

**WO`ZBEKISTAN RESPUBLIKASI' BAYLANI'S,
INFORMACIYALASTI'RI'W HA'M TELEKOMMUNIKACIYA
TEXNOLOGIYALARI' MA'MLEKETLIK KOMITETI**

**TASHKENT INFORMACIYALI'Q TEXNOLOGIYALAR
UNIVERSITETI
NO`KIS FILIALI'**

Informatsiyali'q texnologiyalar kafedrası'

**Kompyuter injiniringi fakul'tetinin`
Informatika ha'm informatsiyali'q texnologiyalari bag`darinin`
studenti Baymanov Dawletmuratti'n'**

Pitkeriw qa`nigelik jumi'si'

***Temasi': «Pu'tin sanli' programmalasti'ri'w ma'selesin MathCad
sistemi'snan paydalani'p sheshiw»***

Ilimiy basshi':_____ prof. Uteuliev N. U.

Kafedra basli'g'i':_____ t.i.k. Arzimbetov T.Z.

NO`KIS - 2014 j.

MAZMUNI

Kirisiw	3
§1. Pu`tin sanlı sızılı programmalastırıw dıń ulıwma ma`selesinin` qoyılıwı..	5
§2. Pu`tin sanlı sızılı programmalastırıw ma`selesinin` ha`r qıylı formada jazılıwı.....	8
§3. Pu`tin sanlı sızılı programmalastırıw ma`selelerin sheshiw dıń simpleks usılı.....	12
§ 4. Pu`tin sanlı programmalastırıw ma`selelerin sheshiw usılları.....	25
§5. Pu`tin sanlı programmalastırıw dıń geypara a`meliy ma`seleleri.....	33
§6. Pu`tin sanlı programmalastırıw ma`selesin MathCAD ja`rdeminde sheshiw.....	38
Juwmaqlaw.....	40
Paydalanılǵan a`debiyatlar.....	41

Kirisiw

Ha'zirgi waqıtta, ilimiy-texnikalıq, injenerlik ha'm oqıw ma'selelerin sheshiw ushin ken' paydalanatug'ın ko'plegen programmalıq paketler islep shıg'ılǵ'an. Olardan Maple, Derive, Mathcad, Matematica, MatLab ha'm t.b. atap o'tse boladı.

A'meliy ma'selelerdi sheshiw ushin instrumental qurallardı islep shıg'ıwda son'g'ı jetiskenliklerdin' biri bolǵ'an MathCAD sisteması, barlıq paydalanıwshılar ushin zamanago'y, universal, massalıq matematikalıq sistema bolıp esaplanadı. MathCAD sisteması MathSoft (AQSh) firması ta'repinen islep shıg'ılǵ'an bolıp, matematikalıq esaplawlardı tek g'ana sanlı emes, al analitikalıq (simvollar) formada sheshiwge mu'mkinshilik beretug'ın fizika-matematikalıq paket bolıp esaplanadı.

MathCAD paketi to'mendegi ma'selelerdi sheshiw ushin arnalǵ'an: haqıyqıy ha'm kompleks sanlar u'stinde esaplawlar ju'rgiziw, sıızıqlı ha'm sıızıqlı emes ten'lemeler ha'm ten'lemeler sistemaların sheshiw, an'latpalardı a'piwayılastırıw, jayıw ha'm jıynaw, matritsalaradı transponirlew, ornın almasıırıw ha'm determinantın tabıw, eki ha'm u'sh o'lsheмли grafikler du'ziw, quramalı formulalarg'a iye ilimiy-texnikalıq tekstlerdi bezew, analitikalıq ha'm sanlı differentsiallaw ha'm integrallaw, statistikalıq esaplawlar ha'm mag'lıwmatlar analizi.

MathCAD a'jayıp, qolaylı grafikalıq interfeyske iye bolıp, OLE texnologiyasın qollap-quwatlaydı.

MathCAD hu'jjeti teksti, ilimiy stat'ya tekstinen derlik hesh qanday ayırmashılıqqa iye emes, al programmanın grafikalıq ortalıǵ'ı matematikalıq formulalardı a'dettegi u'yrenge ko'riniste jazıw, mag'lıwmatlardı da'l ha'm anıq grafikalıq su'wretlewge mu'mkinshilik beredi. MathCAD programmasının payda bolıwı menen studentler, injenerler, aspirantlar ha'm ilimpazlar ku'ndelikli jumısları ushin a'jayıp programmag'a iye boldı.

Solay etip universal sistemalardan biri bolǵ'an MathCAD sisteması, onda islew ko'nlikpeleri ha'm bul sistemada matematikalıq ma'selelerdi sheshiw mu'mkinshiliklerin beredi.

Matematikalık modellestiriwde pu'tin sanlı programlastırıw u'ken a'xmiyetke iye, sebebi bul usıl arkalı ayırım jag'daylarda teren' tu'sinikke iye ma'seleler sheshiledi.

Bul pitkeriw qa'nigelik jumısında pu'tin sanlı programlastırıu maselesin MathCAD sistemasınan paydalanıp sheshiu maselesi korip shıgıladı.

Pitkeriw qa'niygelik jumısı kirisiw bo'limi, to'rt paragraf, juwmaqlaw, a'debiyatlar dizimi ha'm qosımshadan turadı.

Jumıstın' birinshi paragrafında, sızıqlı programlastırıw ma'selelerinin' qoyılıwı ha'm sheshiw usılları qaralıp shıg'ıladı.

Jumıstın' ekinshi paragrafında, pu'tin sanlı programlastırıw ma'selelerin qoyılıwı ha'm sheshiw usılları qaraladı.

Jumıstın' u'shinshi paragrafında, sızıqlı programlastırıw ma'selelerine keltiriletug'in ekonomikalıq ma'seleler ha'm olardıń sheshimleri keltiriledi.

Jumıstın' to'rtinsh paragrafında, pu'tin sanlı programlastırıw ma'seleine baylanıslı sanlı mısallardı sheshiw qaraladı.

Jumıstın' aqırında aling'an na'tiyjelerdi juwmaqlaw ha'm pitkeriw qa'niygelik jumısında paydalanılǵ'an a'debiyatlar dizimi keltirilgen.

§1. Pu`tin sanlı sızıqlı programmalastırıwdın` ulıwma ma`selesinin` qoyılıwı.

Pu`tin sanlı sızıqlı programmalastırıwdın` ulıwma ma`selesi dep

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ - - - - - \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n &= b_r, \\ a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \dots + a_{r+1,n}x_n &\leq b_{r+1}, \\ a_{r+2,1}x_1 + a_{r+2,2}x_2 + \dots + a_{r+2,n}x_n &\leq b_{r+2}, \\ - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (1.2)$$

sha`rtlerin qanaatlandırıtug`ın $x_1, x_2, \dots, x_n$ belgisizlerinin` pu`tin ma`nislerinin` arasınan

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1.3)$$

sızıqlı funktsiyasına maksimum (en` u`lken) yamasa minimum (en` kishi) ma`nis beretug`ın ma`nislerin tabıw ma`selesine aytıladı. Bunda  $a_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ),  $b_i, c_i$  – aldın ala berilgen haqıyqıy sanlar. Bul ma`selede (1.1) qatnaslarının` shep jaqları ha`m (1.3) funktsiyası $x_1, x_2, \dots, x_n$ belgisizlerine qarata sızıqlı boladı. Sonlıqtan (1.1)-(1.3) ma`selesi Pu`tin sanlı programmalastırıw ma`selesi dep ataladı.

Qosındı belgisinen paydalanıp, (1.1) sha`rtlerin ha`m (1.3) funktsiyasın ıqshamlap jazıwg`a boladı:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &= b_i \quad (i = \overline{1, r}), \end{aligned} \right. \quad (1.4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\leq b_i \quad (i = \overline{r+1, m}), (r \leq m) \end{aligned} \right. \quad (1.5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_j &\geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \end{aligned} \right. \quad (1.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} Z(X) &= \sum_{j=1}^n c_jx_j \end{aligned} \right. \quad (1.7)$$

1-anıqlama. (1.3) funktsiyası (1.1)-(1.3) ma`selesinin` maqset funktsiyası dep, al (1.1),(1.2) sha`rtleri bul ma`selenin` sheklewleri yamasa shegaralawshı sha`rtleri dep ataladı.

2-anıqlama. (1.1)-(1.2) shegeralawshı sha`rtlerin qanaatlandıratug`ın qa`legen  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  vektorı (1.1)-(1.3) programmalastırıw ma`selesinin mu`mkin bolg`an sheshimi dep ataladı.

3-anıqlama. (1.3) maqset funksiya o`zinin` en` u`lken (maksimum) yamasa en` kishi (minimum) ma`nisine iye bolatug`ın (1.1)-(1.3) ma`selesinin $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ pu`tin sanlı sheshimi, bul ma`selenin` optimal` sheshimi dep ataladı.

(1.1)-(1.3) ma`selesinin  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ -qa`legen mu`mkin bolg`an sheshimindegi (1.3) maqset funksiya sinin` ma`nisin $Z(X)$ arqalı belgileymiz. Sonda, egerde (1.3) nin` maksimum ma`selesi jag`dayında  $Z(X) \leq Z(X^*)$ , al minimum ma`selesi jag`dayında  $Z(X) \geq Z(X^*)$  ten`sizligi orınlansa, onda $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ – (1.1)-(1.3) ma`selesinin` optimal` sheshimi boladı.

Pu`tin sanlı sızıqlı programmalastırıwdın` (1.1)-(1.3) ma`selesindegi (1.1) sheklewlerin ha`m (1.2) teris bolmaw sha`rtlerin talqılag`anda mına u`sh jag`day orın alıwı mu`mkin:

1. (1.1) ha`m (1.2) sha`rtleri qarama-qarsı, yag`nıy bul sha`rtlerdi qanaatlandıratug`ın  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sanları joq. Bul jag`dayda (1.1)-(1.3) ma`selesi sheshimge iye bolmaydı;

2. (1) ha`m (1.2) sha`rtleri birlikli, biraq olar anıqlag`an oblast` shegaralanbag`an. Bul jag`dayda $Z(X)$ – maqset funksiya joqarıdan shegaralanbag`an boladı. Bul jag`dayda ma`sele a`dettegi ma`nistegi sheshimge iye bolmaydı;

3. (1.1) ha`m (1.2) sha`rtleri birlikli ha`m olar anıqlag`an oblast` shegaralag`an. Bul jag`dayda (1.1)-(1.3) ma`selesi bir sheshimge yamasa sheksiz ko`p sheshimge iye boladı.

Egerde (1.1) sha`rtleri tek ten`lemeler yamasa tek ten`sizlikler ko`rinisinde berilse, onda olar bir tekli sheklewler dep, al olar ten`likler ha`m ten`sizlikler menen berilse, onda aralas sheklewler dep ataladı. Egerde (1.2) teris bolmaw sha`rtine barlıq $x_1, x_2, \dots, x_n$ belgisizleri bag`ing`an bolsa, onda bul sha`rtler bir tekli

sha`rtler dep ataladı. Al bul sha`rtlerdin` arasında on` bolmaw sha`rtleri de bar bolsa, yag`nıy (1.2) sha`rtleri  $x_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ );  $x_j \leq 0$  ( $j = s + 1, \dots, n$ ) ko`rinishinde bolsa, onda olar aralas sha`rtler dep ataladı. Sızıqlı programmalastırıwdın` ulıwma ma`selesi shegaralawshı sha`rtlerinin` ha`m teris bolmaw sha`rtlerinin` bir tekli bolmawı menen sıpatlanadı.

§2. Pu`tin sanlı sızılıq programmalastırıw ma`selesinin` ha`r qıylı formada jazılıwı.

1. Pu`tin sanlı sızılıq programmalastırıw ma`selesinin` standart ko`riniste jazılıwı. («standart» ataması inglizdin` «standart» degen co`zinen aling`an bolıp, bizin`she «u`lgi», «qa`lip» degen ma`nislerdi an`latadı). Bul ma`selede  $n$  sandag`ı x_j ($j = \overline{1, n}$) pu`tin belgisizlerinin`, r sandag`ı sızılıq

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n &\leq b_r \end{aligned} \quad (2.1)$$

ten`sizliklerinin` sistemasın, belgisizlerdin` teris bolmaw, pu`tin sanlı bolıw,

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (2.2)$$

sha`rtlerin ha`m

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2.3)$$

sızılıq funktsiyasına ekstremum (maksimum yamasa minimum) ma`nis beretug`ın, pu`tin ma`nislerin tabıw talap etiledi. Sızılıq programmalastırıw ma`selesinin` bul ko`riniste jazılıwında sheklewlerinin` ten`sizlik tu`rindegi bir tekli bolıwı ha`m teris bolmaw sha`rtlerinin` bir tekli bolıwı ta`miynlenedi.

2. Pu`tin sanlı sızılıq programmalastırıw ma`selesinin` kanonikalıq ko`riniste jazılıwı. («kanon» ataması grektin` «kanön» degen so`zinen aling`an bolıp, bizin`she «qa`de», «reje», «da`stu`r» degen ma`nislerdin` birewin an`latadı). Bul ma`selede  $n$  sandag`ı x_j ($j = \overline{1, n}$) pu`tin belgisizlerinin`, m sandag`ı sızılıq

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.4)$$

ten`lemelerinin` sistemasın ha`m

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (2.5)$$

teris bolmaw sha`rtlerin qanatlandırıtug`ın,

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \quad (2.6)$$

sızıqlı funksiyaına en` u`lken (maksimum) yamasa en` kishi (minimum) ma`nis beretug`ın ma`nislerin tabıw talap etiledi. Bul ma`sele sızıqlı programmalastırıw ma`selesinin` tiykarg`ı ma`selesi dep te ataladı. Sızıqlı programmalastırıw ma`selelerinde, a`dette g`a`rezsiz o`zgeriwshilerdin` sanı (2.4) sistemasındag`ı sızıqlı baylanıssız ten`lemelerdin` sanınan artıq boladı.

3. Pu`tin sanlı sızıqlı programmalastırıw ma`selesinin` vektorlıq, matritsalıq ha`m skalyar-vektorlıq ko`rinislerde jazılıwları.

Da`slep, du`ziwshileri (komponentaları) teris bolmag`an  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  vektorı ushın  $\bar{X} \geq 0$  belgilewin kirgizemiz. Bul  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$  bolatug`ının an`latadı.

a) standart ma`selenin` skalyar-vektorlıq ko`riniste jazılıwı. Bul ma`selede, sızıqlı sheklewlerdin`

$$\begin{aligned} (\bar{A}_1, \bar{X}) &\leq b_1, \\ (\bar{A}_2, \bar{X}) &\leq b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ (\bar{A}_m, \bar{X}) &\leq b_m \end{aligned} \quad (2.7)$$

sistemasın qanaatlandıratug`ın ha`m

$$Z(X) = (\bar{C}, \bar{X}) \quad (2.8)$$

sızıqlı funksiyaına ekstremum (maksimum yamasa minimum) ma`nis beretug`ın $\bar{X} \geq 0$ vektorın tabıw talap etiledi. Bunda $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n o`lshemli belgisiz vektor,  $\bar{A}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \dots, \bar{A}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}), \bar{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  –  $n$  o`lshemli berilgen vektorlar, al $(\bar{C}, \bar{X}), (\bar{A}_i, \bar{X})$ – n o`lshemli eki vektordın` skalyar ko`beymesin an`latadı:

$$(\bar{C}, \bar{X}) = \sum_{j=1}^n c_jx_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n;$$

$$(\bar{A}_i, \bar{X}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (i = \overline{1, m}).$$

b) standart ma'selenin` matritsaliq koriniste jazılıwı. Bul ma'selede sheklewlerdin`

$$A\bar{X} \leq \bar{B} \quad (2.9)$$

sistemasın qanaatlandırıtug`ın ha`m

$$Z(X) = (\bar{C}, \bar{X}) \quad (2.10)$$

sızıqlı funksiyaına ekstremum ma'nis beretug`ın  $\bar{X} \geq 0$  vektorın tabıw talap etiledi. Bunda  $A$  – sheklewler sistemasının` matritsası:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \bar{X} &= (x_1, x_2, \dots, x_n); \quad \bar{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n); \\ \bar{C} &= (c_1, c_2, \dots, c_n) \end{aligned}$$

v) standart ma'selenin` vektorlıq ko`riniste jazılıwı. Bul ma'selede sheklewlerdin`

$$x_1 \bar{P}_1 + x_2 \bar{P}_2 + \dots + x_n \bar{P}_n \leq \bar{B} \quad (2.11)$$

sistemasın qanaatlandırıp,

$$Z(X) = (\bar{C}, \bar{X}) \quad (2.12)$$

sızıqlı funksiyaına ekstremum ma'nis beretug`ın $\bar{X} \geq 0$ vektorın tabıw talap etiledi.

Bunda $\bar{P}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$, ..., $\bar{P}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$; $\bar{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$; $\bar{B} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$.

4. Kanonikalıq ko`riniste jazılğ`an ma'seleni matritsaliq ko`riniste jazıw. Bul ma'selede sheklewlerdin`

$$A\bar{X} = \bar{B} \quad (2.13)$$

sistemasın qanaatlandırıtug`ın ha`m sızıqlı

$$Z(X) = (\bar{C}, \bar{X}) \quad (2.14)$$

funksiyaına maksimum (minimum) ma'nis beretug`ın $\bar{X} \geq 0$ vektorın tabıw talap etiledi.

5. Pu`tin sanlı sızıqlı programmalastırıwdın` ulıwma ma'selesin skalyar-vektorlıq ko`riniste jazıw. Bul ma'selede sheklewlerdin`

$$\begin{aligned} (\bar{A}_i, \bar{X}) &= b_i & (i = \overline{1, r}), \\ (\bar{A}_i, \bar{X}) &\leq b_i & (i = \overline{r+1, m}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

sistemasın qanaatlandırıtug`ın ha`m

$$Z(X) = (\bar{C}, \bar{X}) \quad (2.16)$$

sızıqlı maqset funksiyaına ekstremum ma`nis beretug`ın $\bar{X} \geq 0$ vektorın tabıw talap etiledi. Bunda $\bar{A}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \ (i = \overline{1, m})$; $\bar{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$.

§3. Pu`tin sanlı sızılı programmalastırıw ma`selelerin sheshiwidin` simpleks usılı.

Pu`tin sanlı sızılı programmalastırıw ma`selesin sheshiwidin` simpleks usılının` tiykarg`ı mazmunı minalardan ibarat:

- 1) ma`selenin` baslang`ış tayanış sheshimi tabıladı;
- 2) maqset funksiyasının` ma`nisi anıq optimal` ma`nisine jaqın bolg`anday etip, bir tayanış sheshiminen ekinshisine o`tiw iske asırıladı;
- 3) ma`selenin` tayanış sheshimlerin optimallıqqa tekseriwdi o`z waqtında toqtatıwg`a yamasa onın` sheshiminin` joq ekenligi haqqında juwmaq shıg`arıwg`a, yag`nıy ma`seleni sheshiw protsessinin` tamamlang`anın anıqlawg`a mu`mkinshilik beretug`ın o`lshemlerdi (kriteriylerdi) anıqlaydı.

Simpleks usılının` teoriyalıq tiykarların, sızılı programmalastırıwdın` tiykarın salıwshılardıń biri, AQSh tın` Kaliforniya universitetinin` professorı Djordj Bernard Dantsig 1949-jılı ja`riyalang`an. Usıldın` ataması, onın` da`slepki waqıtları mu`mkin bolg`an sheshimlerinin` oblast`ları a`piwayı ko`rinislerge iye bolg`an ma`selelerdi sheshiwge qollanıwına baylanıslı kelip shıqqan (“simpleks” ataması latınnın` “simplex” degen so`zinen alıng`an bolıp, bizin`she “a`piwayı” degen ma`nisti an`latadı. Onın` matematikalıq ma`nisi berilgen sandag`ı o`lshemli a`piwayı do`n`es ko`pjaqlını, ma`selen tegislikte u`shmu`yeshlikti, ken`islikte tetraedrdi (u`shmu`yeshli piramidanı) an`latadı).

Sızılı programmalastırıw ma`selesin sheshiwidin` simpleks usılı maqset funksiyasının` ma`nisi o`sip (kemip) barg`anday etip, onın` bir tayanış sheshiminen ekinshisine o`tiwge tiykarlang`an. Egerde berilgen ma`sele optimal` sheshimge iye ha`m onın` ha`r bir tayanış sheshimi aynımag`an bolsa, onda bunday o`tiwdi iske asırıwg`a boladı. Sonday aq, simpleks usılın qollanıw ushın berilgen sızılı programmalastırıw ma`selesi kanonikalıq ko`riniste jazılğ`an ha`m onın` baslang`ış tayanış sheshimi belgili bolıwı kerek. Sheklewleri arnawlı ko`riniske iye bolg`an bunday sızılı programmalastırıw ma`selelerinin` baslang`ış tayanış sheshimin tikkeley jazıwg`a boladı. Sonlıqtan ulıwmalılıqtı

sheklemesten, da'slep kanonikalıq ma'selenin` sheklewlerinde  $m$  birlik vektorlar bar ha'm olar da'slepki  $m$  vektorlar boladı dep uyg`aramız. Bul jag`dayda kanonikalıq ma'sele to'mendegishe jazıladı:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (3.3)$$

Bunda a_{ij} , b_i ha'm c_j ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$) – berilgen turaqlı sanlar ($m < n$) ha'm ($b_i > 0$).

Berilgen ma'selenin` shegaralawshı sha`rtlerin vektorlıq ko`rinishinde jazamız:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_mP_m + x_{m+1}P_{m+1} + \dots + x_nP_n = P_0, \quad (3.4)$$

bunda

$$\begin{aligned} P_1 &= (1, 0, \dots, 0)', \quad P_2 = (0, 1, \dots, 0)', \dots, \quad P_m = (0, 0, \dots, 1)', \quad P_{m+1} = (a_{1m+1}, a_{2m+1}, \dots, a_{mm+1})', \dots, \\ P_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})', \quad P_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m)' \end{aligned}$$

ko`rinishindegi  $m$  o`lshemli vektorlar. Bundag`ı  $P_1, P_2, \dots, P_m$  – sıızıqlı baylanıssız  $m$  o`lshemli birlik vektorlar m o`lshemli ken`isliktin` bazisin du`zedi. Sonlıqtan (3.4) jiklewindegi $x_1, x_2, \dots, x_m$ belgisizleri bazislik, al $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ belgisizleri erkli (bazislik emes) belgisizler dep ataladı. Egerde erkli belgisizlerdi nol`ge ten`esek, onda (3.2) ten`liklerinen bazislik belgisizlerdin` mına ma`nislerine iye bolamız:  $x_i = b_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ). Bunnan (3.1)-(3.3) ma'selesinin` mu`mkın bolg`an sheshimi bolatug`ın

$$X^{(0)} = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m; \quad x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0) \quad (3.5)$$

vektorına iye bolamız. Bul $X^{(0)}$ vektorına

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_mP_m = P_0 \quad (3.6)$$

jikleniwi sa`ykes keledi. Bunda  $P_1, P_2, \dots, P_m$  vektorları sıızıqlı baylanıssız ha'm  $X^{(0)}$  vektorının` son`g`ı $n-m$ du`ziwshileri nol`ge ten` bolg`anlıqtan, (3.5) vektorı (3.1)-(3.3) ma'selesinin` tayanış sheshimi boladı.

Endi (3.5) baslang'ish tayanish sheshiminen paydalanıp, ma'selenin' jan'a tayanish sheshimine o'tiw mu'mkinshiligin qaraymız. $P_1, P_2, \dots, P_m$ vektorları m o'lishemli ken'isliktin' bazisin du'zedi. Sonlıqtan (3.4) ten'ligindegi $P_j (j = \overline{1, n})$ vektorlarının' ha'r birin bul birlik vektorlar boyınsha tek bir usıl menen g'ana jiklep jazıwg'a boladı:

$$P_j = \sum_{i=1}^m x_{ij} P_i \quad (j = \overline{1, n})$$

Meyli, baziske kirmegen bazı bir vektor ushın, ma'selen P_{m+1} vektorı ushın

$$x_{1m+1}P_1 + x_{2m+1}P_2 + \dots + x_{mm+1}P_m = P_{m+1} \quad (3.7)$$

jikleniwinin' x_{im+1} koefitsientlerinin' en' keminde birewi on' bolsın. Qa'legen $\theta > 0$ shamasın saylap alıp, og'an (7) ten'liginin' eki jag'ın ko'beytemiz ha'm kelip shıqqan na'tiyjeni (6) ten'liginen ag'zama-ag'za alamız:

$$(x_1 - \theta x_{1m+1})P_1 + (x_2 - \theta x_{2m+1})P_2 + \dots + (x_m - \theta x_{mm+1})P_m + \theta P_{m+1} = P_0 \quad (3.8)$$

Solay etip, egerde du'ziwshileri teris emes bolsa, onda

$$X^{(1)} = (x_1 - \theta x_{1m+1}, x_2 - \theta x_{2m+1}, \dots, x_m - \theta x_{mm+1}, 0, 0, \dots, 0)$$

vektorı ma'selenin' mu'mkin bolg'an sheshimi boladı.

Uyg'arıwımız boyınsha $\theta > 0$ bolg'anlıqtan, $X^{(1)}$ vektorının' barlıq on' emes x_{im+1} koefitsientleri bar du'ziwshileri teris bolmaydı. Sonlıqtan bul vektorlardın' tek $x_{im+1} (i = \overline{1, m})$ on' koefitsientleri bar du'ziwshilerin g'ana tekseriw kerek. Basqasha aytqanda, barlıq $x_{im+1} > 0$ ushın

$$x_i - \theta x_{im+1} \geq 0 \quad (3.9)$$

ten'sizligi orınlanatug'ınday etip, $\theta > 0$ shamasın saylap alıw kerek boladı. Son'g'ı

ten'sizlikten $\theta \leq \frac{x_i}{x_{im+1}}$ sha'rtine iye bolamız. Demek,

$$0 < \theta \leq \min_i \frac{x_i}{x_{im+1}}, \quad x_{im+1} > 0 \quad (3.10)$$

sha'rtin qanaatlandıratug'ın, qa'legen θ ushın $X^{(1)}$ vektorı (3.1)-(3.3) ma'selesinin' sheshimi boladı.

Biraqta ma'selenin` tayanish sheshimi  $m+1$  on` du'ziwshilerge iye bolıwı mu'mkin emes. Sonlıqtan onın`  $X^{(1)}$  sheshiminin` en` keminde bir du'ziwshisin nol'ge aylandırıw kerek boladı. Usı maqsette (3.10) qatnaslarında

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{im+1}}, \quad x_{im+1} > 0 \quad (3.11)$$

dep uyg`aramız. Sonda  $X^{(1)}$  vektorının` bul minimumg`a erisiletug`ın du'ziwshisi nol'ge aylanadı. Meyli bul $X^{(1)}$ vektorının` birinshi du'ziwshisi bolsın:

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{im+1}} = \frac{x_1}{x_{1m+1}}$$

θ_0 din` bul ma'nisi (8) ten`ligine aparıp qoyıp, mına na'tiyjege kelemiz:

$$\left(x_1 - \frac{x_1}{x_{1m+1}} x_{1m+1}\right)P_1 + \left(x_2 - \frac{x_1}{x_{1m+1}} x_{2m+1}\right)P_2 + \dots + \left(x_m - \frac{x_1}{x_{1m+1}} x_{mm+1}\right)P_m + \frac{x_1}{x_{1m+1}} P_{m+1} = P_0$$

Bunnan

$$x'_2 P_2 + x'_3 P_3 + \dots + x'_m P_m + x'_{m+1} P_{m+1} = P_0$$

jikleniwine iye bolamız. Bul jikleniwge

$$X^{(1)} = (0, x'_2, x'_3, \dots, x'_m, x'_{m+1}, 0, \dots, 0)$$

jan`a tayanish sheshimi sa'ykes keledi. Bunda $x'_i = x_i - \theta_0 x_{im+1}$ ($i = 2, 3, \dots, m$), $x'_{m+1} = \theta_0$ belgilewleri kirgizilgen.

Ma'selenin` kelesi tayanish sheshimin anıqlaw ushın  $P_2, P_3, \dots, P_m, P_{m+1}$  bazisine kirmegen qa'legen vektordı bul bazistin` vektorları boyınsha jiklep, onnan son` bazistin` vektorlarının` birewi bazisten shıqqanday etip $\theta_0 > 0$ shamasın anıqlaw kerek.

Solay etip, ma'selenin` jan`a tayanish sheshimlerine o'tiw protsessi baziske kirgiziletug`ın ha'm bazisten shıg`arılatus`ın vektorlardı anıqlawdan ibarat boladı. Baziske kirgiziletug`ın vektordı anıqlaw ushın paydalanılatus`ın o'lishem (belgi, kriteriyler), simpleks usılının` en` tiykarg`ı elementlerinin` biri boladı. Egerde  $P_{m+1}$  vektorı baziske kirgiziliwi kerek bolsa, al onın` (3.7) jikleniwinde barlıq $x_{im+1} \leq 0$ bolsa, onda (3.8) jikleniwindegi vektorlardın` birewi bazisten shıg`arıl`anday etip,  $\theta > 0$  shamasın saylap alıw mu'mkin emes. Bul jag`dayda $X^{(1)}$ sheshimi $m+1$ on`

du`ziwshilerge ha`m $P_1, P_2, \dots, P_m, P_{m+1}$ vektorlarının` sisteması sızıqlı baylanıslı boladı. Sonlıqtan  $X^{(1)}$  vektorı sheshimler ko`pjaqlısının` mu`yesh noqatı emes, al ma`selenin` maqset funktsiyası maksimum ma`niske iye bolmaytug`ın, onın` ishki noqatın anıqlaydı. Sızıqlı programmalastırıw ma`selesinin` optimal` sheshimin, onın` barlıq tayanış sheshimlerin emes, al olardıń bazı bir u`lesin tekserip ko`riw jolı menen tabıw mu`mkin. Bunın` ushın ha`r bir tayanış sheshimin optimallıqqa tekserip, ma`selenin` maqset funktsiyası maksimum ma`selesi jag`dayında o`sip, al minimum ma`selesi berilgende kemip barg`anday etip, bir tayanış sheshiminen ekinshisine o`tiwdi iske asırıw maqsetke muwapıq keledi.

Meyli, (3.1)-(3.3) ma`selesi sheshimge iye bolıp, onın` ha`r bir tayanış sheshimi aynımag`an bolsın. Bul jag`dayda (3.5) tayanış sheshimi ushın (3.6) jikleniwi ha`m

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n = Z(X^{(0)}) \quad (3.12)$$

ten`ligi orınlanadı. Bunda barlıq  $x_i > 0 \ (i = \overline{1, m})$  ha`m $Z(X^{(0)})$ – maqset funktsiyasının` (3.5) sheshimine sa`ykes ma`nisi.

Sonday aq (3.4) degi qa`legen  $P_j$  vektorı  $P_1, P_2, \dots, P_m$  bazis vektorları boyınsha tek bir usıl menen g`ana jiklenedi:

$$x_{1j} P_1 + x_{2j} P_2 + \dots + x_{mj} P_m = P_j \ (j = \overline{1, n}) \quad (3.13)$$

Sonlıqtan P_j vektorının` (3.13) jikleniwine maqset funktsiyasının` da tek bir

$$x_{1j} c_1 + x_{2j} c_2 + \dots + x_{mj} c_m = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} = Z_j \ (j = \overline{1, n}) \quad (3.14)$$

ma`nisi sa`ykes keledi. Bunda Z_j – maqset funktsiyasının` belgisizlerinin` ornına P_j vektorının` (3.13) jikleniwinin` sa`ykes koeffitsientlerin aparıp qoyg`andag`ı, onın` ma`nisi.

Qolaylılıq ushın $\delta_j = Z_j - c_j \ (j = \overline{1, n})$ belgilewin kirgizemiz, bunda c_j – maqset funktsiyasının`  $P_j$  vektorına sa`ykes keletug`ın koeffitsienti. Uyg`arıwımız boyınsha $P_1, P_2, \dots, P_m$ vektorları birlik vektorlar bolg`anlıqtan, (3.14) de  $x_{ij} = a_{ij}$  boladı ( $a_{ij}$  – (3.2) sheklewlerinin` koeffitsientleri). Sonlıqtan

$$Z_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} \quad (j = \overline{1, n}), \quad (3.15)$$

$$\delta_j = Z_j - c_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (3.16)$$

boladı. Bundag`ı  $\delta_j = Z_j - c_j$  shaması  $P_j$  vektorının` bazis vektorları boyınsha jikleniwinin` bahası yamasa ma`selenin` sa`ykes tayanış sheshiminin` bahası dep te ataladı. Sonda to`mendegi teorema durıs boladı.

3.1-teorema. Egerde (3.4) degi bazı bir P_j vektorı ushın $\delta_j = Z_j - c_j < 0$ sha`rti orınlansa, onda (3.1)-(3.3) ma`selesinin`  $X^{(0)}$  sheshimi optimal` sheshim bolmaydı ha`m  $Z(X) > Z(X^{(0)})$  sha`rti orınlanatug`ın  $X$  sheshimin jasawg`a boladı.

Saldar (maksimum ma`selesi jag`dayında tayanış sheshiminin` optimallıq sha`rti). Egerde (3.1)-(3.3) ma`selesinin` bazı bir $X^{(0)}$ sheshimi ushın barlıq $P_j \quad (j = \overline{1, n})$ vektorlarının` berilgen bazis boyınsha jikleniwleri

$$\delta_j = Z_j - c_j \geq 0 \quad (3.20)$$

sha`rtin qanaatlandırsa, onda  $X^{(0)}$  vektorı bul ma`selenin` optimal` sheshimi boladı.

Solay etip, (3.20) ten`sizligi (3.1)-(3.3) ma`selesinin`  $X^{(0)}$  tayanış sheshiminin` optimallıq sha`rti boladı. Sonlıqtan, maqset funktsiyasının` maksimum ma`nisi izlenip atırg`an ma`selenin` tayanış sheshimi, onın` optimal` sheshimi bolıwı ushın, bul sheshimnin` bahalarınin` teris emes bolıwı za`ru`rli ha`m jetkilikli.

Maqset funktsiyasının` minimum ma`nisi izlenip atırg`an (3.1)-(3.3) sızıqlı programmalastırıw ma`selesi ushın mına teorema durıs boladı.

3.2-teorema. Egerde (4) degi bazı bir P_j vektorı ushın $\delta_j = Z_j - c_j > 0$ sha`rti orınlansa, onda bunday sızıqlı programmalastırıw ma`selesinin`  $X^{(0)}$  sheshimi, onın` optimal` sheshimi bolmaydı ha`m $Z(X) < Z(X^{(0)})$ ten`sizligi orınlanatug`ın X sheshimin jasawg`a boladı.

Bul teoremanın` da`lilleniwi 1-teoremanın` da`lilleniwine uqsas. Sonlıqtan onın` da`lilleniwin keltirmeymiz.

Saldar (minimum ma`selesi jag`dayında tayanış sheshimnin` optimallıq sha`rti). Egerde (3.1)-(3.3) minimum ma`selesinin` bazı bir $X^{(0)}$ sheshimi ushın P_j ($j = \overline{1, n}$) vektorlarının` berilgen bazis boyınsha jikleniwleri

$$\delta_j = Z_j - c_j \leq 0 \quad (3.21)$$

ten`sizligin qanaatlandırsa, onda ma`selenin`  $X^{(0)}$  tayanış sheshimi onın` optimal` sheshimi boladı.

Solay etip, maqset funksiya'sının` minimum ma`nisi izlenip atırğ'an (3.1)-(3.3) ma`selesinin` tayanış sheshimi, onın` optimal` sheshimi bolıwı ushın (3.21) ten`sizliginin` orınlanıwı, za`ru`rli ha`m jetkilikli boladı. Sonlıqtan (3.21) ten`sizligi maqset funksiya'sının` minimum ma`nisi izlenetug`ın (3.1)-(3.3) ma`selesinin` tayanış sheshiminin` optimallıq sha`rti boladı.

Joqarıda keltirilgen teoremlar ha`m olardan kelip shıqqan saldarlar, ma`selenin` tabılğ'an tayanış sheshimi onın` optimal` sheshimi bolatug`ının yamasa bolmaytug`ının tekseriwge, jan`a tayanış sheshimine o`tiw kerekligin yamasa kerek emesligin anıqlawg`a mu`mkinshilik beredi.

Egerde ma`selenin` sha`rtleri ha`m da`slepki berilgen mag`lıwmatları simpleks-keste dep atalatug`ın arnawlı kestege jazılsa, onda onın` tayanış sheshimin optimallıqqa tekseriw ha`m bunnan son`g`ı esaplaw jumısların orınlaw a`dewir jen`illesedi (3.1-keste).

Kestenin` B bag`anasına tayanış sheshimnin` bazisine kirgen vektorlar, al  $C_B$  bag`anasına, berilgen bazistin` vektorları qanday indekslerge iye bolsa, maqset funksiya'sının` belgisizlerinen tap sonday indekslerge iye bolg`an koeffitsientleri jazıladı.  $P_0$  bag`anasına baslang`ış tayanış sheshiminin` on` du`ziwshileri (sheklewlerinin` saltan` ag`zaları) jazıladı: Usı bag`anag`a esaplawlardı orınlawdın` na`tiyjesinde kelip shıqqan, ma`selenin` optimal` sheshiminin` on` du`ziwshileri de jazıladı. Al  $P_j$  vektorlarının` bag`anaları bul vektorlardı bazis vektorları boyınsha jiklewdin` koeffitsientlerin an`latadı.

i	B	C_B	P_0	c_1	c_2	$\dots$	c_r	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
				P_1	P_2	$\dots$	P_r	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	a_{1m+1}	$\dots$	a_{1k}	$\dots$	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	a_{2m+1}	$\dots$	a_{2k}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
r	P_r	c_r	b_r	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	a_{rm+1}	$\dots$	a_{rk}	$\dots$	a_{rn}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	P_m	c_m	b_m	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	a_{mm+1}	$\dots$	a_{mk}	$\dots$	a_{mn}
$m+1$			z_0	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	δ_{m+1}	$\dots$	δ_k	$\dots$	δ_n

Kestenin` da`slepki m qatarı ma`selenin` da`slepki berilgen mag`lıwmatları menen anıqlanadı, al $(m+1)$ qatarındag`ı mag`lıwmatlar esaplawlardı orınlaw arqalı tabıladı. Bul son`g`ı qatarına P_0 vektorının` bag`anasına berilgen tayanış sheshimine sa`ykes maqset funksiyanın` ma`nisi  $Z_0$ , al  $P_j$  vektorının` bag`anasına  $\delta_j = Z_j - c_j$  bahasınin` ma`nisi jazıladı. Bundag`ı Z_j ma`nisi  $P_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) vektorının` $C_B = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ vektorına skalyar ko`beymesi esabında anıqlanadı ((3.15) formulasına qaran`):

$$Z_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} \quad (j = \overline{1, n})$$

Al Z_0 ma`nisi  $P_0$  vektorının` C_B vektorına skalyar ko`beymesine ten` ((3.12) formulasına qaran`):

$$Z_j = Z(X^{(0)}) = \sum_{i=1}^m c_i b_i$$

Bul 3.1-simpleks-kesteni toltırıp bolg`annan son`, baslang`ışh tayanış sheshimdi optimallıqqa tekseredi. Bunın` ushın kestenin`  $(m+1)$ -qatarın ko`zden o`tkeredi. Usının` na`tiyjesinde to`mendegi u`sh jag`daydın` birewi orın alıwı mu`mkin:

1) $j = m+1, m+2, \dots, n$ ma'nisleri ushın $\delta_j \geq 0$ ($j = \overline{1, m}$ bolg'anda $\delta_j = 0$ ha'm $Z_j = c_j$) boladı. Sonlıqtan bul jag'dayda barlıq $j = \overline{1, n}$ ushın $\delta_j \geq 0$ ten'sizligi orınlanadı;

2) bazı bir j indeksi ushın $\delta_j < 0$ ha'm bul indekske sa'ykes keletug'in barlıq $a_{ij} \leq 0$ ($i = \overline{1, m}$) boladı;

3) bazı bir j indeksleri ushın $\delta_j < 0$ ha'm bunday ha'r bir j ushın a_{ij} sanlarının en' keminde birewi on' san boladı.

Birinshi jag'dayda (3.20) optimallıq sha'rti boyınsha baslang'ish tayanish sheshimi optimal' sheshim boladı. Ekinshi jag'dayda mu'mkin bolg'an sheshimler ko'pliginde maqset funktsiyası joqaridan shegaralanbag'an. Al, u'shinshi jag'dayda, ma'selenin' maqset funktsiyasının' ma'nisi o'skendey etip, baslang'ish tayanish sheshiminen jan'a tayanish sheshimine o'tiwge boladı. Ma'selenin' bir tayanish sheshiminen onın' ekinshi tayanish sheshimine o'tiw, da'slepki bazisten qanday da bir vektordı shıg'arıw ha'm onın' ornına baziske jan'a vektordı kirgiziw arqalı iske asırıladı. Baziske kirgiziletug'in vektor esabında $\delta_j < 0$ sha'rtin qanaatlandıratug'in qa'legen P_j vektorın alıwg'a boladı. Ma'selen, egerde $\delta_k < 0$ bolsa, onda baziske P_k vektorı kirgiziledi.

Bazisten shıg'arılatushın vektordı anıqlaw ushın barlıq $a_{ik} > 0$ sanları ushın $\min_i \left(\frac{b_i}{a_{ik}} \right)$ shamasın tabadı. Meyli, bul minimumg'a $i = r$ bolg'anda erisilgen bolsın. Sonda bazisten P_r vektorı shıg'arıladı, al a_{rk} sanın sheshiwshi element dep ataydı. Sheshiwshi element kesilispesinde jaylasqan bag'ana ha'm qatar bag'darlawshı bag'ana ha'm bag'darlawshı qatar dep ataladı.

Bag'darlawshı bag'ana ha'm bag'darlawshı qatar anıqlang'annan son', jan'a tayanish sheshimi ha'm P_j vektorının' bul sheshimge sa'ykes jan'a bazis vektorları boyınsha jikleniwinin' koeffitsientleri tabıladı. Bunı Jordan-Gauss usılı menen an'sat iske asırıwg'a boladı. Bul jag'dayda, jan'a tayanish sheshiminin' on' du'ziwshileri mına formulalar menen esaplanadı:

$$b'_i = \begin{cases} b_i - (b_r/a_{rk})a_{ik}, & \text{eğer } i \neq r \text{ болса,} \\ b_r/a_{rk}, & \text{eğer } i = r \text{ болса} \end{cases} \quad (3.22)$$

Al P_j vektorlarının jan'a tayanish sheshimine sa'ykes keletug'in jan'a bazistin vektorları boyınsha jikleniwlerinin koeffitsientleri to'mendegi formulalar boyınsha tabıladı:

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - (a_{rj}/a_{rk})a_{ik}, & \text{eğer } i \neq r \text{ болса,} \\ a_{rj}/a_{rk}, & \text{eğer } i = r \text{ болса} \end{cases} \quad (3.23)$$

Bul (3.22) ha'm (3.23) formulaları boyınsha b'_i ha'm a'_{ij} sanları esaplang'annan son', olardıñ san ma'nisleri jan'a simpleks-kestege jazıladı (3.2-keste). Sonda bul kestenin' $(m+1)$ -qatarının' elementleri

$$z'_0 = z_0 - (b_r/a_{rk})\delta_k, \quad (3.24)$$

$$\delta'_j = \delta_j - (a_{rj}/a_{rk})\delta_k \quad (3.25)$$

formulaları menen yamasa olardıñ anıqlaması boyınsha esaplanadı.

3.2-keste

i	B	C_B	P_0	c_1	c_2	$\dots$	c_r	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
				P_1	P_2	$\dots$	P_r	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
1	P_1	c_1	b'_2	1	0	$\dots$	a'_{1r}	$\dots$	0	a'_{1m+1}	$\dots$	0	$\dots$	a'_{1n}
2	P_2	c_2	b'_2	0	1	$\dots$	a'_{2r}	$\dots$	0	a'_{2m+1}	$\dots$	0	$\dots$	a'_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
r	P_r	c_r	b'_r	0	0	$\dots$	a'_{rr}	$\dots$	$\dots$	a'_{rm+1}	$\dots$	1	$\dots$	a'_{rn}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	P_m	c_m	b'_m	0	0	$\dots$	a'_{mr}	$\dots$	1	a'_{mm+1}	$\dots$	0	$\dots$	a'_{mn}
$m+1$			z'_0	0	0	$\dots$	δ'_r	$\dots$	0	δ'_{m+1}	$\dots$	0	$\dots$	δ'_n

Esaplawlardı jen'illetiw maqsetinde baziske kirgiziletug'in vektor, absolyut shaması boyınsha en' u'lken $\delta_j < 0$ sanı menen anıqlanadı. Egerde bunday sanlar bir neshe bolsa, onda $\delta_j < 0$ sanları menen anıqlang'an c_j sanlarının' en' u'lkeni

qanday indekske iye bolsa, tap sonday indekske iye bolg'an P_j vektorı baziske kirgiziledi.

Solay etip, ma'selenin' bir tayanış sheshiminen ekinshisine o'tiw bir simpleks-kestenen ekinshi simpleks-kestege o'tiwdi an'latadı. Jan'a simpleks-kestenin' elementlerin (3.22)-(3.25) formulaları yamasa olardan tikkeley kelip shıg'atug'ın qa'deler boyınsha esaplawg'a boladı. Bul qa'deler to'mendegilerden ibarat.

Baziske kirgen vektorlardın' bag'analarına, atı birdey vektorlardın' qatarları ha'm bag'analarının' kesiliken jerine birlikler (1-ler) qoyıladı, al bul bag'analardın' qalg'an barlıq elementlerin nol'ge ten' dep esaplaydı.

Jan'a simpleks-kestenin' baziske kirgiziletug'ın vektor jazılg'an qatarındag'ı P_0 ha'm P_j vektorların' elementleri, da'slepki simpleks-kestenin' tap usınday qatarındag'ı elementlerdi sheshiwshi elementke bo'liwden kelip shıg'adı. Son'g'ı kestenin' C_E bag'anasına, baziske kirgiziletug'ın vektordın' qatarına c_k shaması jazıladı, bunda k -baziske kirgiziletug'ın vektordın' indeksi.

Al, jan'a simpleks-kestenin' P_0 ha'm P_j vektorların' bag'analarının' qalg'an elementleri u'shmu'yeshlik qa'desi boyınsha esaplanadı. Bul elementlerdin' qanday da bolsa birewin esaplaw ushın to'mendegi u'sh sandı anıqlaydı:

1) da'slepki berilgen simpleks-keste, jan'a simpleks-kestenin' izlenip atırg'an elementinin' ornında turg'an san;

2) da'slepki berilgen simpleks-keste, jan'a simpleks-kestenin' izlenip atırg'an elementi jaylasqan qatar menen baziske kirgiziletug'ın vektorg'a sa'ykes bag'ananın' kesiliken jerinde turg'an san;

3) jan'a simpleks-keste, izlenip atırg'an element jaylasqan bag'ana menen baziske jan'adan kirgiziletug'ın vektordın' qatarının' kesiliken jerinde jaylasqan san (joqarıda atap ko'rsetilgenindey, jan'a simpleks-kestenin' bul qatarı da'slepki simpleks-kestenin' sa'ykes qatarının' elementlerin sheshiwshi elementlerge bo'liwden kelip shıg'adı).

Bul u'sh san, eki to'besi da'slepki simpleks-kestedegi eki sang'a, al u'shinshi to'besi jan'a simpleks-kestedegi sang'a sa'ykes keletug'in, ayırıqsha u'shmu'yeshlikti payda etedi. Jan'a simpleks-kestenin' izlenip atırg'an elementin anıqlaw ushın birinshi sannan ekinshi ha'm u'shinshi sanlardın' ko'beymesin aladı.

Jan'a simpleks-kesteni toltırg'annan son' onın' $(m+1)$ -qatarın tekseredi. Egerde barlıq $\delta'_j = Z'_j - c_j \geq 0$ bolsa, onda jan'a tayanış sheshimi optimal' sheshim boladı. Al, egerde δ'_j sanlarının' arasında teris sanlar bar bolsa, onda joqarıda ko'rsetilgen a'meller izbe-izligin orınlap, jan'a tayanış sheshimin tabadı. Bul protsessti ma'selenin' optimal' sheshimi tabılg'ansha yamasa onın' sheshimi joq ekenligi anıqlang'ansha dawam etedi.

Joqarıda pu'tin sanlı sızıqlı programmalastırıw ma'selesi tayanış sheshimlerge iye ha'm olardıń ha'r biri aynımag'an sheshimi boladı dep uyg'arıldı. Al, egerde ma'sele aynıg'an tayanış sheshimlerge iye bolsa, onda simpleks usıldın' bazı bir adımında (iteratsiyasında) tayanış sheshimnin' bir neshe belgisizleri nol'ge ten' bolıwı mu'mkin. Sonlıqtan bul jag'dayda, bir tayanış sheshiminen ekinshisine o'tkende maqset funktsiyasının' ma'nisi o'zgermey, aldın'g'ı adımındag'ıday bolıp qalıwı mu'mkin. Bunnan tısqarı, ma'selenin' maqset funktsiyası usıldın' bir neshe adımında o'zinin' ma'nisin o'zgertpey saqlawı, sonday aq, baslang'ısh baziske qayıp keliw mu'mkinshilikleri de bar. Son'g'ı jag'dayda, a'dette tsikllesiw kelip shıqtı dep aytadı. Biraqta, a'meliy ma'selelerdi sheshiwde bunday jag'day og'ada siyrek ushırasadı.

Solay etip, (3.1)-(3.3) sızıqlı programmalastırıw ma'selesinin' optimal' sheshimin simpleks usılı menen tabıw to'mendegi etaplardan turadı:

1. Berilgen sızıqlı programmalastırıw ma'selesin kanonikalıq ko'rıniske keltirip jazadı.

2. Birlik vektorlardan du'zilgen bazisi bar baslang'ısh tayanış sheshimin ha'm shegaralıq sha'rtlerdegi vektorlardın' tayanış sheshimnin' bazisi boyınsha jikleniwlerinin' koeffitsientlerin tabadı. Egerde ma'selenin' tayanış sheshimi joq bolsa, onda sheklewler sistemasının' birlikli bolmawı sebepli, ma'sele sheshimge iye bolmaydı.

3. Tayanish sheshimnin' δ_j bahalarin esaplaydi, simpleks-kesteni toltiradi ha'm δ_j sanlarinin' arasinda teris sanlardin' barin yamasa joqlig'in aniqlaydi. Egerde olardin' arasinda teris sanlar bar bolsa, onda ya ma'selenin' sheshimge iye bolmaytug'inlig'i aniqlanadi, yamasa jan'a tayanish sheshimine o'tedi.

4. Bag'darlawshi bag'anani ha'm qatardi tabadi. Bag'darlawshi bag'ana absolyut shaması boyınsha en' u'lken $\delta_j < 0$ sanı menen, al bag'darlawshi qatar – P_0 vektorinin' bag'anasındag'ı du'ziwshilerinin' bag'darlawshi bag'ananın' on' du'ziwshilerine qatnaslarinin' en' kishisi menen aniqlanadi.

5. Joqaridag'ı (3.22)-(3.25) formalari boyınsha jan'a tayanish sheshimnin' on' du'ziwshilerin, P_j vektorinin' jan'a bazistin' vektorlari boyınsha jikleniwinin' koeffitsientlerin, Z'_0 ha'm δ'_j sanlarin aniqlaydi. Bul sanlardin' barlig'in jan'a simpleks-kesetege jazadi.

6. Tabılg'an tayanish sheshimdi optimallıqqa tekseredi. Egerde ol optimal' sheshim bolmasa ha'm jan'a tayanish sheshimge o'tiw kerek bolsa, onda 4-etapqa qaytip keledi, al optimal' sheshim tabılsa yamasa ma'selenin' sheshiminin' joq ekenligi aniqlansa, onda ma'seleni sheshiw protsessi toqtatıladı.

§4. Pu`tin sanlı programmalastırıw ma`selelerin sheshiw usılları.

Kesiwshi tegislikler usılı, tarmaqlar xa`m shegaralar usılı.

Kesiwshi tegislikler usılına to`mendegi usıllar kiredi: Gomori usılı. tsiklik metod (Gomori usılı dep te ataladı), tolıq pu`tin sanlı metod (Gomori usılı dep te ataladı), tuwrı metod (Yung metodu dep te ataladı)

Gomori usılı

Gomori usılınıń ideyası to`mendegishe, berilgen ma`selenin` sheshimi pu`tin sanlı bolıwına itibar bermesten ma`seleni simpleks usıl menen sheship optimal sheshimin anıqlaymız, eger tabılǵan sheshim pu`tin sanlı sheshim bolsa, ma`selenin` usı tabılǵan sheshimi pu`tin sanlı programmalastırıw ma`selesinin` de sheshimi boladı, kerisinshe ma`selenin` pu`tin sanlı sheshimin tabıw ushın kesindi ten`leme du`ziledi.

1-jag`day

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (4.1)$$

$$x_j \geq 0, \text{ } \forall j, \quad (j = \overline{1, n}) \quad (4.2)$$

$$y = \sum_{j=1}^m c_j x_j \rightarrow \min \quad (4.3)$$

Meyli, (4.1)-(4.3) ma`selesindegi belgisizlerdin` pu`tin bolıw sha`rtin taslap jiberiwden payda bolǵan ma`sele sheshilgen ha`m onın` optimal sheshimi  $x = (x_1; x_2; \dots, x_i; \dots, x_m, \dots, x_n)$  bolsın. Keyingi simpleks kestedegi bazis vektorlar  $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_m$  lerden ibarat deyik. Onda simpleks kestenin` ko`rinisi to`mendegishe boladı.

$$\bar{X} = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & x_{1,m+1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{1n} \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & x_{2,m+1} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_i & 0 & 0 & & 1 & & 0 & x_{i,m+1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m & 0 & 0 & & 0 & & 1 & x_{m,m+1} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{vmatrix}$$

Eger barlıq x_i -lar pu`tin sonlar bolsa, tabılǵan sheshim pu`tin sanlı programmalastırıw ma`selesinin` de sheshimi boladı.

2-jag`day Meyli, bazı  $x_j$  ler bo`lshek sanlardan ibarat bolsın, ha`mde bazı  $x_{ij}$  ler de bo`lshek sanlar bolsın (kerisinshe ma`sele pu`tin sanlı sheshimge iye bolmaydı). x_i ha`m  $x_{ij}$  lerdin` pu`tin bo`leklerin sa`ykes ra`wishte $[x_i]$ ha`m  $[x_{ij}]$  menen belgileymiz. Onda bul sanlardın` bo`lshek bo`limleri q_i , q_{ij} ler to`mendegishe anıqlanadı:

$$\begin{cases} q_i = x_i - [x_i] \\ q_{ij} = x_{ij} - [x_{ij}] \end{cases}$$

Meyli, $q_i \neq 0$ bolsın. Onda, $\bar{x}$ matritsanın`  $\max_{q_i \neq 0} q_i = q_k$  ten`likti qanaatlandırıwshı k qatarı ushın kesindi ten`leme du`ziledi.

Gomori usılının` algoritmi

Pu`tin sanlı (ma`selenin` barlıq o`zgeriwshilerine pu`tin bolıw sha`rtı qoyılǵanda) programmalastırıw ma`selesin sheshiw din` Gomori algoritmi to`mendegishe:

1. Simpleks usılı ja`rdeminde:
 - a) shegaralıq sha`rtler sisteması birlespegen (sheshiliwi toqtaydı);
 - b) optimal sheshim joq (sheshiliwi toqtaydı);
 - v) pu`tin sanlı optimal sheshim bar ha`m onı anıqlan` (sheshiliwi toqtaydı), juwap jazılsın;
2. Shekli pu`tin sanlı optimal sheshimdi tabıw ushın kesindi o`zgeriwshi tan`lansın;
3. Kesindi ten`leme du`ziw ushın sistemanın` ten`lemesi tan`lansın
4. Kesindi ten`leme du`zip ten`lemeler sistemasına kiritilsin ha`m 1 sha`rtke o`tin`.

Kesindi ten`leme

$q_{k1}x_1 + q_{k2}x_2 + \dots + q_{kn}x_n \geq q_k$ ten`sizlik du`ziledi, ten`sizlikti (-1) ge ko`beytip, qosımsha o`zgeriwshi kiritiw menen to`mendegi ten`leme payda boladı.
 $-q_{k1}x_1 - q_{k2}x_2 - \dots - q_{kn}x_n + x_{n+1} = -q_k$ bul ten`leme kesindi ten`leme delinedi, bunnan son`

keyingi 3 punktke o'tiledi. Kesindi ten'lemenini simpleks kestenin $m+2$ qatarına jaylastıramız. Bul ten'lemedegi x_{n+1} o'zgeriwshige sa'ykes keliwshi P_{n+1} vektor bazis vektor boladı. Bunnan son' P_{n+1} vektor bazisten shıg'arılıp, onın' ornına $\min_{q_{ij} < 0} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{kj}} \right) = \frac{\Delta_l}{q_{kl}}$ sha'rtin qanaatlandırıwshı R_l vektor bazise kiritiledi a'piwayı simpleks usılındag'ı formulalar ja'rdeminde simpleks keste almasırladı. Eger payda bolg'an simpleks kestedegi barlıq x_i ler pu'tin sanlı bolsa, (yag'nıy ha'mme $q_i = 0$) bolsa tabılg'an sheshim pu'tin sanlı programmalastırıw ma'selesini sheshimi boladı.

Kesindi ten'leme to'mendegishe du'ziledi:

1. Kesindi ten'lemenin' saltan ag'zası taqlang'an ten'lemenin' saltan ag'zasınan onın' pu'tin bo'leginen u'lken bolmag'an pu'tin sandı ayırıw jolı menen payda etiledi;
2. Kesindi ten'lemenin' o'zgeriwshilerinin' koeffitsientleri tan'lang'an ten'lemedegi sa'ykes koeffitsientlerden on'g'a jaqın bolg'an ha'm o'zinen kishi bolmag'an pu'tin san ayırılıp du'ziledi;
3. Kesindi o'zgeriwshi qosıladı (bul o'zgeriwshi sistemadag'ı o'zgeriwshilerden parqlı).

Pu'tin sanlı sıızıqlı programmalastırıw (PSSP) sıızıqlı programmalastırıwdın' teren' u'yrenilgen bo'limi esaplanadı. Pu'tin sanlı sıızıqlı programmalastırıw ma'selelerin sheshiwın' bir neshe usılları bar bolıp, bul usıllar ma'seleni sheshiwge jantasıwı menen tiykarınan u'sh toparg'a bo'linedi.

Birinshi topardag'ı usıllar kesindi tegislikler usılı delinedi. Bunday at menen atalıwına sebep, da'slep ma'sele pu'tin bolıw sha'rtin esapka almastan bazıbir usıl menen sheshiledi, eger sheshim pu'tin bolıw sha'rtin qanaatlandırısa, berilgen ma'sele sheshilgen boladı. Kerisinshe bolsa sonday jan'a shegara qosıladı, na'tiyjede ma'sele sheshimleri ko'pliginin' bir bo'legi kesip taslanadı. Bunda jan'a shegara baslang'ısh ma'selede hesh bir sheshimdi jog'altpaydı ha'm qosımsha shegarag'a sa'ykes kelgen gipertegislik berilgen ma'sele sheshimleri ko'pliginin' keminde bir pu'tin koordinatalar sheshiminen o'tedi. Bul jan'a tarawda ma'seleni pu'tin bolıw sha'rti esapka alınbastan sheshiledi. Eger sheshim pu'tin bolıw

sha`rtin qanaatlandırsa, berilgen baslang`ısh ma`sele sheshilgen boladı, kerisinshe jan`a shegara qosılıp protsess qaytarıladı. Protsess shegaralang`anlıg`ını ta`miynlew ushın ayırım jag`daylarda qosımsha shegaralar da qosılıwı mu`mkin. Atap o`tiw kerek, pu`tin bolıw sha`rtin esapka almastan tabılğ`an optimal sheshimdi pu`tinliginshe tolıqlaw menen berilgen ma`selenin` sheshimin ulıwma alg`anda payda etip bolmaydı. Bul toparg`a tiyisli bolg`an, R.Gomori, R.D. Yung ta`replerinen jaratılğ`an u`sh usıldı: tsikllıq, tolıq pu`tin sanlı, tuwrı usıllardı ko`rip shıg`amız.

Ekinshi topar usılları tiykarınan izbe-iz ko`rip shıg`ıw ideyasına tiykarlang`an bolıp, bunda ko`rip shıg`ıw sanı shegaralang`anlıg`ın ha`m ma`seleni kombinator xarakterge iyeligi a`hmiyetli rol oynaydı. Bunday usıllardan en` ko`p isletiletug`ını tarmaqlar ha`m shegaralar metodı. Bul metod 1960 jılda Lend ha`m Doyg ta`repinen «isbilermen» ma`selesin sheshiw ushın tabılğ`an bolıp, keyinshelik diskret programmalaştırıw ma`selesin sheshiw ushın maslastırılğ`an.

Pu`tin sanlı sızıqlı programmalaştırıw ma`selelerin sheshiwde isletiletug`ın ko`p g`ana usıllardıń tiykarğ`ı ideyası ma`seleni sızıqlı programmalaştırıw (SP) ma`selesine keltiriw ha`m sheshimler toplamın kishireytip barıw esabına baslang`ısh ma`seleni sheshiwge tiykarlang`an. Bunda, a`lbette, sızıqlı programmalaştırıw ma`selesinin` sheshimleri ko`pligi baslang`ısh ma`sele sheshimleri ko`pligine qarag`anda ken`rek boladı. Sonın` ushın pu`tin sanlı sızıqlı programmalaştırıw ma`selelerin sheshiwde ko`p jag`daylarda sızıqlı programmalaştırıw usıllarına mu`ra`ja`a`t qılıwg`a tuwrı keledi.

Sızıqlı programmalaştırıw ma`selesinde barlıq o`zgeriwshilerdi yaki olardıń bir bo`leginin` pu`tinliligi talap qılınsa, biz sa`ykes ra`wishte tolıq pu`tin sanlı yamasa u`les pu`tin sanlı sızıqlı programmalaştırıw ma`selesine kelemiz. Sonday etip pu`tin sanlı sızıqlı programmalaştırıw ma`selesi to`mendegishe qoyıladı:

Mına

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq a_{i0}, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j \text{ буюмун } j = 1, 2, \dots, n_1 \leq n,$$

sha`rtlerinde

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^n a_{0j}(-x_j)$$

funktsiyanın` ekstremumı tabılsın.

Bul ma`seleni to`mendegi ko`riniste jazıw qolaylı boladı:

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^n a_{0j}(-x_j) \rightarrow \max, \quad (4.4)$$

$$x_{n+1} = a_{n+10} - a_{n+1,1}x_1 - \dots - a_{n+1,n}x_n$$

(4.5)

$$x_{n+m} = a_{n+m0} - a_{n+m,1}x_1 - \dots - a_{n+m,n}x_n,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n+m, \quad (4.6)$$

$$x_j \text{ буюмун } j = 1, 2, \dots, n_1 \leq n+m. \quad (4.7)$$

Aytıp o`tiwimiz tiyisli, bul ma`selenin` tolıq yamasa u`les pu`tin bolıw sha`rti o`zgermeydi. Endigi paragrafta pu`tin sanlı sızıqlı programmalaştırıw ma`selesine tiyisli bir neshe mısallardı ko`rip shıg`amız.

Gomori usılı ja`rdeminde pu`tin sanlı programmalaştırıw ma`selesin sheshiw:

Mısal:

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 8 - 3x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_2 - 3x_1 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ пүтин}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ пүтин}$$

Sheshiliwi :

$$f(x_1, x_2) = 8 - 3x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_2 - 3x_1 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ пүтин}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ пүтин}$$

Bul ma`seleni  $x_1, x_2$  - lerdin` pu`tin bolıw sha`rtin esapqa almastan Simpleks usılı menen sheship 3- kestede ma`selenin` optimal sheshimin tabamız.

Bul ma`selede P_3, P_4 - ler bazislik vektor bolıp esaplanadı.

1-keste

Bazis vektor	C _b	P ₀	-3 P ₁	-1 P ₂	0 P ₃	0 P ₄
P ₃	0	6	2	3	1	0
P ₄	0	3	2	-3	0	1
		8+0	3	1	0	0

2-keste

Bazis vektor	C _b	P ₀	-3 P ₁	-1 P ₂	0 P ₃	0 P ₄
P ₃	0	3	0	6	1	-1
P ₁	-3	3/2	1	-3/2	0	1/2
		7/2	0	11/2	0	-3/2

3-keste

Bazis vektor	C _b	P ₀	-3 P ₁	-1 P ₂	0 P ₃	0 P ₄
P ₂	-1	1/3	0	1	1/6	-1/6
P ₁	-3	9/4	1	0	1/4	1/4
		3/4	0	0	-11/12	-7/12

Solay etip 3-shi etapta ma'selenin'optimal' sheshimi tabıladı, biraq bul pu'tin sanlı emes. Onı pu'tin sanlı sheshimge aylandırıw ushın keyingi simpleks kestesinin' 1-shi qatarına salıstırmalı kesiwshi ten'leme du'zemiz. Bunın' ushın, en' aldın to'mendegi ten'sizlikti payda etemiz:

$$\frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}$$

Bul ten'sizliktin' eki ta'repin (-1) ko'beytirip, x₅- qosımsha o'zgeriwshi kiritemiz ha'm to'mendegi ten'lemenı payda etemiz:

$$-\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 + x_5 = \frac{1}{2}$$

Bunı simpleks kestesinin' 4-qatarına jaylastıramız

4-keste

Bazis vektor	C _b	P ₀	-3 P ₁	-1 P ₂	0 P ₃	0 P ₄	0 P ₅
--------------	----------------	----------------	----------------------	----------------------	---------------------	---------------------	---------------------

P ₂	-1	1/2	0	1	1/6	-1/6	0
P ₁	-3	9/4	1	0	1/4	1/4	0
Δ_j		3/4	0	0	-11/12	-7/12	0
P ₅	0	-1/5	0	0	-1/6	1/6	1

Bazisten P₅- vektordı shıǵ`arıp, onıǵ ornına P<sub>3</sub>- vektordı kiritemiz. Na`tiyjede simpleks keste almasadı ha`m to`mendegi ko`riniske keledi

5-keste

Bazis vektor	C _b	P ₀	-3 P ₁	-1 P ₂	0 P ₃	0 P ₄	0 P ₅
P ₂	-1	0	0	1	0	0	0
P ₁	-3	3/2	1	0	0	1/2	0
P ₃	0	3	0	0	1	-1	0
Δ_j	7/2	0	0	0	-3/2		
P ₆	0	-3/2	0	0	0	-1/2	1

Bul Simpleks tablitsanıǵ 2-qatarına salıstırmalı kesiwshi teńleme du`zemiz. Bunın` ushın aldın to`mendegi ten`sizlikti du`zip alamız.

$$\frac{1}{2}x_4 \geq \frac{3}{2}$$

Bul ten`sizliktin` eki ta`repin (-1) ko`beytirip to`mendegige iye bolamız:

$$-\frac{1}{2}x_4 \leq -\frac{3}{2}$$

Ten`sizliktin` kishi ta`repine x<sub>6</sub>-qosımsha o`zgeriwshi kiritemiz ha`m kesiwshi ten`leme du`zemiz:

$$-\frac{1}{2}x_4 + x_6 = -\frac{3}{2}$$

Bul ten`lemeni kestenin` 5-qatarına jaylastıramız. Son`ınan P<sub>6</sub>-vektordı bazisten shıǵ`arıp , onın` ornına P₄- vektordı kiritemiz.

6-keste

Bazis vektor	C _b	P ₀	-3 P ₁	-1 P ₂	0 P ₃	0 P ₄	0 P ₆
P ₂	-1	0	0	1	0	0	0
P ₁	-3	1	1	0	0	0	1
P ₃	0	4	0	0	1	0	1
P ₄	0	1	0	0	0	1	-2

Δ_j	0	8-3=5	0	0	0	0	-3
------------	---	-------	---	---	---	---	----

Payda bolg`an simpleks kestesindeki  $P_0$ - vektorlarınıın koordinatları  $pu$ `tin sanlardan ibarat. Demek, pu `tin sanlı programmalastırıw ma`selesinin` sheshimi tabıladı ha`m ol $x = (1; 0; 4; 1)$ bolıp, $f_{min} = 5$ boladı.

§5. Pu`tin sanlı programmalastırıwdın` geypara a`meliy ma`seleleri.

1. Ryukzak haqqındag`ı ma`sele (“ryukzak” ataması nemistin` “rucksack” degen so`zinen alıng`an bolıp, ol zat salınatug`ın arnawlı iyin qalta ma`nisin an`latadı).

Bul ma`selede so`z saparg`a shıg`ıwg`a tayarlanıp atırg`an sayaxatshı haqqında boladı. Ol n atamadag`ı ha`r qıylı kerekli zatların ryukzakqa jaylastırıwı kerek. Zatlardın` salmag`ına, ko`lemine, sızıqlı o`lshemlerine h.t.b. baylanışlı m sheklewleri bar. Meyli a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) – j -atamadag`ı zattın` i -sıpatlaması, al b_i -onın` salmag`ına, ko`lemine h.t.b. qoyılğ`an sheklew bolsın. Bunnan son`,  $x_j$  arqalı ryukzakqa jaylastırıw jobalastırılğ`an j -atamadag`ı zattın` sanın, al c_j arqalı j -atamadag`ı zattın` sapar waqtındag`ı qunlılıg`ın belgileymiz. Sayaxatshı barlıq kerekli zatların` qunlılıg`ın en` u`lken (maksimum) bolğ`anday etip, ha`r tu`rdegi  $x_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) zatların` neshewin ryukzakqa jaylastırıwı kerek?

Sonda ryukzak haqqındag`ı ma`selenin` matematikalıq modeli to`mendegishe jazıladı:

$$Z(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (5.1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (5.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (5.3)$$

$$x_j - \text{pu`tin} \quad (j = \overline{1, n}) \quad (5.4)$$

Bul ma`sele sızıqlı programmalastırıw ma`selesi bolmaydı. Sebebi, onın` belgisizlerinin` pu`tin bolıw talabın sızıqlı ten`sizlikler menen an`latıwg`a bolmaydı.

2. Kommivoyajer haqqındag`ı ma`sele (“kommivoyajer” ataması frantsuzdın` “commus voyageur” degen so`zinen alıng`an bolıp, ol sawda firmasının` (ka`rxanasının`) el aralap ju`retug`ın xızmetkeri ma`nisin an`latadı).

$A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ – $n+1$ sandag`ı qalalar bar. Olardın` aralarındag`ı qashıqlıqlardın` $C = (c_{ij})$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots, n$) matritsası berilgen. Kommivoyajer

da'slepki A_0 qalasınan shıg'ıp, qalg'an barlıq qalalarda tek bir ret g'ana bolıp, da'slepki qalag'a aynalıp keliwi kerek. Kommivoyajerdin' ju'rip o'tken barlıq jolı en' qısqa (minimum) bolıwı ushın, ol ko'rsetilgen qalalarg'a qanday ta'rtipte barıwı kerek? Basqasha aytqanda, onın' en' qısqa marshrutın tabıw talap etiledi.

Egerde kommivoyajer A_i qalasınan shıg'ıp A_j qalasına kelse 1 ma'nisin, al kerı jag'dayda 0 ma'nisin qabıl etetug'in x_{ij} o'zgeriwshisin kirgizemiz. Sonda bul ma'selenin' matematikalıq modeli to'mendegishe qaliplestiriledi. To'mendegi sha'rtler orınlang'anda kommivoyajerdin' barlıq ju'rgen

$$Z(X) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij} \quad (5.5)$$

jolının' en' qısqa (minimum) bolıwına erisiw talap etiledi:

1) kommivoyajer ha'r bir qaladan tek bir ret g'ana shıg'ıp ketedi:

$$\sum_{j=0}^n x_{ij} = 1 \quad (i = \overline{1, n}) \quad (5.6)$$

2) kommivoyajer da'slepki qaladan basqa barlıq qalalarg'a tek bir ret g'ana baradı:

$$\sum_{i=0}^m x_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (5.7)$$

3) kommivoyajerdin' jolı tek bir pu'tin tsiklden ibarat boladı:

$$u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1 \quad (i, j = \overline{1, n}; i \neq j) \quad (5.8)$$

4) barlıq u_i, u_j o'zgeriwshileri teris emes pu'tin sanlar, al

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eger kommivoyajer } A_i \text{ qalasınan } A_j \text{ qalasına kelse;} \\ 0, & \text{kerı jag'dayda.} \end{cases}$$

Bundag'ı u_i ($i = \overline{1, n}$) o'zgeriwshileri tek ma'selenin' sheklewlerinde g'ana qatnasadı, biraq maqset funksiyaasına qatnaspaydı. Olar ja'rdemshi rolin atqaradı, biraq olardıń bolıwı za'ru'rli.

A_0 qalasınan baslanatug'in qal'egen tsikl ushın 3) sheklewlerin qanaatlandıratug'in u_i ($i = \overline{1, n}$) sanların tabıwg'a bolatug'ınına an'sat iseniwge boladı. Haqıyqatında da, eger kommivoyajer o'zinin' jolının' m -etabında A_i

qalasına barsa, onda $u_i = m$ dep uyg'aramız. Bunnan, eger $x_{ij} = 0$ bolsa, onda $u_i - u_j \leq n - 1$ bolatug'ını kelip shıg'adı. Al, eger $x_{ij} = 1$ bolsa, onda 3) sha'rti qatan' ten'lik bolıp orınlanadı: $u_i - u_j + nx_{ij} = m - (m + 1) + n = n - 1$

Solay etip, jasalma tu'rde kirgizilgendey bolıp ko'rinse de, 3) sha'rti kommivoyajerdin' marshrutının' baylanışılıg'ın ta'miynleydi. Da'lirek aytqanda, bul sha'rtler A_0 qalası arqalı o'tpeytug'ın qa'legen tsikldi qadag'an etedi.

Ha'zirgi waqıtta pu'tin sanlı programmalaştırıw ma'selelerin sheshiwidin' bir neshe arnawlı usılları islenip shıg'ılǵ'an. Olardın' arasında esaplaw praktikasında a'dewir ken' taralg'anı, 1958-jılı amerikalı matematik R.E.Gomori ta'repinen usınılg'an, kesiwshiler yamasa Gomori usılı boladı. Bul usıldın' tiykarında sızıqlı programmalaştırıw ma'selelerin sheshiwidin' joqarıda bayanlang'an simpleks usılı jatadı.

3-mısal. Dar'ya kemeshilik basqarması sonı anıqladı, n marshrutın' ha'r bir marshrutı boyınsha sezon dawamında ortasha sandag'ı jolawshılar ju'rer eken. Transport quralın isletiw na'tiyjeliligi ha'r bir marshrut boyınsha isletiw na'tiyjeliklerinin' jıyındısınan ibarat bolıp, olardın' ha'r biri o'z nawbetinde sa'ykes reysten keletug'ın payda menen reyske ketken qa'rejet ayırmasına ten'. Payda- satılǵ'an biletler sanı menen xızmetshilerge ketken haq ha'm janar may ushın ketken qa'rejetler arqalı anıqlanadı. Qaysı marshrutqa qanday tiptegi kemededen nesheden ajratılса, jolawshılar talabı tolıq qanaatlantırıladı ha'm keletug'ın payda maksimal boladı?

Meyli, j - marshrut boyınsha sezon dawamında b_j jolawshı qatnasın: Bul marshrutta $1, 2, \dots, m$ tiptegi kemelerden paydalanıw mu'mkin ha'm ha'r bir i - tiptegi keme ushın to'mendegi ko'rsetkishler belgili:

- 1) a_{i1} - ju'k ko'teriw (orınlar sanı);
- 2) a_{i2} - xızmet o'rsetiwshiler sanı;
- 3) a_{i3} - sezon dawamında sarıplang'an janar may mug'darı;
- 4) c_{ij} - j marshrut boyınsha i - tiptegi bir keme isletilgende keletug'ın payda;

5) Sezon dawamında isletiletug`ın janar may mug`darı b_1 -den, xızmet ko`rsetiwshiler sanı bolsa  $b_2$  -den asmasın,  $x_{ij}$  -mug`dar j -marshruttag`ı  $i$  - tiptegi kemeler sanın bildirsın. Onda, shartke ko`re shekleniwler to`mendegishe boladı:

$$\sum_{i=1}^m a_{i1} x_{ij} \geq b_j^1, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{i2} x_{ij} \leq b_2,$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{i3} x_{ij} \leq b_3,$$

$$x_{ij} \geq 0 - \text{бүтүн}$$

$$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ma`selenin` qoyılıwı tiykarınan, usı berilgen sha`rtlerde sonday $x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn})$ vektorlardı tabıw kerek, ol

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

funktsiyasına maksimal ma`nis bersin.

4-mısal. Meyli n -tu`rli tiptegi samolyotlar bolıp, olardı  $n$  -bag`darg`a bo`listiriw lazım bolsın.

Eger i -tiptegi samolyot j -bag`darg`a qoyılsa, bunnan keletug`ın payda  $c_{ij}$  ge ten`. Samolyotlardı bag`darlarg`a sonday bo`listiriw kerek, na`tiyjede payda maksimal bolsın.

Bul ma`seleni sheshiw ushın to`mendegishe o`zgeriwshiler kiritemiz

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{егер } i - \text{самолёт } j - \text{бағдарға } _ \text{қойылса} \\ 0, \text{кері } _ \text{жағдайда} \end{cases}$$

onda, biz to`mendegi pu`tin sanlı sızıqlı programmalastırıw ma`selesine kelemiz:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad (\text{ha`r bir bag`darg`a bir samolyot tayınlanadı});$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (\text{ha`r bir samolyot tek g`ana bir bag`darg`a tayınlanadı}), \text{ sol}$$

sha`rtlerde

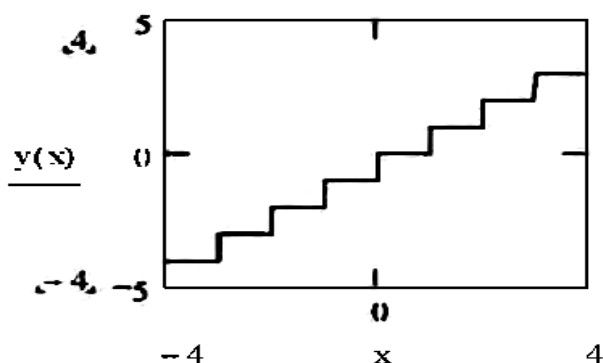
$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

funktsiyasının maksimumın tabın.

Bizge ma`lim, o`zgeriwshi tek g`ana eki 0 ha`m 1 ma`nislerdi qabıl qılsa, bunday o`zgeriwshi bul` o`zgeriwshisi delinedi. sog`an tiykarınan, bunday o`zgeriwshisi bolg`an ma`seleler Bul` ma`seleleri dep ju`ritiledi. Biz ko`rgen 2-ma`sele tap sonday ma`selelerden biri esaplanadı.

§6. Pu'tin sanli programmalastrıw ma'selesin MathCAD ja'rdeminde sheshiw.

MathCAD kitapxanasına kiretugin du'zilgen floor (x) funktsiyası u'lkenirek pu'tin qaytaradı. Ha'r bir X pu'tin ma'nisinde funktsiya birinshi tuwılatın uzilisine iye boladı. X-U plot maydanında onın' ($u(x) := \text{floor}(x)$) grafıgı mına korinisine iye. (6.1. suwret)



6.1. suwret floor(x) funktsiyasının' grafıgı floor(x) funktsiyasının' sıızılıq programmalastırılğ'an pu'tin sanlı ma'selelerdin' tolıq ha'm ayırım sheshimine qollanıwın ko'rip shıg'amız.

$$\begin{aligned}
 &\text{ORIGIN} := 1 \\
 &\underline{C} := \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \underline{X} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T \quad \underline{z}(\underline{X}) := \underline{C} \cdot \underline{X} \quad \underline{z}(\underline{X}) = 9 \\
 &\underline{A} := \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad \underline{B} := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 &\text{Given} \\
 &\underline{X} \geq 0 \quad \underline{A} \cdot \underline{X} \leq \underline{B} \quad \text{floor}(\underline{X}_2) = \underline{X}_2 \\
 &\underline{M} := \text{Maximize}(\underline{z}, \underline{X}) \quad \underline{M} = \begin{pmatrix} 1.833 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{z}(\underline{M}) = 13.167
 \end{aligned}$$

(6.2. suwret)

Mısal 2 Pu'tin sanlı ma'seleni jarım jartı sheshemiz.

$$Z = 5X_1 + 4X_2 \rightarrow \max$$

$$6X_1 - 9X_2 \leq 2$$

$$-7X_1 + 5X_2 \leq 4, X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_2 -$$

pu'tin sanlı

Berilgenledin' da'slepkinsin qoyamız bag'darlı funktsiyanın' koeffitsientlerin sonday-aq shegaralıqtın' shep ha'm on' bo'liminin' A ha'm V matritsaların sonday-aq (1;1) o'zgeriwshilerdin' ma'nislerin da'slepkinsin. Esaplag'ısh blogka $\underline{X}_2 = \text{floor}(\underline{X}_2)$ sha'rtin qosamız (6.2. suwret)

Ju'yabı (1,833,1), $Z_{\max} = 13,167$

$$\begin{aligned} & \text{ORIGIN} := 1 \\ & C := (-4 \ 9 \ 2 \ 4) \quad X := (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T \quad z(X) := C \cdot X \quad z(X) = 11 \\ & \text{Given} \\ & X \geq 0 \quad (2X)_1 + (X)_2 + 6X_3 + 2X_4 = 4 \\ & 2X_1 + (2X)_2 + 6X_3 + 1X_4 = 5 \\ & \text{floor}(X_2) = X_2 \quad -2X_1 - X_2 + 3X_3 + 3X_4 = 5 \\ & M := \text{Maximize}(z, X) \\ & M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.5 \\ -7.438 \times 10^{-15} \end{pmatrix} \quad z(M) = 10 \end{aligned}$$

6.3 suwrette

3-mısal Pu`tin sanlı ma`seleni jarım jartı sheshemiz.

$$Z = -4X_1 + 9X_2 + 2X_3 + 4X_4 \rightarrow \max,$$

$$2X_1 + X_2 + 6X_3 + 2X_4 = 4$$

$$2X_1 + 2X_2 + 6X_3 + X_4 = 5$$

$$-2X_1 - X_2 + 3X_3 + 3X_4 = 5$$

$$X_j \geq 0, (j = 1 - 4), X_2 \text{ -ptin sanlı}$$

Sheshimi -6.3 suwrette

Mısal 4. Ma`sele ushın tolıq pu`tin sanap sheshim tabamız

$$Z = 3X_1 + 3X_2 \rightarrow \max,$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 2$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$-X_1 + X_2 \leq 1$$

$$X_j \geq 0, \text{ pu`tin sanlıq } (j=1-2)$$

(12.4 suwret)

Sheshimi 3-suwrette keltirilgen.

6.4suwret MathCAD ta 4shi

sanlıq sheshimi.

$$\begin{aligned} & \text{ORIGIN} := 1 \\ & C := (3 \ 3) \quad X := (0 \ 4)^T \quad z(X) := C \cdot X \quad z(X) = 12 \\ & A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \text{Given} \\ & X \geq 0 \quad A \cdot X \leq B \quad X_1 + 2X_2 \geq 2 \\ & X_1 = \text{floor}(X_1) \quad X_2 = \text{floor}(X_2) \\ & M := \text{Maximize}(z, X) \\ & M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad z(M) = 6 \end{aligned}$$

6.4suwret

Pu`tin sanlı programmalaştırıw ma`selesinin` sheshiliwi da`slepki jaqınlawı tan`lawdan g`a rezli ekenin belgilep o`temiz. Aqırg`ı ma`selede (0;1) ha`m (1,2) tochkalardag`ı da`slepki jaqınlawdı tan`law bag`darlı funksiya $Z=3$ ma`niske iye (0;1) tochkanı maksimum sıpatında qa`te beredi.

Juwmaqlaw

Ha`zirgi ku`nde ko`pshilik a`meliy ma`selelerdi sheshiw ushın ken` paydalanatug`ın programmalıq paketler Maple, Derive, MathCAD, Matematica, MatLab ha`m t.b. bolıp tabıladı. Sonın` ishinde MathCAD sisteması barlık paydalanıwshılar ushın universal, massalıq matematikalıq sistema bolıp tabıladı. Bul pitkeriw qa`niygelik jumısında pu`tin sanlı programmalastırıw ma`seleleri izertlenip ha`m MathCAD sistemasınan paydalanıp pu`tin programmalastırıwdın` anıq ma`selelerin sheshiw qaraldı.

Bul pitkeriw qa`niygelik jumısının` tiykarg`ı na`tiyjeleri to`mendegilerden ibarat:

- Pu`tin sanlı sızıqlı programmalastırıw ma`selesine tiyisli ilimiy a`debiyatlar ha`m internetten temag`a tiyisli materiallar alınıp u`yrenildi.
- Pu`tin sanlı programmalastırıw ma`selelerin sheshiw usılları u`yrenildi.
- Pu`tin sanlı programmalastırıwdın` geypara a`meliy ma`selelerinin` matematikalıq modelleri du`zildi;
- Pu`tin sanlı programmalastırıwdın` anıq ma`selesi MathCAD sisteması ja`rdeminde sheshilip na`tiyje alındı.

Bul pitkeriw qa`nigelik jumısının` na`tiyjelerin pu`tin sanlı sızıqlı programmalastırıw ma`selesin sheshiw ushın metodikalıq qollanba sıpatında paydalansa boladı.

Paydalanilgan adabiyatlar

1. N.Uteuliev, S.Pirnazarov, A.Otarov, A.Xojametov. Sızıqlı programmalastırıw ma`selelerin sheshiwidin` sanlı metodları. No`kis, 1992j. 52 bet.
2. İ.L.Akulich. Matematicheskoe programmirovaniye v primerax i zadachax. Moskva, izd. Vısshaya shkola, 1986 g.320 s.
3. Yu.N.Kuznetsov, A.B.Voloshenko. Matematicheskoe programmirovaniye. Moskva, izd. Vısshaya shkola, 1976g,352s.
4. Safaeva.K.,Beknazarova.N. Operatsiyalarni tekshirishning matematik usullari.-Toshkent, Wqituvchi-1984y.,129v.
5. S a f a e v a K.C. Matematik dasturlash. T.: «WAJBNT». 2004.
6. Suxarev M. Turbo Pascal 7.0 Teoriya i praktika programmirovaniya -3-e izd., SPb. Nauka i texnika, 2007.-544 s.
7. N.Faysman. Professinoal`noe programmirovaniye na yazike Turbo-Paskal` Toshkent, 1994,360 s.
8. Axaldjigitov A., Madraximov Sh.F. Paskal tilida programmalash bwyicha masalalar twplami. Wquv qwllanma. Toshkent 2003.
9. M.Suxarev. Turbo Pascal 7.0 .Teoriya i praktika programmirovaniya. Sankt-Peterburg. Nauka i texnika. 2007.
10. V.İ.Struchenkov. Metodi optimizatsii. Ucheb-e posobie. Moskva-2005.
11. Poisk ekstremumov funktsii. V sayte <http://www.keldysh.ru/comma/html/nonlinear/extremum.html>.