\ 3\boldsymbol{x}_1+8\boldsymbol{x}_4=5.\end{cases}$$

Решая которую получим $x_1 = 3,\quad x_4 = -\frac{1}{2}$. Таким образом, $X_{2б} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

- второе базисное решение.

Таким же образом находим третье базисное решение. Считая x_2 и x_3 - базисными, а свободные неизвестные x_1, x_4, x_5 равными нулю, придем к системе

$$\begin{cases} -3x_2 + 4x_3 = 3 \\ -4x_2 + 6x_3 = 5. \end{cases}$$

Решая которую получим $x_2 = 1,\quad x_3 = \frac{3}{2}$. Таким образом, $X_{3б} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - третье базисное решение.

Аналогично находим остальные базисные решения. Опуская выкладки, запишем эти решения:

$$X_{4б} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad X_{5б} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad X_{6б} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Базисное решение, содержащее точно r отличных от нуля неизвестных, где r - ранг системы, называется **невырожденным базисным решением.**

Заметим, что все шесть базисных решений выше рассмотренного примера являются невырожденными.

В базисном решении свободные неизвестные по определению равны нулю, а базисные неизвестные обычно отличны от нуля. Однако может оказаться, что в базисном решении некоторые базисные неизвестные также равны нулю. Такое базисное решение называется **вырожденным базисным решением.**

Пример. Найти базисные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 = 2 \\ 3\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 - 8\boldsymbol{x}_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Данная система содержит два уравнения и три неизвестных $(\boldsymbol{m} = 2, \ \ \boldsymbol{n} = 3)$. Значит, группы базисных неизвестных состоят из двух неизвестных. Три неизвестных на группы содержащих по два неизвестных, можно разбить тремя различными способами: $\boldsymbol{C}_3^2 = \dfrac{3!}{2!1!} = 3$.

Неизвестные $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ - базисные, так как определитель из коэффициентов при них отличен от нуля: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Тогда неизвестная $\boldsymbol{x}_3$ - свободная. Полагая в уравнениях системы $\boldsymbol{x}_3 = 0$, получим систему

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 2 \\ 3\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 = 3. \end{cases}$$

Решая ее, находим $\boldsymbol{x}_1 = 1, \ \ \boldsymbol{x}_2 = 0$ и первое базисное решение $\boldsymbol{X}_{1\boldsymbol{б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, являющееся вырожденным (так как базисная неизвестная $\boldsymbol{x}_3 = 0$).

Неизвестные $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_3$ - также базисные, поскольку определитель из коэффициентов при них отличен от нуля: $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. Тогда неизвестная $\boldsymbol{x}_2$ - свободная. Полагая в уравнениях системы $\boldsymbol{x}_2 = 0$, получим систему

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_3 = 2 \\ 3\boldsymbol{x}_1 - 8\boldsymbol{x}_3 = 3. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $x_1 = 1,\ \ x_3 = 0$, т.е. $X_{2б} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - второе базисное решение, также $X_{1б} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, являющееся вырожденным (так как базисная неизвестная $x_2 = 0$).

Неизвестные x_2 и x_3 не являются базисными, так как определитель из коэффициентов при них равен нулю: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$, а поэтому отпадает вопрос о третьем базисном решении.

Замечание. Вырожденность базисного решения имеет геометрический смысл. Геометрическую иллюстрацию вырожденного базисного решения обсудим в дальнейшем.

Замечание. Базисные решения имеют большое значение в приложениях математики, особенно в линейном программировании, в котором точными математическими методами решается вопрос о выборе оптимального решения среди многовариантных решений различных прикладных задачи, в том числе экономических.

6.4. Системы однородных линейных уравнений

Определение. Линейное уравнение **называется однородным**, если его свободный член равен нулю, и **неоднородным** в противном случае.

Система однородных линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{5}$$

или в матричном виде

$$AX = \Theta. \tag{5'}$$

Очевидно, что всякая система однородных линейных уравнений имеет нулевое решение

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

и, значит, совместна. Нулевое решение системы называют также тривиальным.

Основные определения и теоремы, относящиеся к однородным системам линейных уравнений, мы сочли уместным изложить в отдельном параграфе (§10) после изучения системы векторов в пространстве $\boldsymbol{R^n}$ (§8) и подпространства пространства $\boldsymbol{R^n}$ (§9 п.4).

Ключевые слова и словосочетания

Теорема Кронекера–Капелли, базисные уравнения системы, базисная система, невырожденное базисное решение, вырожденное базисное решение, система линейных однородных уравнений, система линейных неоднородных уравнений.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте основную теорему о совместности, или разрешимости системы линейных уравнений, т.е. теорему Кронекера - Капелли.
2. Иногда вместо того, чтобы находить условия, гарантирующие разрешимость системы линейных уравнений, находят условия, при которых она неразрешима. Приведите такие условия.
3. Какие уравнения называются базисными уравнениями системы? Что называется базисной системой?
4. Как называются неизвестные, отвечающие базисным столбцам? А остальные неизвестные?
5. Какая связь имеется между системой линейных уравнений и системой ее базисных уравнений?
6. Какой вывод можно сделать, если ранг совместной системы равен числу неизвестных?
7. Какой вывод можно сделать, если ранг системы $\boldsymbol{r}$ меньше числа неизвестных $\boldsymbol{n}$?
8. Приведите правило решения произвольной системы линейных уравнений. Что позволяет сформулировать это правило?
9. Что называется базисным решением системы линейных уравнений?
10. Сколько базисных решений может имеет система линейных уравнений?

11. Какое базисное решение называется невырожденным базисным решением?

12. Какое базисное решение называется вырожденным базисным решением?

13. Какое значение имеют базисные решения?

14. Приведите общий вид системы однородных линейных уравнений.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать систему линейных уравнений и решить ее, если она совместна:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5, \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -8, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 14. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 2. \end{cases}$

Исследовать систему линейных уравнений. При наличии свободных неизвестных указать их число s:

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 0, \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad = 2, \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ \qquad\quad x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

Найти базисные решения системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 \qquad - x_4 = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 18, \\ -x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1`, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 18, \\ \qquad - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

§7 **Арифметические векторные пространства**

7.1. Пространства $\boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{R}^2$ и $\boldsymbol{R}^1$

В школьной математике в разделе метод координат элементарной геометрии мы познакомились со свободными векторами на прямой, на плоскости, в пространстве и определили для них линейные операции (сложение векторов и умножение вектора на число).

Множество свободных векторов пространства, рассматриваемое с установленными в нем линейными операциями, **называется**

трехмерным векторным пространством V^3, а сами векторы - элементами этого пространства.

Аналогично, множество векторов, расположенных на плоскости, называется **двумерным векторным пространством V^2**, а множество векторов, расположенных на прямой, - **одномерным векторным пространством V^1.**

Если в пространствах V^3, V^2 и V^1 введена декартова система координат, то устанавливается взаимно однозначное соответствие между векторами пространства V^3 и упорядоченными тройками чисел (их координатами), между векторами пространства V^2 и упорядоченными парами чисел (их координатами), между векторами пространства V^1 и числами.

Будем записывать координаты вектора пространства V^3 в виде столбца, состоящего из трех чисел, координаты вектора пространства V^2 - в виде столбца из двух чисел, координату вектора пространства V^1- в виде столбца, состоящего из одного числа. При этом столбцы из координат векторов будем **называть соответственно трехмерными, двумерными или одномерными арифметическими векторами.**

Из метод координат элементарной геометрии известно, что линейным операциям над векторами соответствуют линейные операции над координатами этих векторов.

Множества трехмерных, двумерных и одномерных арифметических векторов называются соответственно трехмерными R^3, двумерными R^2 и одномерными R^1 арифметическими векторными пространствами.

7.2. Арифметическое n- мерное пространство R^n

Понятие арифметического векторного пространства одного, двух или трех измерений можно обобщить следующим образом.

Рассмотрим множество матриц, каждая из которых состоит из одного столбца с n компонентами, иначе говоря, совокупность n-мерных вектор - столбцов[8].

[8] Напомним ранее введенные некоторые определения (см.§1 и §4 п. 4.4.1). **Вектором** мы называли матрицу, состоящую из одного столбца (вектор-столбец) или из одной строки (вектор-строка). Элементы этой матрицы называются **компонентами вектора**. Число компонент вектора - это его размерность; вектор размерности n называется n- мерным. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, под словом «вектор» будем понимать вектор - столбец.

Так как $\boldsymbol{n}$– мерные вектор – столбцы являются частными видами матриц, следовательно, на основе определения линейных операций над матрицами (см. § 1) можно определить следующие линейные операции над векторами:

а) сложение двух векторов

$$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}+\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix};$$

б) умножение вектора на число

$$\lambda\boldsymbol{X}=\lambda\cdot\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{x}_1 \\ \lambda\boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \lambda\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix}$$

Как видно из этих определений, суммой двух $\boldsymbol{n}$-мерных векторов, а также произведением вектора на число снова будет $\boldsymbol{n}$-мерный вектор.

Кроме того, легко проверить, что указанные действия с векторами обладают следующими свойствами:

1^0. $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}$;
2^0. $\boldsymbol{X}+(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Z})=(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})+\boldsymbol{Z}$;
3^0. $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{X}$;
4^0. $\boldsymbol{X}+(-\boldsymbol{X})=\boldsymbol{\Theta}$;
5^0. $1\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}$;
6^0. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{X}=\alpha\boldsymbol{X}+\beta\boldsymbol{X}$;
7^0. $\alpha(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\alpha\boldsymbol{X}+\alpha\boldsymbol{Y}$;
8^0. $\alpha(\beta\boldsymbol{X})=(\alpha\beta)\boldsymbol{X}$,

здесь $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{Z}$ $\boldsymbol{n}$ – мерные вектора, α и β – числа, $\boldsymbol{\Theta}$ – нулевой $\boldsymbol{n}$– мерный вектор, т.е.

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Определение. Множество всех n – мерных векторов, рассматриваемое с установленными выше линейными операциями, **называется арифметическим векторным пространством размерности n.**

Арифметическое векторное пространство может быть действительным, когда векторы имеют действительные компоненты, или комплексным, когда компоненты векторов – комплексные числа. В первом случае определено умножение векторов на действительные числа, во втором – на комплексные.

Действительное арифметическое векторное пространство обозначают через R^n, а комплексное – через C^n.

В дальнейшем, мы в основном рассмотрим только действительное арифметическое пространство, которое мы будем называть просто арифметическим пространством и обозначать через R^n.

Замечание. Введенное нами обобщение понятия вектора позволяет рассматривать векторы не обязательно геометрической природы.

Пусть, например, некоторое предприятие использует n сырьевых продуктов. Тогда, если x_k - некоторое количество k – го сырьевого продукта, измеренное в подходящих единицах, то векторы вида

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

могут указывать, например, суточную потребность предприятия в сырье; вектор λX - потребность в сырье за n суток. Потребность в сырье за сутки двух таких предприятий будет суммой соответствующих векторов.

7.3. Скалярное произведение двух векторов

Для полного определения нашего арифметического n- мерного пространства R^n, по аналогии со свойствами трехмерного пространства, мы должны ввести понятия длин и углов.

В элементарной геометрии (метод координат) при помощи известных понятий длины вектора и угла мы определили скалярное произведение векторов. Оказывается, что длина вектора и угол между векторами могут быть выражены через скалярное произведение векторов. Следовательно, важным является введение понятия скалярного произведения.

Определение. Скалярным произведением двух векторов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix},$$

называется число

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

равное сумме произведений соответствующих координат векторов и обозначается через $X'Y$.

Замечание. Применяются различные обозначения для скалярного произведения, например, (X,Y), $<X,Y>$, XY'- если X, Y являются вектор – строками, $X'Y$– если X, Y являются вектор – столбцами и XY- если X является вектор – строкой, а Y является вектор – столбцом. Мы выбрали последние три обозначения (в зависимости от способа задачи векторов) для того, чтобы сохранить обозначения, ранее введенные нами для матриц, хотя, там где удобно и необходимо мы будем использовать и первое обозначение.

Замечание. Скалярное произведение – это лишь один из способов «умножения» двух векторов. Вместе с тем имеются и другие определения операции умножения, которые мы в этом курсе не будем вводить и использовать.

Замечание. В экономических задачах можно рассматривать скалярное произведение вектора цен P на вектор объема продукции X. Скалярное произведение $P'X$ в этом случае дает суммарную стоимость продукции X при ценах P.

Например, если объем всей продукции, выпущенной предприятием, выражается вектором $X = \begin{pmatrix} 400 \\ 750 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$, элементы которого означают, соответственно, количество изделий высшего, первого, второго и третьего сортов, а цены в одних и тех же денежных единицах заданы в соответствующем порядке вектором $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}1 \\ 1{,}2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$, то скалярное произведение

$$P'X = 3 \cdot 400 + 2{,}1 \cdot 750 + 1{,}2 \cdot 200 + 0{,}5 \cdot 300 = 3165$$

выражает суммарную стоимость всей продукции X.

Нетрудно проверить, что скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1^0. $X'X \geq 0$, причем $X'X = 0$ лишь при $X = \Theta$;

2^0. $X'Y = Y'X$;

3^0 $X'(Y + Z) = X'Y + X'Z$;

4^0. $(\lambda X')Y = \lambda(X'Y)$.

Среди скалярных произведений особое место занимает **скалярный квадрат:**

$$X'X = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2.$$

Определение. Число

$$|X| = \sqrt{X'X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

равное корню квадратному из суммы квадратов компонент вектора, **называется длиной (или модулем) n- мерного вектора X.**

Пример. Вектор $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ имеет длину, равную $|X| == \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Определение. Два вектора **называют ортогональными,** если их скалярное произведение равно нулю.

Пример. Векторы

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ортогональны, так как $\boldsymbol{X'Y} = 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + (-1) \cdot 0 = 0$.

Вышеприведенные определения скалярного произведения и длины являются прямым обобщением соответствующих определений для трехмерных арифметических пространств. Не совсем ясно, однако каким образом должно быть обобщено понятие угла между двумя векторами. В данном случае необходимо отметить, что при интуитивном представлении угол между двумя векторами представлял собой часть определения скалярного произведения.

Выше мы скалярное произведение определили безотносительно к углам. В настоящий момент мы применим первоначальное определение скалярного произведения для определения угла между двумя векторами.

Определение. Углом между двумя $\boldsymbol{n}$- мерными векторами $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, где $\boldsymbol{X} \neq \Theta$ и $\boldsymbol{Y} \neq \Theta$, называется угол φ, удовлетворяющий двум условиям:

$$\boldsymbol{a})\ \cos\varphi = \frac{\boldsymbol{X'Y}}{|\boldsymbol{X}| \cdot |\boldsymbol{Y}|} = \frac{\sum\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i y_i}}{\sqrt{\sum\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i}^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y_i}^2}}, \qquad \boldsymbol{б})\ (\varphi \in [0; \pi].$$

Условие б) гарантирует единственное значение угла φ. Корректность определения угла между $\boldsymbol{n}$–мерными векторами арифметического пространства $\boldsymbol{R^n}$ вытекает из справедливости неравенства

$$|\boldsymbol{X'Y}| \leq |\boldsymbol{X}| \cdot |\boldsymbol{Y}| \text{ или } \left|\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i y_i}\right| \leq \sqrt{\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i}^2} \cdot \sqrt{\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y_i}^2}.$$

Это неравенство **называется неравенством Коши – Буняковского - Шварца. Мы будем его называть просто неравенством Коши[9].**

Доказательство неравенство Коши. Доказуемое неравенство перепишем в виде

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 .$$

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$S(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \xi y_i)^2 = A^2 + 2B\xi + C\xi^2,$$

где $A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $C = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

Так как квадратный трехчлен $S(\xi)$ принимает только неотрицательные значения, то его дискриминант неположителен, а именно $B^2 - AC \le 0$. Подставляя в последнее неравенство значения коэффициентов A, B и C, получаем неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 ,$$

и тем самим доказали неравенство Коши.

Замечание. Неравенство Коши означает, что в арифметическом пространстве R^n между длинами двух векторов и их скалярным произведением имеет место такое же неравенство, как в обычном трехмерном пространстве R^3. Именно справедлива следующая теорема.

Теорема. Модуль скалярного произведения векторов из арифметического векторного пространства размерности n не превосходит произведения модулей этих векторов, т.е.

$$|X'Y| \le |X| \cdot |Y| .$$

Замечание. Понятие косинуса угла между векторами используется в статистике. Если мы имеем n исторических или экспериментальных дат $(y_1; x_1)$, $(y_2; x_2)$, … ,$(y_n; x_n)$, и если мы обозначим

---

[9] Это неравенство было открыто французским математиком Коши в 1821году. Это неравенство, в другом пространстве спустя треть века установил русский математик Буняковский. Шварц опубликовал соответствующие неравенства в 1885 году.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ y_2 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_n - \bar{y} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} y_i , \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x_i ,$$

то косинус угла между векторами Y и X представляет собой коэффициент корреляции для множеств дат.

Ключевые слова и словосочетания

Свободные вектора, векторное пространство, арифметические вектора, арифметическое векторное пространство, скалярное произведение векторов, длина (модуль) вектора, ортогональные векторы, угол между двумя векторами, неравенство Коши – Буняковского.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется трехмерным векторным пространством V^3? Что называются элементами этого пространства? Что называются двумерным векторным пространством V^2, одномерным векторным пространством V^1?

2. Что назовется трехмерными, двумерными или одномерными арифметическими векторами?

3. Что называются трехмерными R^3, двумерными R^2 и одномерными R^1 арифметическими векторными пространствами?

4. Какие линейные операции над n-мерными векторами можно определить?

5. Какими свойствами обладают действия с n-мерными векторами, введенными в рамках линейной операции?

6. Что называется арифметическим векторным пространством размерности n?

7. Позволяет ли введенное нами обобщение понятия вектора рассматривать векторы не обязательно геометрической природы, а например, экономической природы? Разъясните и приведите примеры.

8. Что называется скалярным произведением двух n- мерных векторов? Как обозначается скалярное произведение?

9. Является ли скалярное произведение единственным способом «умножения» двух векторов?

10. Какое приложение скалярного произведения в экономических задачах можете привести?

11. Как определяется **угол** φ между двумя n- мерными не нулевыми векторами?

12. Какое неравенство называется неравенством Коши? С какой целью оно приводится и доказывается?

12. Что означает неравенство Коши в арифметическом пространстве R^n?

13. Используется ли понятие косинуса угла между векторами в приложениях математики в других отраслях науки? Приведите пример.

Задачи для самостоятельного решения

1. Задают ли скалярное произведение в одномерном арифметическом векторном пространстве R^1 следующие формулы:

a) $(X,Y)=xy$; $б$) $(X,Y)=xy^3$; $в$) $(X,Y)=5xy$.

2. Задают ли скалярное произведение в двумерном арифметическом векторном пространстве R^2 следующие формулы:

a) $(X,Y)=x_1y_1$; $б$) $(X,Y)=x_1y_1-x_2y_2$; $в$) $(X,Y)=x_1y_1+2x_2y_2$;.

$г$) $(X,Y)=x_1y_1+2x_2y_2-x_1y_2-x_2y_1$; $д$) $(X,Y)=\sqrt{(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)}$.

3. Можно ли в двумерном арифметическом векторном пространстве R^2 ввести скалярное произведение по формулам:

a) $(X,Y)=x_1y_1-2x_2y_2$; $б$) $(X,Y)=2x_1y_1+3x_2y_2$;

$в$) $(X,Y)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$.

4. Вычислите скалярное произведение элементов $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$, их длины и угол между ними в случаях ***б***) и ***в***) задачи 3, если $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

5. Выясните, можно ли в $\boldsymbol{n}$-мерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ задать скалярное произведение с помощью формулы

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 \boldsymbol{y}_3 + \cdots + \boldsymbol{n}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}.$$

6. Можно ли в $\boldsymbol{n}$-мерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ задать скалярное произведение с помощью формулы

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3 \boldsymbol{y}_3 + \cdots + \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}-1}.$$

В задачах 7 и 8 скалярное произведение арифметических векторов определяется формулой

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \equiv \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{y}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}.$$

7. Найдите длины арифметических векторов

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ \sqrt{3} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

8. Определите угол между векторами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{a})\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad\qquad \boldsymbol{b})\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

9. Непосредственным вычислением проверить неравенство Коши для векторов:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

§8 Система векторов в пространстве R^n

8.1. Теоремы о линейной зависимости векторов

Понятия линейной комбинации векторов, линейной зависимости, линейной независимости и теорема о линейной зависимости векторов в силу необходимости нами были введены в §4 (п.4.4.1).

Напомним, что вектор $\boldsymbol{Y}$ **называется линейной комбинацией векторов** $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$, если имеет место равенство

$$\boldsymbol{Y} = \lambda_1 \boldsymbol{X}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{X}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{X}_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ числовые коэффициенты.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ называются **коэффициентами линейной комбинации.** Очевидно, что компоненты вектора $\boldsymbol{Y}$ представляют собой линейные комбинации соответствующих компонент векторов $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$.

Пример. Найти линейную комбинацию

$$2\boldsymbol{A}_1 - 3\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3$$

следующих векторов:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Складывая векторы:

$$2\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad -3\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix},$$

находим

$$2\boldsymbol{A}_1 - 3\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Пример. Даны векторы:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Будет ли $\boldsymbol{A}_4$ линейной комбинацией $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$?

Решение. Нам требуется выяснить, можно ли вектор $\boldsymbol{A}_4$ представить в виде

$$\lambda_1\boldsymbol{A}_1 + \lambda_2\boldsymbol{A}_2 + \lambda_3\boldsymbol{A}_3,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - некоторые числа. Но вектор $\lambda_1\boldsymbol{A}_1 + \lambda_2\boldsymbol{A}_2 + \lambda_3\boldsymbol{A}_3$ имеет следующие координаты:

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 \end{pmatrix}$$

и поэтому равенство $\boldsymbol{A}_4 = \lambda_1\boldsymbol{A}_1 + \lambda_2\boldsymbol{A}_2 + \lambda_3\boldsymbol{A}_3$ будет иметь место лишь в том случае, если эти числа совпадают с координатами вектора $\boldsymbol{A}_4$:

$$\begin{gathered} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 = 4, \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = -1, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 15, \\ 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 17. \end{gathered}$$

Остается выяснить, существуют ли числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, удовлетворяющие этим условиям. Рассматривая последнее соотношение как систему линейных уравнений с неизвестными $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и решая эту систему, находим, что она имеет (и притом единственное) решение: $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -3$; $\lambda_3 = 4$. Следовательно, $\boldsymbol{A}_4$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$:

$\boldsymbol{A}_4 = 2\boldsymbol{A}_1 - 3\boldsymbol{A}_2 + 4\boldsymbol{A}_3$.

Векторы $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ называются **линейно зависимыми,** если существует равная нулевому вектору (нулю) линейная комбинация

$$\lambda_1 \boldsymbol{X}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{X}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{X}_n = \Theta,$$

где не все коэффициенты λ_j равны нулю.

Заметим, что если некоторые из векторов $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$ линейно зависимы, то и все они линейно зависимы, так как остальные векторы можно включить в имеющуюся зависимость с нулевыми коэффициентами.

Векторы $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$, не являющиеся линейно зависимыми, называются **линейно независимыми.** Иначе говоря, векторы $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$ называются **линейно независимыми**, если равенство

$$\lambda_1 \boldsymbol{X}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{X}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{X}_n = \Theta$$

возможно лишь в случае, когда все коэффициенты λ_j равны нулю.

В §4 (п.4.4.1) мы приводили и доказали теорему показывающую связь между понятиями линейной комбинации и линейной зависимости векторов. А именно следующую теорему.

Теорема. Для того чтобы векторы $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Доказательство. Пусть векторы $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$ линейно зависимы. По определению это означает существование чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ не равных одновременно нулю, и таких, что

$$\lambda_1 \boldsymbol{X}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{X}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{X}_n = \Theta.$$

Для простоты записи предположим, что ненулевым является первый коэффициент λ_1. Умножив обе части предыдущего равенства на число $-\frac{1}{\lambda_1}$, получим

$$-\boldsymbol{X}_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{X}_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{X}_n = \Theta,$$

или

$$\boldsymbol{X}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{X}_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{X}_n,$$

а это соотношение означает, что вектор $\boldsymbol{X}_1$, является линейной комбинацией остальных векторов.

Обратно, пусть, например, вектор $\boldsymbol{X}_1$ является линейной комбинацией остальных, т. е.

$$\boldsymbol{X}_1 = \mu_2 \boldsymbol{X}_2 + \mu_3 \boldsymbol{X}_3 + \cdots + \mu_4 \boldsymbol{X}_n.$$

Перенеся $\boldsymbol{X}_1$ в правую часть равенства, получим

$$\boldsymbol{\Theta} = (-1)\boldsymbol{X}_1 + \mu_2\boldsymbol{X}_2 + \mu_3\boldsymbol{X}_3 + \cdots + \mu_4\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}$$

это означает линейную зависимость векторов.

Пример. Доказать, что векторы

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Решение. Равенство $\lambda_1\boldsymbol{X}_1 + \lambda_2\boldsymbol{X}_2 + \lambda_3\boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{\Theta}$ равносильно совокупности следующих числовых равенств:

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 = 0$$

$$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 0 = 0$$

$$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 1 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Выше мы приводили и доказали теорему показывающую связь между понятиями линейной комбинации и линейной зависимости векторов.

Теперь докажем основную теорему о линейной зависимости векторов.

Теорема. Если векторы $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, ..., \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{k}}$ являются линейными комбинациями векторов $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}$, то в случае $\boldsymbol{k} > \boldsymbol{n}$ они линейно зависимы.

Доказательство. Согласно условию теоремы имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}_1 &= \alpha_{11}\boldsymbol{X}_1 + \alpha_{21}\boldsymbol{X}_2 + \cdots + \alpha_{\boldsymbol{n}1}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}, \\ \boldsymbol{Y}_2 &= \alpha_{12}\boldsymbol{X}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{X}_2 + \cdots + \alpha_{\boldsymbol{n}2}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{k}} &= \alpha_{1\boldsymbol{k}}\boldsymbol{X}_1 + \alpha_{2\boldsymbol{k}}\boldsymbol{X}_2 + \cdots + \alpha_{\boldsymbol{nk}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Обозначим через $\boldsymbol{A}$ матрицу, составленную из коэффициентов написанных выше линейных зависимостей:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{\boldsymbol{n}1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{\boldsymbol{n}2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1\boldsymbol{k}} & \alpha_{2\boldsymbol{k}} & \cdots & \alpha_{\boldsymbol{nk}} \end{pmatrix}.$$

Так как число столбцов этой матрицы равно $\boldsymbol{n}$, то ее ранг $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$ удовлетворяет неравенству $\boldsymbol{r} \le \boldsymbol{n}$. Ввиду условия теоремы $\boldsymbol{n} < \boldsymbol{k}$ имеем $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{k}$.

Следовательно, после выделения в матрице $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{r}$ базисных строк найдется хотя бы одна, не пропавшая в их число. Это строка линейно выражается через базисные строки согласно теореме о базисном миноре. Следовательно, строки матрицы $\boldsymbol{A}$ линейно зависимы. Пусть коэффициенты этой линейной зависимости будут $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{\boldsymbol{k}}$ (в порядке номеров строк)

Умножив теперь первое из равенств (1) на λ_1, второе на λ_2 и т.д. и почленно сложив эти соотношения, в правой части после очевидных преобразований получим ноль. Это означает, что векторы $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, ..., \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{k}}$ линейно зависимы. Теорема доказана.

Следствие. Всякая система $\boldsymbol{n}$- мерных векторов, состоящая более чем из $\boldsymbol{n}$ векторов, линейно зависима.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что всякий $\boldsymbol{n}$- мерный вектор можно представить в виде линейной комбинации следующих $\boldsymbol{n}$ векторов размерности $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \cdots \quad \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

именно,

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{E}_2 + \cdots + \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{n}}.$$

Пример. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Установить:

а) будет ли данная система линейно зависимой, а также какие линейные зависимости имеются в этой системе;

б) можно ли представить вектор A_5 в виде линейной комбинации векторов A_1, A_2, A_4.

Решение. Как мы уже знаем, если между векторами данной системы существует соотношение вида

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 = \Theta,$$

где x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - какие – то числа, не равные одновременно нулю, то система векторов называется линейно зависимой, а само соотношение $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 = \Theta$ - линейно зависимостью между векторами A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Выражая это соотношение через координаты, получим числовые равенства:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\qquad - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \qquad\quad = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

Чтобы найти все линейные зависимости между данными векторами, мы должны найти все решения этой системы уравнений при условии, что хотя бы одно из неизвестных отлично от нуля. Иначе говоря, нужно найти все ненулевые решения системы линейных уравнений. Проводя необходимые вычисления, находим общее решение системы

$$x_1 = \frac{7}{6}x_5 - x_3,$$

$$x_2 = \frac{5}{6}x_5 + x_3,$$

$$x_4 = \frac{1}{3}x_5,$$

где x_3, x_5- свободные неизвестные. Отсюда видно, что между данными векторами существует бесчисленное множество линейных зависимостей.

Чтобы ответить на второй вопрос задачи нужно выяснить, существует ли линейная зависимость вида

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_4A_4 + x_5A_5 = \Theta,$$

где $x_5 \neq 0$. Если такая зависимость существует, то

$$A_5 = \left(-\frac{x_1}{x_5}\right)A_1 + \left(-\frac{x_2}{x_5}\right)A_2 + \left(-\frac{x_4}{x_5}\right)A_5,$$

т.е. есть линейная комбинация A_1, A_2, A_4. Но уравнение

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_4A_4 + x_5A_5 = \Theta$$

получается из $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 = \Theta$ при $x_3 = 0$. Из системы линейных уравнений и общего решения

$$x_1 = \frac{7}{6}x_5 - x_3,\;\; x_2 = \frac{5}{6}x_5 + x_3,\;\; x_4 = \frac{1}{3}x_5,$$

полагая в нем $x_3 = 0$, находим

$$x_1 = \frac{7}{6}x_5,\;\; x_2 = \frac{5}{6}x_5,\;\; x_4 = \frac{1}{3}x_5.$$

Возьмем в качестве x_5 любое отличное от нуля число, например, -1. Тогда

$x_1 = -\frac{7}{6},\;\; x_2 = -\frac{5}{6},\;\; x_4 = -\frac{1}{3},$ так что имеет место линейная зависимость вида

$$-\frac{7}{6}A_1 - \frac{5}{6}A_2 - \frac{1}{3}A_4 - A_5 = \Theta.$$

Отсюда

$$A_5 = -\frac{7}{6}A_1 - \frac{5}{6}A_2 - \frac{1}{3}A_4,$$

т.е. A_5 - линейная комбинация векторов A_1, A_2, A_4.

Замечание. Вторую часть данной задачи (вопрос б)) можно решить также с помощью метода, использованного при решении задачи второго примера.

8.2. Ранг системы векторов и его связь с рангом матрицы

Рассмотрим систему k векторов

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}; \qquad X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}; \quad \cdots \quad X_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Любая совокупность (подсистема) векторов из данной системы (2) **называется базисом этой системы**, если:

1) векторы этой совокупности (подсистемы) линейно независимы и

2) любой вектор из системы (2) является их линейной комбинацией.

Векторы, составляющие базис данной системы, **называются базисными.**

Данная система векторов может иметь, вообще говоря, различные базисы. При этом справедлива следующая теорема.

Теорема. Все базисы данной системы векторов состоят из одного и того же числа базисных векторов.

Доказательство. Предположим, что в системе векторов (2) имеются, по крайней мере, два базиса

$$X_1', X_2', ..., X_{r_1}' \tag{3}$$

$$X_1'', X_2'', ..., X_{r_2}'' \tag{4}$$

с различным числом векторов $(r_1 \neq r_2)$.

Пусть для определенности $r_1 < r_2$. Все векторы совокупности (4) системе принадлежат системе (3) и в силу определения базиса являются линейными комбинациями векторов совокупности (4).

Тогда в силу основной теоремы о линейной зависимости векторов векторы совокупности (4) линейно зависимы, чего быть не может, так как эти векторы образуют базис. Полученное противоречие показывает, что наше предположение о несправедливости теоремы не может имеет места. Теорема доказана.

Пример. Найти какой – нибудь базис системы векторов из предыдущего примера:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Возвращаясь к решению задачи из предыдущего примера, рассмотрим формулы

$$x_1 = \frac{7}{6}x_5 - x_3, \quad x_2 = \frac{5}{6}x_5 + x_3, \quad x_4 = \frac{1}{3}x_5,$$

дающие общее решение уравнения $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 = \Theta$. В левых частях этих формул стоят неизвестные x_1, x_2, x_4. Отсюда следует, что векторы A_1, A_2, A_4 образуют базис этой системы векторов. Согласно определению мы должны показать что:

1) векторы совокупности (подсистемы) A_1, A_2, A_4 линейно независимы и

2) любой вектор из системы A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 является их линейной комбинацией.

Покажем это.

1) Если бы векторы A_1, A_2, A_4 линейно зависимы, то мы имели бы равенство вида $x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_4 A_4 = \Theta$, где хотя бы одно из чисел x_1, x_2, x_4 отлично от нуля. Это означало бы, что уравнение

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 + x_5 A_5 = \Theta$$

имеет ненулевое решение, для которого $x_3 = x_5 = 0$. Но это невозможно, так как при $x_3 = x_5 = 0$ из формул $x_1 = \frac{7}{6} x_5 - x_3$, $x_2 = \frac{5}{6} x_5 + x_3$, $x_4 = \frac{1}{3} x_5$ следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$.

Итак, подсистема состоящая из векторов A_1, A_2, A_4, линейно независима.

2) Теперь покажем, что любой вектор из системы A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 является их линейной комбинацией.

Очевидно, что векторы подсистемы являются линейной комбинацией A_1, A_2, A_4:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_4, \\ A_2 &= 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_4, \\ A_4 &= 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 1 \cdot A_4. \end{aligned}$$

Покажем, что любой из оставшихся векторов A_3, A_5 является линейной комбинацией A_1, A_2, A_4. Полагая в равенствах

$$x_1 = \frac{7}{6} x_5 - x_3, \quad x_2 = \frac{5}{6} x_5 + x_3, \quad x_4 = \frac{1}{3} x_5$$

$x_3 = -1$, $x_5 = 0$, получим:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0.$$

Следовательно,

$$A_1 - A_2 - A_3 = \Theta$$

или

$$A_3 = A_1 - A_2,$$

т.е. A_3 есть линейная комбинация A_1, A_2, A_4. Точно так же, пологая $x_3 = 0$, $x_5 = -1$, получим, что A_5 есть линейная комбинация A_1, A_2, A_4.

Итак, векторы A_1, A_2, A_4 образуют искомый базис данной системы векторов.

Определение. Число базисных векторов данной системы векторов называется **рангом этой системы векторов.**

В частности, если все векторы системы линейно независимы, то ранг этой системы равен числу векторов системы. Ранг системы нулевых векторов считается равным нулю.

Пример. Найти ранг системы векторов

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix}.$$

Решение. Прежде всего видим, что эта система линейно зависима, поскольку вектор $\boldsymbol{X}_3$ является линейной комбинацией первых двух векторов:

$$\boldsymbol{X}_3=2\boldsymbol{X}_1-\frac{1}{3}\boldsymbol{X}_2\,.$$

Однако векторы $\boldsymbol{X}_1$ и $\boldsymbol{X}_2$ линейно независимы, так как равенство

$$\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}=0$$

может иметь только в случае, когда .$\lambda_1=\lambda_2=0$. Итак, все векторы системы линейно выражаются через векторы $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_1&=1\cdot\boldsymbol{X}_1+0\cdot\boldsymbol{X}_2,\\ \boldsymbol{X}_2&=0\cdot\boldsymbol{X}_1+1\cdot\boldsymbol{X}_2,\\ \boldsymbol{X}_3&=2\cdot\boldsymbol{X}_1-\frac{1}{3}\cdot\boldsymbol{X}_2,\end{aligned}$$

а сами векторы $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ линейно независимы.

Следовательно, они образуют базис данной системы. Этот базис состоит из двух векторов, поэтому ранг системы равен 2.

Замечание. В общем случае способ нахождения ранга системы векторов непосредственно по определению, как в данном примере, бесполезен. При поверхностном рассмотрении системы векторов, часто трудно заметить в ней какие - либо линейные зависимости, хотя фактически они имеют место.

Вычисление ранга системы векторов производится на основании следующей теоремы.

Теорема. Ранг системы вектор – столбцов (строк) равен рангу матрицы, составленной из этих столбцов (строк).

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, ..., \boldsymbol{P}_n$ - данная система векторов и $\boldsymbol{A}$ составленная из них матрица

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, ..., \boldsymbol{P}_n).$$

Предположим, что ранг этой матрицы равен $\boldsymbol{r}$; очевидно $\boldsymbol{r} \le \boldsymbol{n}$. Согласно теореме о базисном миноре среди столбцов $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, ..., \boldsymbol{P}_n$ матрицы $\boldsymbol{A}$ найдется ровно $\boldsymbol{r}$ таких столбцов $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, ..., \boldsymbol{Q}_r$, что все столбцы матрицы $\boldsymbol{A}$ линейно выражаются через них, а сами столбцы линейно независимы. Другими словами, это означает, что система векторов $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, ..., \boldsymbol{P}_n$ имеет базис, состоящий из $\boldsymbol{r}$ векторов $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, ..., \boldsymbol{Q}_r$. Следовательно, ранг этой системы векторов равен $\boldsymbol{r}$, т.е. совпадает с рангом матрицы $\boldsymbol{A}$, построенный из этих векторов.

Следствие. В любой матрице ранг системы ее вектор – столбцов равен рангу системы ее вектор – строк.

Аналогично доказывается утверждение, относящееся к строкам.

Ключевые слова и словосочетания

Линейная комбинация векторов, линейно зависимые и линейно независимые вектора, базис системы векторов, ранг системы векторов.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется линейной комбинацией векторов? Что называется коэффициентами линейной комбинации?
2. Когда векторы $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, ..., \boldsymbol{X}_n$ называются линейно зависимыми и линейно независимыми?
3. Приведите теорему, устанавливающую связь между понятиями линейной комбинации и линейной зависимости векторов.

4. Сформулируйте основную теорему о линейной зависимости векторов и следствие из этой теоремы.

5. Что называется базисом данной системы векторов?

6. Что можно сказать о числе базисных векторов всех базисов данной системы векторов? Сформулируйте теорему.

7. Что называется рангом данной системы векторов?

8. На основании какой теоремы производится вычисление ранга данной системы векторов? Сформулируйте теорему. Почему в общем случае не применяется способ нахождения ранга системы векторов непосредственно по определению?

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти линейную комбинацию

$$2\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 + 3\boldsymbol{A}_3$$

следующих векторов:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Найти вектор $\boldsymbol{X}$ из уравнения

$$\boldsymbol{A}_1 + 2\boldsymbol{A}_2 + 3\boldsymbol{A}_3 + 4\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Theta},$$

где

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

3. Найти вектор $\boldsymbol{X}$ из уравнения

$$3(\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{X}) + 2(\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{X}) = 5(\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{X}),$$

где

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Даны векторы:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Будет ли вектор $\boldsymbol{A}_4$ линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$?

5. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

а) Какие линейные зависимости имеют место между данными векторами?

б) Будет ли вектор $\boldsymbol{A}_1$ линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_5$, или линейной комбинацией $\boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_5$, или линейной комбинацией $\boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_5$?

6. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

а) Какие линейные зависимости имеют место между данными векторами?

б) будет ли вектор A_4 линейной комбинацией векторов A_1, A_3, вектор A_1 линейной комбинацией A_2, A_3?

7. Найти все базисы системы векторов:

$$\boldsymbol{a)}\quad A_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{б)}\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8. Найти все значения λ, при которых вектор $\boldsymbol{B}$ линейно выражается через векторы A_i:

$$\boldsymbol{a)}\quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ \lambda \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{б)}\quad A_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

9. Даны два вектора:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подобрать еще два вектора A_3, A_4 так, чтобы система A_1, A_2, A_3, A_4 была линейно независимой.

§9. Координаты векторов, преобразования координат, подпространства в пространстве R^n

9.1. Базис и координаты векторов в пространстве R^n

Определение. Всякая система векторов из пространства R^n **называется базисом этого пространства**, если выполняются следующие условия:

а) все векторы данной системы линейно независимы и

б) любой вектор пространства R^n является линейной комбинацией векторов данной системы.

Теорема. В пространстве R^n любая система из n линейно независимых векторов образует базис.

Доказательство. Пусть $P_1, P_2, ..., P_n$ - линейно независимая система n-мерных векторов. Присоединив к этой системе произвольный n-мерный вектор X, получим систему из $n+1$ векторов размерности n. Согласно следствию основной теоремы о линейной зависимости векторов эта новая система векторов линейно зависима, т.е. существуют такие числа $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$, не все равные нулю, что

$$\lambda_0 X + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = \Theta.$$

Очевидно, $\lambda_0 \neq 0$, иначе векторы $P_1, P_2, ..., P_n$ были бы линейно зависимы вопреки условию теоремы. Следовательно,

$$X = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)P_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)P_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_0}\right)P_n.$$

Итак, любой вектор пространства R^n линейно выражается через векторы данной системы $P_1, P_2, ..., P_n$, а сама эта система линейно независима. Значит, она является базисом. Теорема доказана.

Теорема. Система из n векторов пространства R^n линейно независима тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из компонент этих векторов, отличен от нуля.

Доказательство. Согласно замечанию к теореме о необходимого условия равенства определителя нулю всякий определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы (строки) линейно зависимы. Значит, $\det A \equiv \Delta$ будет отличен от нуля тогда и только тогда, когда его столбцы (векторы данной системы) будут линейно независимы. Теорема доказана.

Из последней теоремы вытекает, в частности, существование бесчисленного множества базисов в пространстве $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$. Например, система из $\boldsymbol{n}$ векторов этого пространства

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \cdots \quad \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

линейно независима, так как определитель, составленный из компонент этих векторов

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

отличен от нуля. Значит, она образует базис. Этот базис **называется естественным базисом.**

Вообще, базис образуют столбцы любого не равного нулю определителя.

Легко заметить далее, что в пространстве $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$- не существует базиса, состоящего из $\boldsymbol{k} < \boldsymbol{n}$ векторов. В противном случае система, например, векторов $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, ..., \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{n}}$ должна была бы линейно выражаться через эти $\boldsymbol{k}$ векторов и в силу основной теоремы о линейной зависимости векторов была бы линейно зависимой, чего нет. Таким образом, число базисных векторов совпадает с размерностью пространства.

Теперь покажем, что **представление произвольного вектора X из пространства R^n в виде линейной комбинации данных базисных векторов является единственным.**

В самом деле, пусть

$$\boldsymbol{X} = \lambda_1 \boldsymbol{P}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{P}_2 + \cdots + \lambda_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}$$

и

$$\boldsymbol{X} = \mu_1 \boldsymbol{P}_1 + \mu_2 \boldsymbol{P}_2 + \cdots + \mu_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}.$$

Вычитая почленно эти два равенства, получим

$$\Theta = (\lambda_1 - \mu_1)\boldsymbol{P}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\boldsymbol{P}_2 + \cdots + (\lambda_{\boldsymbol{n}} - \mu_{\boldsymbol{n}})\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}.$$

Ввиду линейной независимости базисных векторов $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, ..., \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}$ имеем

$$\lambda_1 = \mu_1,\ \ \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_{\boldsymbol{n}} = \mu_{\boldsymbol{n}}.$$

Таким образом, коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{\boldsymbol{n}}$ разложения произвольного вектора $\boldsymbol{X}$ по базисным векторам $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, ..., \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}$ определены однозначно. Эти коэффициенты **называются координатами вектора в данном базисе.** В разных базисах один и тот же вектор не может иметь попарно одинаковые координаты (за исключением нуль - вектора, все координаты которого в любом базисе равны нулю).

Отметим, что компоненты $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}$ вектора $\boldsymbol{X}$ являются его координатами в естественном базисе.

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \cdots \quad \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

в базисе

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Обозначим координаты вектора $\boldsymbol{X}$ в базисе $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3$ через $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$. Это значит, что

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{P}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n \boldsymbol{P}_n$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = 1 \\ \qquad \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = 3 \\ \qquad\qquad \boldsymbol{x}_3 = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$, получим

$$\boldsymbol{x}_1 = -2; \quad \boldsymbol{x}_2 = 2; \quad \boldsymbol{x}_3 = 1.$$

Таким образом, если координаты вектора $\boldsymbol{X}$ в базисе $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3$ обозначить как $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{нов}}$, тогда

$$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{нов}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из полученных в этом пункте результатов вытекает следующее. Согласно определению пространства $\boldsymbol{R}^n$ элементами этого пространства, т.е. $\boldsymbol{n}$-мерными векторами, мы считали столбцы из $\boldsymbol{n}$ чисел (компонент этого вектора):

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}.$$

Теперь мы имеем возможность, зафиксировав произвольный базис, задавать каждый вектор пространства $\boldsymbol{R^n}$, столбцом из его координат в этом базисе. Действительно, в фиксированном базисе, согласно доказанному, координаты однозначно определены для каждого вектора из $\boldsymbol{R^n}$.

Обратное очевидно: задание столбца из координат в данном базисе однозначно определяет сам вектор.

9.2. Действия над векторами, заданными в произвольном базисе

Линейные операции над векторами пространства $\boldsymbol{R^n}$ были определены как линейные операции над их компонентами, т. е. через линейные операции над их координатами в естественном базисе. Например, для нахождения суммы векторов надо найти суммы их соответствующих компонент; ранг системы векторов вычисляется как ранг матрицы, составленной из компонент этих векторов и т.д. **Оказывается, что хотя координаты векторов и меняются при изменении базиса, но линейные соотношения между столбцами из координат этих векторов от выбора базиса уже не зависят.**

Имеет место, следующее утверждение, которое мы примем без доказательства.

Теорема. Для существования линейной зависимости между векторами необходимо и достаточно, чтобы такая же линейная зависимость существовала между столбцами из их координат в произвольном фиксированном базисе.

Таким образом, линейное соотношение между векторами пространства $\boldsymbol{R^n}$ равносильно такому же линейному соотношению между столбцами из координат этих векторов в произвольном базисе. В частности, действия с векторами сводятся к соответствующим действиям со столбцами из координат этих векторов.

Кроме того, из приведенной теоремы следует, что **для определения ранга системы векторов достаточно найти ранг матрицы из координат этих векторов в произвольном фиксированном базисе.**

9.3. Преобразование координат векторов при изменении базиса

Пусть даны две системы из $\boldsymbol{n}$ векторов пространства $\boldsymbol{R^n}$

$$\{\boldsymbol{H}_i\} \text{ и } \{\widetilde{\boldsymbol{H}}_j\}, \quad \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = 1,2,...,\boldsymbol{n}.$$

Условимся первую из этих систем называть старой, а вторую - новой.

Предположим, что старая система $\{\boldsymbol{H}_i\}$ образует базис. Тогда

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{H}}_1 &= \boldsymbol{p}_{11}\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{p}_{21}\boldsymbol{H}_2 + \cdots + \boldsymbol{p}_{n1}\boldsymbol{H}_n, \\
\widetilde{\boldsymbol{H}}_2 &= \boldsymbol{p}_{12}\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{p}_{22}\boldsymbol{H}_2 + \cdots + \boldsymbol{p}_{n2}\boldsymbol{H}_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\widetilde{\boldsymbol{H}}_n &= \boldsymbol{p}_{1n}\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{p}_{2n}\boldsymbol{H}_2 + \cdots + \boldsymbol{p}_{nn}\boldsymbol{H}_n,
\end{aligned}$$

где числа $\boldsymbol{p}_{ij}$ - координаты векторов новой системы в базисе $\{\boldsymbol{H}_i\}$ из векторов старой системы.

Определение. Матрицу из этих координат

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{11} & \boldsymbol{p}_{12} & \cdots & \boldsymbol{p}_{1n} \\ \boldsymbol{p}_{21} & \boldsymbol{p}_{22} & \cdots & \boldsymbol{p}_{2n} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \boldsymbol{p}_{n1} & \boldsymbol{p}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{p}_{nn} \end{pmatrix},$$

назовем матрицей перехода от старой системы $\{\boldsymbol{H}_i\}$ к **новой системе** $\{\widetilde{\boldsymbol{H}}_j\}$.

Теорема. Пусть старая система $\{\boldsymbol{H}_i\}$ образует базис. Для того чтобы новая система $\{\widetilde{\boldsymbol{H}}_j\}$ также была базисной, необходима и достаточна невырожденность (неособенность) матрицы перехода $\boldsymbol{P}$.

Доказательство. Система $\{\widetilde{\boldsymbol{H}}_j\}$ будет базисной тогда и только тогда, когда ее ранг равен $\boldsymbol{n}$. Но ранг системы векторов равен рангу матрицы $\boldsymbol{P}$, составленной из координат этих векторов в базисе $\{\boldsymbol{H}_i\}$. Ранг матрицы $\boldsymbol{P}$ равен $\boldsymbol{n}$ тогда и только тогда, когда она невырождена (неособенна). Теорема доказана.

Пусть теперь обе системы векторов, старая $\{\boldsymbol{H}_i\}$ и новая $\{\widetilde{\boldsymbol{H}}_j\}$ являются базисными. Тогда старые базисные векторы, в свою очередь, выражаются линейно через новые:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_1 &= \tilde{\boldsymbol{p}}_{11}\tilde{\boldsymbol{H}}_1 + \tilde{\boldsymbol{p}}_{21}\tilde{\boldsymbol{H}}_2 + \cdots + \tilde{\boldsymbol{p}}_{n1}\tilde{\boldsymbol{H}}_n, \\ \boldsymbol{H}_2 &= \tilde{\boldsymbol{p}}_{12}\tilde{\boldsymbol{H}}_1 + \tilde{\boldsymbol{p}}_{22}\tilde{\boldsymbol{H}}_2 + \cdots + \tilde{\boldsymbol{p}}_{n2}\tilde{\boldsymbol{H}}_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{H}_n &= \tilde{\boldsymbol{p}}_{1n}\tilde{\boldsymbol{H}}_1 + \tilde{\boldsymbol{p}}_{2n}\tilde{\boldsymbol{H}}_2 + \cdots + \tilde{\boldsymbol{p}}_{nn}\tilde{\boldsymbol{H}}_n. \end{aligned}$$

Матрица из координат векторов старого базиса в новом

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{p}}_{11} & \tilde{\boldsymbol{p}}_{12} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{p}}_{1n} \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_{21} & \tilde{\boldsymbol{p}}_{22} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{p}}_{2n} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_{n1} & \tilde{\boldsymbol{p}}_{n2} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{p}}_{nn} \end{pmatrix}$$

является по определению матрицей перехода от нового базиса к старому, т.е. матрицей обратного перехода.

Чтобы найти соотношение между матрицами $\boldsymbol{P}$ и $\tilde{\boldsymbol{P}}$, запишем выражения векторов одной системы через другую в сокращенном виде:

$$\tilde{\boldsymbol{H}}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_{jk}\boldsymbol{H}_j; \qquad \boldsymbol{H}_i = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{p}}_{ki}\tilde{\boldsymbol{H}}_k .$$

Подставляя выражения новых векторов через старые из первых равенств во вторые, получим

$$\boldsymbol{H}_i = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{p}}_{ki} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_{jk}\boldsymbol{H}_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{p}}_{ki}\boldsymbol{p}_{jk}\boldsymbol{H}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{p}}_{ki}\boldsymbol{p}_{jk}\boldsymbol{H}_j = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{H}_j \sum_{k=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{p}}_{ki}\boldsymbol{p}_{jk} .$$

Отсюда видно, что выражение $\sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{p}}_{ki}\boldsymbol{p}_{jk}$ является координатой $\boldsymbol{i}$-го вектора старой системы в базисе, состоящем из векторов той же системы. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{p}}_{ki}\boldsymbol{p}_{jk} = \delta_{ji}.$$

Напомним, что символ Кронекера δ_{ji} означает единицу при $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}$ и нуль при $\boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{i}$.

По определению умножения матриц предыдущее равенство означает

$$(\tilde{\boldsymbol{p}}_{ki}) \cdot (\boldsymbol{p}_{jk}) = (\delta_{ji}),$$

или

$$\widetilde{P} \cdot P = E,$$

где E - единичная матрица.

Таким образом, $\widetilde{P} = P^{-1}$.

Перейдем к выводу формул преобразования координат при изменении базиса. Для произвольного вектора X пространства R^n обозначим через

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \widetilde{X} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \end{pmatrix}$$

столбцы из его координат, соответственно, в старом и новом базисах. Далее, по определению координат имеем

$$X = \widetilde{x}_1 \widetilde{H}_1 + \widetilde{x}_2 \widetilde{H}_2 + \cdots + \widetilde{x}_n \widetilde{H}_n.$$

Коэффициенты этого линейного соотношения между векторами $X, \widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_n$ не зависят от того, в каком базисе заданы координаты упомянутых векторов. Будем считать, что они заданы в старом базисе $\{H_i\}$. Тогда

$$X = \widetilde{x}_1 P_1 + \widetilde{x}_2 P_2 + \cdots + \widetilde{x}_n P_n,$$

где $P_1, P_2, ..., P_n$ - столбцы из координат векторов нового базиса $\{\widetilde{H}_j\}$ в старом, т.е. столбцы матрицы P перехода от старого базиса к новому.

Мы получили выражение для старых координат через новые.

В развернутом виде имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= p_{11}\widetilde{x}_1 + p_{12}\widetilde{x}_2 + \cdots + p_{1n}\widetilde{x}_n, \\ x_2 &= p_{21}\widetilde{x}_1 + p_{22}\widetilde{x}_2 + \cdots + p_{2n}\widetilde{x}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= p_{n1}\widetilde{x}_1 + p_{n2}\widetilde{x}_2 + \cdots + p_{nn}\widetilde{x}_n, \end{aligned} \qquad (*)$$

а в матричной записи

$$X = P\widetilde{X}.$$

Умножая обе части последнего равенства слева на матрицу $\boldsymbol{P}^{-1} = \widetilde{\boldsymbol{P}}$, получим

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} = \widetilde{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{X},$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{x}}_1 &= \widetilde{\boldsymbol{p}}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \widetilde{\boldsymbol{p}}_{12}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \widetilde{\boldsymbol{p}}_{1\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}},\\
\widetilde{\boldsymbol{x}}_2 &= \widetilde{\boldsymbol{p}}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \widetilde{\boldsymbol{p}}_{22}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \widetilde{\boldsymbol{p}}_{2\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} &= \widetilde{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{n}1}\boldsymbol{x}_1 + \widetilde{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{n}2}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \widetilde{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{nn}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}.
\end{aligned} \qquad (**)$$

Таким образом, при переходе от старого базиса к новому новые координаты выражаются через старые с использованием матрицы перехода от нового базиса к старому. В связи с этим говорят, что координаты векторов при изменении базиса преобразуются «контравариантно», т. е. противоположным образом сравнительно с векторами, составляющими базис. Легко убедиться в этом, сравнив формулы (**) и (*).

Пример. Показать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}}\}:\quad \boldsymbol{H}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_3 = \begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix},$$

$$\{\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{i}}\}:\quad \widetilde{\boldsymbol{H}}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},\quad \widetilde{\boldsymbol{H}}_2 = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix},\quad \widetilde{\boldsymbol{H}}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$$

является базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}}\}$ к базису $\{\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{i}}\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}-17\\-36\\-11\end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

Решение. Каждая из данных систем состоит из 3 векторов, и они рассматриваются в пространстве $\boldsymbol{R}^3$. Поэтому достаточно показать, что системы линейно независимы.

Составим матрицы:

$$\boldsymbol{A_H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A_{\tilde{H}}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Поскольку определители $|\boldsymbol{A_H}| = 1$, $|\boldsymbol{A_{\tilde{H}}}| = 4$ отличны от нуля, то строки каждой матрицы линейно независимы. А это означает, что и обе системы векторов линейно независимы.

Для нахождения координат $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ вектора $\boldsymbol{X}$ в базисе $\{\boldsymbol{H_i}\}$ и матрицы $\boldsymbol{P}$ перехода от базиса $\{\boldsymbol{H_i}\}$ к базису $\{\boldsymbol{\tilde{H}_i}\}$ составим и решим векторные уравнения:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{H}_3, \tag{1}$$
$$\boldsymbol{\tilde{H}}_1 = \boldsymbol{p}_{11}\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{p}_{21}\boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{p}_{31}\boldsymbol{H}_3, \tag{2}$$
$$\boldsymbol{\tilde{H}}_2 = \boldsymbol{p}_{12}\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{p}_{22}\boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{p}_{32}\boldsymbol{H}_3, \tag{3}$$
$$\boldsymbol{\tilde{H}}_3 = \boldsymbol{p}_{13}\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{p}_{23}\boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{p}_{33}\boldsymbol{H}_3. \tag{4}$$

Уравнение (1) дает

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ 2\boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\boldsymbol{x}_2 \\ 3\boldsymbol{x}_2 \\ 3\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\boldsymbol{x}_3 \\ 7\boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -36 \\ -11 \end{pmatrix},$$

откуда получим систему

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 = -17 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 + 7\boldsymbol{x}_3 = -36 \\ \boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = -11. \end{cases}$$

Аналогично уравнения (2), (3), (4) дадут соответственно следующие системы уравнений с такими же коэффициентами при новых неизвестных:

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}_{11} + 2\boldsymbol{p}_{21} + 3\boldsymbol{p}_{31} = 3 \\ 2\boldsymbol{p}_{11} + 3\boldsymbol{p}_{21} + 7\boldsymbol{p}_{31} = 1 \\ \boldsymbol{p}_{11} + 3\boldsymbol{p}_{21} + \boldsymbol{p}_{31} = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{p}_{12} + 2\boldsymbol{p}_{22} + 3\boldsymbol{p}_{32} = 5 \\ 2\boldsymbol{p}_{12} + 3\boldsymbol{p}_{22} + 7\boldsymbol{p}_{32} = 2 \\ \boldsymbol{p}_{112} + 3\boldsymbol{p}_{22} + \boldsymbol{p}_{32} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{p}_{13} + 2\boldsymbol{p}_{23} + 3\boldsymbol{p}_{33} = 1 \\ 2\boldsymbol{p}_{13} + 3\boldsymbol{p}_{23} + 7\boldsymbol{p}_{33} = 1 \\ \boldsymbol{p}_{13} + 3\boldsymbol{p}_{23} + \boldsymbol{p}_{33} = -6. \end{cases}$$

Поэтому все полученные четыре системы можно решить методом Гаусса одновременно:

$$\left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & -36 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -11 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 2 & 0 & -5 & -9 & -31 & -23 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -9 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right).$$

Получаем:

$$\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{H}_1 - 2\boldsymbol{H}_2 - 4\boldsymbol{H}_3, \qquad (1')$$
$$\tilde{\boldsymbol{H}}_1 = -27\boldsymbol{H}_1 + 9\boldsymbol{H}_2 + 4\boldsymbol{H}_3, \qquad (2')$$
$$\tilde{\boldsymbol{H}}_2 = -71\boldsymbol{H}_1 + 20\boldsymbol{H}_2 + 12\boldsymbol{H}_3, \qquad (3')$$
$$\tilde{\boldsymbol{H}}_3 = -41\boldsymbol{H}_1 + 9\boldsymbol{H}_2 + 8\boldsymbol{H}_3. \qquad (4')$$

Итак, числа -1, -2, -4 являются координатами вектора $\boldsymbol{X}$ в базисе $\{\boldsymbol{H}_i\}$, а матрицей перехода от базиса $\{\boldsymbol{H}_i\}$ к базису $\{\tilde{\boldsymbol{H}}_i\}$ будет матрица

$$P=\begin{pmatrix}-27 & -71 & -41\\ 9 & 20 & 9\\ 4 & 12 & 8\end{pmatrix}.$$

Обратная к ней матрица

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}52 & 76 & 181\\ -36 & -52 & -126\\ 28 & 40 & 99\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 19 & \frac{181}{4}\\ -9 & -13 & -\frac{63}{2}\\ 7 & 10 & \frac{99}{4}\end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса $\{\widetilde{H}_i\}$ к базису $\{H_i\}$. Теперь находим столбец координат вектора X в базисе $\{\widetilde{H}_i\}$:

$$X=\begin{pmatrix}\widetilde{x}_1\\ \widetilde{x}_2\\ \widetilde{x}_3\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 19 & \frac{181}{4}\\ -9 & -13 & -\frac{63}{2}\\ 7 & 10 & \frac{99}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-232\\ 161\\ -126\end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\ddot{x}_1\widetilde{H}_1+\ddot{x}_2\ddot{H}_2+\ddot{x}_3\ddot{H}_3=-232\cdot\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}+161\cdot\begin{pmatrix}5\\ 2\\ 1\end{pmatrix}-126\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17\\ -36\\ -11\end{pmatrix}=X.$$

С помощью формул преобразования координат мы докажем одно утверждение о ранге матриц, которое будет использовано в дальнейшем.

Теорема. Если одна из двух квадратных матриц - сомножителей невырождена, то ранг произведения равен рангу второй матрицы.

Доказательство. Пусть $Y=PX$ и матрица P невырождена. Будем считать столбцы $\Xi_1,\Xi_2,...,\Xi_n$ матрицы X координатными столбцами векторов $X_1,X_2,...,X_n$ в некотором базисе $\{H_j\}$. Перейдем от базиса $\{H_j\}$ к новому базису $\{\widetilde{H}_j\}$ взяв за матрицу перехода P^{-1}. Тогда согласно формулам $\widetilde{X}=\widetilde{P}X$ матрица Y будет матрицей из координат тех же векторов $X_1,X_2,...,X_n$ в новом базисе $\{\widetilde{H}_j\}$. Но ранг матрицы из координат векторов равен рангу этой системы векторов независимо от базиса: $r(X)=r(Y)$, что и требовалось доказать.

9.4. Подпространства пространства R^n

9.4.1. Основные понятия

Пусть $\mathcal{R}$ - некоторое множество векторов пространства $\boldsymbol{R}^n$. Если всякая линейная комбинация векторов множества $\mathcal{R}$ также является вектором из этого множества, то $\mathcal{R}$ **называют подпространством пространства $\boldsymbol{R}^n$.**

Иначе говоря, множество $\mathcal{R}$ является подпространством, если выполняются следующие два условия:

I. Если $X \in \mathcal{R}$ и $Y \in \mathcal{R}$, то $X + Y \in \mathcal{R}$.

II. Если $X \in \mathcal{R}$ и λ любое число, то $\lambda X \in \mathcal{R}$.

При этом, конечно, имеется в виду, что в случае действительного пространства $\boldsymbol{R}^n$ рассматриваются только действительные числа λ.

Заметим, что согласно второму условию нуль-вектор принадлежит любому подпространству.

Тривиальными примерами подпространств являются все пространство, а также множество, состоящее из одного нуль - вектора. Более содержательный пример получим, рассматривая множество $\mathcal{R}_1$ векторов из $\boldsymbol{R}^n$, у которых первая координата в каком-либо фиксированном базисе $\{\boldsymbol{H}_i\}$ равна нулю.

Множество решений совместной однородной системы линейных уравнений с $\boldsymbol{n}$ неизвестными также является подпространством пространства $\boldsymbol{R}^n$ (рассмотрим позже в §10).

Если рассматривать действительное пространство $\boldsymbol{R}^3$ как обычное трехмерное пространство V^3 с фиксированной системой прямоугольных координат, то подпространствами будут плоскости и прямые, проходящие через начало координат. Заметим, что другие плоскости и прямые не будут подпространствами (они не содержат нуль - вектора).

Размерностью подпространства $\mathcal{R}$ пространства $\boldsymbol{R}^n$ называется число $\boldsymbol{k}$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) существует $\boldsymbol{k}$ линейно независимых векторов, принадлежащих этому подпространству;

2) любая система из $\boldsymbol{k}+1$ векторов данного подпространства линейно зависима.

Очевидно, такое число $\boldsymbol{k}$ существует, причем $\boldsymbol{k} \le \boldsymbol{n}$. Если $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{n}$, то подпространство $\mathcal{R}$ совпадает со всем пространством $\boldsymbol{R}^n$. Действительно, $\boldsymbol{n}$ линейно независимых векторов образуют базис в

$\boldsymbol{R}^n$. Поэтому каждый вектор в $\boldsymbol{R}^n$, поскольку он может быть разложен по этому базису, является по определению элементом подпространства $\mathcal{R}$. Итак, все векторы пространства $\boldsymbol{R}^n$ входят в $\mathcal{R}$. Обратное очевидно.

Система векторов подпространства $\mathcal{R}$ **называется базисом этого подпространства,** если:

1) векторы системы линейно независимы;
2) любой вектор подпространства является линейной комбинацией векторов данной системы.

Например, в подпространстве $\mathcal{R}$ векторов из $\boldsymbol{R}^n$, у которых первая координата в базисе $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_n$ равна нулю, базисом будет система векторов $\boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_n$. Действительно, она линейно независима, а всякий вектор из $\mathcal{R}$ по самому определению этого подпространства является линейной комбинацией векторов указанной системы. Размерность $\mathcal{R}$, как легко заметить, равна $\boldsymbol{n}-1$.

В пространстве $\boldsymbol{V}^3$ плоскость, проходящая через начало координат, будет подпространством размерности 2. В самом деле, радиус-векторы любых трех точек этой плоскости компланарны и, следовательно, линейно зависимы. С другой стороны, пара неколлинеарных векторов этой плоскости линейно независима и образует базис этого подпространства.

Подпространство решений однородной системы ранга $\boldsymbol{r}$ с $\boldsymbol{n}$ неизвестными имеет базис, состоящий из любых $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}$ линейно независимых решений; размерность этого подпространства равна $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}$. Это будет показано позже в §10 п.1.

Во всех разобранных примерах мы нашли базис соответствующего подпространства и убедились, что размерность подпространства и число его базисных векторов одинаковы. Этот факт имеет место и в общем случае. Прежде всего, заметим, что все базисы подпространства состоят из одного и того же числа векторов. Доказательство, данное для случая конечной системы векторов, проходит без всяких изменений.

Теорема. Для того чтобы подпространство $\mathcal{R}$ имело размерность $\boldsymbol{k}$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовал базис из $\boldsymbol{k}$ векторов.

Доказательство. Если размерность подпространства $\mathcal{R}$ равна $\boldsymbol{k}$, то в нем по самому определению размерности найдется система из $\boldsymbol{k}$ линейно независимых векторов $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_k$. Кроме того, присоединив к этой системе произвольный вектор $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{L}$, получим уже линейно зависимую систему. Иначе говоря, $\lambda_0 \boldsymbol{X} + \lambda_1 \boldsymbol{H}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{H}_2 + \cdots + \lambda_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$, причем не все $\lambda_{\boldsymbol{i}}$ равны нулю. Очевидно, $\lambda_0 \neq 0$ (в противном случае векторы $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}}$ были бы линейно зависимы). Следовательно, вектор $\boldsymbol{X}$ линейно выражается через систему $\{\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}}\}$, т.е. эта система - базисная.

Наоборот, если система $\{\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{i}}\}$ является базисом в $\mathcal{R}$, то в нем существует $\boldsymbol{k}$ линейно независимых векторов. Кроме того, если взять любое большее число векторов, то линейно выражаясь через базисные, они будут линейно зависимы. Теорема доказана.

Таким образом, размерность подпространства можно также определить как число базисных векторов этого подпространства.

В заключение этого пункта рассмотрим вопрос о пополнении базиса подпространства $\mathcal{R}$ до базиса всего пространства $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Теорема. Пусть $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}}$ - базис подпространства $\mathcal{R}$ пространства $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$, причем $\boldsymbol{k} < \boldsymbol{n}$. Тогда можно дополнительно выбрать $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}+1}, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}+2}, \ldots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}}$ так, чтобы система $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}}$ была базисом всего пространства $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Доказательство. Система $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}}$ не может быть базисом пространства $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$, так как $\boldsymbol{k} < \boldsymbol{n}$, а все базисы в $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ состоят из одинакового числа векторов, равного $\boldsymbol{n}$. Значит, в $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ найдется вектор $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}+1}$, который не выражается линейно через $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}}$. Система $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}+1}$ линейно независима; в самом деле, если бы существовало соотношение

$$\lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{f}_2 + \cdots + \lambda_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}} + \lambda_{\boldsymbol{k}+1} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}+1} = \boldsymbol{\Theta},$$

где не все $\lambda_{\boldsymbol{i}}$ равны нулю, то при $\lambda_{\boldsymbol{i}+1} = 0$ мы получили бы линейную зависимость базисных векторов подпространства, а при $\lambda_{\boldsymbol{i}+1} \neq 0$ выражение для $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}+1}$ в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}}$. Оба эти вывода противоречат построению.

Если теперь $\boldsymbol{k} + 1 = \boldsymbol{n}$, то система $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}}$, пополненная вектором $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}+1}$ образует базис в $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$, и доказательство закончено. Если же $\boldsymbol{k} + 1 < \boldsymbol{n}$, то подбираем вектор $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}+2}$, линейно не выражающийся через $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}+1}$ и т. д. Через $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}$ шагов мы получим искомый базис пространства $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$.

9.4.2. Линейная оболочка совокупности векторов

Пусть $\mathfrak{M}$ - некоторое множество векторов пространства $\boldsymbol{R}^n$ (конечное или бесконечное). Совокупность всех (конечных) линейных комбинаций векторов из $\mathfrak{M}$ **называется линейной оболочкой множества $\mathfrak{M}$ и обозначается $\mathfrak{L}(\mathfrak{M})$.**

Легко видеть, что линейная оболочка является подпространством, ибо если сложить две линейные комбинации векторов из множества $\mathfrak{M}$, а также если умножить линейную комбинацию таких векторов на число, то в обоих случаях опять получится некоторая линейная комбинация из векторов множества $\mathfrak{M}$.

Например, в пространстве V^3 линейной оболочкой векторов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ будет подпространство, состоящее из всех векторов, лежащих в плоскости векторов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$.

Иногда линейную оболочку системы (множества) векторов $X_1, X_2, ..., X_k$ **называют подпространством, натянутым на данную систему векторов.**

Теорема. Размерность подпространства $\mathfrak{L}(\mathfrak{M})$, натянутого на систему векторов $\mathfrak{M}$, равна рангу этой системы.

Доказательство. Пусть ранг данной системы векторов равен $\boldsymbol{r}$. Возьмем $\boldsymbol{r}$ базисных векторов этой системы. Эти векторы линейно независимы. С другой стороны, всякий вектор линейной оболочки $\mathfrak{L}(\mathfrak{M})$ линейно выражается через конечное число векторов системы $\boldsymbol{M}$. Векторы системы $\mathfrak{M}$, в свою очередь, линейно выражаются через базисные. Следовательно, любой вектор линейной оболочки линейно выражается через $\boldsymbol{r}$ базисных векторов системы $\mathfrak{M}$. Значит, базис системы $\mathfrak{M}$ является базисом всего подпространства $\mathfrak{L}(\mathfrak{M})$. Но число базисных векторов подпространства равно размерности этого подпространства. Поэтому размерность $\mathfrak{L}(\mathfrak{M})$ равна $\boldsymbol{r}$, что и требовалось доказать.

Пример. Найти размерность и базис линейного подпространства пространства $\boldsymbol{R}^4$, натянутого на данную систему векторов

$$\boldsymbol{f}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Решение. Составим матрицу координат данных векторов

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&1&2&0\\0&2&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

и вычислим ее ранг. Так как минор третьего порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы $\boldsymbol{P}$,

$$\begin{vmatrix}2&1&2\\0&2&1\\1&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

а окаймляющий его минор четвертого порядка равен нулю, то ранг матрицы $\boldsymbol{P}$ равен 3. Значит, и ранг данной системы векторов равен 3.

Следовательно, подпространство, натянутое на данную систему векторов, трехмерно, а за базис можно принять векторы

$$\boldsymbol{f}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Замечание. Помимо рассмотренных вопросов, а также можно было бы определить сумму и пересечение подпространств пространства $\boldsymbol{R}^n$ и рассмотреть другие вопросы, связанные с подпространствами пространства $\boldsymbol{R}^n$. Эти вопросы мы в данном курсе затрагивать не будем.

9.5. Ортонормальный базис пространства R^n. Процесс ортонормализации Шмидта

Напомним, что два вектора X и Y, состоящие из n компонент, являются ортогональными, если $(X,Y) \equiv X'Y = 0$. Предположим, что мы имеем n векторов $V_1, V_2, ..., V_n$ из пространства R^n, которые взаимно ортогональны и все отличны от Θ так, что

$$(V_i, V_j) = 0 \quad \text{для всех } i, j: \ \ i \neq j.$$

Это множество векторов образует базис для пространства R^n. Доказательство получится, если мы сможем показать, что множество векторов $V_1, V_2, ..., V_n$ является линейно независимым, поскольку любое множество, состоящее из n линейно независимых векторов из пространства R^n, образует базис пространства R^n. Рассмотрим задачу нахождения коэффициентов λ_i, которые удовлетворяли бы равенству

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_n V_n = \Theta.$$

Умножая скалярно, обе части последнего равенства на вектор V_1 мы получим:

$$\lambda_1 |V_1|^2 + \lambda_2 (V_1, V_2) + \cdots + \lambda_n (V_1, V_n) = (V_1, \Theta) = 0,$$

но $|V_1|^2 \neq 0$ и значит, $\lambda_1 = 0$. Если мы скалярно умножим обе части равенства $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_n V_n = \Theta$ на вектор V_2, то получим $\lambda_2 = 0$ и т.д. Отсюда каждый коэффициент λ_i, $(i = 1, 2, ..., n)$ является нулем, поэтому векторы $V_1, V_2, ..., V_n$ являются линейно независимыми и образуют базис для пространства R^n. Таким образом, любое множество, состоящее из n взаимно ортогональных не нуль - векторов из пространства R^n, образует базис пространства R^n.

Разделим каждый вектор V_i на его длину $|V_i|$ и напишем

$$U_i = \frac{V_i}{|V_i|}.$$

Это может быть сделано, так как $|V_i| \neq 0$. Векторы U_i представляют собой векторы единичной длины, таким образом,

$$(U_i, U_j) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad i \neq j, \\ 1 & \textit{при} \quad i = j. \end{cases}$$

Множество n взаимно ортогональных векторов единичной длины из пространства R^n образует так называемый **ортогональный нормированный, короче ортонормальный базис пространства**.

Ортонормальные базисы особенно интересны потому, что любой вектор $\boldsymbol{X}$ из пространства $\boldsymbol{R^n}$ может выражаться значительно проще как линейная комбинация ортонормальных базисных векторов. Если векторы $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, ..., \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{n}}$ образуют ортонормальный базис для пространства $\boldsymbol{R^n}$ и мы хотим найти коэффициенты в выражении

$$\boldsymbol{X} = \lambda_1 \boldsymbol{U}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{U}_2 + \cdots + \lambda_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{n}},$$

то достаточно скалярно умножить обе части последнего равенства на $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}}$, и мы получим:

$$\lambda_{\boldsymbol{i}} = (\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{X}).$$

Скаляр $\lambda_{\boldsymbol{i}}$ найдем просто путем образования скалярного произведения векторов $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}}$ и $\boldsymbol{X}$.

Замечание. Отметим, что в пространстве $\boldsymbol{R^n}$ ортонормальный базис (один из бесконечного числа возможных) образует единичные векторы

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \cdots \quad \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что выше этот базис мы называли естественным базисом.

Поскольку любое множество взаимно ортогональных ненулевых векторов из $\boldsymbol{n}$ компонент является линейно независимым, невозможно иметь $\boldsymbol{n}+1$ взаимно ортогональных ненулевых векторов в пространстве $\boldsymbol{R^n}$.

Любое множество, состоящее из данных $\boldsymbol{n}$ линейно независимых векторов из пространства, может быть преобразовано в ортонормальный базис посредством процесса, известного под названием **ортонормализационного процесса Шмидта**. Предположим, что векторы $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}$ представляют собой $\boldsymbol{n}$ линейно независимых векторов из пространства $\boldsymbol{R^n}$. Мы выбираем любой вектор из этого множества, например, вектор $\boldsymbol{A}_1$. Этот вектор определяет направление в пространстве, и мы строим вокруг него ортонормальное множество. Определим вектор единичной длины $\boldsymbol{U}_1$ как

$$\boldsymbol{U}_1 = \frac{\boldsymbol{A}_1}{|\boldsymbol{A}_1|}.$$

Для того чтобы получить вектор $\boldsymbol{V}_2$, ортогональный к вектору $\boldsymbol{U}_1$ мы вычитаем из вектора $\boldsymbol{A}_2$ вектор $\boldsymbol{U}_1$, умноженный на скалярный множитель α_1, т.е. вектор $\boldsymbol{U}_2$ выражается как

$$\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{A}_2 - \alpha_1 \boldsymbol{U}_1,$$

и определяем α_1 таким образом, чтобы $(\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{V}_2) = 0$. Отсюда

$$\alpha_1 = (\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{A}_2)$$

может быть выражен через компоненты векторов $\boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{U}_1$. Итак, вектор $\alpha_1 \boldsymbol{U}_1$ может быть интерпретирован как векторная компонента вектора $\boldsymbol{A}_2$ по вектору $\boldsymbol{U}_1$. Таким образом,

$$\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{A}_2 - (\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{U}_1.$$

Второй единичный вектор, ортогональный к $\boldsymbol{U}_1$ определяется равенством

$$\boldsymbol{U}_2 = \frac{\boldsymbol{V}_2}{|\boldsymbol{V}_2|}.$$

Это может быть сделано, поскольку $|\boldsymbol{V}_2| \neq 0$ (почему?). Вектор, ортогональный к векторам $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2$, найдется вычитанием из вектора $\boldsymbol{A}_3$ векторных компонент этого вектора по векторам $\boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{U}_2$. Это дает:

$$\boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{A}_3 - (\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{A}_3)\boldsymbol{U}_1 - (\boldsymbol{U}_2 - \boldsymbol{A}_3)\boldsymbol{U}_2.$$

Ясно, что вектор $\boldsymbol{V}_3$ является ортогональным к векторам $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2$. Третий единичный вектор, который является ортогональным к векторам $\boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{U}_2$, выражается равенством

$$\boldsymbol{U}_3 = \frac{\boldsymbol{V}_3}{|\boldsymbol{V}_3|}.$$

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет получен ортонормальный базис. Вообще

$$\boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{A}_r - \sum_{i=1}^{r-1} (\boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{A}_r)\boldsymbol{U}_i, \qquad \boldsymbol{U}_r = \frac{\boldsymbol{V}_r}{|\boldsymbol{V}_r|}.$$

Пример. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Эта система векторов линейно независима, так как матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

составленная из этих векторов имеет ранг равный 3. Действительно, минор второго порядка стоящий в левом верхнем углу матрицы $\boldsymbol{A}$,

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0,$$

и окаймляющий его минор третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -64 \neq 0.$$

Тогда

$$\boldsymbol{U}_1 = \frac{\boldsymbol{A}_1}{|\boldsymbol{A}_1|} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{A}_2 - (\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{U}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{15}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{30}{13} \\ \frac{45}{13} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{48}{13} \\ -\frac{32}{13} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{U}_2=\frac{\boldsymbol{V}_2}{|\boldsymbol{V}_2|}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3328}}{13}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{48}{13}\\-\frac{32}{13}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{48}{\sqrt{3328}}\\-\frac{32}{\sqrt{3328}}\\0\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{V}_3=\boldsymbol{A}_3-(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{A}_3)\boldsymbol{U}_1-(\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{A}_3)\boldsymbol{U}_2=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{3}{\sqrt{13}}\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{48}{\sqrt{3328}} & -\frac{32}{\sqrt{3328}} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{48}{\sqrt{3328}}\\-\frac{32}{\sqrt{3328}}\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}-\frac{6}{\sqrt{13}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{3}{\sqrt{13}}\\0\end{pmatrix}+\frac{64}{\sqrt{3328}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{48}{\sqrt{3328}}\\-\frac{32}{\sqrt{3328}}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{12}{13}\\\frac{18}{13}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{64\cdot 48}{3328}\\-\frac{64\cdot 32}{3328}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{U}_3=\frac{\boldsymbol{V}_3}{|\boldsymbol{V}_3|}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, применяя процесс Шмидта, из заданной системы векторов построили следующий ортонормальный базис:

$$\boldsymbol{U}_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{3}{\sqrt{13}}\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{U}_2=\begin{pmatrix}\frac{48}{\sqrt{3328}}\\-\frac{32}{\sqrt{3328}}\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{U}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Замечание. Отметим, что в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ только что построенные нами (с помощью процесса Шмидта) вектора $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \boldsymbol{U}_3$ наряду с единичными векторами этого пространства

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют ортонормальный базис. Заметим, что эти ортонормальные базисы только два из бесконечного числа возможных ортонормальных базисов пространства $\boldsymbol{R}^3$.

Ключевые слова и словосочетания

Базис пространства, естественный базис, координаты векторов в пространстве, преобразование координат векторов, старая базисная система, новая базисная система, матрица перехода, подпространство, размерность подпространства, базис подпространства, линейная оболочка совокупности векторов, подпространство натянутое на данную систему векторов, ортонормальный базис, процесс ортонормализации Шмидта.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется базисом данной системы векторов?

2. Что можно сказать о числе базисных векторов всех базисов данной системы векторов? Сформулируйте теорему.

3. Что называется рангом данной системы векторов?

4. На основании какой теоремы производится вычисление ранга данной системы векторов? Сформулируйте теорему. Почему в общем случае не применяется способ нахождения ранга системы векторов непосредственно по определению?

5. Что называется базисом пространства $\boldsymbol{R}^n$?

6. Что образует базис в пространстве $\boldsymbol{R}^n$? Приведите теорему отвечающую на этот вопрос.

7. Приведите теорему, где приведено необходимое и достаточное условие линейной независимости систем $\boldsymbol{n}$ векторов в пространстве $\boldsymbol{R^n}$.

8. Можно ли утверждать, что в пространстве $\boldsymbol{R^n}$ существует бесчисленное множество базисов? Если «Да», то из какой теоремы это вытекает? Какой из базисов называется естественным базисом?

9. Как можно представить произвольный вектор $\boldsymbol{X}$ из пространства $\boldsymbol{R^n}$ через данные базисных векторов? Является ли это представление единственным?

10. Что называется координатой вектора в данном базисе?

11. Сформулируйте теорему, которая показывает, что линейное соотношение между векторами пространства $\boldsymbol{R^n}$ равносильно такому же линейному соотношению между столбцами из координат этих векторов в произвольном базисе.

12. Для определения ранга системы векторов достаточно ли найти ранг матрицы из координат этих векторов в произвольном фиксированном базисе? Если «Да», то из какой теоремы это вытекает?

13. Что называется матрицей перехода от старой системы к новой системе?

14. Пусть старая система образует базис. Какое условие является необходимой и достаточной, для того чтобы новая система также была базисной?

15. Что называется подпространством пространства $\boldsymbol{R^n}$?

16. Что называется размерностью подпространства?

17. Что называется базисом подпространства?

18. Приведите необходимое и достаточное условие того, что подпротран-ство имело размерность $\boldsymbol{k}$.

19. Сформулируйте теорему о пополнении базиса подпространства $\mathcal{R}$ до базиса всего пространства $\boldsymbol{R^n}$.

20. Что называется линейной оболочкой совокупности векторов? Как еще называют линейную оболочку системы векторов?

21. Чему равна размерность подпространства, натянутого на систему векторов?

22. Когда два вектора пространства $\boldsymbol{R^n}$ являются ортогональными?

23. Предположим, что мы имеем $\boldsymbol{n}$ векторов из пространства $\boldsymbol{R^n}$, которые взаимно ортогональны и все отличны от нуля. Образует ли это множество базис в пространстве $\boldsymbol{R^n}$? Если «Да», то докажите это.

24. Что представляет собой ортогональный нормированный базис пространства?

25. Чем интересны ортонормальные базисы?

26. Как может быть преобразовано в ортонормальный базис любое множество, состоящее из данных $\boldsymbol{n}$ линейно независимых векторов пространства $\boldsymbol{R^n}$? Что представляет собой ортонормализационный процесс Шмидта?

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все базисы системы векторов:

$$\boldsymbol{a})\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\\-2\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}8\\-2\\6\\-4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\4\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}6\\-2\\8\\-4\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{б})\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

2. Найти все значения λ, при которых вектор $\boldsymbol{B}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{A_i}$:

$$\boldsymbol{a})\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}6\\8\\7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}9\\12\\\lambda\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{б})\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5\\9\\\lambda\end{pmatrix}.$$

3. Даны два вектора:

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Подобрать еще два вектора $\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ так, чтобы система $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ была линейно независимой.

5. Показать, что векторы $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{X}$ в этом базисе.

6.

а) $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix};$

б) $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix};$

в) $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-5\\2\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}7\\3\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}11\\10\\-1\end{pmatrix};$

г) $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}.$

5. Найти координаты вектора $\boldsymbol{X}$ в этом базисе $\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{H}_3,\boldsymbol{H}_4$:

а) $\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{H}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{H}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix};$

б) $\boldsymbol{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

6. Найти матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3$ к базису $\widetilde{\boldsymbol{H}}_1, \widetilde{\boldsymbol{H}}_2, \widetilde{\boldsymbol{H}}_3$ и обратно, если

$$\boldsymbol{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{H}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{H}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{H}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. Показать, что каждая из двух систем векторов $\{\boldsymbol{H}_i\}$ и $\{\widetilde{\boldsymbol{H}}_i\}$ является базисом, и найти связь между координатами одного и того же вектора в этих двух базисах:

а) $\boldsymbol{H}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{H}}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{H}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix};$$

б) $\boldsymbol{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{H}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{H}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{H}}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\textit{в})\quad \boldsymbol{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \widetilde{\boldsymbol{H}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \widetilde{\boldsymbol{H}}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \widetilde{\boldsymbol{H}}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

8. Найти размерность и базис подпространств, натянутых на данные системы векторов:

$$\textit{а})\quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\textit{б})\quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Используя шмидтовский процесс ортонормализации, построить ортонормальный базис пространства $\boldsymbol{R}^3$ из следующего множества базисных векторов:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

10. Используя шмидтовский процесс ортонормализации построить ортонормальный базис подпространства $\mathcal{R}$, натянутого на следующую систему векторов:

$$\textbf{\textit{а})}\quad A_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\quad A_5=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix};$$

$$\textbf{\textit{б})}\quad A_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix};$$

$$\textbf{\textit{в})}\quad A_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\4\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}.$$

§10. Система фундаментальных решений однородной линейной системы уравнений. Связь решений однородной и неоднородной систем. Матричные уравнения

10.1. Системы однородных линейных уравнений

Ниже напомним определения из 6.4, а затем приведем основные определения и теоремы, относящиеся к однородным системам линейных уравнений.

Определение. Линейное уравнение называется **однородным**, если его свободный член равен нулю, и **неоднородным** в противном случае.

Система однородных линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\tag{1}$$

или в матричном виде

$$AX=\Theta.\tag{1$'$}$$

Очевидно, что всякая система однородных линейных уравнений имеет **нулевое решение**

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

и, значит, совместна. Нулевое решение системы **называют также тривиальным.**

Теорема. Для того чтобы система однородных линейных уравнений имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг этой системы был меньше числа неизвестных.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что система (1) имеет нетривиальное решение. Очевидно, что ранг r системы не может быть больше числа неизвестных n (так как n равно числу столбцов основной матрицы системы). Если $r = n$, то согласно выводу 1 (см. § 6) система имела бы единственное решение и, значит, других решений, кроме тривиального, не имела бы. Следовательно, $r < n$.

Достаточность. Предположим, что ранг системы меньше числа неизвестных. В этом случае согласно выводу 2 (см. § 6) система (1) имеет бесконечно много различных решений и, значит, имеет решение, отличное от тривиального.

Следствие. Любая система однородных линейных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, имеет нетривиальное решение.

Действительно, если число уравнений системы меньше числа неизвестных, то ранг этой системы и подавно меньше числа неизвестных.

Для системы однородных линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

выше доказанная теорема принимает следующий вид.

Теорема. Для того чтобы система однородных линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных, имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

Действительно, условие $r < n$ в данном случае эквивалентно условию равенства нулю определителя системы.

Следующие две теоремы решают вопрос о структуре общего решения однородной системы линейных уравнений.

Теорема. Если векторы $C_1, C_2, ..., C_n$ являются решениями однородной системы $AX = \Theta$, то любая их линейная комбинация

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n$$

также является решением этой системы.

Доказательство. Так как векторы $C_1, C_2, ..., C_n$ являются решениями системы $AX = \Theta$, то справедливы равенства

$$AC_1 = \Theta, \quad AC_2 = \Theta, ..., AC_n = \Theta.$$

Следовательно, учитывая свойства матричного умножения, а также независимость произведения матрицы на число от порядка сомножителей, имеем

$$AC = A(\lambda_1 C_1) + A(\lambda_2 C_2) + \cdots + A(\lambda_n C_n) =$$

$$= \lambda_1 (AC_1) + \lambda_2 (AC_2) + \cdots + \lambda_n (AC_n) = \Theta.$$

Но полученное нами равенство $AC = \Theta$ означает, что вектор C является решением системы $AX = \Theta$. Теорема доказана.

Следствие. Из этой теоремы следует, в частности, что если существует хоть одно нетривиальное решение однородной системы, то из него умножением на произвольные числа можно получить бесконечно много решений.

Определение. Фундаментальной системой решений для системы линейных однородных уравнений называется линейно независимая система решений, через которую линейно выражается любое решение этой системы уравнений.

Если ранг r системы линейных однородных уравнений равен числу n неизвестных, то фундаментальная система решений состоит из единственного решения - нулевого.

Если $r < n$, то справедлива следующая теорема.

Теорема. Если ранг r системы однородных линейных уравнений меньше числа n неизвестных, то эта система уравнений имеет бесконечно много фундаментальных систем решений, причем каждая из них состоит из $n - r$ решений.

Доказательство. Пусть ранг системы (1) равен r и неизвестные

$$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{r+n}$$

будут свободными неизвестными. Ясно, что число их равно $n-r$. Рассмотрим произвольный, но отличный от нуля оопределитель порядка $n-r$, который запишем в следующем виде:

$$D = \begin{vmatrix} c_{r+11} & c_{r+12} & \cdots & c_{r+1n-r} \\ c_{r+21} & c_{r+22} & \cdots & c_{r+2n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn-r} \end{vmatrix}.$$

Если элементы одного из столбцов, например j-го, этого определителя взять в качестве значений для свободных неизвестных, то по правилу Крамера мы получим единственное решение системы уравнений (1). Запишем полученное решение в виде вектора

$$C_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{rj} \\ c_{r+1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}.$$

Поскольку j может принимать значения $1, 2, \ldots, n-r$, мы получим систему из $n-r$ линейно независимых n-мерных векторов. Их линейная независимость следует из того, что матрица, составленная из этих векторов, содержит отличный от нуля минор D порядка $n-r$.

Пусть теперь вектор

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

есть произвольное решение системы (1). Докажем, что вектор $\boldsymbol{B}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, ..., \boldsymbol{C}_{n-r}$.

Обозначим через $\widetilde{\boldsymbol{C}}_j$ $(j = 1,2,...,n-1)$ j-й столбец определителя $\boldsymbol{D}$, рассматриваемый как $(n-r)$-мерный вектор. Все такие векторы (число их равно $n-r$) будут линейно независимы, так как $\boldsymbol{D} \neq 0$.

Теперь возьмем вектор

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} b_{r+1} \\ b_{r+2} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

и присоединим его к системе векторов $\widetilde{\boldsymbol{C}}_j$. Полученная система $(n-r)$-мерных векторов

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_1, \widetilde{\boldsymbol{C}}_2, ..., \widetilde{\boldsymbol{C}}_{n-r}, \widetilde{\boldsymbol{B}}$$

линейно зависима, так как в ней число векторов больше их размерности. Значит, вектор $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ является линейной комбинацией остальных векторов этой системы, т. е.

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \lambda_1 \widetilde{\boldsymbol{C}}_1 + \lambda_2 \widetilde{\boldsymbol{C}}_2 + \cdots + \lambda_{n-r} \widetilde{\boldsymbol{C}}_{n-r}. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь n-мерный вектор

$$\boldsymbol{Y} = \lambda_1 \boldsymbol{C}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{C}_2 + \cdots + \lambda_{n-r} \boldsymbol{C}_{n-r} - \boldsymbol{B}, \tag{4}$$

который, являясь линейной комбинацией решений системы (1), сам будет решением этой системы. Перепишем равенство (4) в виде

$$\boldsymbol{Y} = \lambda_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{r1} \\ c_{r+11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{r2} \\ c_{r+1r} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_{n-r} \begin{pmatrix} c_{1n-r} \\ c_{2n-r} \\ \vdots \\ c_{rr-r} \\ c_{r+1n-r} \\ \vdots \\ c_{nn-r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{4′}$$

Из равенств (3) и (4') следует, что в решении, представленном вектором $\boldsymbol{Y}$, значения для всех свободных неизвестных равны нулю. При этом очевидно, что единственное решение системы (1), которое получается при равных нулю значениях для свободных неизвестных, будет нулевым решением. Таким образом, $\boldsymbol{Y}=0$, т.е.

$$\boldsymbol{B}=\lambda_1\boldsymbol{C}_1+\lambda_2\boldsymbol{C}_2+\cdots+\lambda_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}}.$$

Следовательно, система векторов $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{j}}$ $(\boldsymbol{j}=1,2,...,\boldsymbol{n}-1)$ является фундаментальной системой решений для системы уравнений (1). Поскольку существует бесконечно много отличных от нуля определителей $(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})$-го порядка, фундаментальных систем решений системы уравнений (1) бесконечно много. Теорема доказана.

Замечание. Если обратить на структуру множество решений совместной системы однородных уравнений с $\boldsymbol{n}$ неизвестными, то нетрудно заметить, что они образуют подпространство пространства $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ (§9 п. 4). Из доказанной теоремы вытекает, что подпространство решений однородной системы ранга $\boldsymbol{r}$ с $\boldsymbol{n}$ неизвестными имеет базис, состоящий из любых $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}$ линейно независимых решений. Любые другие решения линейно выражаются через эту фундаментальную систему решений и, если число их больше $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}$, они линейно зависимы согласно основной теореме о линейной зависимости (§8 п.1) векторов. Значит, размерность этого пространства равна $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}$.

В заключение отметим, что последние доказанные две теоремы дают возможность доказать следующее утверждение.

Теорема. Общее решение однородной системы ранга $\boldsymbol{r}$ с $\boldsymbol{n}$ неизвестными имеет вид

$$\boldsymbol{X}=\lambda_1\boldsymbol{C}_1,+\lambda_2\boldsymbol{C}_2+\cdots+\lambda_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}},$$

где $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,...,\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}}$ - произвольные линейно независимые частные решения этой системы, а $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}}$ - любые числа.

Действительно, в силу первой из выше упомянутых теорем вектор $\boldsymbol{X}$ является решением системы при любом выборе чисел $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}}$. Обратно, согласно второй из выше упомянутых теорем любое частное решение можно получить из общего подходящим выбором этих числовых коэффициентов.

Полученные результаты дают возможность сформулировать следующее правило.

Правило для построения фундаментальной системы решений

Берется любой отличный от нуля определитель $\boldsymbol{D}$ порядка $\boldsymbol{n-r}$. Для простоты обычно берется определитель, у которого элементы главной диагонали равны единице, а остальные - нулю.

Свободным неизвестным придают поочередно значения, равные элементам первого, второго и т.д. столбцов определителя $\boldsymbol{D}$, и каждый раз из общего решения находят соответствующие значения главных неизвестных.

Полученные $\boldsymbol{n-r}$ решений составляют фундаментальную систему. Общее решение имеет вид линейной комбинации векторов фундаментальной системы.

Пример. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0 \\ x_1+4x_2+5x_3+3x_4+7x_5=0 \\ 2x_1+5x_2+4x_3+x_4+5x_5=0 \\ x_1+5x_2+7x_3+6x_4+10x_5=0. \end{cases}$$

Решение. Путем вычитания первого уравнения из последующих, а затем второго из последующих легко привести данную систему к ступенчатому виду

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0 \\ \qquad x_2+2x_3+x_4+3x_5=0 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 \qquad\quad =0. \end{cases}$$

Будем считать главными неизвестными x_1, x_2, x_4, а свободными x_3 и x_5. Из второго и четвертого уравнений находим

$$x_2=-2x_3-3x_5.$$

Подставляя это выражение x_2 в первое уравнение, найдем

$$x_1=3x_3+5x_5.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$x_1=3x_3+5x_5,$$

$$x_2=-2x_3-3x_5,$$

$$x_4 = 0.$$

Давая свободным неизвестным поочередно значения, равные элементам столбцов определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

получим векторы

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

представляющие собой фундаментальную систему решений.

Общее решение можно теперь записать следующим образом:

$$Y_{об.одн.} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Придавая коэффициентам λ_1, λ_2 различные числовые значения, будем получать различные частные решения. При этом любое частное решение можно получить путем подходящего выбора коэффициентов λ_1 и λ_2.

10.2. Связь решений однородной и неоднородной систем

Если в неоднородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = f_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = f_m \end{cases} \tag{5}$$

заменить все свободные члены нулями, то получится однородная система

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{1n}\boldsymbol{x}_n = 0 \\
\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{2n}\boldsymbol{x}_n = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\boldsymbol{a}_{m1}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{m2}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{mn}\boldsymbol{x}_n = 0
\end{cases} \tag{6}
$$

называемая приведенной системой для исходной неоднородной системы. Решения данной неоднородной системы и соответствующей ей приведенной системы связаны следующим образом.

Теорема. Сумма любого решения неоднородной системы и любого решения ее приведенной системы снова будет решением неоднородной системы.

Доказательство. Пусть векторы

$$
\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}
$$

представляют собой решения, соответственно, систем (5) и (6). Иначе говоря,

$$
\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{AB} = 0.
$$

Отсюда выводим:

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{F}\ .
$$

Это означает, что вектор $\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}$ является решением системы $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{F}$, что и требовалось установить.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема. Разность двух любых решений неоднородной системы является решением ее приведенной системы.

Из этих теорем вытекает, что все решения неоднородной системы можно получить, прибавляя к одному (любому) ее решению всевозможные решения ее приведенной системы. Иначе говоря, справедлива следующая теорема.

Теорема. Общее решение неоднородной системы можно получить, если к любому частному решению этой системы прибавить общее решение ее приведенной системы.

Пример. Дана неоднородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 13 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 20 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 17 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 29. \end{cases}$$

Доказать, что эта система совместна, и найти ее общее решение исходя из последней теоремы.

Решение. I способ решения поставленной задачи. Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & \vdots & 13 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & \vdots & 20 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 5 & \vdots & 17 \\ 1 & 5 & 7 & 6 & 10 & \vdots & 29 \end{pmatrix}.$$

Применим к строкам матрицы элементарные операции, не изменяющие ранга матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & \vdots & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 6 & \vdots & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 & -5 & \vdots & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 & -5 & \vdots & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда очевидно, что $r(A) = r(\widetilde{A}) = 3$. Следовательно, система совместна и исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 3x_3 \qquad - 5x_5 = -7 \\ \qquad x_2 + 2x_3 \qquad + 3x_5 = 6 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 \qquad = 1. \end{cases}$$

Положим в ней «свободные» неизвестные равными, например, нулю, т.е. $\boldsymbol{x}_3 = 0, \ \boldsymbol{x}_5 = 0$. В результате получим $\boldsymbol{x}_1 = -7, \ \boldsymbol{x}_2 = 6, \ \boldsymbol{x}_4 = 1$.
Таким образом, найдено частное решение неоднородной системы:

$$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{част.неодн.}} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим приведенную систему данной неоднородной системы:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 + 2\boldsymbol{x}_4 + 4\boldsymbol{x}_5 = 0 \\ \boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 + 5\boldsymbol{x}_3 + 3\boldsymbol{x}_4 + 7\boldsymbol{x}_5 = 0 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + 5\boldsymbol{x}_2 + 4\boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4 + 5\boldsymbol{x}_5 = 0 \\ \boldsymbol{x}_1 + 5\boldsymbol{x}_2 + 7\boldsymbol{x}_3 + 6\boldsymbol{x}_4 + 10\boldsymbol{x}_5 = 0. \end{cases}$$

Эта однородная система из примера предыдущего пункта и общее решение нами было найдено:

$$\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{об.одн.}} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение исходной системы линейных уравнений получим с помощью формулы $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{част.неодн.}} + \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{об.одн.}}$:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II способ решения поставленной задачи. Решим данную систему методом последовательного исключения неизвестных, а именно, методом Гаусса - Жордана. Составим расширенную матрицу. Применим к строкам матрицы элементарные операции, не изменяющие ранга матрицы. Выполняя все это (см. начало решения задачи I способом), мы получим:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 13 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 20 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 5 & 17 \\ 1 & 5 & 7 & 6 & 10 & 29 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Отсюда очевидно, что $r(A) = r(\widetilde{A}) = 3$. Следовательно, система совместна и исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 \quad - 3x_3 \quad - 5x_5 = -7 \\ x_2 + 2x_3 \quad + 3x_5 = 6 \\ x_4 \quad = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что x_1, x_2, x_4 являются базисными неизвестными, а x_3, x_5 свободные переменные. Тогда общее решение исходной системы - неоднородной системы линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= -7 + 3x_3 + 5x_5, \\ x_2 &= 6 - 2x_3 - 3x_3, \\ x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Итак,

$$X = \begin{pmatrix} -7 + 3x_3 + 5x_5 \\ 6 - 2x_3 - 3x_5 \\ x_3 \\ 1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где x_3, x_5- произвольные числа.

Обозначив, $x_3 = \lambda_1$, $x_5 = \lambda_2$ получим общее решение исходной системы - неоднородной системы линейных уравнений в виде

$$X = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Полученные одинаковые результаты обоими способами говорить о том, что изложенная здесь теория, показывающая связь решений однородной и неоднородной систем не противоречит общей теории линейных систем уравнений.

10.3. Матричные уравнения

Определение. Матричными уравнениями называют уравнения вида

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ - данные квадратные матрицы $\boldsymbol{n}$-го порядка, а $\boldsymbol{X}$ - искомая матрица того же порядка.

Решением матричного уравнения называется всякая матрица соответствующего порядка, которая, будучи подставлена в матричное уравнение вместо матрицы $\boldsymbol{X}$, обращает уравнение в тождество.

Матричные уравнения (7) и (8) имеют единственные решения, если $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. Действительно, умножив эти уравнения, соответственно, слева и справа на матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$, получим

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}, \tag{9}$$

и

$$\boldsymbol{XA}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA}^{-1} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{BA}^{-1}. \tag{10}$$

Очевидно, что матрица $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ является решением уравнения (7), а матрица $\boldsymbol{BA}^{-1}$ - решением уравнения (8).

Замечание. Если матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ и $\boldsymbol{B}$ перестановочны, то решением обоих матричных уравнений будет одна и та же матрица

$$\boldsymbol{X} == \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BA}^{-1}.$$

Пример. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Здесь $\det A \neq 0$, т.е. матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- неособенная.

Находим, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

тогда

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Если матрица A - особенная, то изложенный выше способ решения матричного уравнения непригоден, так как матрица A^{-1} не существует. В этом случае матричное уравнение или имеет бесконечно много решений, или неразрешимо. Поясним этот случай на следующем примере.

Пример. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Здесь $\det A = 0$. Положим

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда после перемножения матриц A и X получим

$$\begin{pmatrix} 2x_{11} + 3x_{21} & 2x_{12} + 3x_{22} \\ 4x_{11} + 6x_{21} & 4x_{12} + 6x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} 2x_{11} + 3x_{21} = 1, \\ 4x_{11} + 6x_{21} = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_{12} + 3x_{22} = 2, \\ 4x_{12} + 6x_{22} = 4. \end{cases}$$

Последние системы являются совместными и неопределенными. Решая их, находим

$$x_{11} = \frac{1 - 3x_{21}}{2}, \qquad x_{12} = \frac{2 - 3x_{22}}{2}.$$

Полагая, например,

$$x_{21} = 2\lambda + 1, \qquad x_{22} = 2\mu,$$

получаем

$$X = \begin{pmatrix} -3\lambda + 1 & 1 - 3\mu \\ 2\lambda + 1 & 2\mu \end{pmatrix},$$

где λ и μ - произвольные числа.

Замечание. Системы линейных уравнений относительно $x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}$ или одна из них могут оказаться и несовместными. Тогда матричное уравнение (с особенной матрицей A) неразрешимо.

Ключевые слова и словосочетания

Система однородных линейных уравнений, система неоднородных линейных уравнений, тривиальное решение системы однородных линейных уравнений, фундаментальная система решений, приведенная система, матричное уравнение.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется однородным линейным и неоднородным линейным уравнением?
2. Напишите систему однородных линейных уравнений.
3. Что называется тривиальным решением системы однородных линейных уравнений?
4. Приведите необходимое и достаточное условие существования нетривиального решения системы однородных линейных уравнений. Сформулируйте теорему.
5. Приведите необходимое и достаточное условие существования нетривиального решения системы однородных линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных. Сформулируйте теорему.
6. Приведите теоремы, которые решают вопрос о структуре общего решения однородной системы линейных уравнений.
7. Что называется фундаментальной системой решений для системы линейных однородных уравнений?
8. Из чего состоит фундаментальная система решений, если ранг r системы линейных однородных уравнений равен числу n

неизвестных? А если $r < n$? Приведите теорему, отвечающую на последний вопрос.

9. Какой вид имеет общее решение однородной системы ранга r с n неизвестными?

10. Приведите правило для построения фундаментальной системы решений.

11. Что называется приведенной системой для исходной неоднородной системы линейных уравнений?

12. Приведите теоремы, устанавливающие связи решений однородной и неоднородной систем.

13. Как можно получить общее решение неоднородной системы в терминах частного решения неоднородной системы и общего решения ее приведенной системы.

14. Что называют матричными уравнениями?

15. Что называется решением матричного уравнения?

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для следующих систем уравнений:

$$\textbf{\textit{а}})\ \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases} \qquad \textbf{\textit{б}})\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{\textit{в}})\ \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases} \qquad \textbf{\textit{г}})\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{\textit{д}})\ \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases} \qquad \textbf{\textit{е}})\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

2. Доказать, что следующие неоднородные линейные системы:

$$\boldsymbol{а})\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases} \qquad \boldsymbol{б})\ \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5, \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{в})\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -8, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 14. \end{cases} \qquad \boldsymbol{г})\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

совместны, и найти их общее решение в терминах частного решения неоднородной системы и общего решения приведенной системы.

3. Решить матричные уравнения относительно квадратной матрицы X второго порядка:

$$\boldsymbol{а})\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{б})\ X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{в})\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{г})\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{д})\ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{е})\ X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{ж})\ X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{з})\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}.$$

4. Решить матричные уравнения относительно квадратной матрицы X третьего порядка:

$$\boldsymbol{а})\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{б})\ X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; ***г***) $\boldsymbol{X} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

д) $\boldsymbol{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$.

5. Найти все матрицы $\boldsymbol{X}$, удовлетворяющие условию:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; ***б***) $\boldsymbol{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; ***г***) $\boldsymbol{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ***е***) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

§11. Леонтьевская межотраслевая модель экономики (балансовый анализ)

11.1. Модель балансового анализа

В 1936 г. профессор Гарвардского университета В. Леонтьев предложил линейную модель национальной экономики. Эта модель предполагает, что экономика состоит из некоторого числа взаимодействующих отраслей, каждая из которых воображаемо производит только один вид продукции и использует только один процесс производства. Например, сталелитейная промышленность и сельское хозяйство могут быть рассматриваемы как отрасли. Для производства выпуска ими продукции каждая из них будет закупать продукцию других отраслей, например, автомобильная промышленность закупает сталь у сталелитейной, а шины у резиновой промышленности. Кроме того, для продажи своей продукции другим отраслям данная отрасль, вообще говоря, будет взаимодействовать также с потребителем, правительством и внешним рынком.

Связь между отраслями, как правило, отражается в таблицах межотраслевого баланса, а **математическая модель**, позволяющая их анализировать, как уже выше отметили, разработана американским экономистом В.Леонтьевым.

Таким образом, **цель балансового анализа** - ответить на вопрос, возникающий в макроэкономике и связанный с эффективностью ведения многоотраслевого хозяйства: **каким должен быть объем производства каждой из *n* отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли?** При этом каждая отрасль выступает, с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой — как потребитель продукции и своей, и произведенной другими отраслями.

Предположим, что рассматривается ***n*** отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного (вне сферы материального производства) личного и общественного потребления.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, год).

Введем следующие обозначения:

x_i - общий (валовой) объем продукции i отрасли $(i = 1,2,...,n)$;

x_{ij} - объем продукции i-й отрасли, потребляемой j-й отраслью в процессе производства $(i, j = 1,2,...,n)$;

y_j - объем конечного продукта i-й отрасли для непроизводственного потребления.

Так как валовой объем продукции любой i-й отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой n отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad (i = 1,2,...,n). \tag{1}$$

Уравнения (1) **называются соотношениями баланса**. Будем рассматривать стоимостный межотраслевой баланс, когда все величины, входящие в (1), имеют стоимостное выражение.

Введем коэффициенты прямых затрат

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad (i, j = 1,2,...,n), \tag{2}$$

показывающие затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли.

Можно полагать, что в некотором промежутке времени коэффициенты a_{ij} будут постоянными и зависящими от сложившейся технологии производства. Это означает линейную зависимость материальных затрат от валового выпуска, т.е.

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \quad (i, j = 1,2,...,n), \tag{3}$$

вследствие чего построенная на этом основании модель межотраслевого баланса получила название **линейной модели**. Теперь соотношения баланса (1) примут вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad (i = 1,2,...,n). \tag{4}$$

Обозначим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

где X **- вектор валового выпуска,** Y **- вектор конечного продукта,** A **- матрица прямых затрат (технологическая или структурная матрица).**

Тогда систему (4) можно записать в матричном виде:

$$X = AX + Y. \qquad (5)$$

Основная задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такого вектора валового выпуска X, который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y.

Перепишем уравнение (5) в виде:

$$(E - A)X = Y. \qquad (6)$$

Если матрица $(E - A)$ неособенная (невырожденная), т.е.

$$|E - A| \neq 0, \text{ то } X = (E - A)^{-1} Y. \qquad (7)$$

Матрица $S = (E - A)^{-1}$ **называется матрицей полных затрат**.

Чтобы выяснить экономический смысл элементов матрицы $S = (s_{ij})$ будем задаваться единичными векторами конечного продукта

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad Y_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда по (7) соответствующие векторы валового выпуска будут

$$X_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad X_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, каждый элемент s_{ij} матрицы S есть величина валового выпуска продукции i-й отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта j-й отрасли $y_j = 1, \quad (j = 1,2,...,n)$.

В соответствии с экономическим смыслом задачи значения x_i должны быть неотрицательны при неотрицательных значениях $y_j \geq 0$

и $a_{ij} \geq 0$, где $i, j = 1,2,...,n$. Матрица $A \geq 0$ **называется продуктивной**, если для любого вектора $Y \geq 0$ существует решение $X \geq 0$ уравнения (6). В этом случае и модель Леонтьева **называется продуктивной моделью**.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы A. Один из них говорит о том, что матрица A продуктивна, если максимум сумм элементов ее столбцов не превосходит единицы, причем хотя бы для одного из столбцов сумма элементов строго меньше единицы, т.е. матрица A продуктивна, если $a_{ij} \geq 0$ для любых $i, j = 1,2,...,n$ и $\max\limits_{j=1,2,...,n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, и существует номер j такой, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Пример. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл. ден. ед.:

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Отрасль</th><th colspan="2">Потребление</th><th rowspan="2">Конечный продукт</th><th rowspan="2">Валовой выпуск</th></tr>
<tr><th>Энергетика</th><th>Машино-строение</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Производство</td><td>Энергетика</td><td>7</td><td>21</td><td>72</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Машиностр.</td><td>12</td><td>15</td><td>123</td><td>150</td></tr>
</table>

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление энергетической отрасли увеличится вдвое, а машиностроения сохранится на прежнем уровне.

Решение. Имеем

$x_1 = 100$, $x_2 = 150$, $x_{11} = 7$, $x_{12} = 21$, $x_{21} = 12$, $x_{22} = 15$, $y_1 = 72$, $y_2 = 123$.

По формуле (2) находим коэффициенты прямых затрат:

$$a_{11} = 0{,}07; \quad a_{12} = 0{,}14; \quad a_{21} = 0{,}12; \quad a_{22} = 0{,}10,$$

т.е. матрица прямых затрат

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0{,}07 & 0{,}14\\ 0{,}12 & 0{,}10\end{pmatrix}$$

имеет неотрицательные элементы и удовлетворяет критерию продуктивности:

$$\max\{0{,}07+0{,}12;\ \ 0{,}14+0{,}10\}=\max\{0{,}19,\ \ 0{,}24\}=0{,}24<1.$$

Поэтому для любого вектора конечного продукта $\boldsymbol{Y}$ можно найти необходимый объем валового выпуска $\boldsymbol{X}$ по формуле (7):

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{Y}.$$

Найдем матрицу полных затрат $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$:

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0{,}93 & -0{,}24\\ -0{,}12 & 0{,}90\end{pmatrix}.$$

Так как $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0{,}8202\neq 0$, тогда

$$\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{0{,}8202}\cdot\begin{pmatrix}0{,}90 & 0{,}14\\ 0{,}12 & 0{,}93\end{pmatrix}.$$

По условию вектор конечного продукта $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}144\\ 123\end{pmatrix}$. Тогда по формуле (7) получаем вектор валового выпуска:

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{0{,}8202}\cdot\begin{pmatrix}0{,}90 & 0{,}14\\ 0{,}12 & 0{,}93\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}144\\ 123\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}179{,}0\\ 165{,}5\end{pmatrix},$$

т.е. валовой выпуск в энергетической отрасли надо увеличить до 179,0 усл. ед., а в машиностроительной – до 165,5 усл. ед.

11.2. Модель определения цен продукции

Леонтьев показал, что тот же тип анализа может быть применен к определению цен, которые должны превалировать в гипотетической экономике. Технологический коэффициент $\boldsymbol{a_{ij}}$ может рассматриваться как число единиц продукции $\boldsymbol{i}$, требуемой для одной единицы продукции $\boldsymbol{j}$. Пусть $\boldsymbol{p_j}$ обозначает цену одной единицы продукции $\boldsymbol{j}$.

Тогда стоимость материалов, требуемых для производства, одной единицы продукции j, равна

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{nj}p_n .$$

Разность между ценой одной единицы продукции j и стоимостью материалов, требуемых для производства одной единицы продукции, будем называть **прибавочной величиной j-й отрасли** и будем обозначать посредством r_j. Таким образом,

$$p_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i = r_j, \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

или

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i + r_j, \qquad j = 1,2,\ldots,n . \tag{8}$$

Прибавочная величина может включать в себя труд, прибыль, и т.д. Уравнение (8) представляет собой систему n линейных уравнений с n неизвестными ценами p_j, матричная форма, которой выглядит так:

$$P = AP + R, \tag{9}$$

где

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Это уравнение вполне аналогично уравнению (5). Здесь фигурируют те же самые коэффициенты a_{ij}. Однако теперь они выступают в другой роли. Отсюда представляется правдоподобным, что прибавочная величина устанавливается для каждого продукта в экономике - цены вполне определены.

11.3. Заключение

Мы представили весьма упрощенный взгляд на статическую модель экономики (статическую потому, что в период рассмотрения не принимались во внимание никакие изменения во времени). Модель линейна. Это позволяет нам определить количество продуктов, необходимых для удовлетворения спроса рынка и определения цен на них через прибавочные величины. Эта модель была признана полезной для исследования возможности экономики Соединенных Штатов удовлетворить спрос населения в условиях военного времени при данном обеспечении рабочей силой, а также для изучения влияния изменения цен в одной отрасли на цены в других отраслях. Основная леонтьевская модель была обобщена различными путями, которые в этом курсе мы не будем рассматривать.

Ключевые слова и словосочетания:

Балансовый анализ, цель балансового анализа, соотношения баланса, вектор валового выпуска, вектор конечного продукта, матрица прямых затрат (технологическая или структурная матрица), продуктивная матрица, продуктивная модель Леонтьева, критерий продуктивности матрицы, прибавочная величина.

Вопросы для самоконтроля

1. Что означает балансовый анализ? Что является целью балансового анализа?
2. Что называются соотношениями баланса?
3. Что называется вектором валового выпуска, вектором конечного продукта, матрицей прямых затрат (технологическая или структурная матрица)?
4. Что является основной задачей межотраслевого баланса?
5. Что называется матрицей полных затрат?
6. Какая матрица называется продуктивной? Когда модель Леонтьева называется продуктивной?
7. Приведите какой-нибудь один из существующих критериев продуктивности матрицы $\boldsymbol{A}$.
8. Каким образом тип анализа, который использован при балансовом анализе, может быть применен к определению цен?
9. Что называется прибавочной величиной $\boldsymbol{j}$-й отрасли?

Задача для самостоятельного решения

1. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл. ден. ед.:

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2		
Производство	1	100	160	240	500
	2	275	40	85	400

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли должен увеличиться в 2 раза, а второй - на 20%.

ГЛАВА III
ЭЛЕМЕТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В аналитической геометрии геометрические объекты (точки, линии, поверхности) и их расположение в пространстве или на плоскости **изучаются** аналитически, **методами алгебры**. Это удается сделать с помощью введенного Декартом[10] метода координат. С методом координат мы знакомы из школьной геометрии. Читателю напомним определение прямоугольной декартовой системы в пространстве $\boldsymbol{R}^3$.

Определение. Упорядоченная система трех взаимно перпендикулярных осей с общим началом отсчета (началом координат) и общей единицы длины **называется прямоугольной декартовой системой координат в пространстве $\boldsymbol{R}^3$.**

В этой упорядоченной системе координатных осей $\boldsymbol{Oxyz}$ ось $\boldsymbol{Ox}$ **называется осью абсцисс, ось $\boldsymbol{Oy}$ - осью ординат и ось $\boldsymbol{Oz}$ осью аппликат.**

С произвольной точкой $\boldsymbol{M}$, пространства свяжем вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ называемый радиус-вектором точки $\boldsymbol{M}$, и спроецируем его на каждую из координатных осей. Обозначим величины соответствующих проекций:

$$\boldsymbol{np}_x \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{np}_y \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{np}_z \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{z} \text{ (рис 1).}$$

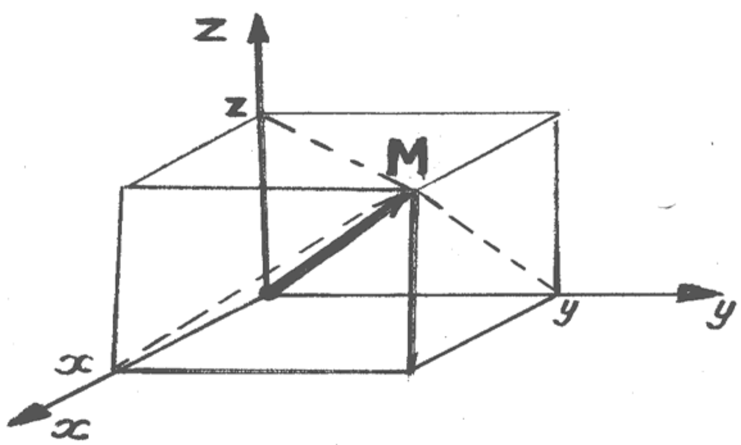

Рис. 1

[10] Р. Декарт (1596-1650) – французский математик и философ.

Числа x, y, z называются **координатами точки** M, соответственно, **абсциссой, ординатой и аппликатой,** и записываются в виде упорядоченной тройки чисел: $M(x, y, z)$.

Таким образом, между точками пространства (плоскости) и радиус векторами, проведенными в эти точки из начала координат, существует взаимно – однозначное соответствие. Понятие точечного пространства распространяется и на n-мерные векторы, где упорядоченный набор из n действительных чисел рассматривается как точка в n-мерном пространстве R^n. Разумеется, при $n > 3$ геометрического образа точка не имеет.

Итак, метод координат позволяет простейший геометрический образ - точку - представить в виде упорядоченной системы чисел, ее координат. Всякий геометрический объект рассматривается как множество точек, обладающих некоторыми, только им присущими свойствами. При переходе от одной точки геометрического объекта к другой координаты точки изменяются. Они являются величинами переменными, которые меняют свои числовые значения не произвольно, а в соответствии с определенной закономерностью, обусловленной особенностями рассматриваемого множества точек.

С помощью метода координат эта закономерность может быть выражена аналитически в виде уравнения или неравенства, связывающего переменные координаты каждой точки рассматриваемого геометрического объекта. Таким образом, устанавливается соответствие между геометрическими объектами и уравнениями или неравенствами.

В школьном курсе рассматривались некоторые уравнения прямой, параболы, графика функции $y = \frac{1}{x}$ и т.д. Сейчас, после введения декартовой прямоугольной системы координат в пространстве, мы рассмотрим эти вопросы с более общих позиций, используя **векторную алгебру**.

Уравнением, соответствующим заданному множеству точек (на плоскости или в пространстве), называется равенство, которому удовлетворяют координаты любой точки этого множества и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этому множеству.

Если задано уравнение некоторого множества точек

$$F(x, y, z) = 0,$$

то можно установить, принадлежит ли любая точка пространства этому множеству точек. Для этого достаточно подставить в уравнение

$F(x, y, z) = 0$ вместо переменных координат x, y, z координаты рассматриваемой точки: если они удовлетворяют этому уравнению, то точка принадлежит заданному множеству точек, в противном случае не принадлежит.

§12. Прямая на плоскости

12.1. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку

Пусть l - произвольная прямая на плоскости. Всякий перпендикулярный ей ненулевой вектор **называется вектором нормали** к этой прямой.

Если известна какая-нибудь точка $M_0(x_0, y_0)$ прямой l и какой-нибудь вектор $\vec{N} = (A, B)$ нормали к ней, то этими двумя условиями прямая на плоскости вполне определена (через данную точку можно провести единственную прямую, перпендикулярную данному вектору).

Чтобы получить уравнение прямой, заданной этими условиями, возьмем на прямой l произвольную точку M с переменными координатами x, y. Эта точка принадлежит прямой только в том случае, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{N}$ (рис. 2), а для этого необходимо и достаточно,
чтобы скалярное произведение этих векторов равнялось нулю, т.е.

$$\left(\vec{N}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0. \qquad (1)$$

Вектор $\vec{N} = (A, B)$ задан по условию. Очевидно, что $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$.

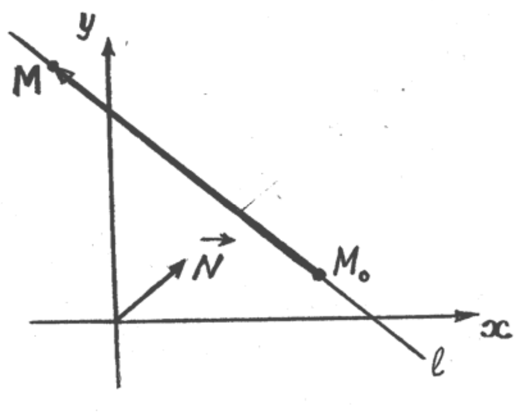

Рис.2

Теперь выразим скалярное произведение (1) в координатной форме:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)=0. \qquad (2)$$

Так как точка $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ выбрана на прямой произвольно, то последнему уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на прямой $\boldsymbol{l}$. Для точки $\boldsymbol{K}$, не лежащей на заданной прямой, $\left(\vec{\boldsymbol{N}},\overrightarrow{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{K}}\right)\neq 0$ и равенство (2) нарушается. Следовательно, уравнение (2) определяет прямую, проходящую через точку $\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ и перпендикулярную вектору $\vec{\boldsymbol{N}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M}_0(2,-3)$ и перпендикулярной вектору $\vec{\boldsymbol{N}}=(5,2)$.

Решение. Используя формулу (2), имеем

$$5(\boldsymbol{x}-2)+2(\boldsymbol{y}+3)=0,$$

откуда после преобразований получим

$$5\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-4=0.$$

Искомое уравнение оказалось выражено общим уравнением первой степени относительно переменных координат $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ произвольной точки прямой. Ниже мы **убедимся, что всякое уравнение первой степени относительно $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ определяет прямую в $\boldsymbol{R}^2$.**

12.2. Общее уравнение прямой

Теорема 1. На плоскости $\boldsymbol{R}^2$ всякая прямая выражается уравнением первой степени

$$\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{C}=0. \qquad (3)$$

Доказательство. В п.1 было установлено, что всякая прямая может быть задана уравнением вида (2):

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)=0.$$

Раскрыв скобки и обозначив $-Ax_0 - By_0 = C$, получим общее уравнение первой степени относительно x, y

$$Ax + By + C = 0,$$

эквивалентное уравнению (2). Поэтому оно определяет ту же прямую, что и уравнение (2), и **называется общим уравнением прямой.** Коэффициенты при переменных в этом уравнении сохраняют тот же геометрический смысл, что и в равенстве (2), т. е. являются координатами вектора $\vec{N} = (A, B)$ нормали к прямой. Так как вектор нормали к прямой является ненулевым, то коэффициенты A и B не могут быть одновременно равны нулю. Итак, мы доказали, что всякая прямая на плоскости R^2 определяется уравнением первой степени относительно переменных координат x, y.

Теорема 2 (обратная). Всякое линейное уравнение с двумя переменными $Ax + By + C = 0$ определяет прямую на плоскости R^2, если хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю.

Доказательство. Пусть x_0, y_0 - какое-либо решение данного уравнения. Тогда $Ax_0 + By_0 + C = 0$, откуда $C = -(Ax_0 + By_0)$. Подставляя в данное уравнение вместо C его значение и группируя члены, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Это уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей вектор нормали $\vec{N} = (A, B)$. Следовательно, и равносильное ему уравнение $Ax + By + C = 0$ определяет прямую (перпендикулярную вектору $\vec{N} = (A, B)$).

Пример. Построить в прямоугольной декартовой системе координат прямую, заданную уравнением $3x - 2y - 6 = 0$.

Решение. Для построения прямой необходимо и достаточно знать какие-либо две ее точки, например, точки пересечения прямой с осями координат. Полагая в заданном уравнении $x = 0$, получим $y = -3$. Следовательно, заданная прямая пересекает ось Ox в точке $A(0, -3)$. Аналогично, при $y = 0$ получим $x = 2$, т.е. точку $B(2, 0)$, в которой прямая пересекает ось Oy. Теперь строим прямую проходящую через точки $A(0,-3)$ и $B(2,0)$ (рис. 3).

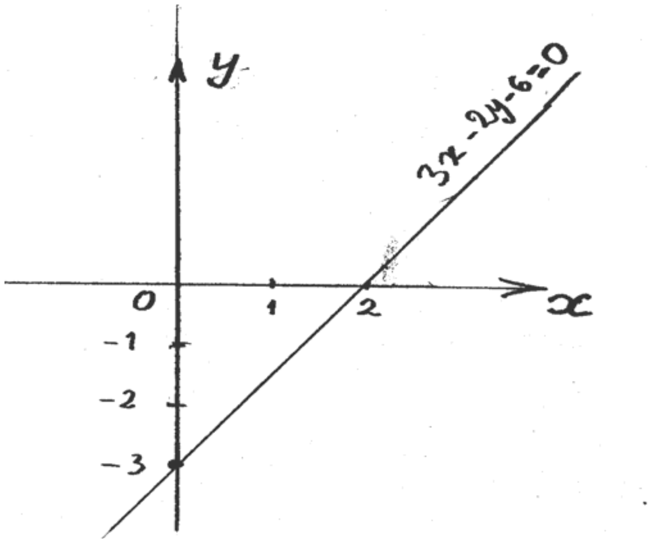

Рис. 3

Частные случаи общего уравнения прямой. Рассмотрим особенности расположения прямой на плоскости в тех случаях, когда те или иные коэффициенты уравнения (3) равны нулю.

1. При $C=0$ уравнение $Ax+By=0,$ определяет прямую, проходящую через начало координат, так как координаты точки $O(0,0)$ удовлетворяют этому уравнению.

2. При $A=0$ уравнение $By+C=0$ (или $y=b$, где $b=-\dfrac{C}{B}$) определяет прямую, параллельную оси Ox, поскольку вектор нормали $\vec{N}=(0,B)$ этой прямой перпендикулярен оси Ox. Аналогично, при $B=0$ уравнение $Ax+C=0$ (или $x=a$, где $a=-\dfrac{C}{A}$) определяет прямую, параллельную оси Oy.

3. При $A=C=0$ уравнение $By=0$ (или $y=0$) определяет ось Ox, так как эта прямая одновременно параллельна оси Ox ($A=0$) и проходит через начало координат ($C=0$). Аналогично, при $B=C=0$ уравнение $Ax=0$ (или $x=0$) определяет ось Oy.

Пример. Построить в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости прямую l заданную уравнением $2x-3y=0$.

Решение. В данном уравнении свободный член равен нулю, поэтому оно определяет прямую, проходящую через начало координат. Следовательно, в точке $O(0,0)$ прямая l пересекает обе координатные оси. Для построения прямой нужно знать еще какую-либо ее точку. Для этого дадим одной из переменных в заданном уравнении произвольное значение, например, $y = 4$, и найдем соответствующее значение x: $A(x,4) \in l \Longleftrightarrow 2x - 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow \quad x = 6$. Теперь строим прямую, проходящую через начало координат и точку $A(6,4)$ (рис. 4).

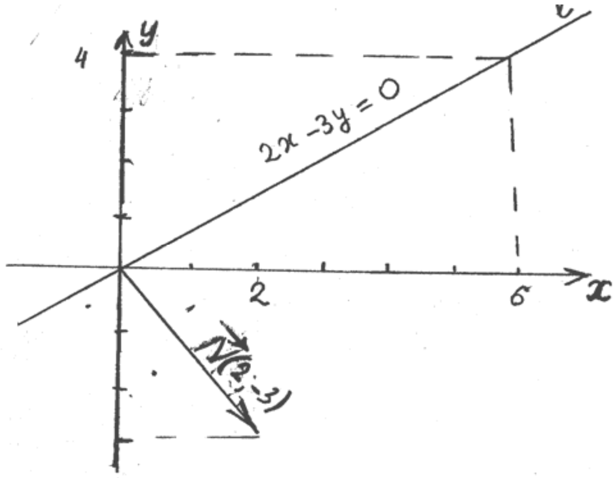

Рис. 4

Пример. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку $A(-2,3)$ и параллельной оси Oy.

Решение. Уравнение прямой, параллельной оси Oy, имеет вид $x = a$. Любая точка этой прямой имеет одну и ту же абсциссу a, которая совпадает с абсциссой точки $A(-2,3) \in l$. Поэтому искомое уравнение примет вид $x = -2$, или $x + 2 = 0$.

12.3. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Если две прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $Ax_1 + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то известны векторы $\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$ их нормалей. Поэтому вычисление одного из двух смежных углов между прямыми l_1 и l_2 сводится к вычислению угла φ между векторами нормалей этих прямых (рис. 5). По формуле вычисления угла между двумя векторами (§7. п. 3) получим

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2\right)}{\sqrt{\left|\vec{N}_1\right|} \cdot \sqrt{\left|\vec{N}_2\right|}} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{4}$$

Если требуется вычислить **острый угол** между прямыми, то числитель правой части равенства (4) берется **по абсолютной величине** (так как косинусы смежных углов отличаются только знаками).

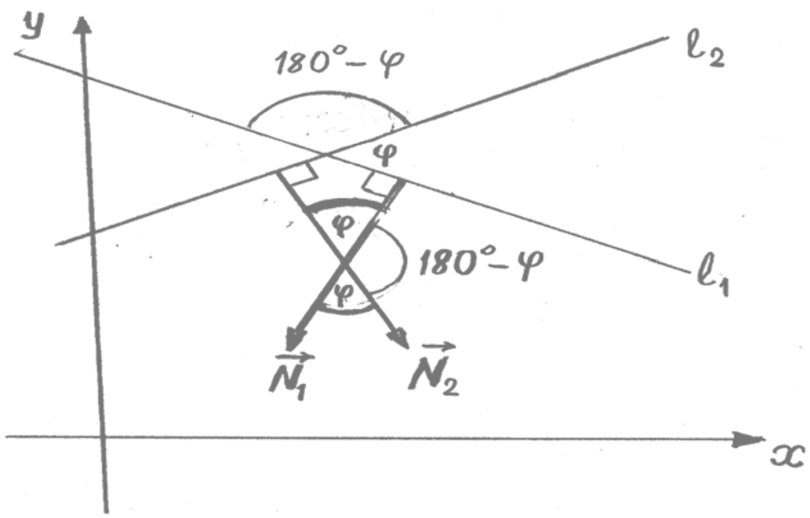

Рис. 5

Условие параллельности прямых l_1 **и** l_2 эквивалентно условию коллинеарности (см. школьный курс геометрии) векторов $\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (5)$$

Замечание 1. В частности, прямые $Ax_1 + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_1 x + B_1 y + C_2 = 0$, у которых равны коэффициенты при соответствующих переменных, являются параллельными, так как в этом случае выполняется условие (5).

Условие перпендикулярности прямых эквивалентно условию перпендикулярности (ортогональности) векторов их нормалей $\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \qquad (6)$$

Замечание 2. В частности, прямые $Ax_1 + B_1 y + C_1 = 0$ и $B_1 x - A_1 y + C_2 = 0$, у второго из которых поменялись местами коэффициенты при x и y, и противоположны знаки вторых членов, являются перпендикулярными, так как в этом случае выполняется условие (6).

Замечания 1 и 2 удобно использовать при решении задач.

Пример. Составить уравнение прямой $\boldsymbol{l}$, проходящей через точку $\boldsymbol{A}(2,-1)$ и перпендикулярной прямой $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+5=0$.

Решение. Используя замечание 2, запишем уравнение любой прямой, перпендикулярной данной:

$$2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}=0. \qquad (*)$$

При разных значениях $\boldsymbol{C}$ это уравнение определяет множество прямых, перпендикулярных данной. Из этого множества нужно выбрать ту прямую, которая проходит через точку $\boldsymbol{A}(2,-1)$. Так как $\boldsymbol{A}(2,-1)\in\boldsymbol{l}$, то $2\cdot 2+3\cdot(-3)+\boldsymbol{C}=0$, откуда $\boldsymbol{C}=-1$. Подставив это значение $\boldsymbol{C}$ в равенство (*), получим искомое уравнение $2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}-1=0$.

12.4. Точка пересечения прямых в $\boldsymbol{R}^2$

Пусть две прямые заданы уравнениями $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}_1=0$ и $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}_2=0$. Если эти прямые пересекаются (а это выполняется в случае, если $\boldsymbol{A}_1:\boldsymbol{A}_2\neq\boldsymbol{B}_1:\boldsymbol{B}_2$), то они имеют общую точку, координаты которой должны удовлетворять каждому из уравнений прямых. Следовательно, для нахождения точки пересечения двух прямых нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}_1=0\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}_2=0.\end{cases} \qquad (7)$$

При решении системы (7) возможны следующие случаи.

1. Система имеет одно решение $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ (если $\boldsymbol{A}_1:\boldsymbol{A}_2\neq\boldsymbol{B}_1:\boldsymbol{B}_2$), В этом случае прямые пересекаются в одной точке с координатами $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$.

2. Система является несовместной, т.е. не имеет решения (если
$\boldsymbol{A}_1:\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{B}_1:\boldsymbol{B}_2\neq\boldsymbol{C}_1:\boldsymbol{C}_2$). В этом случае у прямых нет общих то чек, они параллельны.

3.Система является неопределенной, т. е. имеет бесчисленное множество решений (если $\boldsymbol{A}_1:\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{B}_1:\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{C}_1:\boldsymbol{C}_2$). В этом случае прямые имеют бесчисленное множество общих точек, т.е. совпадают.

Пример. Составить уравнение прямой $\boldsymbol{l}$, проходящей через точку пересечения прямых $8\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{y} + 12 = 0$ и $3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} - 33 = 0$ параллельно: 1) прямой $2\boldsymbol{x} - 7\boldsymbol{y} + 5 = 0$; 2) оси $\boldsymbol{Ox}$.

Решение. Для нахождения точки $\boldsymbol{A}$ пересечения двух прямых решим систему уравнений

$$\begin{cases} 8\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} + 12 = 0 \\ 3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} - 33 = 0. \end{cases}$$

Получим $\boldsymbol{x} = 3, \quad \boldsymbol{y} = 12$, т. е. $\boldsymbol{A}(3{,}12)$.

1) Используя замечание 1 предыдущего пункта, запишем уравнение любой прямой, параллельной данной: $2\boldsymbol{x} - 7\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C} = 0$. Чтобы из этого множества прямых выбрать ту, которая проходит через точку $\boldsymbol{A}(3{,}12)$, подставим в последнее уравнение ее координаты:

$\boldsymbol{A}(3{,}12) \in \boldsymbol{l} \Longleftrightarrow 2 \cdot 3 - 7 \cdot 12 + \boldsymbol{C} = 0$. Отсюда найдем $\boldsymbol{C} = 78$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $2\boldsymbol{x} - 7\boldsymbol{y} + 78 = 0$.

2) Уравнение прямой, параллельной оси $\boldsymbol{Ox}$, имеет вид $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$. Эта прямая проходит через точку $\boldsymbol{A}(3{,}12)$, поэтому $\boldsymbol{A}(3{,}12) \in \boldsymbol{l} \Longleftrightarrow 12 = \boldsymbol{b}$. Следовательно, $\boldsymbol{y} = 12$, $\boldsymbol{y} - 12 = 0$.

12.5. Каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Каноническое уравнение прямой. Положение прямой вполне определено, если заданы лежащая на ней точка и направление. Направление прямой может быть задано любым ненулевым вектором, коллинеарным данной прямой и потому **называемым направляющим вектором прямой.**

Выведем уравнение прямой $\boldsymbol{l}$, проходящей через данную точку $\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{\boldsymbol{S}} = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ (рис. 6).

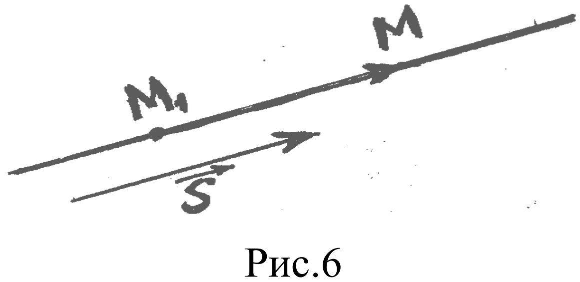

Рис.6

Произвольная точка $M(x, y)$ лежит на прямой l только в том случае, если векторы $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$ и $\overrightarrow{S} = (m, n)$ коллинеарны, т.е. для них выполняется условие:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} . \tag{8}$$

Уравнение (8) **называется каноническим уравнением прямой,** проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ в направлении вектора $\overrightarrow{S} = (m, n)$.

Замечание. Так как вектор $\overrightarrow{S}$ - ненулевой, то числа m и n не могут одновременно равняться нулю. Но одно из них может оказаться равным нулю. В аналитической геометрии допускается, например, такая запись:

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{n} \qquad \left(\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{0} \right),$$

которая означает, что первая (вторая) координата вектора $\overrightarrow{S}$ равна нулю. Поэтому и вектор $\overrightarrow{S}$ и прямая заданная указанным способом перпендикулярны оси Ox (Oy).

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Прямая может быть задана двумя лежащими на ней точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. В этом случае направляющим вектором прямой может служить вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, т.е. $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Тогда уравнение (8) примет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} . \tag{9}$$

Уравнение (9) **называется уравнением прямой, проходящей через две точки** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Пример. Составить уравнение прямой, которая проходит через начало координат и перпендикулярна прямой, проходящей через точки $A(4,-3)$ и $B(-1,0)$.

Решение. Используя формулу (9), запишем уравнение прямой, проходящей через две точки $A(4,-3)$ и $B(-1,0)$:

$$\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y+3}{0+3}, \text{ или } 3x+5y+3=0.$$

Согласно замечанию 2 п.3, любая прямая, перпендикулярная найденной, определяется уравнением $5x-3y+C=0$. Из этого множества прямых выделим ту, которая проходит через начало координат, т.е. $C=0$, Получим искомое уравнение $5x-3y=0$.

12.6. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку

Пусть на плоскости xOy задана прямая l, непараллельная оси Oy. **Углом** α **между прямой и осью** Ox (или **углом наклона прямой к оси** Ox) называется тот угол между прямой и положительным направлением оси, который расположен в верхней полуплоскости. Если прямая параллельна оси или совпадает с нею, то угол α считается равным нулю.

Положение прямой на плоскости xOy вполне определено заданием точки $M_1(x_1, y_1)$, лежащей на этой прямой, и углом α наклона прямой к оси Ox. Чтобы вывести уравнение прямой, заданной этими двумя условиями, воспользуемся уравнением (8). В качестве направляющего вектора прямой l можно взять любой единичный вектор $\vec{S}_0$ $\left(\left|\vec{S}_0\right|=1\right)$ параллельный данной прямой и поэтому составляющий с осью Ox также угол α $(\alpha \neq 90^\circ)$. Найдем координаты этого вектора (рис. 7):

$$m = np_x\,\vec{S}_0 = \left|\vec{S}_0\right|\cos\alpha = \cos\alpha, \qquad n = np_y\,\vec{S}_0 = \left|\vec{S}_0\right|\cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha.$$

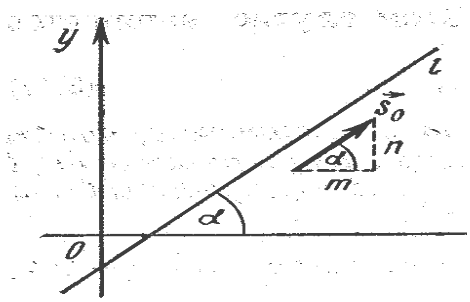

Рис.7

Теперь, зная точку $M_1(x_1, y_1)$, лежащую на прямой, и ее направляющий вектор $\vec{S}_0=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, запишем уравнение этой прямой в виде (8):

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}.$$

Разрешая его относительно $y-y_1$ получим

$$y-y_1=(tg\alpha)(x-x_1).$$

Число $tg\alpha$ называется **угловым коэффициентом прямой** и обычно обозначается $k=tg\alpha$; тогда последнее уравнение примет вид

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{10}$$

При фиксированном значении k уравнение (10) определяет прямую, проходящую через данную точку $M_1(x_1,y_1)$ в направлении, заданном угловым коэффициентом k.

Если же k не задано и принимает различные значения, то уравнение (10) определяет **пучок прямых**, **проходящих через данную точку** $M_1(x_1,y_1)$**.**

Замечание. Уравнение прямой, параллельной оси Oy, не может быть записано в виде (10), так как при $\alpha=90^\circ$ угловой коэффициент прямой не определен. В этом случае уравнение прямой имеет вид $x=x_1$ (так как все точки этой прямой имеют одну и ту же абсциссу $x=x_1$).

12.7. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой

Пусть прямая l не параллельная оси Oy, имеет угловой коэффициент k и пересекает ось Oy в точке $M_1(0,b_1)$. Записав уравнение этой прямой в виде (10), получим $y-b=k(x-0)$, или

$$y=kx+b. \tag{11}$$

Уравнение (11) **называют уравнением прямой с угловым коэффициентом, а число** b **- начальной ординатой**.

Замечание. Если прямая, не параллельная оси Oy, задана общим уравнением $Ax+By+C=0$ $(B\neq 0)$, то, разрешая его относительно y, получим уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y=\left(-\frac{A}{B}\right)x-\frac{C}{B}, \quad \text{где} \quad k=tg\alpha=-\frac{A}{B}, \; b=-\frac{C}{B}.$$

Рассмотрим частные случаи уравнения (11).

1. При $b=0$ уравнение $y=kx$ определяет прямую, проходящую через начало координат, так как координаты точки $O(0,0)$ удовлетворяют этому уравнению. В частности, при $b=0$ и $k=1$ уравнение $y=x$ определяет биссектрису I и III координатных углов ($k=tg\alpha=1, \;\; \alpha=45^{\circ}$).

2. При $k=0$ ($k=tg\alpha=0, \;\; \alpha=0^{\circ}$) уравнение (11) примет вид $y=b$. Это уравнение прямой, параллельной оси Ox (все точки этой прямой имеют одну и ту же ординату $y=b$).

3. При $k=b=0$ получим $y=0$ уравнение оси Ox.

Рассмотрим условия параллельности и перпендикулярности прямых, заданных уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$. Перепишем эти уравнения в общем виде: $k_1x-y+b_1=0$ и $k_2x-y+b_2=0$. Коэффициенты при переменных в этих общих уравнениях прямых таковы: $A_1=k_1$, $B_1=-1$, $A_2=k_2$, $B_2=-1$. Теперь условие (5) параллельности прямых примет вид

$$\frac{k_1}{k_2}=1, \;\; \text{или} \;\; k_2=k_1. \tag{12}$$

Условие (6) перпендикулярности прямых в этом случае запишется так:

$$k_1k_2+1=0, \text{ или } k_2=-\frac{1}{k_1}. \tag{13}$$

Итак, **для параллельности прямых необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были равны, а для перпендикулярности двух прямых необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были обратны по величине и противоположны по знаку.**

Пример. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку $A(-2,2)$ и перпендикулярной прямой $y=3x+5$.

Решение. I способ. Согласно замечанию 2 п.3, множество прямых, перпендикулярных прямой $y = 3x + 5$, или $3x - y + 5 = 0$, определяется уравнением $x + 3y + C = 0$. Выделим из этого множества ту прямую, которая проходит через данную точку $A(-2,2)$. Имеем

$$A(-2,2) \in l \Longleftrightarrow -2 + 3 \cdot 2 + C = 0 \Rightarrow C = -4,$$

поэтому искомое уравнение прямой имеет вид $x + 3y - 4 = 0$.

II способ. Запишем уравнение (10) пучка прямых, проходящих через точку $A(-2,2)$: $y - 2 = k(x + 2)$. Чтобы из этого пучка выбрать прямую, перпендикулярную данной, нужно знать ее угловой коэффициент. Из уравнения заданной прямой имеем $k_1 = 3$. Из условия (13) находим угловой коэффициент прямой, перпендикулярной данной: $k_2 = \frac{1}{k_1} = -\frac{1}{3}$. Подставив найденное значение k_2 в уравнение пучка прямых, получим искомое уравнение

$$y - 2 = \left(-\frac{1}{3}\right)(x + 2), \text{ или } x + 3y - 4 = 0.$$

Пример. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку $A(3,-5)$ параллельно примой, проведенной через две данные точки $B(0,-2)$ и $C(-1,3)$.

Решение. Используя формулу (9), запишем уравнение прямой, проходящей через две точки $B(0,-2)$ и $C(-1,3)$:

$$\frac{x - 0}{-1 - 0} = \frac{y + 2}{3 + 2}, \quad \text{или} \quad 5x + y + 2 = 0.$$

Далее для решения можно снова использовать два способа.

I способ. Согласно замечанию 1 п.3, множество прямых, параллельных данной, определяется уравнением $5x + y + C = 0$. Из этого множества выделим прямую, проходящую через точку $A(3,-5)$; имеем $A(3,5) \in l \Longleftrightarrow 5 \cdot 3 - 5 + C = 0 \Rightarrow C = -10$. Искомое уравнение примет вид $5x + y - 10 = 0$.

II способ. На основании формулы (10) уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(3,-5)$, имеет вид у $y + 5 = k(x - 3)$. Чтобы из этого пучка прямых выбрать ту, которая параллельна данной, нужно знать ее угловой коэффициент. Для этого запишем уравнение данной прямой в виде $y = -5x - 2$

и, согласно условию (12), получим $k_2 = k_1 = -5$. Подставив найденное значение $k = -5$ в уравнение пучка прямых, получим

$$y + 5 = -5(x - 3), \quad \text{или} \quad 5x + y - 10 = 0.$$

Пример. Найти острый угол между прямыми $y = 2x + 3$ и $y = -3x + 5$.

Решение. Чтобы использовать формулу (4), перепишем уравнения прямых в общем виде: $2x + -y + 3 = 0$ и $3x + y - 5 = 0$. Отсюда $A_1 = 2,$ $B_1 = -1$, $A_2 = 3,$ $B_2 = 1$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{|2 \cdot 3 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{9+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \varphi = 45^\circ.$$

12.8. Расстояние от точки до прямой

Пусть требуется найти расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$.

Под расстоянием от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l понимается длина перпендикуляра $d = |M_0M_1|$, опущенной из точки M_0 на прямой l (рис. 8). Для определения расстояния d необходимо:

а) составить уравнение прямой M_0M_1 перпендикулярной данной и проходящей через точку;

б) найти точку $M_1(x_1, y_1)$ пересечения прямых;

в) по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ определить расстояние между двумя точками, т.е. найти $d = |M_0M_1|$. В результате преобразований получим

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (14)$$

Доказательство формулы (14) (предоставляется читателю самостоятельно) проводиться по выше указанной схеме.

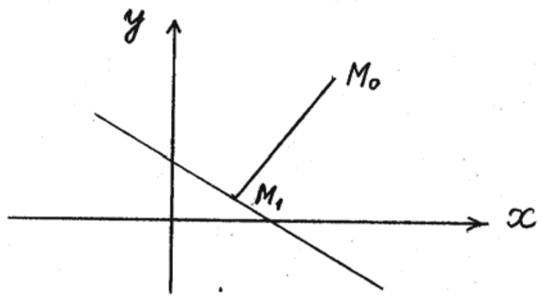

Рис. 8

Примечание. Полезно заметить, что числитель формулы (14) представляет собой левую часть общего уравнения прямой, в которую вместо переменных координат x, y подставлены координаты данной точки $M_0(x_0, y_0)$.

Пример. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $12x-5y-36=0$ и $12x-5y+3=0$.

Решение. Расстояние между параллельными прямыми равно длине перпендикуляра, опущенного из произвольной точки M_0 одной прямой на другую. Для этого найдем координаты произвольной точки прямой $12x-5y-36=0$; пусть, например, $y=0$, тогда $x=3$, т. е. $M_0(3{,}0)$. Теперь по формуле (14) вычислим расстояние от точки $M_0(3{,}0)$ до прямой $12x-5y+3=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|12\cdot 3-5\cdot 0+3|}{\sqrt{12^2+5^2}}=3.$$

Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Требуется найти координаты точки $M(x, y)$ делящий отрезок прямой, заключенный между M_1 и M_2, в отношении $\lambda=|M_1M|:|MM_2|$.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1, y-y_1)$ и $\overrightarrow{MM_2}=(x_2-x, y_2-y)$. Они коллинеарны и одинаково направлены (рис. 9), т.е. могут отличаться только длиной. По условию $|M_1M|:|MM_2|=\lambda$, по этому $|M_1M|=\lambda|MM_2|$, или в координатной форме

$$(x-x_1, y-y_1)=\lambda(x_2-x, y_2-y).$$

Из равенства этих двух векторов следует равенство их координат:

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1=\lambda(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x})\,;\qquad \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1=\lambda(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}).$$

Отсюда

$$\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{x}_1+\lambda\boldsymbol{x}_2}{1+\lambda};\qquad \boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{y}_1+\lambda\boldsymbol{y}_2}{1+\lambda}. \tag{15}$$

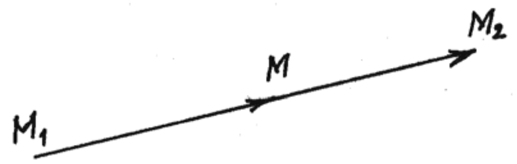

Рис. 9

В частности, если точка $\boldsymbol{M}$ делит отрезок $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2$ пополам, то $\lambda = 1$ и формулы (15) примут вид

$$\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2}{2};\qquad \boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2}{2}.$$

Отметим, что последние формулы знакомы читателю из школьной геометрии.

Пример. Найти расстояние от точки $\boldsymbol{C}$ делящей отрезок прямой точками $\boldsymbol{A}(-2,1)$ и $\boldsymbol{B}(3,2)$ в отношении $\lambda=3:2$, до прямой $2\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{y}+1=0$.

Решение. Координаты точки $\boldsymbol{C}$ вычислим по формулам (15):

$$\boldsymbol{x}=\frac{-2+\frac{3}{2}\cdot 3}{1+\frac{3}{2}}=1,\qquad \boldsymbol{y}=\frac{1+\frac{3}{2}\cdot 2}{1+\frac{3}{2}}=\frac{8}{5}.$$

Теперь найдем расстояние от точки $\boldsymbol{C}\left(1,\ \frac{8}{5}\right)$ до прямой $2\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{y}+1=0$:

$$\boldsymbol{d}=\frac{\left|2\cdot 1-5\cdot\frac{8}{5}+1\right|}{\sqrt{4+25}}=\frac{5}{\sqrt{29}}.$$

Ключевые слова и словосочетания

Метод координат, прямоугольной декартовой системой координат, радиус-вектор точки, абсцисса, ордината, аппликата, вектор нормали к прямой, общее уравнение прямой, угол между прямыми, направляющий вектор прямой, каноническое уравнение прямой, уравнение прямой проходящей через две точки, уравнение пучка прямых, угловой коэффициент, уравнение прямой с угловым коэффициентом, расстояния от точки до прямой, деление отрезка в данном отношении.

Вопросы для самопроверки

1. Какими методами и как изучаются геометрические объекты (точки, линии, поверхности) и их расположение в пространстве или на плоскости в аналитической геометрии?

2. Что называется прямоугольной декартовой системой координат в пространстве $\boldsymbol{R}^3$? Что называется осью абсцисс, осью ординат и осью аппликат?

3. Что называется радиус - вектором точки $\boldsymbol{M}$?

4. Как называются координатами точки $\boldsymbol{M}$ в пространстве $\boldsymbol{R}^3$?

5. Что существует между точками пространства (плоскости) и радиус векторами, проведенными в эти точки из начала координат?

6. С помощью метода координат как можно представить всякий геометрический объект? Каким образом, устанавливается соответствие между геометрическими объектами и уравнениями или неравенствами?

7. Что называется уравнением, соответствующим заданному множеству точек (на плоскости или в пространстве)?

8. Что называется вектором нормали к прямой?

9. Разъясните, что означает фраза «Если известна какая-нибудь точка $\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ прямой $\boldsymbol{l}$ и какой-нибудь вектор $\vec{\boldsymbol{N}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ нормали к ней, то этими двумя условиями прямая на плоскости вполне определена»? Как можно получить уравнение прямой, заданной этими условиями?

10. Как выражается на плоскости $\boldsymbol{R}^2$ всякая прямая? Что называется общим уравнением прямой?

11. Приведите особенности расположения прямой на плоскости в тех случаях, когда те или иные коэффициенты уравнения $\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{C}=0$ равны нулю.

12. Как определяется угол между двумя прямыми на плоскости? Приведите условия параллельности и перпендикулярности прямых.

13. Что называется направляющим вектором прямой? Когда положение прямой вполне определено?

14. Что называется каноническим уравнением прямой?

15. Что называется уравнением прямой, проходящей через две точки?

16. Что называется углом α между прямой и осью $\boldsymbol{Ox}$ (или углом наклона прямой к оси $\boldsymbol{Ox}$)? Вполне определено ли положение прямой заданием точки лежащей на ней и углом наклона прямой к оси $\boldsymbol{Ox}$?

17. Что называется уравнением пучка прямых, проходящих через данную точку? Что называется угловым коэффициентом прямой?

18. Что называется уравнением прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный угловой коэффициент?

19. Что называется уравнением прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой?

20. Приведите особенности расположения прямой на плоскости в тех случаях, когда те или иные коэффициенты уравнения $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{kx}+\boldsymbol{b}$ равны нулю.

21. Приведите условия параллельности и перпендикулярности прямых, заданных уравнениями $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_2$.

22. Как определяется расстояние от точки до прямой? Приведите формулу вычисления расстояния от точки до прямой.

23. Как определяются координаты точки, делящей отрезок в данном отношении? Приведите формулы.

24. Как определяются координаты точки, делящей отрезок пополам? Приведите формулы.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти точки пересечения прямых с осями координат и по этим точкам построить прямые: ***а***) $\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}-10=0$; ***б***) $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}-4=0$;

в) $3x+y+3=0$; *г*) $3x-y-6=0$.

2. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(7,-1)$ параллельно осям координат.

3. Дана прямая $x+2y-4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4,3)$: *а*) параллельно данной; *б*) перпендикулярно данной.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-1,2)$ параллельно прямой, проведенной через две точки $A(5,-4)$ и $B(-3,2)$.

5. Составить уравнения перпендикуляров к прямой $x-2y+4=0$, восставленных в точках пересечения этой прямой с осями координат.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3,4)$: *а*) параллельно прямой $x-2y+1=0$; *б*) перпендикулярно прямой $2x+3y+1=0$; *в*) параллельно оси Ox; *г*) параллельно оси Oy.

7. Одной из вершин прямоугольника является точка $A(-4,3)$, а противоположный угол образован осями координат. Составить уравнения сторон и диагоналей этого прямоугольника.

8. Вычислить острый угол между прямыми: *а*) $4x+3y-12=0$ и $2x-3y-25=0$; *б*) $4x+3y-12=0$ и $3x-2y+6=0$; *в*) $x+2y-1=0$ и $2x-3y-1=0$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x+2y-7=0$ и $3x+7y-10=0$ перпендикулярно прямой $5x-y-4=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $x-y-2=0$ и $3x-y-4=0$.

11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,-2)$ и образующей с осью Ox угол: *а*) $45°$; *б*) $60°$; *в*) $90°$; *г*) $135°$.

12. Найти площадь треугольника, ограниченного осью абсцисс и прямыми $x-y-3=0$ и $2x-y-12=0$.

13. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и параллельной прямой $5x-y+3=0$.

14. Зная уравнения сторон треугольника $x-y-1=0$, $2x+3y-7=0$ и $9x-4y+21=0$, найти: *а*) координаты вершин; *б*) углы треугольника; *в*) его площадь.

15. Вершины треугольника имеют координаты $A(0,7)$, $B(-2,1)$, $C(-4,-1)$. Найти уравнение высоты AE и $\angle ABC$, предварительно построив треугольник.

16. Найти проекцию точки $A(3,2)$ на прямую $4x-3y+14=0$.

17. Найти расстояние от точки $A(-3,2)$ до прямой $4x+3y+14=0$.

18. Найти расстояние от начала координат до каждой из прямых: ***а***) $3x-4y+15=0$; ***б***) $x+7y-5=0$; ***в***) $x-2y+3=0$.

19. Даны уравнения сторон параллелограмма: $x-y+1=0$, $x-y-3=0$, $3x-4y+6=0$ и $3x-4y-9=0$. Найти: ***а***) длины его высот;
б) площадь параллелограмма.

20. Найти расстояние между параллельными прямыми $4x-3y+8=0$
и $4x-3y+12=0$.

21. Известны координаты двух противоположных вершин ромба: $A(4,-3)$ и $B(2,1)$. Составить уравнения его диагоналей.

22. Дан треугольник с вершинами $A(-1,2)$, $B(5,7)$, $C(1,-3)$. Вычислить угол между медианой и высотой, проведенными из вершины B.

23. Найти уравнение перпендикуляра, восставленного к прямой в точке C, делящей отрезок этой прямой между точками $A(2,-3)$ и $B(0,5)$ в отношении $\lambda=1:3$.

§13. Кривые второго порядка на плоскости

Кривыми второго порядка на плоскости называются линии, которые аналитически определяются уравнениями второй степени относительно переменных координат x и y. К ним относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола. В этом параграфе рассмотрим эти кривые.

13.1. Окружность и эллипс

Напомним определение окружности из школьной геометрии.

Окружностью называется множество всех точек (геометрическое место точек) плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).

Уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом r

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \qquad (1)$$

в частности, простейшее уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (2)$$

с центром в начале координат ($x_0 = y_0 = 0$) и радиусом r уже было рассмотрено нами в школьной геометрии.

Уравнение (1) называется **нормальным уравнением окружности.**

Рассмотрим уравнение второй степени с двумя переменными в общем виде

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (3)$$

в котором A, B и C не равны нулю одновременно, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Выясним, при каких обстоятельствах это уравнение является уравнением окружности. С этой целью представим уравнение (1) в виде

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0. \qquad (4)$$

Чтобы уравнения (3) и (4) представляли одну и ту же линию, коэффициент B должен равняться нулю, т.е. $B = 0$, а все остальные коэффициенты – пропорциональны, в частности, $\frac{A}{1} = \frac{C}{1}$, откуда $A = C \neq 0$ (ибо $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, а $B = 0$). Тогда получим уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (5)$$

которое называется **общим уравнением окружности.**

Поделив обе части уравнения на $A \neq 0$ и дополнив члены, содержащие x и y, до полного квадрата, получим

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}. \qquad (6)$$

Сравнивая уравнение (6) с уравнением окружности (1), можно сделать вывод, что уравнение (3) есть уравнение действительной окружности, если $A = C$; $B = 0$; $D^2 + E^2 - 4AF > 0$. При выполнении этих условий центр окружности (3) расположен в точке $M_0\left(-\frac{D}{2A}, \; -\frac{E}{2A}\right)$, а ее радиус $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A}$.

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2 + y^2 + 16y - 9 = 0.$$

Решение. Дополнив члены, содержащие y до полного квадрата, получим

$x^2 + (y^2 + 16y + 64) - 64 - 9 = 0$ или $x^2 + (y+8)^2 - 73 = 0$, т.е. центр окружности $M_0(0, \ -8)$, а ее радиус $r = \sqrt{73}$.

Рассмотрим уравнение кривой второго порядка (3), которой по–прежнему будем полагать $B = 0$. Перепишем уравнение в виде

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

или

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = \delta,$$

где

$$x_0 = -\frac{D}{2A}; \quad y_0 = -\frac{E}{2C}; \quad \delta = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F.$$

Будем предполагать для простоты исследования, что центр кривой находится в начале координат, т.е. $x_0 = y_0 = 0$. Тогда уравнение кривой имеет вид

$$Ax^2 + Cy^2 = \delta. \tag{7}$$

Кривая второго порядка (7) **называется эллипсом (**точнее **кривой эллиптического типа**), если коэффициенты A и C имеют одинаковые знаки.

Для определенности будем полагать, что $A > 0$, $C > 0$ (в противном случае обе части уравнения можно умножить на -1).

Возможны три случая: 1) $\delta > 0$; 2) $\delta = 0$; 3) $\delta < 0$.

Очевидно, что в третьем случае (при $\delta < 0$) кривая (7) не имеет действительных корней, а во втором случае (при $\delta = 0$) кривая (7) представляет собой одну точку $O(0,0)$. Поэтому остановимся на первом случае ($\delta > 0$).

Получаемое при этом уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{8}$$

которое **называется каноническим уравнением эллипса с полуосями** $a = \sqrt{\frac{\delta}{A}}$ и $b = \sqrt{\frac{\delta}{C}}$ (рис. 1). Здесь не нарушая общности, полагаем, что $a \geq b$ (этого можно добиться путем надлежащего выбора осей Ox и Oy). При $a = b$ уравнение (8) представляет частный случай – уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

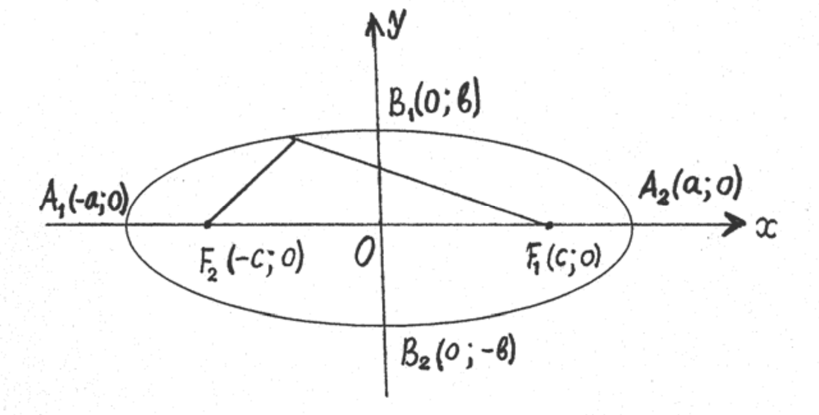

Рис.1

Точки $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}\,, \tag{9}$$

называются фокусами эллипса, а отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \tag{10}$$

его **эксцентриситетом.** Эксцентриситет характеризует форму эллипса. Очевидно, что $0 \leq \varepsilon \leq 1$, причем для окружности $\varepsilon = 0$.

Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ **называются вершинами эллипса.**

Найдем сумму расстояний от любой точки эллипса $M(x, y)$ до ее фокусов:

$$d = F_2M + MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

С учетом (8)-(10)

$$F_2M = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + (a^2 - b^2) + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2} = a + \varepsilon x\,.$$

Аналогично можно получить, что $MF_2 = a - \varepsilon x$. В результате

$$d = F_2M + MF_1 = a + \varepsilon x + a - \varepsilon x = 2a\,,$$

т.е. **для любой точки эллипса сумма расстояний этой точки до фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.** Это характеристическое свойство эллипса часто принимается за определение эллипса. А именно:

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых **фокусами**, есть постоянная величина.

Пример. Определить вид и расположение кривой

$$x^2+2y^2-4x+16y=0.$$

Решение. Так как $A=1$ и $C=2$ - числа одного знака, то данное уравнение кривой – эллиптического типа. Дополняя члены, содержащие x и y, до полного квадрата, получим $(x-2)^2+2(y+4)^2=36$ или

$$\frac{(x-2)^2}{6^2}+\frac{(y+4)^2}{(3\sqrt{2})^2}=1.$$

Следовательно, данная кривая $x^2+2y^2-4x+16y=0$ представляет эллипс с полуосями $a=6$ и $b=3\sqrt{2}$, центр которого находится в точке $M_0(2;-4)$ (рис. 2).

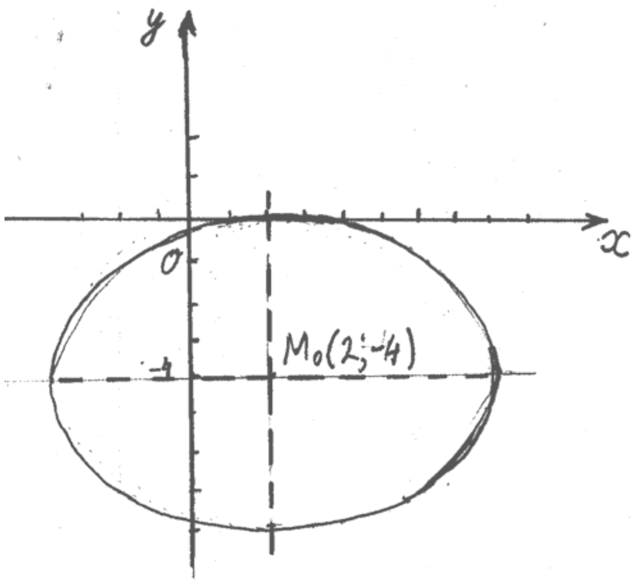

Рис. 2

13.2. Гипербола и парабола

Кривая второго порядка (7) **называется гиперболой** (точнее кривой **гиперболического типа**), если коэффициенты A и C имеют противоположные знаки, т.е. $AC<0$.

Пусть для определенности $A>0$, $C<0$.

Возможны три случая: 1) $\delta>0$; 2) $\delta=0$; 3) $\delta<0$.

В первом случае (при $\delta > 0$) имеем гиперболу, каноническое уравнение которой

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{11}$$

где $a = \sqrt{\frac{\delta}{A}}$ - действительная полуось; $b = \sqrt{\frac{\delta}{-C}}$ - мнимая полуось (рис. 3).

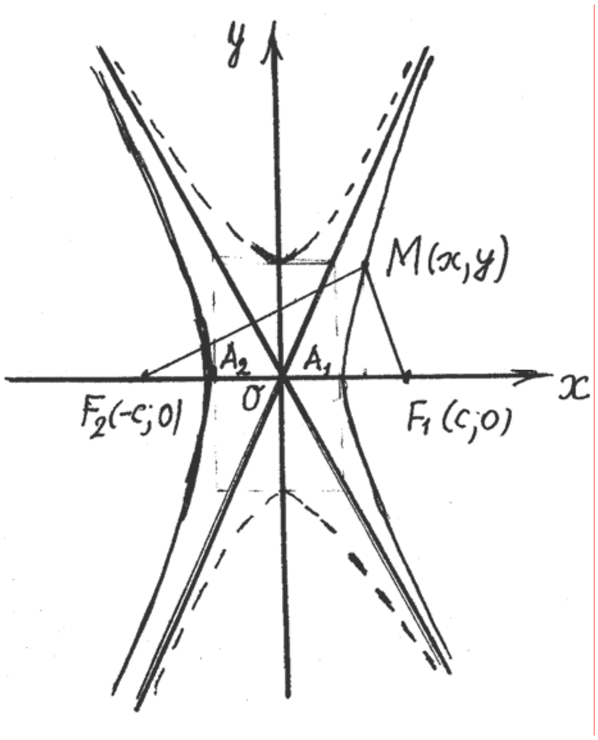

Рис. 3

Фокусы гиперболы - точки $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, а ее **эксцентриситет** $\varepsilon = \frac{c}{a}$ принимает любые значения больше единицы, т.е. $\varepsilon > 1$. **Вершины гиперболы** - точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$.

Поступая аналогично тому, как мы поступали при исследовании эллипса можно показать, что **для любой точки гиперболы абсолютная величина разности ее расстояний до фокусов есть величина постоянная, равная** $2a$**:** $d = |F_2M - MF_1| = 2a$. Это характеристическое свойство гиперболы часто принимается за определение гиперболы. А именно:

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых **фокусами**, есть постоянная величина.

Перепишем уравнение гиперболы (11) в виде

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,. \tag{12}$$

При достаточно больших x имеет место $\sqrt{x^2 - a^2} \approx \sqrt{x^2} = x$. Поэтому уравнение (12) примет вид

$$y \approx \pm\frac{b}{a}x\,,$$

т.е. при $x \to \infty$ ветви гиперболы как угодно близко подходят к прямым

$$y = \pm\frac{b}{a}x\,,$$

которые **называются асимптотами гиперболы.**

Для равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ (т.е. когда $a = b$) асимптоты $y = \pm x$ взаимно перпендикулярны и представляют биссектрисы координатных углов.

Во втором случае (при $\delta = 0$) уравнение кривой (7) примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0\,,$$

т.е. получаем пару пересекающихся прямых

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0\,.$$

В третьем случае (при $\delta < 0$) получим гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

с полуосями $a = \sqrt{\frac{\delta}{-A}}$ и $b = \sqrt{\frac{\delta}{C}}$, называемую сопряженной с гиперболой (11) (на рис. 3 она изображена пунктиром).

Пример. Написать уравнение гиперболы с асимптотами $y = \pm\frac{3}{4}x$, проходящими через точку $(6;\ 1{,}5)$. Найти расстояние между ее вершинами.

Решение. Так как точка (6; 1,5) лежит на гиперболе, то ее координаты должны удовлетворять уравнению (11)

$$\frac{36}{a^2} - \frac{9}{4b^2} = 1.$$

Кроме того, $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, так как асимптоты гиперболы $y = \pm\frac{3}{4}x$. Решая полученную систему двух уравнений, найдем $a = 4\sqrt{2}$; $b = 3\sqrt{2}$, т.е. уравнение гиперболы имеет вид (рис.4):

$$\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = 1.$$

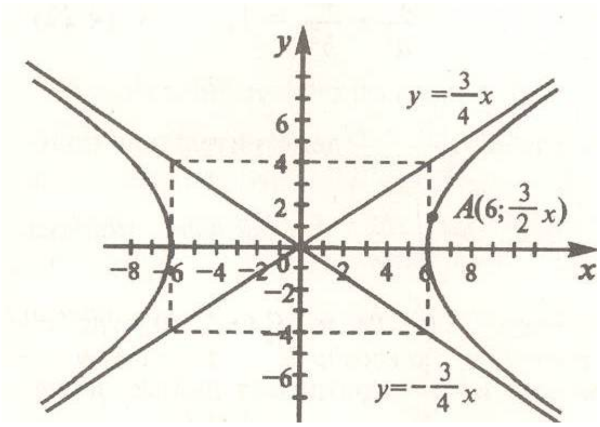

Рис. 4

Расстояние между вершинами гиперболы равно $2a = 8\sqrt{2}$.

Рассмотрим **обратную пропорциональную зависимость**, задаваемую уравнением $y = \frac{m}{x}$ или

$$xy = m. \tag{13}$$

Выбрав в качестве новых осей Ox' и Oy' биссектрисы координатных углов (рис. 5), представим уравнение (13) через новые координаты x' и y'. Пусть $OM = \rho$, тогда

$$x = \rho\cos(45^\circ + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho\cos\alpha - \rho\sin\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

$$y = \rho\sin(45^\circ + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho\cos\alpha + \rho\sin\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

так как из $\Delta OMB' \Rightarrow \rho\cos\alpha = x'$, $\rho\sin\alpha = y'$.

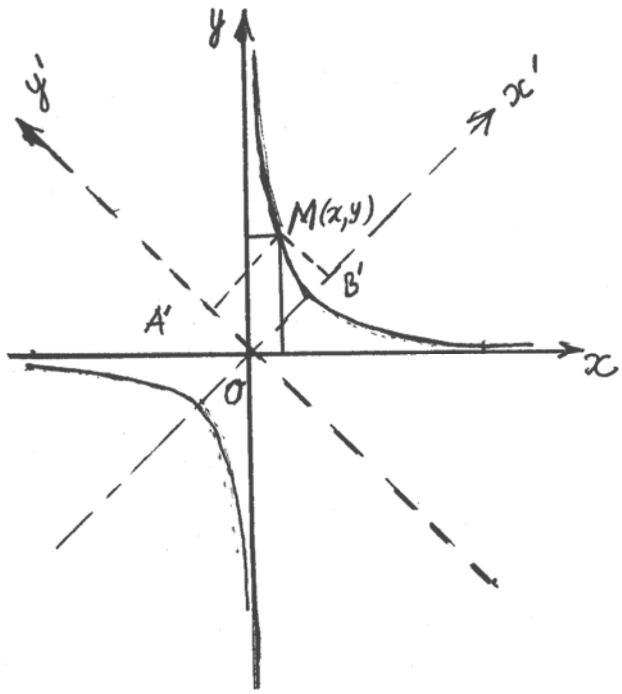

Рис. 5

Теперь уравнение (13) в новой системе координат $Ox'y'$ примет вид $x'^2 - y'^2 = 2m$, т.е. **график обратной пропорциональной зависимости есть равносторонняя гипербола с асимптотами - осями координат.**

При $m > 0$ ветви гиперболы расположены в I и III квадрантах, при $m < 0$ - во II и IV квадрантах. Нетрудно установить, что координаты любой вершины гиперболы равны (по абсолютной величине), т.е. $|x| = |y| = \sqrt{|m|}$ знаки определяются в зависимости от квадранта, в котором расположена каждая вершина.

Рассмотрим график **дробно-линейной функции**

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{14}$$

где $c \neq 0, \quad bc - ad \neq 0$.

Преобразуя (14), получим

$$y = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(\left(x + \frac{d}{c}\right) + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}.$$

Введем новые координаты

$$x+\frac{d}{c}=x',\quad y-\frac{a}{c}=y'.$$

Обозначим

$$m=\frac{bc-ad}{c^2}.$$

Тогда в новой системе координат $Ox'y'$, полученной параллельным переносом осей координат, с новым центром $M_0\left(-\frac{d}{c};\ \frac{a}{c}\right)$ (см. рис. 6) уравнение примет вид $y'=\frac{m}{x'}$ или $x'y'=m$.

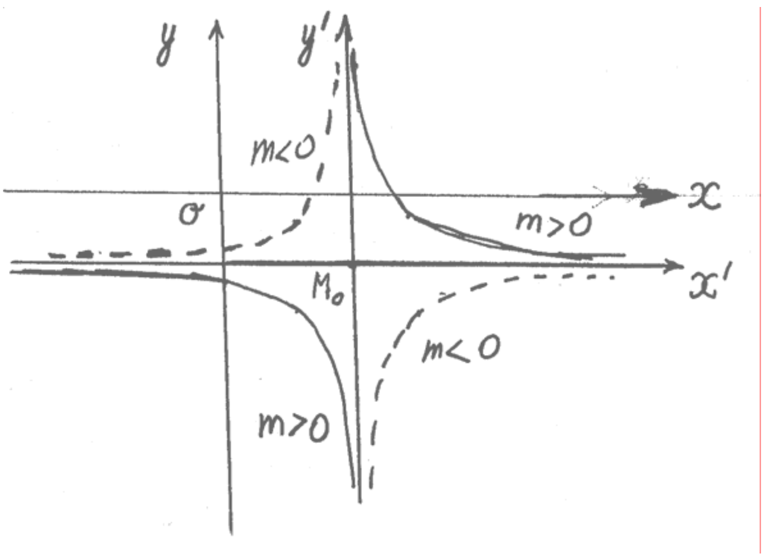

Рис. 6

Итак, **график дробно – линейной функции (14) есть равносторонняя гипербола с асимптотами** $x=-\frac{d}{c}$; $y=\frac{a}{c}$, параллельными **осями координат.**

Пример. Найти координаты центра, вершин и уравнения асимптот гиперболы $y=\frac{3-2x}{x+1}$.

Решение. Преобразуем уравнение, выделив целую часть дробно – линейной функции:

$$y=\frac{-2(x+1)+5}{x+1}=-2+\frac{5}{x+1}\quad\text{или}\quad y+2=\frac{5}{x+1},\ \text{откуда}\ (x+1)(y+2)=5.$$

Полагая $x+1=x'$, $y+2=y'$, получим $x'y'=5$, т.е. заданное уравнение есть уравнение равносторонней гиперболы с центром $M_0(-1;\ \ -2)$ и асимптотами $x+1=0$, $y+2=0$(рис. 7).

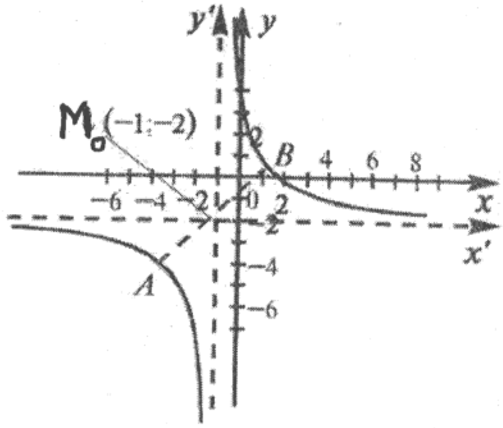

Рис. 7

Так как $m=5>0$, то гипербола располагается в I и III квадрантах, а новые координаты ее вершин $\left(\pm\sqrt{5};\ \ \pm\sqrt{5}\right)$. Переходя к старым координатам по формулам $x=x'-1$, $y=y'-2$, найдем старые координаты вершин гиперболы $A\left(-\sqrt{5}-1;\ \ -\sqrt{5}-2\right)$, $B\left(\sqrt{5}-1;\ \ \sqrt{5}-2\right)$.

Пусть в уравнении кривой второго порядка (3) $B=0$, а также один из коэффициентов A или C равен нулю; для определенности $A=0$, $C\neq 0$, т.е.

$$Cy^2+Dx+Ey+F=0. \tag{15}$$

Пусть также $D\neq 0$(в противном случае мы имели бы пару параллельных горизонтальных прямых $y=y_1$ и $y=y_2$, где y_1 и y_2 - корни уравнения $Cy^2+Ey+F=0$ или отсутствие каких – либо линий и точек вообще). Дополним члены, содержащие y, до полного квадрата

$$C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=-Dx-F+\frac{E^2}{4C}.$$

Полагая $x_0=-\dfrac{F}{D}+\dfrac{E^2}{4DC}$, $y_0=-\dfrac{E}{2C}$, $2p=-x_0=-\dfrac{D}{C}$, получим

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0). \tag{16}$$

Кривая (16) **называется параболой**, а точка $M_0(x_0,y_0)$ - **вершиной** параболы, p - **параметром** параболы. При $p>0$ ветви параболы направлены вправо, при $p<0$ - влево (рис.8). Прямая $y=y_0$ является **осью симметрии** параболы.

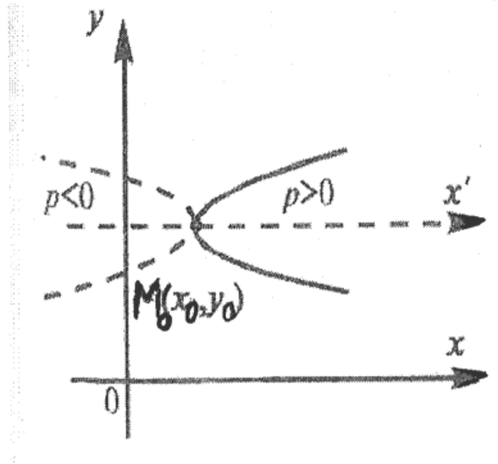

Рис.8

Если вершина параболы находится в начале координат, то уравнение (16) принимает вид

$$y^2 = 2px. \tag{17}$$

Точка $F(\frac{p}{2}:0)$ называется **фокусом параболы**, а прямая $x = -\frac{p}{2}$ - ее **директрисой.**

Для произвольной точки $M(x, y)$ параболы расстояние до фокуса равно

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + +2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$$

(так как $x + \frac{p}{2} \geq 0$). С другой стороны, расстояние до директрисы $MN = x + \frac{p}{2}$ (рис. 9).

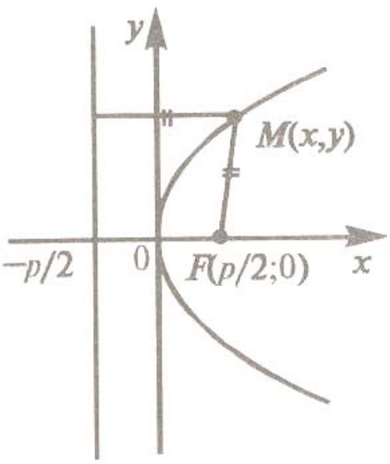

Рис.9

Таким образом, **парабола представляет множество всех точек плоскости, равноотстоящих от данной точки (фокуса) и от данной**

прямой (директрисы). Это характеристическое свойство параболы часто принимается за определение параболы. А именно:

Параболой называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой **фокусом,** равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой **директрисой** (предполагается, что эта прямая не проходит через фокус).

Если в уравнении (17) поменять местами x и y, то получим $x^2 = 2py$ - уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси ординат. Это уравнение обычно записывают в виде $y = Ax^2$, где $A = \frac{1}{2p}$. При $A > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $A < 0$ - вниз (рис. 10).

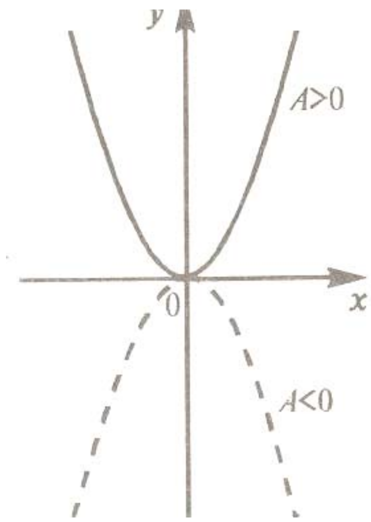

Рис. 10

Рассмотрим квадратный трехчлен $y = Ax^2 + Bx + C, \quad (A > 0)$.

Отсюда $y = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right)$. Дополнив выражение, стоящее в скобках, до полного квадрата, получим

$$y = A\left(\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\right) = A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}. \tag{18}$$

Обозначив $x + \frac{B}{2A} = x'$, $y - \frac{4AC - B^2}{4A} = y'$, в новой системе координат $Ox'y'$ с центром $M_0\left(-\frac{B}{2A}; \ \frac{4AC - B^2}{4A}\right)$ уравнение (18) примет вид $y' = Ax'^2$.

Таким образом, график квадратного трехчлена $y = Ax^2 + Bx + C$ есть парабола с вершиной в точке $M_0\left(-\dfrac{B}{2A};\ \dfrac{4AC - B^2}{4A}\right)$ и осью симметрии $x = -\dfrac{B}{2A}$, параллельной оси Oy.

Пример. Построить кривую $y = -3x^2 + 10x - 3$.

Решение. Вынося коэффициент при x^2 и дополняя правую часть уравнения до полного квадрата, получим

$$y = -3\left(x^2 + \frac{10}{3}x - 1\right) = -3\left(\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + 1 - \frac{25}{9}\right) = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}$$

или

$$y - \frac{16}{3} = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2.$$

Полагая

$$x - \frac{5}{3} = x', \quad y - \frac{16}{3} = y',$$

получим

$$y' = 3x'^2.$$

Таким образом, заданная кривая есть парабола с вершиной в точке $M_0\left(\dfrac{5}{3};\ \dfrac{16}{3}\right)$ и осью симметрии $O'y'$, параллельной оси Oy (рис. 11).

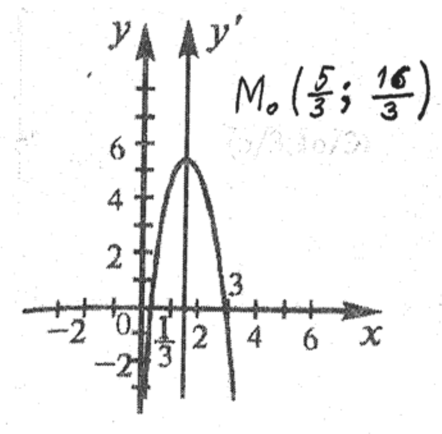

Рис.11

13.3. Приложение некоторых кривых второго порядка в экономике

Выше при изучении кривых второго порядка – гиперболы и параболы, нами были рассмотрены, в том числе и те их виды, в котором они наиболее часто встречаются **в экономических**

исследованиях. Следующий пример, в какой –то мере иллюстрирует это.

Пример. Примером использования дробно-линейной функции, следовательно, гиперболы в экономике может служить функция

$$y = \frac{a\xi + b}{\xi} + c\sqrt{\xi}$$

где y - приведенные затраты предприятия, ξ - мощность предприятия, функция $\frac{a\xi + b}{\xi}$ определяет заводские затраты на переработку сырья с учетом капиталовложений, функция $c\sqrt{\xi}$ - транспортные расходы.

Ключевые слова и словосочетания

Кривые второго порядка, окружность, эллипс, гипербола, парабола, фокус, эксцентриситет, директриса.

Вопросы для самопроверки

1. Что называются кривыми второго порядка на плоскости? Какие кривые относятся к ним?
2. Что называется окружностью? Приведите нормальное уравнение окружности.
3. Какое уравнение называется общим уравнением окружности?
4. Когда кривая второго порядка называется эллипсом (точнее кривой эллиптического типа)?
5. Что называется каноническим уравнением эллипса? Что являются полуосями эллипса?
6. Что называются фокусами эллипса?
7. Как определяется эксцентриситет эллипса? Что характеризует эксцентриситет эллипса? Какие значения принимает эксцентриситет эллипса? Чему равно значение эксцентриситета для окружности?
8. Что называются вершинами эллипса?
9. Приведите характеристическое свойство эллипса, которое часто принимается за определение эллипса. Приведите это определение эллипса.

10. Когда кривая второго порядка называется гиперболой (точнее кривой гиперболического типа)?

11. Что называется каноническим уравнением гиперболы? Что являются действительной и мнимой полуосями эллипса?

12. Что называются фокусами эллипса?

13. Как определяется эксцентриситет эллипса? Какие значения принимает эксцентриситет эллипса?

14. Что называются вершинами эллипса?

15. Приведите характеристическое свойство гиперболы, которое часто принимается за определение эллипса. Приведите это определение гиперболы.

16. Что называются асимптотами гиперболы?

17. Как определяются асимптоты равносторонней гиперболы и как они взаимно расположены?

18. Что называется сопряженной гиперболой к гиперболе $\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2}-\frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2}=1$? Как определяются полуоси сопряженной гиперболы?

19. Разъясните, что обратная пропорциональная зависимость представляет равностороннюю гиперболу? Что являются асимптотами гиперболы в данном случае?

20. Разъясните, что дробно – линейная функция представляет равностороннюю гиперболу? Что являются асимптотами гиперболы в данном случае?

21. Когда кривая второго порядка называется параболой?

22. Что являются вершиной, параметром осью параболы?

23. Что называется фокусом параболы?

24. Что называется директрисой параболы?

25. Приведите характеристическое свойство эллипса, которое часто принимается за определение параболы. Приведите это определение параболы.

26. Какие приложения кривых второго порядка в экономике вы знаете? Приведите их.

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $\boldsymbol{B}(6;2)$, если ее центром служит точка $\boldsymbol{M}_0(2;-1)$.

2.Составить уравнение линии центров двух окружностей: $(x-2)^2+y^2=16$ и $x^2+(y-3)^2=9$.

3. Определить координаты центра и радиус окружности:

а) $x^2+y^2-4x-14y+28=0$; *б*) $x^2+y^2-2x+10y+22=0$;

в) $x^2+y^2-2x+1=0$; *г*) $x^2+y^2-2y=0$;

д) $x^2+y^2-10x+16=0$; *е*) $9x^2+9y^2-6x+12y-31=0$.

4. Составить уравнение диаметра окружности $x^2+y^2=16$, перпендику-лярного прямой $3x+4y-7=0$.

5. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2-8x-4y=0$ и $x^2+y^2+6x-8y=0$;

6. Составить уравнение гиперболы, асимптотами которой служат координатные оси, если известно, что точка $B(2;-3)$ лежит на этой гиперболе.

7. Составить уравнение гиперболы, если известно, что она проходит через точку $N(0;4)$ и имеет асимптотами прямые $x=-1$ и $y=3$.

8. Найти координаты центра и уравнения асимптот гиперболы:

а) $xy-2x=6$; *б*) $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$; *в*) $y=\dfrac{5-2x}{x-2}$; *г*) $y=\dfrac{4x}{x-1}$.

9. Найти координаты центра, уравнения асимптот и расстояние между вершинами гиперболы:

а) $y=\dfrac{3x-5}{x+2}$; *б*) $y=\dfrac{3x+5}{2x-1}$; *в*) $y=\dfrac{4x+1}{5-2x}$. *г*) $y=\dfrac{4x}{x-1}$.

10. Найти уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy, если известно, что она проходит через точку $N(3;-6)$.

11. Проверить, проходит ли парабола $y^2=12x$ через точки $K(1;3)$, $L(3;-6)$, $M(1/2;6)$.

12. Найти координаты вершины и уравнение оси симметрии параболы:

а) $y=x^2+2x-3$; *б*) $y=x^2+5$; *в*) $y=-x^2+12x$; *г*) $x=y^2+8y+9$;

д) $y=x^2-x+4$; *е*) $y=4x^2++8y+7$.

13. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину параболы

$y=x^2-4x+1$ и перпендикулярной прямой $2x-3y+5=0$.

14. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину параболы
$\boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{x}^2 + 8\boldsymbol{x} - 5$ и центр гиперболы $\boldsymbol{y} = \dfrac{2\boldsymbol{x} - 1}{\boldsymbol{x} + 2}$.

15. Найти уравнение прямой, проходящей через вершину параболы $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x}$ и центр окружности $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + 4\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} + 4 = 0$.

16. Составить уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = 5$ и $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + 2\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} - 31 = 0$. Найти отношение радиусов окружностей.

17. Ординаты всех точек окружности $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = 36$ сокращены втрое. Написать уравнение полученной новой кривой.

18. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки $\boldsymbol{M}_1\left(4;\ \dfrac{4\sqrt{5}}{3}\right)$ и $\boldsymbol{M}_2(0;\ 4))$. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.

19. Для гиперболы $3\boldsymbol{x}^2 - 4\boldsymbol{y}^2 = 12$ найти действительную и мнимую полуоси; координаты фокусов; эксцентриситет; уравнения асимптот.

20. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы - в вершинах эллипса $\dfrac{\boldsymbol{x}^2}{25} + \dfrac{\boldsymbol{y}^2}{9} = 1$.

21. Найти координаты центра, вершин и уравнения асимптот гиперболы $\boldsymbol{y} = \dfrac{4 - 5\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x} - 1}$.

22. Составить уравнение параболы, проходящей через точки:

а) $\boldsymbol{O}(0;0)$ и $\boldsymbol{K}(-1;-3)$ симметрично относительно оси $\boldsymbol{Ox}$;

б) $\boldsymbol{O}(0;0)$ и $\boldsymbol{L}(2;-4)$, симметрично относительно оси $\boldsymbol{Oy}$.

23. Найти уравнения параболы и ее директрисы, если известно, что парабола имеет вершину в начале координат и симметрична относительно оси $\boldsymbol{Ox}$ и что точка пересечения прямых $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - 2 = 0$ лежит на параболе.

24. Найти расстояние от начала координат до прямой, проходящей через центр гиперболы $\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{x} + 1}{\boldsymbol{x} - 1}$ и вершину параболы $\boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{x}^2 + 5\boldsymbol{x} - 2$.

§14. Прямая и плоскость в пространстве

14.1. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку

Пусть P- произвольная плоскость в пространстве. Всякий перпендикулярный ей ненулевой вектор **называется вектором нормали** к этой плоскости.

Если известна какая-нибудь точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости P и какой-нибудь вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ нормали к ней, то этими двумя условиями плоскость в пространстве вполне определена (через данную точку можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данному вектору).

Чтобы получить уравнение плоскости, заданной этими условиями, возьмем на плоскости P произвольную точку M с переменными координатами x, y, z. Эта точка принадлежит плоскости только в том случае, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{N}$ (рис. 1), а для того необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов равнялось нулю, т.е.

$$\left(\vec{N}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0. \qquad (1)$$

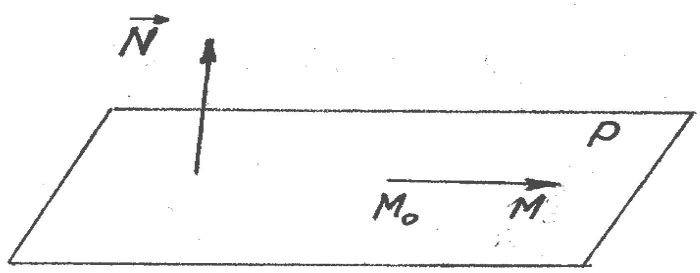

Рис. 1

Вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ задан по условию. Очевидно, что

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Теперь выразим скалярное произведение (1) в координатной форме:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (2)$$

Так как точка $M(x, y, z)$ выбрана на плоскости произвольно, то последнему уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на плоскости P. Для точки K, не лежащей на заданной плоскости, $\left(\vec{N}, \overrightarrow{M_0K}\right) \neq 0$ и равенство (2) нарушается. Следовательно, уравнение (2) определяет плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярную вектору $\vec{N} = (A, B, C)$.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2,-3,-1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{N} = (5,2,-4)$.

Решение. Используя формулу (2), имеем

$$5(x-2) + 2(y+3) - 4(z+1) = 0,$$

откуда после преобразований получим

$$5x + 2y - 4z - 8 = 0.$$

Искомое уравнение оказалось выражено общим уравнением первой степени относительно переменных координат x, y, z произвольной точки плоскости. Ниже мы **убедимся, что всякое уравнение первой степени относительно x, y, z определяет плоскость в R^3.**

14.2. Общее уравнение плоскости

Теорема 1. В пространстве R^3 всякая плоскость выражается уравнением первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{3}$$

Доказательство. В п.1 было установлено, что всякая плоскость может быть задана уравнением вида (2):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Раскрыв скобки и обозначив $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, получим общее уравнение первой степени относительно x, y, z

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

эквивалентное уравнению (2). Поэтому оно определяет ту же плоскость, что и уравнение (2), и **называется общим уравнением плоскости.** Коэффициенты при переменных в этом уравнении сохраняют тот же геометрический смысл, что и в равенстве (2), т.е. являются координатами вектора $\vec{N} = (A, B, C)$ нормали к плоскости. Так как вектор нормали к плоскости является ненулевым, то коэффициенты A, B и C не могут быть одновременно равны нулю. Итак, мы доказали, что всякая прямая на плоскости R^3 определяется уравнением первой степени относительно переменных координат x, y, z.

Теорема 2 (обратная). Всякое линейное уравнение с тремя переменными $Ax + By + Cz + D = 0$, определяет плоскость в пространстве R^3, если хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю.

Доказательство. Пусть x_0, y_0, z_0 - какое-либо решение данного уравнения. Тогда $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, откуда $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Подставляя в данное уравнение вместо D его значение и группируя члены, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Это уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей вектор нормали $\vec{N} = (A, B, C)$. Следовательно, и равносильное ему уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, определяет плоскость (перпендикулярную вектору $\vec{N} = (A, B, C)$).

Пример. Построить в прямоугольной декартовой системе координат плоскость, заданную уравнением $3x - 2y + z - 6 = 0$.

Решение. Для построения плоскости необходимо и достаточно знать какие-либо три ее точки (не лежащие на одной прямой), например, точки пересечения плоскости с осями координат. Полагая в заданном уравнении $x = y = 0$, получим $z = 6$. Следовательно, заданная плоскость пересекает ось Oz в точке $A(0,0,6)$. Аналогично, при $x = z = 0$ получим $y = -3$, т.е. точку $B(0,-3,0)$, а при $y = z = 0$ получим $x = 2$, т.е. точку $C(2,0,0)$. Теперь построим плоскость, проходящую через точки $A(0,0,6)$, $B(0,-3,0)$ и $C(2,0,0)$ (рис. 2).

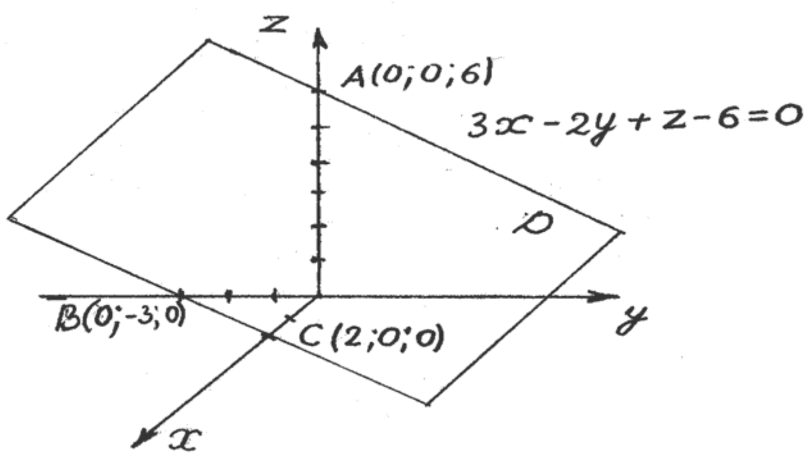

Рис. 2

Частные случаи общего уравнения плоскости. Рассмотрим особенности расположения плоскости в тех случаях, когда те или иные коэффициенты уравнения (3) равны нулю.

1. При $\boldsymbol{D}=0$ уравнение $\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{Cz}=0,$ определяет плоскость, проходящую через начало координат, так как координаты точки $\boldsymbol{O}(0,0,0)$ удовлетворяют этому уравнению.

2. При $\boldsymbol{A}=0$ уравнение $\boldsymbol{By}+\boldsymbol{Cz}+\boldsymbol{D}=0$ определяет плоскость, параллельную оси $\boldsymbol{Ox}$, поскольку вектор нормали $\vec{\boldsymbol{N}}=(0,\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ этой плоскости перпендикулярен оси $\boldsymbol{Ox}$. Аналогично, при $\boldsymbol{B}=0$ уравнение $\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Cz}+\boldsymbol{D}=0$ определяет плоскость, параллельную оси $\boldsymbol{Oy}$.

3. При $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}=0$ уравнение $\boldsymbol{By}+\boldsymbol{Cz}=0$ определяет плоскость, проходящую через ось $\boldsymbol{Ox}$, поскольку она параллельна оси $\boldsymbol{Ox}$ ($\boldsymbol{A}=0$) и проходит через начало координат ($\boldsymbol{D}=0$). Аналогично, плоскость $\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Cz}=0$ проходит через ось $\boldsymbol{Oy}$, а плоскость $\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}=0$ - через ось $\boldsymbol{Oz}$.

4. При $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=0$ уравнение $\boldsymbol{Cz}+\boldsymbol{D}=0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости $\boldsymbol{xOy}$, поскольку она параллельна осям $\boldsymbol{Ox}$ ($\boldsymbol{A}=0$) и $\boldsymbol{Oy}$ ($\boldsymbol{B}=0$). Аналогично, плоскость $\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{D}=0$ параллельна плоскости $\boldsymbol{yOz}$, а плоскость $\boldsymbol{By}+\boldsymbol{D}=0$ - плоскости $\boldsymbol{xOz}$.

5. При $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}=0$ уравнение $\boldsymbol{Cz}=0$ (или $\boldsymbol{z}=0$) определяет координатную плоскость $\boldsymbol{xOy}$, так как она параллельна плоскости $\boldsymbol{xOy}$ ($\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=0$) и проходит через начало координат ($\boldsymbol{D}=0$). Аналогично, уравнение $\boldsymbol{y}=0$ в пространстве определяет координатную плоскость $\boldsymbol{xOz}$, а уравнение $\boldsymbol{x}=0$ - координатную плоскость $\boldsymbol{yOz}$.

Пример. Составить уравнение плоскости $\boldsymbol{P}$, проходящей через ось $\boldsymbol{Oy}$ и точку $\boldsymbol{M}_0(2,-4,3)$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через ось $\boldsymbol{Oy}$, имеет вид $\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Cz}=0$. Для определения коэффициентов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}$ воспользуемся тем, что точка $\boldsymbol{M}_0(2,-4,3)$ принадлежит плоскости $\boldsymbol{P}$. Поэтому ее координаты удовлетворяют написанному выше уравнению плоскости: $\boldsymbol{M}_0(2,-4,3)\in\boldsymbol{P}\Longleftrightarrow 2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{C}=0$, откуда $\boldsymbol{A}=-1{,}5\boldsymbol{C}$. Подставив найденное значение $\boldsymbol{A}$ в уравнение $\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Cz}=0$, получим

$$-1{,}5\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}=0 \text{ или } 3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{z}=0.$$

Это и есть искомое уравнение.

14.3. Взаимное расположение плоскостей

Пусть две плоскости заданы в прямоугольной системе координат общими уравнениями

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{z}+\boldsymbol{D}_1=0 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z}+\boldsymbol{D}_2=0.$$

Эти плоскости параллельны в том случае, если коллинеарны векторы $\vec{\boldsymbol{N}}_1=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{C}_1)$ и $\vec{\boldsymbol{N}}_2=(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{C}_2)$ нормалей к ним, т.е. выполняются условия:

$$\frac{\boldsymbol{A}_1}{\boldsymbol{A}_2}=\frac{\boldsymbol{B}_1}{\boldsymbol{B}_2}=\frac{\boldsymbol{C}_1}{\boldsymbol{C}_2}. \tag{4}$$

Следовательно, **две плоскости, заданные общими уравнениями, параллельны, если коэффициенты при одноименных переменных пропорциональны.**

Если кроме коэффициентов при переменных пропорциональны и свободные члены, т.е. выполняются равенства

$$\frac{\boldsymbol{A}_1}{\boldsymbol{A}_2}=\frac{\boldsymbol{B}_1}{\boldsymbol{B}_2}=\frac{\boldsymbol{C}_1}{\boldsymbol{C}_2}=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}_2}, \tag{5}$$

то плоскости совпадают.

Чтобы две плоскости пересеклись, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при переменных $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ не были пропорциональны

Плоскости перпендикулярны в том случае, если перпендикулярны (ортогональны) векторы их нормалей $\vec{\boldsymbol{N}}_1=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{C}_1)$ и $\vec{\boldsymbol{N}}_2=(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{C}_2)$:

$$\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{C}_1\cdot\boldsymbol{C}_2=0. \tag{6}$$

Пример. Установить перпендикулярны ли плоскости заданные уравнениями $2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}-2=0$ и $4\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+5=0$.

Решение. Плоскости перпендикулярны в том случае, если векторы их нормалей $\vec{\boldsymbol{N}}_1=(2,-3,1)$ и $\vec{\boldsymbol{N}}_2=(4,3,1)$ перпендикулярны, т.е. удовлетворяют условию (6). Так как

$$\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{C}_1\cdot\boldsymbol{C}_2=2\cdot2-3\cdot3+1\cdot1=0,$$

то указанное условие выполнено и значит, данные плоскости перпендикулярны.

14.4. Уравнения прямой в пространстве R^3

14.4.1 Канонические уравнения прямой

Положение прямой вполне определено, если заданы лежащая на ней точка и направление. Направление прямой может быть задано любым ненулевым вектором, коллинеарным данной прямой и потому **называемым направляющим вектором прямой.**

Выведем уравнение прямой $\boldsymbol{l}$, проходящей через данную точку $\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{\boldsymbol{S}} = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$ (рис. 3).

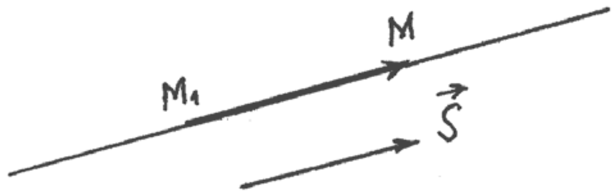

Рис. 3

Произвольная точка $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ лежит на прямой $\boldsymbol{l}$ только в том случае, если векторы $\overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_1)$ и $\vec{\boldsymbol{S}} = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$ коллинеарны, т.е. для них выполняется условие:

$$\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1}{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_1}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_1}{\boldsymbol{p}} \ . \tag{7}$$

Уравнения (7) (равенствами (7) фактически заданы два независимых уравнения) определяют прямую**,** проходящей через точку $\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1)$ в направлении вектора $\vec{\boldsymbol{S}} = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ и **называются каноническими уравнениями прямой**.

Замечание. Так как вектор $\vec{\boldsymbol{S}}$ - ненулевой, то все три числа $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$ не могут одновременно равняться нулю. Но одно или два из них может оказаться равным нулю. В аналитической геометрии допускается, например, такая запись:

$$\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1}{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_1}{0} = \frac{\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_1}{0},$$

которая означает, что вторая и третья координаты вектора $\vec{\boldsymbol{S}}$ равны нулю. Поэтому и вектор $\vec{\boldsymbol{S}} = (\boldsymbol{m}, 0, 0)$ и прямая заданная указанным способом перпендикулярны осям $\boldsymbol{Oy}$ и $\boldsymbol{Oz}$, т.е плоскости $\boldsymbol{yOz}$.

Пример. Составить уравнения прямой, перпендикулярной плоскости $2x-3y+4z-8=0$ и проходящей через точку пересечения этой плоскости с осью Oz.

Решение. Найдем точку пересечения данной плоскости с осью Oz. Так как любая точка лежащая на оси Oz имеет координаты $(0,0,z)$, то, полагая в заданном уравнении плоскости $x=y=0$, получим $4z-8=0$ или $z=2$. Следовательно, точка пересечения данной плоскости с осью Oz имеет координаты $(0,0,2)$. Поскольку искомая прямая перпендикулярна плоскости, она параллельна вектору ее нормали $\vec{N}_1=(2,-3,4)$. Поэтому направляющим вектором прямой может служить вектор нормали $\vec{S}=\vec{N}_1=(2,-3,4)$ заданной плоскости.

Теперь запишем искомое уравнение прямой, проходящей через точку $A(0,0,2)$ в направлении вектора $\vec{S}=(2,-3,4)$:

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-0}{-3}=\frac{z-2}{4} \quad \text{или} \quad \frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{4}.$$

14.4.2. Уравнения прямой, проходящей через две точки

Прямая может быть задана двумя лежащими на ней точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$. В этом случае направляющим вектором прямой может служить вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, т.е. $\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. Тогда уравнение (7) примет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{8}$$

Уравнения (8) **называются уравнениями прямой, проходящей через две точки** $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

Пример. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2;-3;5)$ и $M_1(-4;3;2)$.

Решение. Запишем искомые уравнения прямой в виде (8):

$$\frac{x-2}{-4-2}=\frac{y-3}{3-3}=\frac{z+5}{2+5}, \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{-6}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+5}{7}.$$

Так как $\vec{S}=(-6;0;7)$, то искомая прямая перпендикулярна оси Oy.

Пример. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M}_1(2;-3;5)$ параллельно прямой $\frac{\boldsymbol{x}-1}{2}=\frac{\boldsymbol{y}-2}{-1}=\frac{\boldsymbol{z}-3}{4}$.

Решение. Направляющим вектором искомой прямой может служить направляющий вектор $\vec{\boldsymbol{S}}=(2;-1;4)$ данной прямой, поскольку по условию эти прямые параллельны. Зная точку $\boldsymbol{M}_1(2;-3;5)$ и направляющий вектор $\vec{\boldsymbol{S}}=(2;-1;4)$ искомой прямой, запишем ее уравнение в виде (7):

$$\frac{\boldsymbol{x}-2}{2}=\frac{\boldsymbol{y}+3}{-1}=\frac{\boldsymbol{z}-5}{4}.$$

14.5. Прямая как линия пересечения плоскостей

Прямая в пространстве может быть определена как линия пересечения двух параллельных плоскостей $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{z}+\boldsymbol{D}_1=0$ и $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z}+\boldsymbol{D}_2=0$, т.е. как множество точек, удовлетворяющих системе двух линейных уравнений

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{z}+\boldsymbol{D}_1=0\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z}+\boldsymbol{D}_2=0.\end{cases} \tag{9}$$

Справедливо и обратное утверждение: система двух независимых линейных уравнений (9) определяет прямую как линию пересечения плоскостей (если они не параллельны).

Уравнения системы (9) **называются общими уравнениями прямой в пространстве $\boldsymbol{R}^3$.**

Пример. Составить канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями

$$\begin{cases}2\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+4=0\\ \boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}+2=0.\end{cases}$$

Решение. Чтобы написать канонические уравнения прямой или, что то же самое, уравнения прямой, проходящей через две данные точки, нужно найти координаты каких–либо двух точек прямой. Ими могут служить точки пересечения прямой с какими–нибудь двумя координатными плоскостями, например, $\boldsymbol{yOz}$ и $\boldsymbol{xOz}$.

Точка пересечения прямой с плоскостью $\boldsymbol{yOz}$ имеет абсциссу $\boldsymbol{x}=0$. Поэтому, полагая в данной системе уравнений $\boldsymbol{x}=0$, получим систему с двумя переменными:

$$\begin{cases}-5\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+4=0\\ \quad 2\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}+2=0.\end{cases}$$

Ее решение $\boldsymbol{y}=2$, $\boldsymbol{z}=6$ вместе с $\boldsymbol{x}=0$ определяет точку $\boldsymbol{A}(0;2;6)$ искомой прямой. Полагая затем в заданной системе уравнений $\boldsymbol{y}=0$, получим систему

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}+4=0 \\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}+2=0, \end{cases}$$

решение которой $\boldsymbol{x}=-2$, $\boldsymbol{z}=0$ вместе с $\boldsymbol{y}=0$ определяет точку $\boldsymbol{B}(-2;0;0)$ пересечения прямой с плоскостью $\boldsymbol{xOz}$.

Теперь на основании формулы (8) запишем уравнения прямой, проходящей через точки $\boldsymbol{A}(0;2;6)$ и $\boldsymbol{B}(-2;0;0)$:

$$\frac{\boldsymbol{x}-0}{-2-0}=\frac{\boldsymbol{y}-2}{0-2}=\frac{\boldsymbol{z}-6}{0-6} \quad \text{или} \quad \frac{\boldsymbol{x}}{1}=\frac{\boldsymbol{y}-2}{1}=\frac{\boldsymbol{z}-6}{3}, \text{ где } \vec{\boldsymbol{S}}=(1;1;3).$$

Пример. Прямая задана каноническими уравнениями

$$\frac{\boldsymbol{x}-2}{3}=\frac{\boldsymbol{y}+1}{5}=\frac{\boldsymbol{z}-3}{-1}.$$

Составить общие уравнения этой прямой.

Решение. Канонические уравнения прямой можно записать в виде систем двух независимых уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{x}-2}{3}=\dfrac{\boldsymbol{y}+1}{5} \\ \dfrac{\boldsymbol{x}-2}{3}=\dfrac{\boldsymbol{z}-3}{-1}. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}-13=0 \\ \boldsymbol{x}+3\boldsymbol{z}-11=0. \end{cases}$$

Получили общие уравнения прямой, которая теперь задана пересечением двух других плоскостей, одна из которых $5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}-13=0$ параллельна оси $\boldsymbol{Oz}$ $(\boldsymbol{C}=0)$, а другая $\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{z}-11=0$ - оси $\boldsymbol{Oy}$ $(\boldsymbol{B}=0)$.

Данную прямую можно представить в виде линии пересечения двух других плоскостей, записав ее канонические уравнения в виде другой пары независимых уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{x}-2}{3}=\dfrac{\boldsymbol{y}+1}{5} \\ \dfrac{\boldsymbol{y}+1}{5}=\dfrac{\boldsymbol{z}-3}{-1}. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}-13=0 \\ \boldsymbol{y}+5\boldsymbol{z}-14=0. \end{cases}$$

Замечание. Одна и та же прямая может быть задана различными системами двух линейных уравнений (т.е. пересечением различных плоскостей, так как через одну прямую можно провести бесчисленное множество плоскостей), а также различными каноническими уравнениями (в зависимости от выбора ее направляющего вектора).

14.6. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Требуется найти координаты точки $M(x, y, z)$ делящей отрезок прямой, заключенный между M_1 и M_2, в отношении $\lambda = |M_1M| : |MM_2|$.

Рассмотрим векторы

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \text{ и } \overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z).$$

Они коллинеарны и одинаково направлены (рис. 4), т.е. могут отличаться только длиной. По условию, $|M_1M| : |MM_2| = \lambda$, по этому $|M_1M| = \lambda |MM_2|$, или в координатной форме $(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \lambda(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$. Из равенства этих двух векторов следует равенство их координат:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \qquad y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \qquad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Отсюда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{10}$$

В частности, если точка M делит отрезок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$, и формулы (10) примут вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{11}$$

Отметим, что последние формулы знакомы читателю из школьной геометрии.

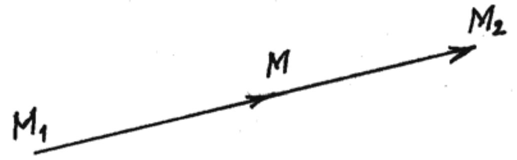

Рис. 4

Пример. Найти координаты точки M делящей пополам отрезок прямой

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 1}{5} = \frac{z - 3}{-1},$$

заключенный между плоскостями xOz и xOy.

Решение. Найдем точку пересечения прямой с плоскостью xOz, полагая в уравнениях прямой $y = 0$. Тогда получим

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{1}{5} = \frac{z - 3}{-1} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{z - 3}{-1} = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Из последней системы находим $x = 2{,}6;$ $z = 2{,}8$. Эти координаты вместе с $y = 0$ определяют точку $A(2{,}6;0;2{,}8)$.

Аналогично, xOz, полагая в уравнениях прямой $z = 0$, имеем

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = 3 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - 2 = 9, \\ y + 1 = 15, \end{cases}$$

откуда $x = 11;$ $y = 14$. Получим точку $B(11;14;0)$ пересечения прямой с плоскостью xOy. Зная координаты концов $A(2{,}6;0;2{,}8)$ и $B(11;14;0)$ отрезка AB по формулам (11) определим координаты точки M - середины отрезка AB:

$$x = \frac{2{,}6+11}{2} = 6{,}8; \qquad y = \frac{0+14}{2} = 7; \qquad z = \frac{2{,}8+0}{2} = 1{,}4.$$

Итак, $M(6{,}8;7;1{,}4)$ - искомая точка.

Ключевые слова и словосочетания

Вектор нормали к плоскости, общее уравнение плоскости, взаимно расположение плоскости, канонические уравнения прямой в пространстве, уравнение прямой проходящей через две точки, деление отрезка в данном отношении.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется вектором нормали к плоскости?

2. Разъясните, что означает фраза «Если известна какая-нибудь точка $M_0(x_0, y_0, z_o)$ плоскости P и какой-нибудь вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ нормали к ней, то этими двумя условиями плоскость в пространстве вполне определена»? Как можно получить уравнение плоскости, заданной этими условиями?

3. Что называется общим уравнением плоскости?

4. Приведите особенности расположения плоскости в тех случаях, когда те или иные коэффициенты уравнения $Ax + By + Cz + D = 0,$ равны нулю.

5. Когда две плоскости, заданные общими уравнениями параллельны?

6. Приведите условия, при которых плоскости совпадают.

7. Приведите необходимое и достаточное условие пересечения двух плоскостей.

8. Когда две плоскости, заданные общими уравнениями перпендикулярны?

9. Что называется направляющим вектором прямой в пространстве? Когда в пространстве положение прямой вполне определено?

10. Что называется каноническими уравнениями прямой в пространстве?

11. Что называется уравнением прямой в пространстве, проходящей через две точки?

12. Приведите формулы деления отрезка в данном отношении.

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и имеющей вектор нормали $\vec{\boldsymbol{N}} = (2;-1;3)$.

2. Даны две точки $\boldsymbol{A}(-3;0;1)$ и $\boldsymbol{B}(2;2;-3)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $\boldsymbol{A}$ и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

3. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

а) $2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} - 4\boldsymbol{z} + 12 = 0, \quad 4\boldsymbol{x} + 6\boldsymbol{y} - 8\boldsymbol{z} + 1 = 0$;

б) $\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{z} - 5 = 0, \quad \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} - 3\boldsymbol{z} + 9 = 0$;

в) $2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - 3\boldsymbol{z} + 4 = 0, \quad 6\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} - 9\boldsymbol{z} + 5 = 0$.

4. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

а) $5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - 3\boldsymbol{z} - 1 = 0, \quad 2\boldsymbol{x} - 5\boldsymbol{y} - 3\boldsymbol{z} + 6 = 0$;

б) $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} - 3 = 0, \quad 2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} + 5 = 0$;

в) $7\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} = 0, \quad \boldsymbol{x} - 7\boldsymbol{y} + 21\boldsymbol{z} + 3 = 0$.

5. Составить уравнения прямых, образованных пересечением плоскости $2\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} + 4\boldsymbol{z} + 3 = 0$ с координатными плоскостями.

6. Найти точки пересечения прямой

$$\begin{cases} 3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} - 4\boldsymbol{z} + 12 = 0, \\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} - 1 = 0 \end{cases}$$

с координатными плоскостями.

7. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;-3;0)$ параллельно:

а) вектору $\vec{A}=(1;-2;3)$; *б*) прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{3}$;

в) оси Ox; *г*) оси Oy; *д*) оси Oz.

8. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

а) $A(-2;0;1)$, $B(3;4;-5)$; *б*) $C(6;-1;2)$, $D(0;2;3)$.

9. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $A(2;-3;7)$
и $B(-5;2;0)$, и найти координаты точек пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

10. Записать общие уравнения прямой, заданной каноническими уравнениями:

а) $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{1}$; *б*) $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$.

11. Доказать, что прямые $\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{2}$ и $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{-4}$ перпендикулярны.

12. Составить канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями:

а) $\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0. \end{cases}$ *б*) $\begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0. \end{cases}$

ГЛАВА IV
ЛИНЕЙНЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 15. Линейные пространства. Евклидовы пространства

15.1. Определение линейного пространства

В курсах аналитической геометрии, математического анализа и алгебры можно встречаться с объектами различной природы - действительными и комплексными числами, векторами на прямой линии, на плоскости и в трехмерном пространстве; n - мерными векторами; матрицами; функциями, определенными на некотором отрезке. Для каждого типа таких объектов устанавливаются операции их сложения и умножения на число. Эти операции, несмотря на различие в их определении, в природе объектов, над которыми они совершаются, обладают существенными общими свойствами.

Можно отвлечься от конкретной природы этих объектов и построить содержательную общую теорию, результаты которой применимы в любом конкретном случае. Краткую схему построения такой теории мы и дадим в этом параграфе.

В этой теории основным понятием является понятие линейного пространства, которое вводится аксиоматически. Рассмотрим множество $\mathcal{L}$ элементов x, $y, z, \ldots$. Будем предполагать, что:

1) каждой паре двух элементов x и y ($x \in \mathcal{L}$, $y \in \mathcal{L}$) каким-то образом сопоставляется третий элемент z ($z \in \mathcal{L}$), **называемый их суммой** и обозначаемый через $z = x + y$;

2) каждому элементу $x \in \mathcal{L}$ и каждому числу λ сопоставляется элемент $u \in \mathcal{L}$, **называемый произведением элемента x число λ** и обозначаемый через $u = \lambda \cdot x$.

Множество $\mathcal{L}$ **называется линейным пространством**, если установленные для его элементов x, $y, z, \ldots$ операции сложения и умножения на число подчинены следующим аксиомам:

1°. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ для любых $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{L}$;

2°. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})$ - для любых $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathcal{L}$;

3°. существует элемент «нуль», обозначаемый через θ , и такой, что $\boldsymbol{x}+\theta=\boldsymbol{x}$ при любом $\boldsymbol{x}\in\mathcal{L}$;

4°. для любого элемента $\boldsymbol{x}$ - существует противоположный элемент $(-\boldsymbol{x})$, такой, что $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\theta$;

5°. $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$;

6°. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\boldsymbol{x}=\alpha\cdot(\beta\cdot\boldsymbol{x})$;

7°. $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$;

8°. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$,

где α и β - любые числа.

Элементы $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\ldots$ линейного пространства $\mathcal{L}$ **называются векторами.** В частности, элемент «нуль» называется нулевым вектором (нуль -вектором), противоположный элемент - противоположным вектором.

В качестве чисел мы можем взять либо комплексные числа, либо действительные. Линейное пространство **называется комплексным**, если для его векторов определено умножение на комплексные числа, и **действительным**, если определено умножение только на действительные числа.

Из приведенных аксиом могут быть выведены следующие свойства линейного пространства, доказательство которых мы опускаем:

1. В любом линейном пространстве существует единственный пулевой вектор.

2. В любом линейном пространстве для каждого вектора $\boldsymbol{x}$ существует единственный противоположный вектор $(-\boldsymbol{x})$, причем $(-\boldsymbol{x})=-1\cdot\boldsymbol{x}$.

3. В любом линейном пространстве для всякого вектора имеет место равенство $0\cdot\boldsymbol{x}=\theta$.

Замечание. Аксиома 4° позволяет ввести вычитание в линейном пространстве. Под разностью $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ мы будем понимать сумму $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y})$.

15.2. Примеры линейных пространств

В данном выше аксиоматическом определении линейного пространства природа векторов безразлична. Теперь переходим к конкретным примерам линейных пространств.

1. Множество действительных чисел составляет действительное линейное пространство. Аксиомы 1° - 8° выполняются в этом случае в силу свойств действий, установленных в арифметике.

Аналогично комплексные числа составляют комплексное линейное пространство.

2. Рассмотренные нами в §7 пространства $\boldsymbol{V}^1$, $\boldsymbol{V}^2$ и $\boldsymbol{V}^3$ являются примерами линейных пространств, так как установленные в этих пространствах правила сложения векторов и умножения вектора на число подчиняются аксиомам 1° - 8°.

3. Рассмотренное в §7 и §9 действительное арифметическое пространство $\boldsymbol{R}^n$ также является примером действительного линейного пространства, поскольку правила сложения векторов и умножения вектора на число, установленные в этом пространстве, подчиняются аксиомам 1° - 8°.

Аналогично комплексное арифметическое пространство $\boldsymbol{C}^n$ является примером комплексного линейного пространства.

4. Пространство $\boldsymbol{M}^n$, векторами которого являются квадратные матрицы порядка $\boldsymbol{n}$, также является примером линейного пространства, так как правила сложения квадратных матриц и умножения их на число подчиняются аксиомам 1°- 8°.

5. Векторами пространства $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ являются действительные функции $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ действительного аргумента, непрерывные на отрезке $\boldsymbol{a}\le\boldsymbol{t}\le\boldsymbol{b}$.

В этом пространстве сумма двух векторов определяется как обычная сумма соответствующих функций, произведение вектора на число - как обычное произведение соответствующей функции на это число:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}), \qquad \lambda\cdot\mathbf{x}=\lambda\cdot\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}).$$

Как будет известно из математического анализа, сумма двух функций (векторов нашего пространства), непрерывных на отрезке $\boldsymbol{a}\le\boldsymbol{t}\le\boldsymbol{b}$, и результат умножения такой функции (вектора нашего пространства) на число снова представляют собой функции, т. е. векторы нашего пространства, непрерывные на отрезке $a \le t \le b$.

Роль нулевого вектора в пространстве $C[a,b]$ играет функция, тождественно равная нулю на отрезке $a \le t \le b$, а противоположным вектором $(-x)$ является функции $(-1) \cdot x(t)$.

Установленные над рассматриваемыми функциями действия удовлетворяют всем аксиомам из определения линейного пространства. Проверка этого сводится к использованию законов арифметики при фиксированном t.

6. Таким же образом можно проверить, что множество всех многочленов степени, меньшей или равной n, с обычными действиями сложения и умножения на число представляет собой линейное пространство. Заметим, что множество всех многочленов степени, равной n, не будет линейным пространством, так как сумма таких многочленов может оказаться многочленом степени, меньшей n. Так, если

$$x \equiv P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

и

$$y \equiv Q_n(t) = a_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0$$

-многочлены степени n, то многочлен $P_n(x) - Q_n(x)$ имеет степень меньше n.

15.3. Линейная зависимость. Базис и координаты. Размерность

Аксиомы 1° - 8° линейного пространства выражают тот факт, что действия с векторами любого линейного пространства производятся в точности по тем же правилам, что и действия над вектор - столбцами. Это дает возможность перенести на абстрактное линейное пространство определение линейной зависимости векторов, данное для пространства R^n вектор - столбцов. Вообще, все свойства вектор - столбцов, использующие не их конкретную природу, а только правила линейных операций над ними, оказываются автоматически справедливыми и в абстрактном линейном пространстве $\mathcal{L}$.

Хорошим примером служит основная теорема о линейной зависимости векторов: **если векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k$ являются линейными комбинациями векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, причем $k > n$, то эти первые k векторов линейно зависимы.**

Доказательство, данное ранее для вектор - столбцов и не использующее их конкретную природу, дословно переносится на случай любого линейного пространства $\mathcal{L}$.

Напротив, обоснование утверждения **«всякие $(n+1)$ векторов пространства R^n линейно зависимы»** существенно опиралось на представление этих векторов как столбцовых матриц с n компонентами. **В применении к абстрактному линейному пространству это утверждение бессодержательно ввиду произвольности n.**

Рассмотрим примеры линейной зависимости в различных линейных пространствах.

Пример 1. Показать, что в пространстве $C[a,b]$ векторы $1, t, t^2, \ldots, t^n$, где n - любое целое положительное число, являются линейно независимыми.

Решение. Нулевым вектором в этом пространстве, как уже отмечалось, является функция, тождественно равная нулю. Предположим, что

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots + \lambda_n t^n \equiv 0 .$$

Если среди чисел λ_i - имеются отличные от нуля, то стоящий слева многочлен имеет не более n корней. Но у этого многочлена каждая точка интервала $[a,b]$ является корнем. Следовательно, все коэффициенты рассматриваемого многочлена равны нулю, т. е. векторы $1, t, t^2, \ldots, t^n$ линейно независимы.

Пример 2. Показать, что в пространстве $C[a,b]$ векторы $\mathbf{x}_1 = e^t$ и $\mathbf{x}_2 = 3e^t$ линейно зависимы.

Решение. Линейная зависимость данных векторов очевидна, так как

$$3\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \equiv 0 .$$

Аналогичным путем легко показать, что функции $\boldsymbol{y}_1 = \sin^2 \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{y}_2 = \cos^2 \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{y}_3 = \frac{1}{2}$, рассматриваемые как векторы пространства $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, линейно зависимы, так как

$$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 - 2\boldsymbol{y}_3 \equiv 0.$$

Базис и координаты в абстрактном линейном пространстве определяются точно так же, как в пространстве $\boldsymbol{R}^n$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 3. Указать один из базисов пространства многочленов не выше четвертой степени.

Решение. В качестве вектора $\boldsymbol{e}_1$ возьмем число 1, т.е. $\boldsymbol{e}_1 = 1$. В качестве векторов, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5$ возьмем соответственно функции $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}^2, \boldsymbol{t}^3, \boldsymbol{t}^4$. Очевидно, что все эти векторы линейно независимы и любой многочлен степени не выше четвертой является их линейной комбинацией.

Пример 4. Найти координаты многочлена $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) = 3 + 2\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}^2 + \boldsymbol{t}^3$ в базисе $\boldsymbol{e}_1 = 1$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{t} - 1$, $\boldsymbol{e}_3 = (\boldsymbol{t} - 1)^2$, $\boldsymbol{e}_4 = (\boldsymbol{t} - 1)^3$.

Решение. Пользуясь формулой Тейлора, разложим многочлен по степеням $(\boldsymbol{t} - 1)$:

$\boldsymbol{P}(1) = 5;$ $\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{t}) = 2 - 2\boldsymbol{t} + 3\boldsymbol{t}^2,$ $\boldsymbol{P}'(1) = 3;$ $\boldsymbol{P}''(\boldsymbol{t}) = -2 + 6\boldsymbol{t},$ $\boldsymbol{P}''(1) = 4;$ $\boldsymbol{P}'''(\boldsymbol{t}) = 6,$ $\boldsymbol{P}'''(1) = 6.$

Следовательно, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) = 5 + 3(\boldsymbol{t} - 1) + 2(\boldsymbol{t} - 1)^2 + (\boldsymbol{t} - 1)^3$. Откуда следует, что координатами данного многочлена $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) = 3 + 2\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}^2 + \boldsymbol{t}^3$ в заданном базисе будут числа 5, 3, 2, 1.

Введя понятие базиса в абстрактном линейном пространстве, с помощью основной теоремы о линейной зависимости векторов легко установить, что **все базисы линейного пространства $\mathcal{L}$ если они существуют, состоят из одинакового числа векторов.** Доказательство точно такое же, как в случае конечной совокупности векторов-столбцов.

Далее имеем: **если в линейном пространстве существует базис из n векторов, то любые $(n+1)$ векторов этого пространства**

линейно зависимы. И это утверждение является следствием цитированной только что основной теоремы.

Наконец, **если в линейном пространстве $\mathcal{L}$ существует система из n линейно независимых векторов, а всякая система из $(n+1)$ векторов линейно зависима, то n линейно независимых векторов образуют базис этого пространства.**

Действительно, присоединив к указанным n векторам $\{\mathbf{e}_j\}$ произвольный вектор $\mathbf{x}$ из $\mathcal{L}$, получим согласно условию линейно зависимую систему. Иначе говоря,

$$\lambda_0\mathbf{x} + \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n = \theta,$$

причем не все λ_j равны нулю. Очевидно, $\lambda_0 \neq 0$, в противном случае система $\{\mathbf{e}_j\}$ была бы линейно зависима. Но если $\lambda_0 \neq 0$, то $\mathbf{x}$ линейно выражается через $\{\mathbf{e}_j\}$, что и требовалось доказать.

Теперь можно дать определение **размерности пространства** как максимального числа (если такое существует) линейно независимых векторов этого пространства. В силу отмеченных выше утверждений **размерность пространства совпадает с числом его базисных векторов.** Оговорка относительно существования размерности не является излишней. Так, в пространстве $C[a,b]$ векторы $1, t, t^2, ..., t^n$, как уже было показано, линейно независимы при любом n.

Пространства, обладающие бесконечным множеством линейно независимых векторов, называются бесконечномерными.

Кроме $C[a,b]$, бесконечномерным является, например, пространство всех многочленов. Напротив, пространство многочленов степени не выше n конечномерно, и его размерность равна $(n+1)$. Для доказательства достаточно заметить, что базисом его будет, в частности, система векторов $1, t, t^2, ..., t^n$.

Пример 6. Найти базис и размерность линейного пространства M^2, состоящего из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - действительные числа.

Решение. В качестве базиса можно взять следующую четверку матриц:

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

Действительно, любая матрица (*) разлагается по матрицам (**):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{e_1} + a_{12}\mathbf{e_2} + a_{21}\mathbf{e_3} + a_{22}\mathbf{e_4},$$

а линейная независимость матриц (**) следует из того, что равенство

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{e_1} + a_{12}\mathbf{e_2} + a_{21}\mathbf{e_3} + a_{22}\mathbf{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Возможно только при $a_{11} = 0,\ a_{12} = 0,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = 0$. Таким образом, размерность пространства M^2 равна 4.

Определение подпространства также не отличается от соответствующего определения для случая R^n. Заметим только, что **всякое подпространство линейного пространства само является линейным пространством.** Доказательство очевидно.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. В пространстве квадратных матриц порядка n подпространствами будут, например, множество диагональных матриц и множество симметричных матриц. Размерность подпространства диагональных матриц равна n, а размерность подпространства симметричных матриц равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Проверка предоставляется читателю.

2. Пространство бесконечно гладких (бесконечно дифференцируемых) функций представляет собой подпространство пространства $C[a,b]$. Оно обозначается через $C^\infty[a,b]$.

3. В пространстве $C[a,b]$ подпространством будет множество всех многочленов, так как сумма любых двух многочленов, а также произведение многочлена на любое число есть снова многочлен.

Рассмотрим в заключение действия над векторами в конечномерном линейном пространстве.

Теорема. В конечномерном линейном пространстве координаты вектора в фиксированном базисе определены однозначно. Для существования линейной зависимости между векторами необходимо и достаточно существование такой же зависимости между столбцами из координат этих векторов.

Доказательство соответствующего утверждения для пространства R^n использует только определение линейной зависимости, существование базиса и правила линейных операций с векторами. Поэтому результат остается справедливым для любого конечномерного линейного пространства.

15.4. Изоморфизм конечномерных линейных пространств

Рассмотрим два множества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ некоторых элементов $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ причем $x_1, x_2, \ldots \in \mathcal{X}$, а $y_1, y_2, \ldots \in \mathcal{Y}$.

Будем говорить, что **между множествами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ установлено взаимно однозначное соответствие**, если указано правило, согласно которому каждому элементу $x \in \mathcal{X}$ сопоставлен один и только один элемент $y \in \mathcal{Y}$ и при этом каждый элемент $y \in \mathcal{Y}$ сопоставлен одному и только одному элементу $x \in \mathcal{X}$.

Такое взаимно однозначное соответствие имеет, например, место между буквами в двух экземплярах текста, отпечатанного под копирку, или между точками на фотопленке и соответствующими точками отпечатка на фотобумаге.

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ - два линейных пространства.

Будем говорить, что **между этими пространствами установлен изоморфизм** или что **эти пространства изоморфны,** если между векторами этих пространств установлено взаимно однозначное соответствие, сохраняющееся при линейных операциях над векторами, т.е. из того, что

$$x_1 \longleftrightarrow y_1, \qquad x_2 \longleftrightarrow y_2,$$

следует, что

$$x_1 + x_2 \longleftrightarrow y_1 + y_2,$$

а из того, что

$$x \longleftrightarrow y,$$

следует, что

$$\lambda x \longleftrightarrow \lambda y.$$

Иначе говоря, изоморфизм - это взаимно однозначное соответствие, сохраняющееся при сложении векторов, а также при умножении их на числа.

15.5. Условие изоморфности линейных пространств

Рассмотрим два линейных пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$; при этом будем предполагать, что оба пространства действительные.

Теорема. Для того чтобы два конечномерных линейных пространства были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковую размерность.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ - два линейных пространства одной и той же размерности n. Чтобы установить их изоморфизм, выберем произвольные базисы $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n \in \mathcal{X}$, а $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\ldots,\mathbf{f}_n \in \mathcal{Y}$ и сопоставим векторы базисов следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathbf{e}_1 \longleftrightarrow \mathbf{f}_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .\\ \mathbf{e}_n \longleftrightarrow \mathbf{f}_n\end{gathered}$$

Теперь соответствие легко распространяется на все векторы из пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$:

$$\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n \longleftrightarrow \xi_1\mathbf{f}_1 + \xi_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \xi_n\mathbf{f}_n. \tag{1}$$

Так как при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, то при умножении на число λ векторов, стоящих слева и справа в (1), получаются соответствующие друг другу векторы

$$\lambda\xi_1\mathbf{e}_1 + \lambda\xi_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda\xi_n\mathbf{e}_n \longleftrightarrow \lambda\xi_1\mathbf{f}_1 + \lambda\xi_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \lambda\xi_n\mathbf{f}_n. \tag{2}$$

Аналогично соответствие сохраняется при сложении векторов, т.е. если

$$\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n \longleftrightarrow \xi_1\mathbf{f}_1 + \xi_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \xi_n\mathbf{f}_n,$$

$$\eta_1\mathbf{e}_1 + \eta_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \eta_n\mathbf{e}_n \longleftrightarrow \eta_1\mathbf{f}_1 + \eta_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \eta_n\mathbf{f}_n,$$

то

$$\begin{gathered}(\xi_1+\eta_1)\mathbf{e}_1 + (\xi_2+\eta_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (\xi_n+\eta_n)\mathbf{e}_n \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow (\xi_1+\eta_1)\mathbf{f}_1 + (\xi_2+\eta_2)\mathbf{f}_2 + \cdots + (\xi_n+\eta_n)\mathbf{f}_n.\end{gathered} \tag{3}$$

Необходимость. Предположим, что пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ изоморфны. Пусть одно из них, например $\mathcal{Y}$, имеет размерность n. Покажем, что пространство $\mathcal{X}$ также n-мерно.

Возьмем в пространстве $\mathcal{Y}$ базис $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ и найдем в пространстве $\mathcal{X}$ те векторы, которые при изоморфизме соответствуют векторам этого базиса. Обозначим их через $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Нам достаточно проверить, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ образуют базис в пространстве $\mathcal{X}$, т.е. что они линейно независимы и что любой вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ является их линейной комбинацией.

Допустим, что

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n. \tag{4}$$

Тогда

$$\lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{f}_n, \tag{5}$$

ибо при изоморфизме нулевому вектору, как легко проверить, соответствует нулевой вектор. Но по условию векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ образуют базис и, следовательно, являются линейно независимыми; это означает, что

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Следовательно, векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейно независимы.

Теперь возьмем любой вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Пусть ему соответствует $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$. Разложим вектор $\mathbf{y}$ по базису $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$:

$$\mathbf{y} = \xi_1\mathbf{f}_1 + \xi_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \xi_n\mathbf{f}_n.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{X}$ вектор

$$\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n.$$

В силу определения изоморфизма

$$\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n \longleftrightarrow \xi_1\mathbf{f}_1 + \xi_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \xi_n\mathbf{f}_n.$$

Но вектору $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ соответствует вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, значит,

$$\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n = \mathbf{x}.$$

Таким образом, мы показали, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ есть базис в пространстве $\mathcal{X}$; следовательно, пространство $\mathcal{X}$ n-мерно, что и требовалось доказать.

Замечание. Установленный здесь результат означает, что изучение свойств любого конечномерного линейного пространства равносильно изучению арифметического пространства $\boldsymbol{R}^n$. Отсюда ясно, почему именно этому пространству мы уделили такое исключительное внимание.

15.6. Евклидово пространство

В предыдущих пунктах данного параграфа были введены и изучены некоторые важные понятия, относящиеся к линейным пространствам, такие как базис, размерность, подпространство. Однако линейные пространства существенно отличаются от пространства, изучаемого в аналитической геометрии, тем, что у векторов рассматриваемых пространств нет длины и нет угла между векторами. Эти понятия просто не определены.

В элементарной геометрии (метод координат) при помощи известных понятий длины вектора и угла мы определили скалярное произведение векторов. Оказывается, что длина вектора и угол между векторами могут быть, выражены через скалярное произведение векторов. Следовательно, важным является введение понятия скалярного произведения.

Для арифметического $\boldsymbol{n}$- мерного пространства $\boldsymbol{R}^n$, которое является примером линейного пространства (см. п.15.2), ранее в §7 , по аналогии со свойствами трехмерного пространства, нами были введены понятие скалярного умножения. Отметим, что там мы скалярное произведение определили безотносительно к углам, а затем первоначальное определение скалярного произведения применили для определения угла между двумя векторами и длины вектора.

Ниже мы дадим абстрактное определение скалярного пространства в действительном линейном пространстве. Для пространства, снабженного таким произведением – евклидова пространства – дадим схему построения теории, включающую все основные геометрические факты, имеющие место в обычном трехмерном пространстве. Еще раз отметим, что для арифметического $\boldsymbol{n}$- мерного пространства $\boldsymbol{R}^n$ нами это уже сделано в

§7, когда еще мы были незнакомы с понятием линейного пространства и не знали, что $\boldsymbol{R}^n$ образует линейное пространство.

15.7. Скалярное произведение. Определение евклидова пространства

Действительное линейное пространство $\mathcal{E}$ **называется евклидовым пространством,** если каждой паре векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из $\mathcal{E}$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое символом $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ и **называемое скалярным произведением векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$,** причем выполняются следующее условия (аксиомы):

1^0. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$;

2^0. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$;

3^0. $(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$;

4^0. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \geq 0$, причем $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} = \theta$.

Здесь $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ - произвольные вектора из $\mathcal{E}$, α - произвольное действительное число.

Линейное пространство, в котором скалярное произведение не введено, называется аффинным пространством.

Примеры

1. Типичным примером евклидова пространства является арифметическое $\boldsymbol{n}$-мерное пространство $\boldsymbol{R}^n$, в котором скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)'$ и $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)'$ задано правилом (см. §7):

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv (\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n .$$

2. В линейном пространстве $C[a,b]$ скалярное произведение векторов (функций) $\boldsymbol{x} = x(t)$ и $\boldsymbol{y} = y(t)$ можно ввести по формуле

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int_a^b x(t)y(t)dt .$$

Легко проверить, применяя основные правила интегрирования, что аксиомы скалярного произведения выполняются и, следовательно, пространство $C[a,b]$ является евклидовым.

3. В линейном пространстве многочленов с действительными коэффициентами степени, не превосходящей 2, скалярное

произведение векторов (многочленов степени ≤ 2) $\mathbf{x}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$ и $\mathbf{y}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t})$ можно ввести по формуле

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\boldsymbol{P}(-1)\boldsymbol{Q}(-1)+\boldsymbol{P}(0)\boldsymbol{Q}(0)+\boldsymbol{P}(1)\boldsymbol{Q}(1).$$

Проверим выполнимость аксиом скалярного произведения.

1^0. $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})$ в силу переместительности умножения чисел.

2^0. Проверим, что $(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{z})+(\mathbf{y},\mathbf{z})$. Пусть $\mathbf{z}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})$. Имеем

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})=[\boldsymbol{P}(-1)+\boldsymbol{Q}(-1)]\boldsymbol{S}(-1)+[\boldsymbol{P}(0)+\boldsymbol{Q}(0)]\boldsymbol{S}(0)+[\boldsymbol{P}(1)+\boldsymbol{Q}(1)]\boldsymbol{S}(1)=$$
$$=[\boldsymbol{P}(-1)\boldsymbol{S}(-1)+\boldsymbol{P}(0)\boldsymbol{S}(0)+\boldsymbol{P}(-1)\boldsymbol{S}(-1)]+[\boldsymbol{Q}(-1)\boldsymbol{S}(-1)+\boldsymbol{Q}(0)\boldsymbol{S}(0)+\boldsymbol{Q}(1)\boldsymbol{S}(1)]=$$
$$=(\mathbf{x},\mathbf{z})+(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

3^0. Проверим, что $(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})=\alpha(\mathbf{y},\mathbf{x})$, где α - произвольное действительное число

$$(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})=\alpha\boldsymbol{P}(-1)\boldsymbol{Q}(-1)+\alpha\boldsymbol{P}(0)\boldsymbol{Q}(0)+\alpha\boldsymbol{P}(1)\boldsymbol{Q}(1)=$$
$$=\alpha[\boldsymbol{P}(-1)\boldsymbol{Q}(-1)+\boldsymbol{P}(0)\boldsymbol{Q}(0)+\boldsymbol{P}(1)\boldsymbol{Q}(1)]=\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

4^0. Для любого многочлена $\mathbf{x}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$ справедливо неравенство

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})=\boldsymbol{P}^2(-1)+\boldsymbol{P}^2(0)+\boldsymbol{P}^2(1)\ge 0.$$

Покажем, что если $(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$, то $\mathbf{x}=\boldsymbol{P}=\theta$. Пусть $(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$, т.е.

$$\boldsymbol{P}^2(-1)+\boldsymbol{P}^2(0)+\boldsymbol{P}^2(1)=0.$$

Отсюда получаем

$$\boldsymbol{P}(-1)=\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{P}(1)=0.$$

Так как степень многочлена $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$ не превосходит 2, то число корней этого многочлена не может быть более чем 2. Следовательно, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})\equiv 0$, т.е. $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$ - нулевой элемент пространства многочленов с действительными коэффициентами степени, не превосходящей 2.

Таким образом, введенное скалярное произведение, по указанной формуле рассматриваемое линейное пространство превращает в евклидовое пространство.

15.8. Основные метрические понятия

Имея скалярное произведение, мы можем дать определения основных метрических понятий – длины вектора и угла между векторами в евклидовом пространстве.

Длиной вектора $\mathbf{x}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называется величина

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}.$$

Примеры

1. В евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$ для вектора $\boldsymbol{x} \equiv X = (x_1, x_2, ..., x_n)'$
получается выражение длины в виде

$$|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

2. В евклидовом пространстве $C[a,b]$ длина вектора $\boldsymbol{x} = x(t)$ вычисляется по формуле

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}\,.$$

Эту величину обозначают иногда $\|x(t)\|$ и **называют нормой функции** $x(t)$ (чтобы избежать ложных ассоциаций, связанных со словами «длина функции»).

В любом евклидовом пространстве между длинами двух векторов и их скалярным произведением имеет место такое же неравенство, как в обычном трехмерном пространстве. Именно справедлива следующая теорема.

Теорема. Модуль скалярного произведения векторов из евклидового пространства не превосходит произведения модулей этих векторов, т.е.

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \le |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\,.$$

Это неравенство **называется неравенством Коши – Буняковского - Шварца**. **Мы будем его называть просто неравенством Коши.**

Для пространства $\boldsymbol{R}^n$ это неравенство имеет вид

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}\,.$$

Доказательство этого неравенства приведено в §7.

Для пространства $C[a,b]$ это неравенство запишется так:

$$\left|\int_a^b x(t)y(t)dt\right| \le \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |y(t)|^2 dt}\,.$$

Первое из этих неравенств было открыто французским математиком Коши в 1821 году; второе, спустя треть века, русским математиком Буняковским. Шварц опубликовал соответствующие неравенства в 1885 году.

Имеют место следующие свойства длины вектора:

1^0. $|\boldsymbol{x}| \geq 0$, причем $|\boldsymbol{x}| = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} = \theta$;

2^0. $|\lambda\boldsymbol{x}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{x}|$, где λ - действительное число;

3^0 $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ (неравенство треугольника).

Вектор $\boldsymbol{x}$, имеющий длину 1, **называется нормированным**. Всякий ненулевой вектор $\boldsymbol{y}$ можно нормировать, т.е. умножить на такое число λ, чтобы в результате получился нормированный вектор. Действительно, уравнение $|\lambda\boldsymbol{y}| = 1$ относительно λ имеет решение, например,

$$\lambda = \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}.$$

Множество $\boldsymbol{M} \subset \mathcal{E}$ называется **ограниченным**, если длины всех векторов $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$ ограничены фиксированной константой. Примерами ограниченных множеств являются **единичный шар** пространства $\mathcal{E}$ - совокупность всех векторов $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}$ с длиной, не превышающей единицы, а также единичная сфера - совокупность всех векторов $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}$ с длиной, равной 1.

Углом между двумя векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{x} \neq \theta$ и $\boldsymbol{y} \neq \theta$) в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, называется угол φ, удовлетворяющий двум условиям:

$$\boldsymbol{a})\quad \cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|}, \qquad \boldsymbol{б})\quad (\varphi \in [0; \pi].$$

Условие б) гарантирует единственное значение угла φ. Корректность определения угла между двумя векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ вытекает из справедливости неравенства Коши

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|.$$

Векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ **называются ортогональными,** если $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Если $\boldsymbol{x} \neq \theta$ и $\boldsymbol{y} \neq \theta$ понятие ортогональности векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ означает, что $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ образует угол 90°. Нулевой вектор оказывается ортогональным к любому вектору $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}$.

Ортонормированная система векторов – это ортогональная система нормированных векторов. Она не может содержать нулевой вектор, и всегда линейно независима. Ортонормированный базис – это базис, составляющий ортонормированную систему. Ортогональный, а следовательно, и ортонормированный базис в конечномерном евклидовом пространстве можно строить многими методами. Более удобным является процесс ортогонализации Шмидта[11]. С помощью процесса Шмидта любой базис преобразуется в ортонормированный. Поэтому любое конечномерное евклидово пространство обладает ортонормированным базисом [3]. С такими базисами работать очень удобно, так как скалярное произведение в них вычисляется просто как сумма произведений координат с одинаковыми индексами.

15.9. Изоморфизм евклидовых пространств

Задавая в линейном пространстве различные скалярные произведения, мы будем получать различные евклидовы пространства. Оказывается, тем не менее, что в конечномерном случае, эти евклидовы пространства ничем существенным друг от друга не отличаются. Можно доказать, что как и для линейных пространств, единственной существенной характеристикой конечномерного евклидова пространства является его размерность.

Будем говорить, что **два евклидовых пространства $\mathcal{E}_1$, и $\mathcal{E}_2$** со скалярными произведениями $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ и $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ **называются изоморфными**, если они изоморфны как линейные пространства и если при этом скалярные произведения соответствующих пар векторов одинаковы, т. е. из того, что

$$\mathbf{x}_1 \longleftrightarrow \mathbf{x}_2, \qquad \mathbf{y}_1 \longleftrightarrow \mathbf{y}_2,$$

следует, что

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2).$$

[11] Этот процесс мы изложили ранее (§9) в связи с построением ортонормированного базиса в пространстве $\boldsymbol{R}^n$.

Имеет место следующая теорема, которую примем без доказательства.

Теорема. Два конечномерных евклидовых пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же размерность.

Ключевые слова и словосочетания

Линейное пространство, подпространство, базис, размерность, евклидово пространство, длина вектора, угол между векторами, нормированный вектор, ортогональные векторы, изоморфизм.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение линейного пространства.

2. Приведите примеры линейных пространств.

3. Как вводится понятия базис и координаты в абстрактном линейном пространстве?

4. Дайте определение размерности линейного пространства. Когда линейное пространство называется бесконечномерным? Приведите пример.

5. Как определяется подпространство в абстрактном линейном пространстве? Чем это определение отличается от соответствующего определения для случая $\boldsymbol{R^n}$?

6. Что означает изоморфизм конечномерных линейных пространств?

7. Приведите условия изоморфности линейных пространств.

8. Равносильно ли изучение свойств любого конечномерного линейного пространства изучению арифметического пространства $\boldsymbol{R^n}$? Разъясните ответ.

9. Дайте определение евклидового пространства.

10. Дайте определения основных метрических понятий – длины вектора и угла между векторами в евклидовом пространстве.

11. Приведите свойства длины вектора. Какой вектор называется нормированным?

12. Какие векторы называются ортогональными?

13. Что означает изоморфизм конечномерных евклидовых пространств?

14. Приведите условия изоморфности евклидовых пространств.

Задачи для самостоятельного решения

1. Образует ли множество всех векторов на плоскости, начала которых находятся в начале координат, а концы – в пределах первой четверти, линейное пространство (с обычными операциями)?

2. Образует ли линейное пространство множество всех векторов на плоскости с исключением векторов, параллельных некоторой заданной прямой?

3. Пусть $\boldsymbol{R}_{+}^{1}$ – множество положительных действительных чисел. Введем операции по следующим правилам: под «сложением» двух чисел будем понимать их (обычное) умножение, а под «произведением» элемента $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}_{+}^{1}$ на действительное число λ будем понимать (обычное) возведение числа $\boldsymbol{r}$ в степень λ. Является ли множество $\boldsymbol{R}_{+}^{1}$ с указанными в нем операциями линейным пространством?

4. Найти координаты многочлена

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) = 5 - 2(\boldsymbol{t}+1) + 3(\boldsymbol{t}+1)^2 + (\boldsymbol{t}+1)^3$$

в базисе $\mathbf{e_1} = 1$, $\mathbf{e_2} = \boldsymbol{t}$, $\mathbf{e_3} = \boldsymbol{t}^2$, $\mathbf{e_4} = \boldsymbol{t}^3$.

5. Найти координаты многочлена $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) = 3 - 2\boldsymbol{t} + \boldsymbol{t}^2 - 4\boldsymbol{t}^3 + 6\boldsymbol{t}^4 - 20\boldsymbol{t}^5$ в базисе

а) $\mathbf{e_1} = 1$, $\mathbf{e_2} = (\boldsymbol{t}-1)$, $\mathbf{e_3} = (\boldsymbol{t}-1)^2$, $\mathbf{e_4} = (\boldsymbol{t}-1)^3$, $\mathbf{e_5} = (\boldsymbol{t}-1)^4$, $\mathbf{e_6} = (\boldsymbol{t}-1)^5$;

б) $\mathbf{e_1} = 1$, $\mathbf{e_2} = (\boldsymbol{t}+1)$, $\mathbf{e_3} = (\boldsymbol{t}-1)^2$, $\mathbf{e_4} = (\boldsymbol{t}+1)^3$, $\mathbf{e_5} = (\boldsymbol{t}+1)^4$, $\mathbf{e_6} = (\boldsymbol{t}+1)^5$.

6. Существует ли базис у линейного пространства $\boldsymbol{R}_{+}^{1}$ (задача 3)?

7. Какова размерность линейного пространства $\boldsymbol{R}_+^1$ (задача 3)?

8. Согласно теореме из п.5 данного параграфа одномерные пространства $\boldsymbol{R}^1$ и $\boldsymbol{R}_+^1$ (задача 3) изоморфны. Как можно осуществить этот изоморфизм?

9. Пусть P_3 – множество всех многочленов степени, меньшей или равной 3. Убедитесь в том, что P_3 изоморфно арифметическому линейному пространству $\boldsymbol{R}^3$. Если векторам базиса $1, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}^2$ пространства P_3 сопоставлены соответственно векторы базиса

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

пространства $\boldsymbol{R}^3$, то какой вектор из P_3 будет соответствовать вектору

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

из $\boldsymbol{R}^3$ и какой вектор из $\boldsymbol{R}^3$ будет соответствовать вектору $-4\boldsymbol{t}^2$ из P_3.

10. Назовем скалярным произведением двух векторов пространства $\boldsymbol{R}^3$ произведение их длин. Будет ли пространство евклидовым?

11. А если назвать скалярным произведением двух векторов того же пространства произведение их длин на куб косинуса угла между ними?

12. А если назвать скалярным произведением удвоенное обычное скалярное произведение этих векторов?

13. Найти угол между противоположными ребрами правильного тетраэдра.

14. Найти углы в треугольнике, образованным в пространстве $\boldsymbol{C}[-1,1]$ векторами $\boldsymbol{x_1} = 1$, $\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{x_3} = 1 - \boldsymbol{t}$.

§ 16. Линейные операторы

16.1. Основные определения. Примеры операторов

Пусть $\mathcal{X}$ - линейное пространство. Предположим, что на этом пространстве задана векторная (векторнозначная) функция $\boldsymbol{y} = \mathbf{A}(\boldsymbol{x})$, т.е. каждому вектору $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ сопоставляется вектор $\boldsymbol{y} \in \mathcal{X}$.

Такая функция **называется оператором, или преобразованием,** действующим в пространстве. При этом вектор $\boldsymbol{y}$ мы **будем называть образом вектора** $\boldsymbol{x}$, и записывать его в виде $\boldsymbol{y} = \mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ или $\boldsymbol{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$, а вектор $\boldsymbol{x}$ - прообразом вектора $\boldsymbol{y}$.

Оператор $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ **называется линейным**, если выполняется следующее условие:

$$\mathbf{A}(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1 \mathbf{A}(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 \mathbf{A}(\boldsymbol{x}_2), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ - любые векторы линейного пространства $\mathcal{X}$, а λ_1 и λ_2 - любые числа.

Иначе говоря, линейный оператор переводит сумму векторов в сумму их образов, произведение вектора на число - в произведение образа этого вектора на то же число.

Примеры операторов

1. Оператор, который любой вектор пространства $\mathcal{X}$ переводит в нулевой вектор, **называется нулевым оператором** и записывается так:

$$\mathbf{O}(\boldsymbol{x}) = \theta .$$

Очевидно, что нулевой оператор является линейным.

2. Оператор, который любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ переводит в самого себя, **называется единичным, или тождественным** оператором и записывается так:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} .$$

Очевидно, что единичный оператор также является линейным.

3. Оператор $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$, который любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ переводит в вектор $\lambda \boldsymbol{x}$, где λ - фиксированное число, **называется оператором подобного растяжения, или оператором подобия.**

Покажем, что оператор подобия линеен. Применим его к вектору $\mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{x_1}+\lambda_2\mathbf{x_2}$:

$$\mathbf{A}(\lambda_1\mathbf{x_1}+\lambda_2\mathbf{x_2})=\lambda(\lambda_1\mathbf{x_1}+\lambda_2\mathbf{x_2})=\lambda_1(\lambda\mathbf{x_1})+\lambda_2(\lambda\mathbf{x_2}).$$

Отсюда видно, что соотношение (1) выполняется.

Замечание. Первый и второй примеры являются частными случаями третьего. Первый - при $\lambda=0$, второй - при $\lambda=1$.

4. Возьмем в пространстве $\mathcal{X}$ базис $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\ldots,\mathbf{e_n}$. Оператор $\mathbf{P}$, который любой вектор

$$\mathbf{x}=\xi_1\mathbf{e_1}+\xi_2\mathbf{e_2}+\cdots+\xi_n\mathbf{e_n}$$

переводит в вектор

$$\mathbf{y}=\xi_1\mathbf{e_1}+\xi_2\mathbf{e_2}+\cdots+\xi_k\mathbf{e_k},$$

где $k<n$, **называется оператором проектирования** на подпространство, натянутое на векторы $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\ldots,\mathbf{e_k}$.

Ясно, что применение оператора $\mathbf{P}$ к вектору $\mathbf{x}$ эквивалентно замене нулями последних $n-k$ слагаемых в разложении вектора $\mathbf{x}$ по данному фиксированному базису.

Легко проверить, что оператор проектирования линеен.

5. В пространстве $C[a,b]$ умножение заданной функции на любую фиксированную непрерывную функцию $\varphi(t)$, например, на $\varphi(t)\equiv t$, является линейным оператором.

6. В пространстве $C^{\infty}[a,b]$ бесконечно дифференцируемых на $[a,b]$ функций дифференцирование заданной функции

$$\mathbf{D}x(t)=x'(t))$$

является линейным оператором, так как производная от суммы функций равна сумме производных этих функций, а производная от произведения функции на число равна произведению производной функции на это число.

16.2. Общий вид линейного оператора в конечномерном пространстве

Пусть $\mathcal{X}$ - конечномерное пространство, $\{\mathbf{e_i}\}$ - его базис, $\mathbf{A}$ - линейный оператор, действующий в этом пространстве.

Пусть

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{f}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{A}(\mathbf{e}_n) = \mathbf{f}_n = a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{e}_n, \end{cases} \tag{2}$$

или короче

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{f}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i \qquad (j = 1,2,...,n). \tag{2$'$}$$

Здесь векторы $\mathbf{f}_j$, представляющие собой образы векторов $\mathbf{e}_j$, разложены по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Возьмем любой вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ и разложим его по базису $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n,$$

тогда

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \mathbf{A}(\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n).$$

Воспользовавшись сначала линейностью оператора, а затем соотношением (2), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} &= \mathbf{A}(\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n) = \xi_1\mathbf{f}_1 + \xi_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \xi_n\mathbf{f}_n) = \\ &= \xi_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{e}_n) + \cdots + \xi_n\big(a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{e}_n\big) = \\ &= (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n)\mathbf{e}_1 + \cdots + (a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n)\mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Обозначим координаты вектора $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ через η_i. Тогда в силу единственности координат

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1n}\xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n = a_{n1}\xi_1 + \cdots + a_{nn}\xi_n. \end{cases} \tag{3}$$

В матричной форме эти соотношения запишутся так:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{22} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \qquad (3')$$

или короче

$$Y = (a_{ij})X\,. \qquad (3'')$$

Таким образом, если вектор $\mathbf{x}$ имеет координаты, ξ_i, а вектор $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ имеет координаты η_i в базисе $\{\mathbf{e_j}\}$, то столбец Y получается из столбца X по формуле (3΄΄).

Итак, линейному оператору $\mathbf{A}$ сопоставлена в данном базисе $\{\mathbf{e_j}\}$ матрица $A = (a_{ij})$], **называемая матрицей оператора $\mathbf{A}$** в базисе $\{\mathbf{e_j}\}$. В этой матрице первый столбец состоит из координат образа 1-го базисного вектора, второй столбец - из координат образа 2-го базисного вектора и т.д., последний столбец - из координат образа последнего базисного вектора.

Пусть теперь $A = (a_{ij})$ - произвольная квадратная матрица, порядок которой равен размерности пространства. Определим оператор $\mathbf{A}$ формулами (3΄΄), т.е. положим $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, где координаты вектора $\mathbf{y}$ вычисляются по координатам вектора $\mathbf{x}$ с помощью формул (3΄΄) при фиксированном базисе.

Легко проверить, что такой оператор линеен и каждому $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ставит в соответствие сектор $\mathbf{y}$, также принадлежащий $\mathcal{X}$.

Таким образом, **формула (3΄΄) дает общий вид линейного оператора в конечномерном пространстве.**

Из равенств (3) видно, что координаты вектора $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ **линейно** выражаются через координаты вектора $\mathbf{x}$.

Иногда говорят, что в равенствах (3) числа $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ получены из чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ с помощью **линейного преобразования,** задаваемого матрицей $A = (a_{ij})$. В этом случае матрицу A называют **матрицей линейного преобразования.**

Пример. Пусть в пространстве $\mathcal{X} = \boldsymbol{R}^3$ линейный оператор $\mathbf{A}$ в базисе $\boldsymbol{E}_1 = (1,0,0)'$, $\boldsymbol{E}_2 = (0,1,0)'$, $\boldsymbol{E}_3 = (0,0,1)'$ задан матрицей

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Найти образ $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ - вектора $\mathbf{x} = 4\boldsymbol{E} - 3\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3$, (т.е. вектора $\boldsymbol{X} = (4,-3,1)' \in \boldsymbol{R}^3$).

Решение. По формулам (3´) имеем

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\mathbf{y} = 10\boldsymbol{E} - 13\boldsymbol{E}_2 - 18\boldsymbol{E}_3$. Полученный результат можно перефразировать таким образом: «Числа $10,-13,-18$, которые являются координатами вектора $\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{R}^3$, получены из координат вектора $\boldsymbol{X} = (4,-3,1)' \in \boldsymbol{R}^3$ с помощью линейного преобразования, задаваемой матрицей (*) »

Заметим, что по формулам (3´´) мы можем найти образ $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ любого вектора $\mathbf{x}$.

Итак, мы **установили соответствие между линейными операторами и матрицами в конечномерном пространстве с фиксированным базисом.**

Каждому линейному оператору сопоставлена квадратная матрица и, наоборот, каждой квадратной матрице - линейный оператор. Легко проверить, что это соответствие является взаимно однозначным.

Рассмотрим несколько примеров.

1. $\mathbf{O}(\mathbf{x}) = \theta$; по формуле (3´´) имеем

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{a}_{ij}\right) \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Ясно, что матрица (a_{ij}) в данном случае должна быть нулевой, $a_{ij}=0$. Следовательно, **нулевому оператору отвечает нулевая матрица независимо от выбора базиса.**

2. $\mathbf{E}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$; по формуле (3´´) имеем

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \cdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=(a_{ij})\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \cdots\\ \xi_n\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрица (a_{ij}) в данном случае должна быть единичной. Таким образом, **единичному оператору отвечает единичная матрица в любом базисе.**

3. $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{x}$;

$$\begin{pmatrix}\lambda\xi_1\\ \lambda\xi_2\\ \cdots\\ \lambda\xi_n\end{pmatrix}=(a_{ij})\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \cdots\\ \xi_n\end{pmatrix}.$$

В данном случае элементы матрицы линейного оператора должны удовлетворять условиям

$$a_{ij}=\begin{cases}\lambda & \textbf{\textit{при}} \quad i=j,\\ 0 & \textbf{\textit{при}} \quad i\neq j.\end{cases}$$

Таким образом, **оператору подобного растяжения отвечает в любом базисе скалярная матрица**

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}.$$

4. В случае оператора проектирования $\mathbf{P}$ формула (3′′) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right) \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_k \\ \xi_{k+1} \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что в этом случае матрица $\left(a_{ij}\right)$ должна быть такой:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \boldsymbol{k-я \quad строка} \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в отличие от примеров 1-3 оператор проектирования имеет в различных базисах, вообще говоря, различные матрицы.

16.3. Действия с линейными операторами

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ - два линейных оператора, действующие в пространстве $\mathcal{X}$.

Операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ **считаются равными**, если $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{B}\boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$.

Пусть $\left(a_{ij}\right)$ и $\left(b_{ij}\right)$ - матрицы, соответствующие линейным операторам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в некотором базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ пространства $\mathcal{X}$.

Полагая $\boldsymbol{x} = \mathbf{e}_j$ в равенстве $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{B}\boldsymbol{x}$ и пользуясь формулами (2), получим

$$a_{1j}\mathbf{e}_1 + a_{2j}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{nj}\mathbf{e}_n = \mathbf{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{B}\mathbf{e}_j = b_{1j}\mathbf{e}_1 + b_{2j}\mathbf{e}_2 + \cdots + b_{nj}\mathbf{e}_n. \qquad (4)$$

Поскольку векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ образуют базис, координаты при одинаковых векторах базиса в равенствах (4) будут равны:

$$a_{ij} = b_{ij}.$$

Отсюда следует, что **равные линейные операторы обладают в данном базисе равными матрицами**

$$(a_{ij}) = (b_{ij}).$$

Очевидно, справедливо и обратное утверждение.

Суммой двух линейных операторов называется оператор $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, действующий по правилу

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}. \qquad (5)$$

Проверим, что оператор $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ тоже является линейным. Положим $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2$, тогда

$$\mathbf{C}(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) = \mathbf{A}(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) + \mathbf{B}(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) =$$
$$= \lambda_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \lambda_1\mathbf{B}\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{B}\mathbf{x}_2 = \lambda_1(\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}\mathbf{x}_1) + \lambda_2(\mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}\mathbf{x}_2) =$$
$$= \lambda_1\mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{C}\mathbf{x}_2.$$

Выясним теперь, что происходит с матрицами линейных операторов при сложении операторов. Пусть в некотором базисе $\{\mathbf{e}_j\}$ пространства $\mathcal{X}$ линейному оператору $\mathbf{A}$ соответствует матрица (a_{ij}), а линейному оператору $\mathbf{B}$ - матрица (b_{ij}).

Тогда, если X - столбец из координат вектора $\mathbf{x}$, то $(a_{ij})X$ представляет собой столбец из координат вектора $\mathbf{A}\mathbf{x}$, а $(b_{ij})X$ - столбец из координат вектора $\mathbf{B}\mathbf{x}$. Отсюда следует, что вектору $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}$ отвечает сумма столбцов $(a_{ij})X + (b_{ij})X = ((a_{ij}) + (b_{ij}))X$, т.е. **при сложении линейных операторов их матрицы складываются.**

Произведением линейного оператора $\mathbf{A}$ на число λ называется оператор $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{A}$, действующий по правилу

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x}. \qquad (6)$$

Легко проверить, что если $\mathbf{A}$ - линейный оператор, то $\lambda\mathbf{A}$ тоже является линейным оператором.

Пусть в некотором базисе $\{\mathbf{e}_j\}$ линейному оператору $\mathbf{A}$ соответствует матрица (a_{ij}), и произвольный вектор $\mathbf{x}$ имеет в этом базисе координатный столбец X. Тогда вектор $\mathbf{Ax}$ имеет столбцом из своих координат $(a_{ij})X$, а вектор $(\lambda\mathbf{A})\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Ax}$ определяется столбцом координат $\lambda((a_{ij})X) = (\lambda(a_{ij}))X$.

Отсюда следует, что если оператору $\mathbf{A}$ соответствует матрица (a_{ij}), то оператору $\lambda\mathbf{A}$ соответствует матрица $\lambda(a_{ij})$, т.е. **при умножении линейного оператора на число соответствующая ему матрица тоже умножается на это число.**

Произведением двух линейных операторов $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ назовем оператор

$$\mathbf{Cx} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx}), \tag{7}$$

т.е. применение к вектору $\mathbf{x}$ произведения операторов $\mathbf{AB}$ означает, что сначала к вектору $\mathbf{x}$ применяется оператор $\mathbf{B}$, затем к полученному новому вектору применяется оператор $\mathbf{A}$.

Произведение двух операторов снова является линейным оператором, так как

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) &= \mathbf{A}(\mathbf{B}(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2)) + \mathbf{B}(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) = \\ &= \mathbf{A}(\lambda_1\mathbf{Bx}_1 + \lambda_2\mathbf{Bx}_2) + \lambda_1(\mathbf{ABx}_1) + \lambda_2(\mathbf{ABx}_2) = \\ &= \lambda_1\mathbf{Cx}_1 + \lambda_2\mathbf{Cx}_2.\end{aligned}$$

Теперь выясним, что происходит с матрицами линейных операторов при перемножении последних. Пусть в некотором базисе $\{\mathbf{e}_j\}$ оператору $\mathbf{A}$ отвечает матрица (a_{ij}), а оператору $\mathbf{B}$ - матрица (b_{ij}), произвольный вектор $\mathbf{x}$ задается в этом базисе столбцом X из своих координат. Тогда вектор $\mathbf{Bx}$ задается столбцом из координат $(b_{ij})\cdot X$, а вектор $\mathbf{A}(\mathbf{Bx})$ - столбцом $(a_{ij})\cdot((b_{ij})\cdot X)$.

Учитывая, что

$$\mathbf{A}(\mathbf{Bx}) = \mathbf{Cx}$$

и

$$(a_{ij})\cdot((b_{ij})\cdot X) = ((a_{ij})\cdot(b_{ij}))X,$$

мы заключаем, что оператору $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ отвечает матрица $(c_{ij}) = (a_{ij})\cdot(b_{ij})$.

Иначе говоря, при **перемножении линейных операторов соответствующие им матрицы перемножаются.**

16.4. Линейное пространство линейных операторов

В п. 3 мы ввели в множестве линейных операторов линейные операции. Можно показать, что введенные операции подчиняются всем аксиомам линейного пространства. Следовательно, **множество линейных операторов представляет собой линейное пространство.**

С другой стороны, квадратные матрицы порядка n тоже образуют линейное пространство. Указанные два линейных пространства изоморфны, так как между линейными операторами и квадратными матрицами установлено взаимно однозначное соответствие, которое сохраняется при сложении и умножении на числа (Это соответствие зависит от выбора базиса в исходном пространстве).

Пространство квадратных матриц порядка n имеет размерность n^2. Базис этого пространства образуют, например, все такие матрицы, у которых один из элементов равен единице, а все остальные равны нулю.

Из изоморфизма вытекает, что пространство линейных операторов, действующих в n-мерном пространстве, тоже имеет размерность n^2.

Эти обстоятельства служат основанием для того, чтобы применение оператора к вектору записывать как умножение матрицы на столбец, а действия над операторами записывать как действия над соответствующими матрицами.

Более того, часто оператор и соответствующую ему матрицу обозначают одной и той же буквой.

16.5. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Пусть в пространстве $\mathcal{X}$ мы перешли от базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ к базису $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}$. Координаты любого вектора $\mathbf{x}$ пространства $\mathcal{X}$ согласно, § 9 п. 4 изменяются по формулам

$$X = P\widetilde{X},$$

где X - столбец из координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$, $\widetilde{X}$ - столбец из координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\widetilde{\mathbf{e}}_i\}$, P - матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ к базису $\{\widetilde{\mathbf{e}}_i\}$.

Рассмотрим теперь линейный оператор $\mathbf{A}$. Пусть в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ ему соответствует матрица A, а в базисе $\{\widetilde{\mathbf{e}}_i\}$ - матрица $\widetilde{A}$.

Пусть $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$, Y и $\widetilde{Y}$ - столбцы из координат вектора $\mathbf{y}$ в базисах $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\widetilde{\mathbf{e}}_i\}$ соответственны. Тогда, согласно п. 2 настоящего параграфа

$$Y = AX,$$

$$\widetilde{Y} = \widetilde{A}\widetilde{X}.$$

По формулам преобразования координат имеем

$$X = P\widetilde{X}, \qquad Y = P\widetilde{Y}$$

и поэтому

$$P\widetilde{Y} = AP\widetilde{X},$$

откуда

$$\widetilde{Y} = P^{-1}AP\widetilde{X}.$$

Следовательно, для любого столбца X

$$\widetilde{A}\widetilde{X} = P^{-1}AP\widetilde{X},$$

откуда

$$\widetilde{A} = P^{-1}AP.$$

Матрица $\widetilde{A}$ называется **подобной** матрице A, если существует такая неособенная матрица P, что

$$\widetilde{A} = P^{-1}AP. \tag{8}$$

Будем говорить также, что матрица $\widetilde{A}$ получена из матрицы A **преобразованием подобия.**

Следовательно, **одному и тому же оператору в различных базисах соответствуют подобные матрицы.**

Замечание. Подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены.

Замечание. Отметим, что рассмотренные выше линейные операторы были заданы в линейном пространстве. Теперь ниже рассмотрим линейные операторы, действующие в евклидовом пространстве.

16.6. Линейные операторы, действующие в евклидовом пространстве

Среди линейных операторов, действующих в евклидовом пространстве, наибольший интерес представляют ортогональные и симметричные операторы.

Например, большой интерес к симметрическим операторам объясняется следующими причинами: во-первых, такие операторы играют большую роль в математике и ее приложений, в частности, в приложениях математики в экономике; во-вторых, теория собственных векторов для этих операторов носит исчерпывающих характер (Собственные значения и собственные векторы симметрического оператора вкратце изложим в п.3 §17).

В следующих подпунктах данного пункта предполагается, что линейный оператор $\mathbf{A}$ задан в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ (§15).

16. 6. 1. Ортогональный оператор и его матрица

Линейный оператор $\mathbf{A}$ **называется ортогональным**, если для любых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$ имеет место равенство

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{x}, \mathbf{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{9}$$

Таким образом, ортогональный оператор сохраняет скалярное произведение векторов.

Нетрудно проверить следующие свойства ортогонального оператора.

1^0. Ортогональный оператор сохраняет длину любого вектора.

2^0. Ортогональный оператор сохраняет углы между векторами.

3^0. Ортогональный оператор отображает ортонормированный базис также на ортонормированный.

Справедливы следующие утверждения, которые примем без доказательства.

Теорема. Для того чтобы линейный оператор был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица относительно какого-нибудь ортонормированного базиса была ортогональной.

Теорема. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$- ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ и A матрица перехода к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$. Для того чтобы система векторов $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ была ортонормированным базисом, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была ортогональной.

16. 6. 2. Симметрический оператор и его матрица

Линейный оператор $\mathbf{A}$ **называется симметрическим**, если для любых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$ имеет место равенство

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathbf{A}\boldsymbol{y}). \tag{10}$$

Таким образом, символ симметрического оператора при скалярном умножении можно переносить с одного множителя на другой.

Теорема. Симметрический линейный оператор в любом ортонормированном базисе имеет симметрическую матрицу.

Доказательство. Пусть матрица симметрического линейного оператора $\mathbf{A}$ имеет в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{22} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Положим в равенстве (10) $\boldsymbol{x} = \mathbf{e}_i$ и $\boldsymbol{y} = \mathbf{e}_j$, тогда

$$(\mathbf{A}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{A}\mathbf{e}_j). \tag{11}$$

Далее имеем

$$(\mathbf{A}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (a_{1i}\mathbf{e}_1 + a_{2i}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{ji}\mathbf{e}_j + \cdots + a_{ni}\mathbf{e}_n,\ \mathbf{e}_j);$$

отсюда вследствие ортогональности базиса

$$(\mathbf{A}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = a_{ji}. \tag{12}$$

Аналогично получаем:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{A}\mathbf{e}_j) = a_{ij}. \tag{13}$$

Из (11), (12) и (13) следует, что

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Для любых i и j, а это означает, что матрица A является симметрической.

Теорема (обратная). Если линейный оператор хотя бы в одном ортонормированном базисе имеет симметрическую матрицу, то этот оператор является симметрическим.

Доказательство самостоятельно.

Ключевые слова и словосочетания

Преобразование, оператор, линейный оператор, нулевой оператор, единичный или тождественный оператор, оператор подобия, оператор проектирования, матрица оператора, матрица линейного преобразования, действия с линейными операторами, линейное пространство линейных операторов, подобная матрица, симметрический линейный оператор.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется оператором или преобразованием, действующим в линейном пространстве? Что называется образом, прообразом вектора?

2. Когда оператор называется линейным? Во что переводит линейный оператор сумму векторов, произведение вектора на число?

3. Что называется нулевым оператором и как он записывается? Покажите, что нулевой оператор является линейным.

4. Что называется единичным, или тождественным оператором и как он записывается? Покажите, что единичный оператор является линейным.

5. Что называется оператором подобного растяжения или оператором подобия? Покажите, что оператор подобия является линейным.

6. Что называется оператором проектирования? Покажите, что нулевой оператор проектирования является линейным.

7. Приведите примеры линейных операторов в линейных пространствах $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ и $\boldsymbol{C}^{\infty}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$.

8. Что называется матрицей линейного оператора заданного в некотором базисе?

9. Как представляется общий вид линейного оператора в конечномерном пространстве?

10. Какое соответствие можно установить между линейными операторами и матрицами в конечномерном пространстве с фиксированным базисом? Разъясните сущность этого соответствия.

11. Какая матрица отвечает нулевому оператору? Зависит ли от выбора базиса матрица, отвечающая нулевому оператору.

12. Какая матрица отвечает единичному оператору? Зависит ли от выбора базиса матрица, отвечающая единичному оператору.

13. Какая матрица отвечает оператору подобия? Зависит ли от выбора базиса матрица, отвечающая оператору подобия.

14. Какая должна быть матрица, отвечающая оператору проектирования?
Зависит ли от выбора базиса матрица, отвечающая оператору подобия.

15. Когда два линейных оператора считаются равными? Какими матрицами обладают в данном базисе равные линейные операторы**?**

16. Что называется суммой двух линейных операторов? При сложении линейных операторов, какая операция производится с их матрицами?

17. Что называется произведением линейного оператора на число? При умножении линейного оператора на число что делается с соответствующей ему матрицей?

18. Что называется произведением двух линейных операторов? При умножении линейных операторов, какая операция производится с их матрицами?

19. Обоснуйте, что множество линейных операторов представляет собой линейное пространство.

20. Какие обстоятельства служат основанием для того, чтобы применение оператора к вектору записывать как умножение матрицы

на столбец, а действия над операторами записывать как действия над соответствующими матрицами? Почему часто оператор и соответствующую ему матрицу обозначают одной и той же буквой?

21. Как происходит преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису?

22. Какая матрица называется подобной к данной матрице?

23. Какие матрицы соответствуют одному и тому же оператору в различных базисах?

24. Что такое ортогональный оператор? Какими свойствами обладает этот оператор?

25. Какими свойствами обладает матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе?

26. Какой линейный оператор называется симметрическим?

27. Какую матрицу имеет симметрический линейный оператор в (любом) ортонормированном базисе?

Задачи для самостоятельного решения

1. Какие из следующих операторов в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ является линейным:

а) $\mathbf{A}X = X + A$; ***б)*** $\mathbf{A}X = A$; ***в)*** $\mathbf{A}X = (A, X)A$; ***г)*** $\mathbf{A}X = (A, X)X$,

где $\boldsymbol{A}$ - фиксированный ненулевой вектор.

2. Какие из следующих операторов в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ является линейным:

а) $\mathbf{A}X = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$; ***б)*** $\mathbf{A}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 1 \\ x_3 + 2 \end{pmatrix}$;

в) $\mathbf{A}X = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ (x_3)^2 \end{pmatrix}$; ***г)*** $\mathbf{A}X = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$, где $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

В случае линейности найти матрицы операторов в том же базисе, в котором заданы координаты векторов X и $\mathbf{A}X$.

3. Показать, что существует единственный оператор, переводящий векторы A_1, A_2, A_3, соответственно, в B_1, B_2, B_3, и найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный в линейном пространстве R^3 имеет

в базисе $A_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу B того же оператора в базисе

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого же оператора в базисе

а) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$;

б) $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$.

6. Оператор $\mathbf{A}$ в базисе $A_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а оператор $\mathbf{B}$ в базисе $B_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу оператора $\mathbf{AB}$ в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

§17. Собственные векторы линейного оператора

17.1. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Пусть $\mathbf{A}$ - линейный оператор, действующий в линейном пространстве $\mathcal{X}$.

Ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ **называется собственным вектором оператора** $\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \tag{1}$$

где λ - некоторое число, **называемое собственным значением или собственным числом** этого оператора.

Совокупность всех собственных значений данного оператора **называется его спектром.**

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора в конечномерном пространстве находятся следующим образом.

Возьмем в пространстве $\mathcal{X}$ некоторый базис $\{\mathbf{e}_i\}$. Пусть в этом базисе оператору $\mathbf{A}$ отвечает матрица (a_{ij}). Если в рассматриваемом базисе вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ имеет столбец из координат X, то вектор $\mathbf{Ax}$ имеет столбец из координат $(a_{ij}) \cdot X$. С другой стороны, вектор $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ должен иметь в том же базисе столбец из координат λX. Отсюда получаем

$$(a_{ij})X = \lambda X. \tag{2}$$

Запишем это соотношение подробнее:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}. \tag{2′}$$

Здесь x_i - координаты собственного вектора $\mathbf{x}$, а λ - собственное значение (число) оператора, соответствующее собственному вектору $\mathbf{x}$.

Перепишем соотношение (2′) в виде системы n однородных линейных уравнений относительно $x_1,...,x_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_{n1} - \lambda)x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{2′′}$$

Такая система имеет отличные от нуля решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} - \lambda & \cdots & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Нулевое решение системы нас не интересует, так как $\mathbf{x} \neq \theta$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Собственные значения линейного оператора совпадают с корнями характеристического уравнения матрицы этого оператора.

Левую часть характеристического уравнения (3) называют также **характеристическим многочленом линейного оператора.**

Если из уравнения (3) удастся найти значения λ, то, подставляя их в уравнения (2´´), найдем ненулевые решения этой системы. Это и будут координаты собственного вектора.

Пример. Пусть оператор $\mathbf{A}$ действует в двумерном пространстве, его матрица –

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные векторы и собственные значения оператора $\mathbf{A}$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение для матрицы линейного оператора $\mathbf{A}$ и решаем его:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0, \quad 1-\lambda = \pm 2, \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

Мы нашли собственные значения оператора $\mathbf{A}$.

Возьмем $\lambda_1 = 3$ и подставим в уравнения вида (2´´). В результате получим

$$\begin{cases} (1-3)\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 = 0 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + (1-3)\boldsymbol{x}_2 = 0. \end{cases}$$

Поскольку определитель этой системы равен нулю, второе уравнение является следствием первого и его можно отбросить. Тогда имеем

$$-2\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 = 0,$$

откуда

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2.$$

Возьмем, например, $x_1 = x_2 = 1$. Тогда получим собственный вектор

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь, взяв $\lambda_2 = -1$, снова записываем только одно уравнение системы вида (2′′), так как по тем же причинам второе является его следствием:

$$(1-(-1))x_1 + 2x_2 = 0.$$
$$2x_1 + 2x_2 = 0,$$
$$x_1 = -x_2.$$

Взяв, например, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, находим собственный вектор

$$\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Несколько замечаний:

1. Характеристическое уравнение - это уравнение вида $P(\lambda) = 0$, где $P(\lambda)$ - многочлен степени n. Согласно основной теореме алгебры всякий многочлен имеет хотя бы один комплексный корень. Отсюда получаем, что линейный оператор, действующий в комплексном конечномерном линейном пространстве, заведомо имеет хотя бы один собственный вектор.

2. Если линейный оператор действует в действительном линейном пространстве, то многочлен $P(\lambda)$ имеет действительные коэффициенты. Если при этом n нечетно, то характеристическое уравнение имеет, по крайней мере, один действительный корень. В этом случае всякий линейный оператор имеет, по крайней мере, один собственный вектор.

3. Линейный оператор не может иметь больше чем n различных собственных значений, так как характеристическое уравнение имеет степень n.

4. Собственные векторы $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_m}$ линейного оператора $\mathbf{A}$ с попарно различными собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ линейно независимы.

Доказательство этого утверждения можно провести методом математической индукции. Читателю рекомендуется провести это самостоятельно.

5. Если все n корней характеристического многочлена $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ различны, то соответствующие им собственные векторы $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ можно принять за базис n-мерного пространства $\mathcal{X}$, так как они согласно замечанию 4 линейно независимы.

Построим матрицу оператора $\mathbf{A}$ в этом новом базисе. Поскольку

$$\mathbf{A}\mathbf{x_1} = \lambda_1 \mathbf{x_1},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x_2} = \lambda_2 \mathbf{x_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x_n} = \lambda_n \mathbf{x_n},$$

эта матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что характеристический полином оператора $\mathbf{A}$ в этом случае представляет собой произведение линейных множителей вида

$$\boldsymbol{P}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

17.2. Оператор простой структуры

Линейный оператор $\mathbf{A}$ **называется оператором простой структуры**, если он обладает базисом из собственных векторов.

Рассмотрим пример из п.2 настоящего параграфа. Нетрудно заметить, что собственные векторы

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = 3,\ \ \lambda_2 = -1$ линейного оператора $\mathbf{A}$, действующего в двумерном пространстве с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

в этом двумерном пространстве образует базис.

Однако не всегда в пространстве существует базис, состоящий из собственных векторов оператора действующего в этом пространстве. Следующий пример подтверждения тому.

Пример. Пусть оператор $\mathbf{A}$ действует в трехмерном пространстве и его матрицей является

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{*}$$

Найти собственные векторы и собственные значения оператора $\mathbf{A}$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение для матрицы линейного оператора $\mathbf{A}$ и решаем его:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2.$$

Мы нашли собственные значения оператора $\mathbf{A}$.

Возьмем $\lambda_1 = 1$ и подставим в уравнение вида (2). В результате получим систему

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы равен 2, фундаментальная система состоит из одного решения, например,

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что первому собственному значению, имеющему кратность 2, соответствует один собственный вектор.

Для корня $\lambda_3 = 2$ получаем систему

$$\begin{cases} 4\boldsymbol{x}_1 - 5\boldsymbol{x}_2 - 3\boldsymbol{x}_3 = 0 \\ 3\boldsymbol{x}_1 - 4\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 = 0 \\ 2\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 = 0, \end{cases}$$

ранга 2. Ее фундаментальная система также состоит из одного решения, например,

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что полученные два собственных вектора, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \ \lambda_3 = 2$ линейного оператора $\mathbf{A}$, действующего в **трехмерном** пространстве с матрицей (*) в этом трехмерном пространстве не может образовать базис.

Итак, рассмотренный пример показывает, что не всегда в пространстве существует базис, состоящий из собственных векторов оператора, действующего в этом пространстве. **Выясним, каким условиям должен удовлетворять оператор для того, чтобы в пространстве существовал базис из его собственных векторов.**

Из замечания 5 п. 1 настоящего параграфа следует, что если в пространстве существует базис из собственных векторов, то в таком базисе матрица линейного оператора имеет диагональную форму.

Обратно, если оператор $\mathbf{A}$ имеет в некотором базисе $\{\mathbf{e}_j\}$, диагональную матрицу, то векторы этого базиса являются линейно независимыми собственными векторами оператора $\mathbf{A}$. В самом деле, в столбце из координат вектора $\mathbf{A}\mathbf{e}_{j_j}$ отличной от нуля будет лишь j-я координата и потому $\mathbf{A}\mathbf{e}_j = \lambda\mathbf{e}_j$.

Теорема. Для того чтобы существовал базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, необходимо и достаточно, чтобы каждому собственному значению соответствовало столько линейно независимых собственных векторов, какова его кратность.

Доказательство опускаем.

В силу того, что одному и тому же линейному оператору в различных базисах соответствуют подобные матрицы, эта теорема может быть сформулирована так:

если каждому собственному значению соответствует столько линейно независимых собственных векторов, какова кратность собственного значения как корня характеристического многочлена, то тогда и только тогда существует преобразование подобия, приводящее матрицу оператора к диагональному виду.

Матрицу подобную диагональной, называют **матрицей простой структуры.**

Таким образом, **оператору простой структуры отвечает матрица простой структуры и наоборот.**

Пример. Показать, что матрицу

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

можно привести к диагональному виду.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

как нетрудно подсчитать, преобразуется к виду:

$$(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0.$$

Находим его корни (собственные значения):

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1.$$

Возьмем $\lambda_1 = 1$ и подставим в уравнение вида (2). В результате получим систему

$$\begin{cases} 6\boldsymbol{x}_1 - 12\boldsymbol{x}_2 + 6\boldsymbol{x}_3 = 0 \\ 10\boldsymbol{x}_1 - 20\boldsymbol{x}_2 + 10\boldsymbol{x}_3 = 0 \\ 12\boldsymbol{x}_1 - 24\boldsymbol{x}_2 + 12\boldsymbol{x}_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы равен 1, фундаментальная система состоит из двух решений, например,

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что первому собственному значению, имеющему кратность 2, соответствуют два линейно независимых собственных вектора.

Для корня $\lambda_3 = -1$ получаем систему

$$\begin{cases} 8\boldsymbol{x}_1 - 12\boldsymbol{x}_2 + 6\boldsymbol{x}_3 = 0 \\ 10\boldsymbol{x}_1 - 18\boldsymbol{x}_2 + 10\boldsymbol{x}_3 = 0 \\ 12\boldsymbol{x}_1 - 24\boldsymbol{x}_2 + 14\boldsymbol{x}_3 = 0, \end{cases}$$

ранга 2. Фундаментальная система состоит из одного решения, например,

$$\boldsymbol{C}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица $\boldsymbol{A}$ подобна диагональной матрице

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}.$$

Матрица $\boldsymbol{C}$, посредством которой осуществляется преобразование подобия, совпадает с матрицей перехода от старого базиса к новому, поэтому в качестве ее столбцов берут столбцы из координат собственных векторов. В нашем примере матрица подобного преобразования записывается так:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что такая матрица определяется не однозначно.

Замечание

Из результатов, полученных в предыдущих пунктах, ясно, что к диагональному виду может быть приведена далеко не каждая матрица. В более объемных курсах линейной алгебры вводят некоторую простейшую каноническую форму - **каноническую форму Жордана**, обобщающую диагональную, к **которой может быть приведена преобразованием подобия уже совершенно произвольная матрица.**

Мы каноническую форму Жордана вводить и изучать не будем. Это выходит за рамки нашего курса.

17.3. Собственные значения и собственные векторы симметрического оператора

Ниже без доказательства приведем ряд теорем и следствий из них, которые справедливы для симметрического оператора, представляющего наибольший интерес среди линейных операторов, действующих в евклидовом пространстве.

Теорема. Все корни характеристического уравнения симметрического линейного оператора могут быть только действительные числа.

Следствие. Любой симметрический оператор имеет хотя бы одно собственное значение.

Теорема. Собственные векторы симметрического оператора, соответствующие его различным собственным значениям, ортогональны между собой.

Теорема. Для любого симметрического линейного оператора, действующего в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, существует ортонормированный базис пространства $\mathcal{E}$, составленный из собственных векторов этого оператора.

Следствие. Матрица симметрического линейного оператора с помощью соответствующего выбора ортонормированного базиса может быть приведена к диагональному виду. За этот базис достаточно принять ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов симметрического оператора.

Ключевые слова и словосочетания

Собственные значения линейного оператора, собственные векторы линейного оператора, характеристический многочлен линейного оператора, оператор простой структуры, симметрический линейный оператор.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется собственным вектором, собственным значением (или собственным числом) линейного оператора?

2. Что называется спектром линейного оператора?

3. Каким образом находятся собственные векторы и собственные значения линейного оператора в конечномерном пространстве?

4. Что называется характеристическим многочленом линейного оператора?

5. Что можно утверждать о числе собственных значений линейного оператора действующего в действительном линейном пространстве?

6. Когда собственные векторы линейного оператора $\mathbf{A}$ линейно независимы?

7. Какому условию должны удовлетворять корни характеристического многочлена, для того чтобы соответствующие им собственные векторы можно было принять за базис $\boldsymbol{n}$-мерного линейного пространства?

8. Какой линейный оператор называется оператором простой структуры?

9. Всегда ли в пространстве существует базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора действующего в этом пространстве?

10. Каким условиям должен удовлетворять линейный оператор для того, чтобы в пространстве существовал базис из его собственных векторов?

11. Когда матрица линейного оператора имеет диагональную форму?

12. Что называется матрицей простой структуры?

13. Разъясните смысл фразы: - «**Оператору простой структуры отвечает матрица простой структуры и наоборот**».

14. Можно ли любую матрицу привести к диагональному виду?

15. Что можно утверждать о собственных значениях симметрического линейного оператора?

16. Каким свойством обладают собственные векторы симметрического оператора, соответствующие его различным собственным значениям?

17. Каким образом матрица симметрического линейного оператора может быть приведена к диагональному виду?

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$; ***б***) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$; ***г***) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 5 & -3\\ 4 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$; ***е***) $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -5 & -3\\ 4 & -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$; ***з***) $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$;

и) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$; ***к***) $A=\begin{pmatrix}7 & -12 & 6\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix}$.

2. Выяснить, можно ли матрицу A линейного оператора $\mathbf{A}$ n-мерного линейного пространства $\mathcal{X}$ привести к диагональному виду путем перехода к новому базису, и если можно, то найти этот базис и соответствующую ему диагональную матрицу:

а) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$; ***б***) $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & -2\\ 8 & 1 & -4\\ 12 & 0 & -5\end{pmatrix}$;

в) $\quad A=\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix};$ $\qquad$ *г*) $\quad A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ задан невырожденной матрицей

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите собственные значения оператора $\mathbf{A}^{-1}$.

§18. Квадратичные формы

В этом параграфе сначала в линейном пространстве рассмотрим числовые линейные функции двух векторных аргументов – билинейных форм[12]. Положив в выражении билинейной формы второй аргумент равным первому, получаем новый важный класс функций одного переменного, уже нелинейных – квадратичных форм.

18.1. Билинейные формы

Числовая функция $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ от двух векторных аргументов $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ в линейном пространстве $\mathcal{X}$ **называется билинейной функцией или билинейной формой,** если она является линейной функцией от $\boldsymbol{x}$ при каждом фиксированном значении $\boldsymbol{y}$ и линейной функцией от $\boldsymbol{y}$ при каждом фиксированном значении $\boldsymbol{x}$.

[12] Отметим, что в отличие от случая линейных числовых функций одного аргумента, теория линейных числовых функций двух аргументов – билинейных форм – имеет богатое геометрическое содержание.

Иными словами, $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ есть билинейная форма от $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, если для любых $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ из $\mathcal{X}$ и любого $\alpha\in\boldsymbol{R}^1$ удовлетворяются равенства

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})=\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\varphi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}), & \varphi(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\\ \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}), & \varphi(\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y})=\alpha\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).\end{cases}\tag{1}$$

Первые два из этих равенств означают линейность функции $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ по первому аргументу, последние два - линейность по второму аргументу.

Из определения билинейной формы, используя равенства (1), легко получим общую формулу

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i\ ,\sum_{i\ j=1}^{m}\beta_j\boldsymbol{y}_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j\varphi(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_j),\tag{2}$$

в которой $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\ldots,\boldsymbol{y}_m$ - произвольные векторы пространства $\mathcal{X}$, а $\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\ldots,\beta_m$ - любые числа из $\boldsymbol{R}^1$.

Билинейные формы, заданные в бесконечномерных пространствах, **называют** обычно **билинейными функционалами**.

Примеры

1. В арифметическом пространстве $\boldsymbol{R}^n$ примером билинейной формы является скалярное произведение двух векторов.

2. В $\boldsymbol{n}$-мерном линейном пространстве $\mathcal{X}$ с фиксированным базисом $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ примером билинейной формы является функция

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ik}\xi_i\eta_k\ ,$$

где $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y}=\sum_{k=1}^{n}\eta_k\boldsymbol{e}_k$ - произвольные векторы и $\boldsymbol{a}_{ik}$, $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}=1,2,\ldots,\boldsymbol{n})$ - фиксированные числа.

18.2. Общий вид билинейной формы в n-мерном линейном пространстве

Пусть в $\boldsymbol{n}$-мерном линейном пространстве $\boldsymbol{R}^n$ задана билинейная форма $\varphi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$. Выберем в $\boldsymbol{R}^n$ произвольный базис $\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2,\ldots,\boldsymbol{H}_n$. Положим $\varphi(\boldsymbol{H}_i,\boldsymbol{H}_k)=\boldsymbol{a}_{ik}$, $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}=1,2,\ldots,\boldsymbol{n})$. Тогда для любых

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi_i H_i\ ,\qquad Y=\sum_{k=1}^{n}\eta_k H_k\,.$$

Согласно формуле (2)

$$\varphi(X,Y)=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i H_i,\ \sum_{k=1}^{n}\eta_k H_k\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_i\eta_k\varphi(H_i,H_k)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\eta_k\,. \qquad (3)$$

Таким образом, в примере 2 мы имели самый общий вид билинейной функции в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{X}$.

Коэффициенты a_{ik} образуют квадратную матрицу

$$A=A_{\{e\}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

которую **называют матрицей билинейной формы** $\varphi(x,y)$ **в базисе** $\{e\}=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$.

18.3. Симметричные билинейные формы

Билинейная форма **называется симметричной,** если для любых векторов x и y

$$\varphi(x,y)=\varphi(y,x)\,.$$

Если билинейная форма $\varphi(X,Y)$ в n-мерном пространстве R^n, симметрична, то

$$a_{ik}=\varphi(H_i,H_k)=\varphi(H_k,H_i)=a_{ki}\,.$$

Следовательно, матрица $A_{\{e\}}$ симметричной билинейной формы в любом базисе $H_1,H_2,...,H_n$ пространства R^n совпадает с транспонированной матрицей $A'_{\{e\}}$. Легко проверить, что верно и обратное: если в некотором базисе $\{H\}=\{H_1,H_2,...,H_n\}$

$$A'_{\{e\}}=A_{\{e\}}\,,$$

то форма $\varphi(x,y)$ симметрична.

В самом деле, в этом случае

$$\varphi(y,x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\eta_i\xi_k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\eta_i\xi_k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\eta_k=\varphi(x,y)\,,$$

что и утверждалось.

В частности, мы получаем: если матрица билинейной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$, вычисленная в некотором базисе, совпадает с транспонированной матрицей, то в любом другом базисе пространства $\boldsymbol{R}^n$, матрица этой формы также совпадает с транспонированной.

Напомним, что матрицу, совпадающую с транспонированной матрицей, мы ранее в §1 называли симметричной.

18.4. Преобразование матрицы билинейной формы при переходе к новому базису

1. При переходе к новому базису матрица билинейной формы, разумеется, изменяется; найдем закон ее изменения.

Пусть $A_{\{\mathbf{e}\}} = (a_{ji})$ - матрица билинейной формы $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ в базисе $\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ и $A_{\{\mathbf{f}\}} = (a_{ik})$ - матрица той же формы в базисе $\{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \ldots, \mathbf{f_n}\}$ $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{l} = 1,2,\ldots,\boldsymbol{n})$, и пусть формулы перехода от одного базиса к другому имеют вид

$$\mathbf{f_j} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\mathbf{e_j}, \quad (\boldsymbol{i} = 1,2,\ldots,\boldsymbol{n})$$

с матрицей перехода $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$. В таком случае

$$b_{ik} = \varphi(\mathbf{f_i},\mathbf{f_k}) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\mathbf{e_j},\ \sum_{l}^{n} p_{kl}\mathbf{e_l}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ij}p_{kl}\varphi(\mathbf{e_j},\mathbf{e_l}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ij}p_{kl}a_{jl}\ .$$

Полученную формулу мы запишем в виде

$$b_{ik} = \varphi(\mathbf{f_i},\mathbf{f_k}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p'_{ji}p_{kl}a_{jl}\ , \qquad (4)$$

где $p'_{ji} = p_{ij}$ - элемент матрицы $\boldsymbol{P}'$, транспонированной по отношению к матрице $\boldsymbol{P}$. Формула (4) отвечает следующему соотношению между матрицами:

$$A_{\{\mathbf{f}\}} = \boldsymbol{P}'A_{\{\mathbf{e}\}}\boldsymbol{P}\ . \qquad (5)$$

2. Так как матрицы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{P}'$ невырождены, то в силу последней теоремы п.3 §9 ранг матрицы $A_{\{\mathbf{f}\}}$ равен рангу матрицы $A_{\{\mathbf{e}\}}$. Следовательно, ранг матрицы, билинейной формы не зависит от выбора базиса.

Поэтому имеет смысл понятие ранга билинейной формы, определяемого как ранг матрицы этой формы в любом базисе пространства $\boldsymbol{R}^n$.

Если форма $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ имеет ранг $\boldsymbol{n}$, равный размерности пространства $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$, она **называется невырожденной формой.**

18.5. Квадратичные формы

Квадратичной формой в линейном пространстве $\mathcal{X}$ называется функция $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ от одного векторного аргумента $\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}$, которая получается из произвольной билинейной формы $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ заменой $\boldsymbol{y}$ на $\boldsymbol{x}$.

В $\boldsymbol{n}$-мерном линейном пространстве $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$, с фиксированным базисом $\{\boldsymbol{H}\}=\{\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2,...,\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{n}}\}$ каждая квадратичная форма в силу формулы (2) имеет вид

$$\varphi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k\,, \tag{5}$$

где $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ - координаты вектора $\boldsymbol{X}$ относительно базиса $\{\boldsymbol{H}\}$. И наоборот, если задана функция $\varphi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})$ от вектора $\boldsymbol{X}$, определяемая в базисе $\{\boldsymbol{H}\}$ формулой (5), то эта функция представляет собой квадратичную форму от вектора $\boldsymbol{X}$.

Действительно, мы можем ввести билинейную форму

$$\psi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\eta_k\,,$$

где $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$ - координаты вектора $\boldsymbol{Y}$ относительно базиса $\{\boldsymbol{H}\}$. Тогда очевидно, что квадратичная форма $\psi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})$ совпадает с функцией $\varphi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})$.

18.6. Соответствие между билинейными и квадратичными формами

Рассмотрим билинейную форму

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\eta_k \tag{6}$$

и отметим, что подобных членов в правой части равенства (6) нет.

При переходе от билинейной формы к квадратичной

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k \tag{7}$$

в правой части равенства (7) проявятся подобные члены. Например, в правой части равенства (6) были члены

$$a_{ik}\xi_i\eta_k+a_{ki}\xi_k\eta_i\,,$$

а в равенстве (7) им будут соответствовать подобные члены

$$a_{ik}\xi_i\xi_k + a_{ki}\xi_k\xi_i = (a_{ik} + a_{ki})\xi_i\xi_k .$$

Следовательно, разные билинейные формы, у которых соответственно все суммы $a_{ik} + a_{ki}$, приводят к одной и той же квадратичной форме.

Покажем, что **среди всех билинейных форм, дающих одну и ту же квадратичную форму, имеется симметричная билинейная форма и что эта симметричная билинейная форма определяется квадратичной формой однозначно.**

Пусть $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ - симметричная билинейная форма. Имеем

$$\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) . \qquad (8)$$

Учитывая, что в силу симметрии $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$, мы можем выразить $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ из соотношения (8) в следующем виде:

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\big(\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\big).$$

Здесь справа стоят значения квадратичной формы на векторах $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$.

Следовательно, значение билинейной формы $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ для любой пары векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ однозначно определяется по значениям соответствующей квадратичной формы на векторах $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$. Отсюда следует, что и коэффициенты билинейной формы, являющиеся ее значениями на базисных векторах, определяются однозначно.

С другой стороны, если $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ - произвольная билинейная форма, то форма

$$\varphi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\big(\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\big)$$

будет симметрической билинейной формой, и форме $\varphi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ отвечает форма $\varphi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$:

$$\varphi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\big(\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\big) = \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) ,$$

т.е. квадратичные формы $\varphi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ и $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ совпадают.

Это обстоятельство **позволяет при использовании билинейных форм для изучения квадратичных форм в действительном линейном пространстве ограничиться рассмотрением только симметричных билинейных форм.**

Пример. Для данной билинейной формы

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\xi_1\eta_1-3\xi_1\eta_2-5\xi_2\eta_1+\xi_2\eta_2$$

найти симметричную, отвечающую квадратичной форме $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$.

Решение. Выпишем формы $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ и $\varphi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$:

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\xi_1\eta_1-3\xi_1\eta_2-5\xi_2\eta_1+\xi_2\eta_2,$$

$$\varphi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\eta_1\xi_1-3\eta_1\xi_2-5\eta_2\xi_1+\eta_2\xi_2.$$

Полусумма этих форм

$$\varphi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{2}\left(\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\varphi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\right)=\xi_1\eta_1-4\xi_1\eta_2-4\xi_2\eta_1+\xi_2\eta_2$$

симметричная билинейная форма, порождающая ту же квадратичную форму, что данная билинейная форма $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

Матрица симметричной билинейной формы $\varphi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, а следовательно, и квадратичной формы $\varphi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ записывается так:

$$\begin{pmatrix}1 & -4\\ -4 & 1\end{pmatrix}.$$

В дальнейшем **при рассмотрении квадратичной формы мы всегда будем считать, что ее матрица симметрична.**

Замечания

1. Полная теория квадратичных форм является объемным и занимает достаточно много место и времени. Поэтому теория квадратичных форм, излагаемая далее нами, основой своей целью имеет рассматривать те вопросы (способы приведения квадратичных форм к каноническому виду, критерия знакоопределенности квадратичной формы и т.д.), которые используются в различных приложениях математики в экономике. Например, критерий определенно положительности (критерий Сильвестра) квадратичных форм является решающим при рассмотрении условий второго порядка классической задачи оптимизации и, следовательно, являются важным в математической экономике.

2. Не нарушая общности, квадратичную форму можно рассмотреть в следующем виде:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,...,\boldsymbol{x}_n)\equiv\varphi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ik}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}. \qquad (9)$$

Переменных $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,...,\boldsymbol{x}_n$ можно рассмотреть как координаты вектора $\boldsymbol{x}$ линейного пространства $\mathcal{X}$ или как координаты вектора $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,...,\boldsymbol{x}_n)'$ пространства $\boldsymbol{R}^n$. В дальнейшем мы переменные

$x_1, x_2, ..., x_n$ будем рассматривать как координаты вектора $X = (x_1, x_2, ..., x_n)'$ пространства R^n.

18.7. Канонический и нормальный виды квадратичной формы

Если в квадратичной форме (9) переменные подвергнуть линейному преобразованию

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n, \end{cases} \tag{10}$$

где коэффициенты a_{ij} образуют невырожденную матрицу, то получится квадратичная форма от переменных $y_1, y_2, ..., y_n$ с новыми коэффициентами. В п. 18.8 будет показано, что при надлежащем выборе преобразования (10) любую квадратичную форму (9) можно привести к виду, содержащему только квадраты новых переменных:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \cdots + c_n y_n^2. \tag{*}$$

Такой вид квадратичной формы **называется каноническим**; матрица формы в этом случае является диагональной:

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}.$$

Если в частности коэффициенты $c_1, c_2, ..., c_n$ равны +1, -1 или 0, то этот вид квадратичной формы является ее **нормальным видом.**

18.8. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа. Метод ортогональных преобразований

18.8.1. Теорема о возможности приведения квадратичной формы к каноническому виду

Лемма 1. Если квадратичная форма (9) не содержит квадратов переменных, то с помощью линейного преобразования ее можно перевести в форму, содержащую квадрат хотя бы одной переменной.

Доказательство. По условию квадратичная форма содержит только члены с произведениями переменных. Пусть при каких-нибудь различных значениях i и k $a_{ik} \neq 0$, т. е. $2a_{ik}x_i x_k$ - один из таких членов. Если выполнить линейное преобразование

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_k \\ x_k = y_i - y_k \\ x_l = y_l \end{cases}$$

при всех $l \neq i$ и $l \neq k$ (его определитель не равен нулю), то в квадратичной форме появятся даже два члена с квадратами переменных:

$$2a_{ik}x_i x_k = a_{ik}(y_i + y_k)(y_i - y_k) = 2a_{ik}y_i^2 - 2a_{ik}y_k^2.$$

Эти слагаемые не могут исчезнуть после приведения подобных членов, так как любое из остальных слагаемых содержит хотя бы одну переменную, отличную от y_i или y_k.

Пример. $f = 3x_1x_4 - 5x_2x_3 + 4x_2x_4$.

Решение. Так как, например, $a_{14} = \frac{3}{2} \neq 0$, то можно положить

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_4 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_1 - y_4. \end{cases}$$

Определитель этой системы отличен от нуля

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

и соответствующее преобразование является линейным. Квадратичная форма принимает вид

$$f = 3y_1^2 - 3y_4^2 - 5y_2y_3 + 4y_1y_2 - 4y_2y_4.$$

Лемма 2. Если квадратичная форма (9) содержит член с квадратом переменной, например, член $a_{ii}x_i^2$, и еще хотя бы один член с этой переменной x_i, то с помощью линейного преобразования данную квадратичную форму можно перевести в форму от переменных $y_1, y_2, ..., y_n$, имеющую вид

$$f = d_{ii}y_i^2 + g, \tag{11}$$

где g - квадратичная форма, не содержащая переменной y_i.

Доказательство. Выделим в квадратичной форме (9) сумму членов, содержащих переменную x_i:

$$f = 2a_{i1}x_ix_1 + 2a_{i2}x_ix_2 + \cdots + a_{ii}x_i^2 + \cdots + 2a_{in}x_ix_n + g_1, \tag{12}$$

где через g_1 обозначена сумма всех остальных членов (не содержащих переменную x_i). Введем также обозначение:

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n.$$

Квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов, сложенной с удвоенными произведениями каждого члена на каждый из последующих. Следовательно, если в выражении для y_i^2 выделить сумму членов, содержащих переменную x_i, то эта сумма будет содержать квадрат члена $a_{ii}x_i$ и удвоенные произведения этого члена $a_{ii}x_i$ на остальные члены многочлена:

$$y_i^2 = 2a_{ii}x_i \cdot a_{i1}x_1 + 2a_{ii}x_i \cdot a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}^2x_i^2 + \cdots + 2a_{ii}x_i \cdot a_{in}x_n + g_2, \tag{13}$$

где g_2 - сумма членов, не содержащих переменную x_i.

Разделим обе части (13) на a_{ii} и вычтем полученное равенство из (12). После приведения подобных членов будем иметь:

$$f - \frac{1}{a_{ii}}y_i^2 = g_1 - \frac{1}{a_{ii}}g_2.$$

Выражение в правой части не содержит переменной x_i и является квадратичной формой от переменных $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$. Обозначим его через g, а коэффициент $\frac{1}{a_{ii}}$ - через d_{ii}.

Тогда

$$f = d_{ii}y_i^2 + g.$$

Если произвести линейное преобразование

$$\begin{cases} y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \\ y_l = x_l \end{cases}$$

при всех $l \neq i$ (определитель, которого не равен нулю), то g будет квадратичной формой от переменных $y_1, y_2, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n$ и квадратичная форма f окажется приведенной к виду (11).

Теорема. Всякая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду с помощью линейного преобразования переменных.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Квадратичная форма от одной переменной x_1 имеет вид $a_{11}x_1^2$ уже являющийся каноническим. Предположим, что эта теорема верна для квадратичных форм от $n-1$ переменных, и докажем, что она будет верна тогда и для квадратичных форм от n переменных.

Если квадратичная форма (9) не содержит квадратов переменных, то по лемме 1 ее можно с помощью линейного преобразования перевести в квадратичную форму, содержащую квадрат хотя бы одной переменной. По лемме 2 полученную квадратичную форму можно представить в виде (11). Так как квадратичная форма g в равенстве (11) зависит от $n-1$ переменных $y_1, y_2, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n$, то по сделанному предположению она может быть приведена к каноническому виду линейным преобразованием этих переменных. От переменных $y_1, y_2, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n$ мы перейдем при этом к новым переменным $z_1, z_2, ..., z_{i-1}, z_{i+1}, ..., z_n$. Если к формулам этого перехода добавить еще и формулу $y_i = z_i$, то получатся формулы линейного преобразования, которое приводит к каноническому виду квадратичную форму $d_{ii}y_i^2 + g$ содержащуюся в равенстве (11).

Композиция всех рассмотренных преобразований переменных является искомым линейным преобразованием, приводящим к каноническому виду данную квадратичную форму (9).

Если квадратичная форма (9) содержит квадрат какой-нибудь переменной, то лемму 1 применять не нужно.

18.8.2. Способы приведения квадратичной формы к каноническому и нормальному виду

Способ, использованный при доказательстве теоремы из 18.8.1, был **предложен известным французским математиком Лагранжем**. Этот способ может быть применен и для практического приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Если данная квадратичная форма от n переменных не содержит квадратов переменных, то с помощью линейного преобразования, примененного при доказательстве леммы 1, переходим к квадратичной форме, содержащей квадраты переменных. Затем с помощью линейного преобразования, рассмотренного при доказательстве леммы 2, представляем квадратичную форму в виде суммы члена с квадратом какой-нибудь переменной и квадратичной формы от остальных $n-1$ переменных. Применив снова этот же прием к полученной квадратичной форме, получаем еще один член с квадратом другой переменной и квадратичную форму от остальных $n-2$ переменных. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не получится квадратичная форма, содержащая только члены с квадратами переменных.

От канонического вида квадратичной формы

$$c_1 v_1^2 + c_2 v_2^2 + \cdots + c_m v_m^2,$$

где $m \le n$ и $c_1, c_2, ..., c_m$ отличны от нуля, можно перейти к нормальному виду

$$\varepsilon_1 w_1^2 + \varepsilon_2 w_2^2 + \cdots + \varepsilon_m w_m^2$$

(где $\varepsilon_i = 1$ при $c_i > 0$ и $\varepsilon_i = -1$ при $c_i < 0$) с помощью линейного преобразования

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{|c_1|}} w_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_m = \dfrac{1}{\sqrt{|c_m|}} w_m \\ v_{m+1} = w_{m+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n = w_n. \end{cases}$$

Пример. Приведем к каноническому виду следующую квадратичную форму:

$$f = x_1^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3. \qquad (14)$$

Решение. 1) Так как форма содержит член x_1^2, то леммы 1 применять не нужно. Если бы остальные члены не содержали x_1, то один из квадратов был бы уже выделен и можно было бы сразу приводить к каноническому виду сумму этих остальных членов.

Но, кроме x_1^2, есть еще члены, содержащие переменную x_1. Как при доказательстве леммы 2, выделяем их сумму:

$$f = (x_1^2 - 2x_1x_2 4x_1x_3) + 11x_3^2 - 6x_2x_3; \qquad i = 1, \quad a_{11} = 1, \quad a_{12} = 1, \quad a_{13} = 2;$$

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = x_1 - x_2 + 2x_3,$$

$$y_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3;$$

$$\frac{1}{a_{11}} = 1, \quad f - y_1^2 = -x_2^2 + 7x_3^2 - 2x_2x_3;$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3; \end{cases} \tag{15}$$

$$f = y_1^2 + (-y_2^2 + 7y_3^2 - 2y_2y_3).$$

Снова применяем лемму 2, на этот раз – к квадратичной форме

$$g = -y_2^2 + 7y_3^2 - 2y_2y_3.$$

Выделяем члены, содержащие переменную y_2:

$$g = (-y_2^2 - 2y_2y_3) + +7y_3^2; \qquad i = 2, \quad d_{22} = -1, \quad d_{23} - 1.$$

$$v_2 = d_{22}y_2 + d_{23}y_3 = -y_2 - y_3,$$

$$v_2^2 = y_2^2 + 2y_2y_3 + y_3^2;$$

$$\frac{1}{d_{22}} = -1, \quad g + v_2^2 = 8y_3^2;$$

$$\begin{cases} v_1 = y_1 \\ v_2 = -y_2 - y_3 \\ v_3 = y_3; \end{cases} \tag{16}$$

$$g = -v_2^2 + 8v_3^2.$$

Так как

$$f = y_1^2 + g,$$

то

$$f = v_1^2 - v_2^2 + 8v_3^2. \tag{17}$$

Таким образом, квадратичная форма (14) приведена к каноническому виду.

3) Чтобы получить линейное преобразование, непосредственно приводящее данную квадратичную форму (14) к каноническому виду (17), найдем сначала преобразования, обратные преобразованиям (15) и (16):

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = v_1 \\ y_2 = -v_2 - v_3 \\ y_3 = v_3, \end{cases}$$

а затем композицию полученных преобразований:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 - v_2 - 3v_3 \\ x_2 = -v_2 - v_3 \\ x_3 = v_3 \end{cases} \tag{18}$$

Если подставить полученные выражения для x_1, x_2, x_3 в форму (14), то сразу придем к форме (17).

4) От канонического вида (17) с помощью линейного преобразования

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 \\ v_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} w_3 \end{cases}$$

можно перейти к нормальному виду

$$f = w_1^2 - w_2^2 + w_3^2. \tag{19}$$

Линейное преобразование, непосредственно приводящее форму (14) к виду(19), выражается формулами

$$\begin{cases} x_1 = w_1 - w_2 - \dfrac{3}{2\sqrt{2}} w_3 \\ x_2 = -w_2 - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} w_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} w_3. \end{cases}$$

Рассмотренную выше квадратичную форму можно было бы привести к каноническому виду и другим способом, непосредственно выделяя полные квадраты:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{x}_1^2 + 11\boldsymbol{x}_3^2 - 2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 + 4\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3 - 6\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3 =$$

$$= 2\boldsymbol{x}_1^2 + 4\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3 + 2\boldsymbol{x}_3^2 + 9\boldsymbol{x}_3^2 - 6\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_2^2 - \boldsymbol{x}_2^2 - 2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1^2 =$$

$$= 2(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^2 + (3\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2)^2 - (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)^2.$$

Линейное преобразование

$$\begin{cases} z_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3 \\ z_2 = -\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 \\ z_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \end{cases}$$

также приводит данную квадратичную форму к каноническому виду

$$\boldsymbol{f} = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 .$$

Таким образом, **приводя квадратичную форму к каноническому виду различными способами, можно получить разные ответы. Это следует иметь в виду при решении примеров.**

18.9. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования

18.9.1. Ортогональное преобразование переменных

В 18.8.1 было доказано, что любая квадратичная форма может быть приведена с помощью линейного преобразования переменных к каноническому
и даже к нормальному виду. С геометрической точки зрения это преобразование можно рассматривать как переход к новому базису в линейном пространстве. Но в евклидовом пространстве обычно рассматриваются лишь ортонормированные базисы, поэтому в соответствии с последней теоремы из 16.6.1 мы во всех подпунктах этого пункта будем использовать линейные преобразования переменных только с ортогональными матрицами.

Линейное преобразование переменных с ортогональной матрицей **называется ортогональным.**

Ниже будет показано, что квадратичную форму можно привести к каноническому виду, ограничиваясь только ортогональными преобразованиями переменных. **Однако приведение квадратичной**

формы к нормальному виду (*) с помощью ортогонального преобразования уже не всегда выполнимо.

18.9.2. Теорема о возможности приведения квадратичной формы к каноническому виду

Лемма. Если квадратичная форма и линейный оператор имеют одну и ту же матрицу относительно какого-нибудь ортонормированного базиса, то они будут иметь одинаковые матрицы и относительно любого другого ортонормированного базиса.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \varphi(X, X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \tag{20}$$

и линейный оператор, матрица которого относительно какого-либо ортонормированного базиса совпадает с матрицей этой квадратичной формы: $b_{ik} = a_{ik}$.

Этот оператор отображает произвольный вектор

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{на вектор} \quad \widetilde{X} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \end{pmatrix}$$

по формулам (§9)

$$\widetilde{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k . \tag{21}$$

Тогда квадратичную форму (20) можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right) = \sum_{i-1}^{n} x_i \widetilde{x}_i = \\ &= x_1\widetilde{x}_1 + x_2\widetilde{x}_2 + \cdots + x_n\widetilde{x}_n. \end{aligned} \tag{22}$$

Перейдем теперь к новому ортонормированному базису. Пусть векторы X и $\widetilde{X}$ имеют относительно этого базиса, соответственно, координаты y_i и $\widetilde{y}_i$, а формулы, связывающие эти координаты, имеют вид

$$\widetilde{y}_i = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_k \,. \qquad (23)$$

Выражая скалярное произведение векторов X и $\widetilde{X}$ через их координаты относительно нового базиса, получим с помощью (23):

$$y_1\widetilde{y}_1 + y_2\widetilde{y}_2 + \cdots + y_n\widetilde{y}_n = \sum_{i-1}^{n} y_i \widetilde{y}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_k \right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_i y_k \,.$$

Отсюда вследствие (22) получаем:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \varphi(X, X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_i y_k \,. \qquad (24)$$

Сравнивая (23) и (24), видим, что данные квадратичная форма и линейный оператор имеют и относительно нового базиса одну и ту же матрицу с элементами d_{ik}.

Теорема. Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования переменных.

Доказательство. Пусть (20) - данная квадратичная форма. Рассмотрим линейный оператор, имеющий относительно некоторого ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ ту же симметрическую матрицу, что и эта квадратичная форма. Характеристическое уравнение этого оператора имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} - \lambda & \cdots & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \,. \qquad (25)$$

По следствию последней теоремы из п. 3. §17 существует ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ относительно которого матрица данного линейного оператора имеет диагональный вид; при этом диагональными элементами будут служить корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ характеристического уравнения (25). По лемме квадратичная форма (20) будет иметь в новом базисе ту же матрицу, что и этот линейный оператор, т.е. окажется приведенной к каноническому виду

$$\lambda_1 y_1^2 +, \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \,; \qquad (26)$$

здесь каждый корень характеристического уравнения взят столько раз, какова его кратность.

Векторы нового базиса выражаются через векторы старого базиса формулами вида

$$\mathbf{e}'_{\mathbf{i}} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \qquad (27)$$

при этом матрица перехода является ортогональной. Матрица преобразования

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_k \,, \qquad (28)$$

приводящего квадратичную форму к каноническому виду, получается при транспонировании этой ортогональной матрицы и, следовательно, также является ортогональной.

18.9.3. Способ приведения квадратичной формы к каноническому виду

Из сказанного в 18.9.2 следует, что для нахождения коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ в каноническом виде (26) квадратичной формы (20) достаточно решить характеристическое уравнение (25).

Укажем теперь способ нахождения соответствующего ортонормированного базиса $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ и ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Пусть λ_k - корень характеристического уравнения, имеющий кратность 1. Подставив, этот корень в систему (2´´) (**§17):**

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{n1} - \lambda)x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0, \end{cases} \qquad (29)$$

найдем из нее координаты собственного вектора и, соответствующего этому собственному значению λ_k. Разделив найденный вектор на его длину, получим вектор искомого ортонормированного базиса.

Пусть теперь λ_k - корень характеристического уравнения, имеющий кратность $m > 1$. После его подстановки в (27) найдем m независимых решений полученной системы, выбрав их так, чтобы они определяли координаты m попарно ортогональных единичных векторов. Эти векторы образуют ортонормированный базис m-мерного подпространства, состоящего из собственных векторов, соответствующих данному собственному значению λ_k. Примем найденные векторы за векторы искомого базиса евклидова пространства.

Проведем такие же рассуждения для каждого из корней характеристического уравнения. Так как сумма кратностей всех корней равна $\boldsymbol{n}$, а собственные векторы, соответствующие различным корням, ортогональны, то мы получим искомый ортонормированный базис.

Матрицу ортогонального преобразования (28), приводящего квадратичную форму к каноническому виду, можно получить транспонированием матрицы перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$.

Пример. С помощью ортогонального преобразования привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{x}_1^2 - 2\boldsymbol{x}_2^2 + \boldsymbol{x}_3^2 + 4\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 - 8\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3 - 4\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3. \qquad (30)$$

Решение. 1) Находим канонический вид квадратичной формы.

Записываем матрицу квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

и составляем характеристическое уравнение вида (25):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель, получим:

$$\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^3 - 36\lambda + 9\lambda - 54 = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\lambda(\lambda-6)(\lambda+6) + 9(\lambda-6) = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda-6)(\lambda+3)^2 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -3.$$

Искомым каноническим видом формы (30) является

$$6\boldsymbol{y}_1^2 - 3\boldsymbol{y}_2^2 - 3\boldsymbol{y}_3^2. \qquad (31)$$

2) Переходим к нахождению базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

Запишем для данной квадратичной формы (30) систему вида (29):

$$\begin{cases} (1-\lambda)\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - 4\boldsymbol{x}_3 = 0 \\ 2\boldsymbol{x}_1 - (2+\lambda)\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 = 0 \\ -4\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_3 = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Находим вектор $\mathbf{e}'_1$ нового базиса, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 6$.

Полагаем в системе (32) $\lambda = 6$:

$$\begin{cases} -5\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - 4\boldsymbol{x}_3 = 0 \\ 2\boldsymbol{x}_1 - 8\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 = 0 \\ -4\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 - 5\boldsymbol{x}_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем какое-нибудь решение полученной системы. Если, например, положить $\boldsymbol{x}_1 = 2$, то из 1-го и 3-го уравнений будем иметь $\boldsymbol{x}_2 = 1$ и $\boldsymbol{x}_3 = -2$.

Вектор

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

имеющий эти координаты, - собственный вектор, соответствующий значению $\lambda_1 = 6$. Нормируя его, найдем вектор

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{\boldsymbol{P}}{|\boldsymbol{P}|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Находим векторы $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ нового базиса, соответствующие значению $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$.

Полагаем в системе (32) $\lambda = -3$:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система эквивалентна одному уравнению

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \tag{33}$$

из которого видно, что векторы $\mathbf{e}_2'$ и $\mathbf{e}_3'$ ортогональны уже найденному вектору $P = (2, \quad 1, \quad -2)'$, а следовательно, и вектору $\mathbf{e}_1' = \left(\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{2}{3}\right)'$.

Одно из решений уравнения (33) можно выбрать произвольно. Если, например, $x_2 = x_3 = 2$, то $x_1 = 1$. Нормируя найденный вектор

$$Q = (1, \quad 2, \quad 2)',$$

получим вектор

$$\mathbf{e}_2' = \frac{Q}{|Q|} = \left(\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3}\right)'.$$

Теперь определим вектор S, координаты которого удовлетворяют уравнению (33), но который ортогонален найденному выше вектору $Q = (1, \quad 2, \quad 2)'$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Получим какое-нибудь решение этой системы; если, например, $x_3 = 1$, то $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Тогда

$$S = (2, \quad -2, \quad 1)',$$

откуда

$$\mathbf{e}_3' = \frac{S}{|S|} = \left(\frac{2}{3}, \quad -\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3}\right)'.$$

Находим ортогональное преобразование, приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду.

Записываем выражения векторов нового ортонормированного базиса через векторы старого базиса:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 - \frac{2}{3}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2' = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3' = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Матрица искомого ортогонального преобразования получается при транспонировании матрицы этой системы, следовательно, искомое ортогональное преобразование выразится формулами

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3. \end{cases}$$

Если подставить эти значения в данную квадратичную форму (30), то получится ее канонический вид (31).

Вследствие неоднозначности выбора вектора $\mathbf{e}_2'$ существует бесконечное множество ортогональных преобразований, приводящих форму (30) к каноническому виду. Мы нашли одно из них

18.10. Закон инерции квадратичных форм

При решении примера в 18.8.2 мы привели одну и ту же квадратичную форму к каноническому (а в частности, и к нормальному) виду различными способами, получив при этом квадратичные формы с различными коэффициентами:

$$v_1^2 - v_2^2 + 8v_3^2\ , \qquad w_1^2 - w_2^2 + w_3^2, \qquad z_1^2 + z_2^2 - z_3^2\ .$$

Однако число членов с положительными коэффициентами, а также число членов с отрицательными коэффициентами во всех случаях оказалось одинаковым. Это не случайно. Чтобы подчеркнуть неизменность указанных чисел, соответствующее свойство квадратичных форм называют **законом инерции.** Оно выражается следующей теоремой.

Теорема. Если данная квадратичная форма приведена к каноническому виду с помощью двух различных линейных преобразований, то число положительных коэффициентов при квадратах новых переменных, так же как и число отрицательных коэффициентов, будет в обоих случаях одно и то же.

Доказательство опускаем.

18.11. Знакоопределенные квадратичные формы

Квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k = X'AX$$

называется знакоположительной, если неравенство

$$X'AX \geq 0$$

выполняется для всех точек $X \in R^n$, и **определенно положительной,** если неравенство

$$X'AX > 0$$

выполняется для всех $X \in R^n$, $X \neq 0$. Аналогично определяются **знакоотрнцательные и определенно отрицательные** квадратичные формы. С введенными квадратичными формами связаны понятия положительных и неотрицательных матриц.

Симметричная матрица A **называется положительной (неотрицательной)** и обозначается $A > 0$ (соответственно $A \geq 0$), если она служит матрицей коэффициентов определенно положительной (знакоположительной) квадратичной формы.

Рассмотрим симметрическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Минор матрицы A, составленный из строк с номерами $i_1, ..., i_p$ и столбцов $j_1, ..., j_p$, обозначим через

$$A\begin{pmatrix} i_1, ..., i_p \\ j_1, ..., j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_p} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{i_p j_1} & \cdots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix}.$$

Минор называется главным, если $i_1 = j_1$,..., $i_p = j_p$, т. е. он составлен из строк и столбцов с одинаковыми номерами. Миноры

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad ,..., \quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются последовательными главными.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема (критерии Сильвестра)

1) Для того чтобы матрица была положительной, необходимо и достаточно, чтобы ее последовательные главные миноры были положительны:

$$D_1 > 0 \quad ,..., \quad D_n > 0 . \tag{34}$$

2) Для того чтобы матрица была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были неотрицательны:

$$A\begin{pmatrix} i_1,...,i_p \\ i_1,...,i_p \end{pmatrix} \ge 0, \quad 1 \le i_1 \le i_2 \le ... \le i_p \le n, \quad p = 1,2,...,n . \tag{35}$$

Условий $D_1 \ge 0$,..., $D_n \ge 0$ не достаточно, чтобы матрица была неотрицательной. Действительно, у матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

последовательные главные миноры

$$D_1 = a_{11}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{11}^2 .$$

При $a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} < 0$, получаем $D_1 = 0, \qquad D_2 = 0$, однако в этом случае соответствующая форма $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{22}x_2^2$ не является знакоположительной (она знакоотрицательна).

Замечание. Применяя условия (34), (35) к матрице A, получаем критерии:

а) отрицательности матрицы: $(-1)^p D_p > 0, \quad p = 1,2,...,n$;

б) неположительности матрицы: $(-1)^p A\begin{pmatrix} i_1,...,i_p \\ i_1,...,i_p \end{pmatrix} \ge 0$.

Замечание. Проверку условий (35) следует начинать с построения последовательных главных миноров, ибо из неравенств (34) следует, что все главные миноры положительны.

В ряде случаев для установления определенно положительности и определенно отрицательности квадратичной формы применяют следующий критерий.

Теорема. Для того чтобы квадратичная форма $f = X'AX$ была определенно положительной (определенно отрицательной) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_i матрицы A были положительны (отрицательны).

Пример. Показать, что квадратичная форма $f = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$ является определенно положительной.

Решение

Первый способ. Матрица A квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Так как главные миноры матрицы A

$$D_1 = a_{11} = 13, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 56$$

положительны, то по критерию Сильвестра данная квадратичная форма f определенно положительная.

Второй способ. Для матрицы A характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 18\lambda + 56 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = 4$. Так как корни характеристического уравнения матрицы A положительны, то на основании последней теоремы данного пункта квадратичная форма f определенно положительная.

Ключевые слова и словосочетания

Билинейная функция или билинейная форма, билинейный функционал, общий вид билинейной формы, матрица билинейной формы, симметричная билинейная форма, ранг билинейной формы, невырожденная билинейная форма, квадратичная форма, общий вид квадратичной формы, канонический вид квадратичной формы, нормальный вид квадратичной формы, ортогональное преобразование переменных, закон инерции квадратичных форм, знакоположительная квадратичная форма, определенно положительная квадратичная форма, знакоорицательная квадратичная форма, определенно отрицательная квадратичная форма, положительная матрица, неотрицательная матрица, отрицательная матрица, неположительная матрица, критерии Сильвестра.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется билинейной функцией или билинейной формой?

2. Когда билинейная форма называется билинейным функционалом?

3. Приведите примерыбилинейных форм.

4. Приведите общий вид билинейной формы в n-мерном линейном пространстве. Что называют матрицей билинейной формы в заданном базисе?

5. Когда билинейная форма называется симметричной? Что можно говорить о матрице симметричной билинейной формы в любом базисе пространства R^n?

6. Как изменяется матрица билинейной формы при переходе к новому базису? Приведите закон ее изменения.

7. Разъясните, почему имеет смысл понятие ранга билинейной формы, определяемого как ранг матрицы этой формы в любом базисе пространства R^n.

8. Когда билинейная форма называется невырожденной формой?

9. Что называется квадратичной формой в линейном пространстве $\mathcal{X}$? Какой вид имеет любая квадратичная форма заданная в n-мерном линейном пространстве R^n с фиксированным базисом?

10. Какое соответствие существует между билинейными и квадратичными формами?

11.Что называется каноническим видом квадратичной формы? Какая матрица является матрицей квадратичной формы в данном случае? Что называется нормальным видом квадратичной формы?

12. Сформулируйте теорему о возможности приведения квадратичной формы к каноническому виду.

13. Приведите способы приведения квадратичной формы к каноническому и нормальному виду.

14. Прокомментируйте возможность применения метода Лагранжа и способа приведения квадратичной формы к каноническому и нормальному виду с помощью ортогонального преобразования.

15. В чем заключается недостаток способа приведения квадратичной формы к каноническому и нормальному виду с помощью ортогонального преобразования?

16. Что означает закон инерции квадратичных форм? Приведите теорему, которая выражает этот закон.

17. Когда квадратичная форма называется знакоположительной и определенно положительной?

18. Как определяются знакоотрнцательные и определенно отрицательные квадратичные формы?

19. Когда симметричная матрица называется положительной (неотрицательной)?

20. Когда симметричная матрица называется отрицательной (неположительной)?

21. Сформулируйте критерии Сильвестра.

22. Существует ли другой критерий для установления определенно положительности и определенно отрицательности квадратичной формы, кроме критериев Сильвестра? Если «Да», то сформулируйте это утверждение.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите канонический вид квадратичной формы:

а) $\boldsymbol{f} = 3\boldsymbol{x}_1^2 + 6\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 - 4\boldsymbol{x}_2^2$;

б) $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{x}_1^2 - 2\boldsymbol{x}_2^2 + \boldsymbol{x}_3^2 + 2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 + 4\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3$;

в) $\boldsymbol{f} = 2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3 - 6\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3$.

2. Найдите нормальный вид квадратичной формы:

а) $f = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

б) $f = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$.

3. Приведите квадратичную форму к нормальному виду и найдите формулы соответствующего линейного преобразования:

а) $f = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

б) $f = 9x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_3 - 42x_2x_3$;

в) $f = 4x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$;

г) $f = -x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 14x_1x_3 + 36x_2x_3$;

д) $f = x_1^2 + 7x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$;

е) $f = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

ж) $f = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4$;

з) $f = x_1^2 + 4x_2^2 - 9x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 4x_1x_2 - 2x_4x_5$.

3. Запишите канонический вид квадратичной формы и найдите ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к этому виду (в зависимости от избранного способа решения ответы могут оказаться различными):

а) $f = 6x_1^2 + 24x_1x_2 - x_2^2$;

б) $f = 3x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$;

в) $f = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;

г) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

д) $f = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

е) $f = 2x_1^2 - x_2^2 - 3x_4^2 + 4x_3x_4$;

ж) $f = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

4. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы:

а) $f = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$; *б*) $f = x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2$;

в) $f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$; *г*) $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$;

д) $f = -x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимирова Л.П. Прогнозирование и планирование в условиях рынка. М.: Издательский Дом «Дашков и К^0», 2001.

2. Бабешко Л.О. Коллокационные модели прогнозирования в финансовой сфере. М.: Экзамен, 2001.

3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.

4. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир,1989.

5. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Мир, 1976.

6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М.: Наука,1969.

7. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука,1969.

8. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Ч.1 и 2. М.: Высшая школа, 1982.

9. Высшая математика для экономистов / Под ред. профессора Н.Ш. Кремера. М.: ЮИНТИ, 2003.

СОДЕРЖАНИЕ

Бабаджанов Шопулат Шомашрабович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ЧАСТЬ I

Редактор Э. С. Хуснутдинова

Подписано в печать ….08. Формат 30×42 ¼.

Бумага №1. Оперативная печать. Усл. печ. л. 21,0

Тираж … экз. Заказ № ….

Цена договорная

«IQTISOD – MOLIYA»

100084, Ташкент, ул. Х. Асомова,7.