

**O'ZBEKISTAN RESPUBLIKASI JOQARI HA'M ORTA ARNAWLI BILIMLENDIRIW
MINISTIRLIGI**

**O'ZBEKISTAN RESPUBLIKASI BAYLANIS, INFORMACIYALASTIRIW HA'M
TELEKOMMUNIKATSIYA TEXNOLOGIYALARI MA'MLEKETLIK KOMITETI
TASHKENT INFORMACIYALIQ TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI NO'KIS FILIALI**

«Informaciyaliq texnologiyalar» kafedrası

Kompyuter injiniring fakulteti

«Informatika ha'm informaciyaliq texnologiyalar »

Bag'darının' 4-kurs studenti

Tlewmbetov Jen'isbaydin'

PITKERIW QA'NIGELIK JUMISI

Temasi: Siziqli dinamikaliq sistemanin' orniqlilig'in
lyapunov funktsiyasi jardeminde izertlew ha'm olardi
optimallastiriw algoritmleri
(TITU NF misalinda).

Ilimiy basshisi:

dot. A. Qojametov

Kafedra baslig'i:

t.p.k. T. Arzimbetov

No'kis - 2014 j.

Mazmunı

Kirisiw.....	3
§1. Sızıqlı sistemalar ushın kvadratlıq formadag'i Lyapunov funkciyasının' bar bolıwı.	4
§2. Sızıqlı differencial ten'lemeler sistemasında baslang'ısh qozdırıw bahasının' oblastın Lyapunov kvadratlıq funkciyası ja'rdeminde optimallastırıw usılları.....	8
§3. Nur boyınsha sozıw algoritmi.....	23
§4. Ko'sherdi sozıw algoritmi.....	24
§5. Sızıqlı sistemada waqıt boyınsha o'tiw processinin' baqasın optimallastırıw.....	27
§6. Integral sapa kriteriyan optimallastırıw.....	37
§7. Optimizaciyalıq ma'selelerdi gradient usılı menen sheshiw.....	43
Juwmaq.....	50
A'debiyatlar.....	51
Qosımsha.....	

Kirisiw

Dinamikalıq sistemalardı izertlewde universal usılların bir bolıp, Lyapunovtıń eki usılı esaplanadı yamasa Lyapunov funksiyası usılı. Da'slep olardı qollanıw oblastı bolıp a'piwayı differencial ten'lemeler sisteması. Keyin ala onıń ja'rdemi menen ayırmalı stoxastikalıq differencial, bo'listirilgen parametrler sisteması ha'm tag'i basqalar izertlendi. A.M.Lyapunovtıń ekinshi usılınıń rawajlanıw basqıshı bolıp 30 jıllar bolıp tabıladı, Chetaev N. miynetlerinde, Malkin I.G., Persidkin I.P. ha'm tag'ı basqalardıń miynetlerinde. A.M.Lyapunovtıń ekinshi usılı ornıqlılıq haqqızda juwmaq shıg'arıp qoymastan (osimptotikalıq ornıqlılıq, ornıqsızlıq) haqqında juwmaq shıg'aradı. Lyapunov funkciyasın qolaylı du'ziw ornıqlılıq oblastın bahalawg'a mu'mkinshilik beredi yamasa fazalıq ken'islikte, ja'nede parametrler ken'isliginde. Onıń ja'rdeminde bazıbir sistemanıń xarakteristikalıq sheshimlerin esaplawg'a boladı, waqıt boyınsha o'tiw prosessin.

Bizge belgili, yag'nıy, egerde Lyapunov funkciyası bar bolsa, onda ol bir ma'nisli emes du'ziledi, parametrli berilgen klassta, yag'nıy qa'legen siypaq da'rejesinde. Optimallastırıw usılınıń rawajlanıwı, Lyapunov funkciyasın optimallastırıwg'a mu'mkinshilik beredi.

Keyingi waqıtlarda siziqli turaqli koeffitsienli differentsional ten'lemelerdi sheshiw ushin kvadratlıq formadan paydalanadı. Bul berilgen differentsional ten'lemenin sheshimin tabiw ushin qolaylı. Bunday usıldan paydalanıw Xusanov D.Y ham Ivoxin E.V ta'repinen alıp barıldı. Kvadratlıq formadan paydalanıp berilgen sistema ushin bahag'a iye boladı ha'm sistemanıń ornıqlılıg'ın izertlew matritsalıq ten'lemenin sheshiwge alıp klinedi.

§1. Sızıqlı sistemalar ushın kvadratlıq formadag'ı Lyapunov funkciyasının' bar bolıwı.

Turaqlı koefficientli sızıqlı differencial ten'lemer sistemasın qaraymız.

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (1)$$

Meyli $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ bolsa, (1) sistemanın' xarakteristikalıq ko'renleri bolsın, yag'nıy mına ten'lemenin' ko'reni

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

Egerde (2) ten'lemenin' ko'renleri teris haqiqiy bo'limge iye bolsa, onda (1) sistemanın' no'llik sheshimi asimptotikalıq ornıqlı boladı.

Egerde (2) ten'lemenin' ko'renlerinin' ishinde en' keminde birewi on' bolsa, onda (1) sistemanın' sheshimi orniqsız.

Solay etip, (1) sistemanın' no'llik sheshiminin' orniqlilig'i haqqındag'i soraw (2) ten'lemenin' xarakterin izertlewge alıp keledi. Endi (2) aniqlawishti aship mına ten'lemege iye bolamiz.

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (3)$$

Endi $f(\lambda)$ pominom koeffisientlerinen matrica du'zemiz.

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Bul jerde $a_m = 0$ dep alamiz, egerde $m > n$ bolsa, to'mendegi aniqlawishti qaraymiz .

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 100 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

(3) ten'lemenin' barliq ko'renleri teris haqiqiy bo'limge iye boliwi ushin,

$$\Delta k > 0, (k = \overline{1, n}) \quad (4)$$

orinlaniwi za'ru'rli ha'm jetkilikli.

Bug'an Gurvica teoremasi dep ataydi. Misali, ekinshi da'rejeli ten'leme ushin,

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

Gurvica sha'rti mina tu'rge iye boladi.

$$a_1 > 0, \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

yamasa

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0$$

Al u'shinshi da'rejeli ten'leme ushin

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

Gurvica sha'rti mina tu'rge iye boladi.

$$a_1 > 1, \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} > 0, \quad a_3 \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

Yamasa

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 > 0, \quad a_3 > 0.$$

Endi (1) sistemani matricaliq formada jazamiz.

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (5)$$

ha'm $V = x^T B x$ kvadratlıq formadan tuwındı alamız. To'mendegige iye bolamız.

$$\frac{dV}{dt} = x^T (A^T H + H A) x \quad (5')$$

Sonı talap etemiz, yag'niy V formasi mına ten'lemenı mına ten'lemenı qanaatlandırıwıg'ın etip,

$$\frac{dV}{dt} = W \quad (6)$$

bunda $W = x^T C x$ – berilgen kvadratlıq forma.

Endi (5') ha'm (6) salıstırıp matritcalıq ten'lemege iye bolamız, B matricasın anıqlaw ushın

$$A^T B + B A = C.$$

Meyli endi to'mendegi ma'seleni qarayıq. Al, $x(t, x_0)$ traektoriyası ushın, (5) sistema menen anıqlanıwshı, mına shaman tabıw kerek.

$$J = \int_0^{\infty} W(x(t, x_0)) dt \quad (*)$$

bunda

$$W = x^T(t, x_0) B x(t, x_0)$$

kvadratlıq forma bolıp tabıladı.

A'dette J shamasın retlestiriwdin' integral sapa kriteriyası dep ataydı. Bul ma'seleni sheshiw ushın bılay boljaymız, yag'nıy (5) sistema asimtotikalıq orınıqlı ha'm V kvadratlıq formasın tabamız, $\dot{V} = W$ ten'lemenı qanatlandırıwshı. Endi (*) g'a tiykarlanıp to'mendegige iye bolamız.

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t, x_0)) - V(x_0),$$

ja'nede

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t, x_0)) = 0$$

onda to'mendegige iye bolamiz.

$$J = -V(x_0)$$

Solay etip, J shaması Lyapunov funkciyası bolıp tabıladı, to'mendegi sha'rtti qanatlandırıwshı

$$\frac{dJ}{dt} = -W.$$

§2. Sızıqlı differensial ten'lemeler sistemasında baslang'ısh qozdırıw bahasının' oblastın Lyapunov kvadratlıq funkciyası ja'rdeminde optimallastırıw usılları.

Turaqlı koeffisientli sızıqlı differensial ten'lemeler sistemasın qaraymız.

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t) \in R^n \quad (1)$$

(1) sistemanın' sheshimin, $x(t_0) = x_0$ baslang'ısh sha'rtlerdi qanaatlandırırwshı, $x(t)$ arqalı belgileyemiz. Lyapunov funksiyasın $V(x) = x^T H x$ kvadratlıq forma tu'rinde alamız. Onın' tolıq tuwındısı (1) sistemag'a tiykarlanıp, to'mendegi tu'rge iye boladı.

$$\dot{V}[x(t)] = x^T(t) H \dot{x}(t) + \dot{x}^T(t) H x(t) = x^T(t) [A^T H + H A] x(t)$$

Egerde simmetriyalı on' anıqlang'an H matricasın sonday etip saylap alsaq, $V(x)$ funksiyasının' tolıq tuwındısı (1) sistemag'a tiykarlanıp aldın ala berilgen teris anıqlang'an kvadratlıq forma arqalı sheshiledi.

$$\dot{V}(x) = -x^T(t) C x(t)$$

onda H matricasın tabıw Lyapunovtın' matricalıq ten'lemesın sheshiwge alıp keledi.

$$A^T H + H A = -C \quad (2)$$

Egerde A matricası asimptotikalıq ornıqlı bolsa, onda (2) ten'leme birden-bir sheshimge iye boladı. Sonlıqtan egerde C matricası on' anıqlang'an bolsa, onda alıng'an H matricası on' anıqlang'an boladı.

A'meliy ma'selelerdi sheshiwde, ornıqlılıq faktın ornatıw a'hmiyetli mag'anag'a iye bolıp qalmastan, $\delta(\varepsilon)$ funkciyasın esaplawda u'lken a'hmiyetke iye, qayta retlestiriw shamasın xarakterleytug'ın. Mına oblastı $U_\delta = \{x : |x| < \delta(\varepsilon)\}$ baslang'ısh

qozdırıw oblastı dep ataydı. Mına $V(x) = x^T H x$ funkciyasının' ja'rdeminde V_δ oblastın to'mendegi obraz arqalı alıw mu'mkin. Kvadratlıq funkciya ushın to'mendegi ten'sizlik orinli

$$\lambda_{\min}(H)|x|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(H)|x|^2 \quad (3)$$

bunda $\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\max}(H)$ - matricanı en' kishi ha'm en' u'lken ma'nisleri. Funkciyanın' tolıq tuwındısı ushın (1) sistemag'a tiykarlanıp to'mendegi ten'sizlik orınlı

$$\dot{V}(x) \leq -\lambda_{\min}(C)|x|^2$$

(1) ten'sizlikti paydalanıp, to'mendegige iye bolamız.

$$\frac{dV}{dt} \leq -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} V(x).$$

Payda bolg'an diferencial ten'sizlikti sheship, to'mendegige iye bolamız.

$$V(x(t)) \leq V(x_0) \exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}(t-t_0)\right\}$$

Bunnan, ja'nede (3) ten'sizlikti paydalanıp to'mendegige iye bolamız.

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} |x_0| \exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{2\lambda_{\max}(H)}(t-t_0)\right\} \quad (4)$$

Yag'niy $x(t) = 0$ (1) sistemasının' sheshimi asimtotikalıq orınıqlı bolsa, onda en' son'g'ı (4) qatnastan mınag'an iye bolamız.

$$\sup_{t \geq t_0} \|x(t)\| = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} |x_0|.$$

yamasa ε ha'm $\delta(\varepsilon)$ shamaların paydalanıp mınag'an iye bolamız:

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} * \delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$$

Solay etip, V_δ baslang'ışh qozdırıw bahası ushın to'mendegi baylanıs orınlı boladı.

$$\delta(\varepsilon) \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}} * \varepsilon$$

O'z o'zinen anıq, yag'nıy bahanın' da'lligi $V(x) = x^T H x$ Lyapunov funkciyasın saylap alıwǵ'a baylanıslı, $\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}$ shaması kishi bolsa. Egerde $\varphi_1(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}$ dep belgilesek ha'm $\varphi_1(H)$ funkciyasın minimizaciyalaw ma'selesin qarasaq, Lyapunov ten'lemesinin' sheshiminin' ko'pliginde, onda to'mendegi matematikalıq programmalastırıw ma'selesine kelemiz. Solay etip,

$$H_0 = \arg \inf_{G(H)} \{\varphi_1(H)\},$$

Tabiw talap etiledi, bunda $G(H)$ bolsa, H on anıqlangan matritsalar din'

Ko'pligi yagniy, $A^T H + H A$ teris anıqlangan.

Anıqlama. $V_0(x) = x^T H_0 x$ formula Lyapunov funksiyası.

$$H_0 = \arg \inf_{H \in G(H)} \{\varphi_1(H)\}, \quad \varphi_1(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \quad (5)$$

Bolgan, baslang'ish qozdırıw baxası ushın optimal dep ataymız.

Sonı baqlaw qiyin emes, yag'niy $1 \leq \varphi_1(H) < \infty$ formula sonliqtan Lyapunov funksiyasınin en' jaqsi (Matritsasınin turine baylanıslı) sol esaplanadı, yag'niy $\varphi_1(H_0) = 1$, yag'niy $V_0(x) = |x|^2$. Geometriyalıq jaqtan $\varphi_1(H)$ ellips kosherlerinin qatnasın anıqlaydı, Lyapunov funksiyasınin $\partial V \alpha = \{x : V(x) = \alpha\}$ betinin qaddin

Korsetetug'in Lyapunov funksiyasınin en' jaqsisi bolip sferali esaplanadı.

Optimal Lyapunov funksiyasınin bar bolıwınin zarurli ham jetkilikli shartlerin korsetemiz, $\varphi_1(H_0) = 1$ bolatugin.

Teorema (1) Lyapunov tenlemesi $H_0 \in G(H)$ matrica sheshimge iye boladı, $\varphi_1(H_0) = 1$ bolatug'in sonda tek g'ana оболатуғын sonda eger сонда, $A + A^T$ terisi anıqlang'an matrica bolsa.

Za'rurligi. Meyli C_0 on' anıqlang'an matricasi bar bolsın, (1) ten'leme H_0 sheshimge iye bolatug'in, $\varphi_1(H_0) = 1$ bolg'an. Bizge belgili, H erikli simmertriya

Matricasi ushin U orthogonal matricasi bar boladı, sonday, yag'niy $U^T H U$ diogonal strukturag'a iye bolg'an, sonliqtan $U^T U = E$ xam $\frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(H_0)} = 1$, yag'niy $\lambda_1(H_0) = \lambda_2(H_0) = \dots = \lambda_n(H_0) = \lambda$, onda $U^T H_0 U = \lambda E$. Ja'nede solay etip H_0 on' anıqlang'an, onda $\lambda > 0$. Bunnan $(U^T A U)^T (U^T H_0 U) + (U^T H_0 U)(U^T A U) = -(U^T C_0 U)$ ja'nede $U^T H_0 U = \lambda E$, onda $U^T A^T U + U^T A U = -\frac{1}{\lambda} U^T C_0 U$.

Solay etip $A + A^T = -\frac{1}{\lambda} C_0$ – teris anıqlang'an matrica.

Jetkilikiligi. Meyli $A + A^T$ teris anıqlang'an matrica bolsın. Endi

$C_0 = -(A + A^T)$ dep alıp, $H_0 = E$ ge iye bolamız ham bunnan kelip shig'adi

$$\frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(H_0)} = 1.$$

Ja'nede $G(H)$ ko'pligi ashiq konusti bildretug'in bolg'anliqtan sonday jag'day boliwi mumkin, egerde H_0 on' aniqlang'an matricasi, $\varphi_1(H_0)=1$ bolg'an, konustin shegarasin ko'rsetedi.

Lemma. Meyli erikli $\varepsilon > 0$ shaması ushin C_E simmertiyali on' aniqlang'an matricasi bar boladi, sondayag'niy H_ε matrisaliq Lyapunov ten'lemesinin' sheshimi boladi, $\varphi_1(H_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$. Sonda $\{C_k\}, k=1,2,\dots$ izbe-izligi bar boladi, simmetruiyalı on' aniqlang'an matrcisa ushin, simmetryali on' yarim aniqlang'an $\bar{C}$ matrisasina jiynaqli bolg'an ha'm $\{H_k\}, k=1,2,\dots$ onon' izbe-izligine sa'ykes bolg'an, $\bar{H}$ on' aniqlang'an matritsasina jiynaqli, sonliqtan $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(H_k) = \varphi_1(\bar{H}) = 1$.

Da'liyllew. Meyli $\varepsilon = \frac{1}{k}$ ha'm $\varphi_1(H_k) < 1 + \frac{1}{C_k}$ bolsin. Lyapunov ten'leme $|C_k|$ g'a bolip, to'mendegige iye bolamiz.

$$A^T \frac{H_k}{|C_k|} + \frac{H_k}{C_k} A = -\frac{C_k}{|C_k|}.$$

Solay etip, menshikli ma'nisler proporsionalı o'geretug'in bolg'anliqtan bilay aytamiz, yag'niy $|C_k|=1, k=1,2,\dots$ (bul jerde $C_k = \lambda_{\max}(C_k)$). al, $|C_k|=1$ ten'ligi sonni bildiredi, yag'niy $\{C_k\}$ izbe-izligi ushin jiynaqli $\{C_{k_m}\} \rightarrow \bar{C}$ u'les izbe-izligiti ajiratiw mumkin, janede $\bar{C}$ on' yarim aniqlag'an.

Ja'nede A asimptotikali orniqli, onda operatorin menshikli ma'nisleri ushin $F[H] = A^T H + H A$, $\lambda(F) = \lambda_i(A) + \lambda_j(A) \neq 0$, $1 \leq i \leq j \leq n$ orinlanadi. Bunnan kelip shig'adi. $F[H]$ operatorinin aynimag'anlig'i. Sonliqtan $F^{-1}(C)$ kerı operatorı bar boladi ha'm $\forall H$. Lyapunov ten'lemasinin shishimi C g'a u'zliksiz baylanisli. Solay etip $\{H_{k_m}\}$ izbe-izligi, $\{C_{m_k}\}$ izbe-izligi siyaqli bazibir $\bar{H}$ matrisasina jiynaqli boladi. Soni ko'rsetemiz, yag'niy $\{H_{k_m}\}$ ushin lemmanin tasiyiqlawinin' duris ekenligin, minag'an iye bolamiz:

$$|A^T| |H| + |H| |A| \geq |C|$$

ha'm solay etip $|C|=1$, onda $\lambda_{\max}(H) \geq \lambda_{\max}(C)/2 |A|=1/2 |A| > 0$.

Xarakteristikaliq ten'lemenon' xarakterin matritsanin' elementlerine baynalislig'inin uzliksizliq kushine tiykarlanip,

$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\max}(H_{k_m}) = \lambda_{\max}(\overline{H})$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(H_{k_m}) = \lambda_{\min}(\overline{H})$. Solay etip, $\lambda_{\max}(\overline{H}) > 0$ ha'm

$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_1(H_{k_m}) = 1$ onda $\lambda_{\min}(\overline{H}) > 0$ bunnan kelip shig'adi.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_1(H_{k_m}) \varphi_1(\overline{H}) = 1.$$

Teorema. (2) Lyapunov ten'lemesi $\{H_k\}$ on' aniqlang'an matrisalar izbe-izligi sheshmine iye boladi, $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_1(H_k) = 1$ bolatug'in, sonda tek g'ana sonda, egerde $A + A^T$ teris yarim aniqlang'an matrica bolsa.

Za'rurligi. Meyli $\{C_k\}$ izbe-izligi bar bolisin, al bynnan kelip shig'adi ha'm $\{H_k\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_1(H_k) = 1$. Lemmadan kelip shig'adi, $\{H_{k_m}\}$ ha'm $\{C_{m_k}\}$ ules izbe-izliklerdi saylap aliwg'a boladi, on' aniqlang'an $\overline{H}$ ha'm on' yarim aniqlang'an C matrisasina jiynaqli bolg'an, sonliqtan $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_1(H_{k_m}) = \varphi_1(H) = 1$.

(2) Lyapunov ten'lemesin sa'ykes U ortogonal matricasina ko'biytip ha'm tu'rlendiriw islep, teoremda keltirgendey, to'mendegige iye bolamiz.

$$A + A^T = -\frac{1}{\lambda} C.$$

Yag'niy $A + A^T$ on' yarim aniqlangan matrica.

Jetkilikliligi. Meyli $A + A^T$ teris yarim aniqlang'an matrica bolsin. Al $\{C_k\}$

izbe-izligi, $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_1(H_k) = 1$ boladi. Meyli $C_k = -(A + A^T) + \frac{1}{k} E$.

Al C_k matricasi on' aniqlang'an. Lyapunov ten'lemesini sheshim, minag'an iye bolamiz $H_k = H_k^1 + E$, ja'nede H_k^T to'mendegi ten'lemeden aniqlanadi:

$$A^T H_k^1 + H_k^1 A = -\frac{1}{k} E.$$

Sheshimlarning uzliksizligida baylanisli $\lim_{m \rightarrow \infty} H_k^1 = 0$, bunda 0 – nollik matrica. Solay etip, $\lim_{k \rightarrow \infty} H_k = E$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(H_k) = 1$. teorema da'liylendi.

Saldar. Egerde $A + A^T$ matrisasining menshikli ma'nisleri on' emes ha'm olarning ishinde nollik bar bolsa, onda $V_0(x)$ Lyapunov funksiyasi, baslang'ish mag'liwmatlari boyinsha optimal bolg'an bar boladi.

Daliyllew. Teoremadan kelip shig'adi $C_k = (A + A^T) + \frac{1}{k} E$ dep alip, minag'an iye bolamiz. Solay etip, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(H_k) = 1$, biraq $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = -(A + A^T)$ on' aniqlang'an matrica bolmaydi, yag'niy $H_0 = E \in G(H)$ ha'm $V_0(x) = x^T H_0 x + H_0 \in G$ optimal Lyapunov funksiya bar bolmaydi.

Soni korsetemiz. yag'niy egerde $G(H)$ oblastin qarasaq, optimal Lyapunov funksiyasining bar boliwi $V_0(x)$, $H_0 \in G(H)$ teoremda ko'setilgandey joq boladi.

Teorema. $V_0(x)$, $H_0 \in G(H)$ optimal Lyapunov funksiya bar boladi, sonda tek g'ana sonda, egerde $A + A^T$ teris aniqlang'an matrica bar bolsa.

Za'rurligi. Meyli $V_0(x)$ optimal Lyapunov funksiya bar bolsin yag'niy, on' aniqlang'an H_0 ha'm C_0 matricasi bar boladi, (2) ten'lemege kiriwshi ha'm $\inf_{H \in G(H)} \{\varphi_1(H)\} = \varphi_1(H_0) = \alpha$.

Endi $\alpha = 1$ ekenligin ko'setemiz. Meyli kerininshe bolsin, $\alpha > 1$. Barliq waqitta U ortogonal matricasi bar boladi, H_0 di diagonal turge keltirish, yag'niy

$$U^T H_0 U = \begin{bmatrix} \lambda_1(H_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H_0) \end{bmatrix} = \Lambda(H_0).$$

Meyli, $\lambda_{\min}(H_0) = \lambda_i(H_0) = \dots = \lambda_{i_n}(H_0), i < n.$

Endi
$$S = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{bmatrix}$$

Matrsasin kiritemiz, bunda $\mu_{i_1} = \mu_{i_2} = \dots = \mu_{i_n}, \mu_j = 0$ egerde $j \neq i_1, i_2, \dots, i_k.$

Yag'niy C_0 matricasi on' aniqlang'an, onda jetkilikli kishi $\delta > 0$ ushin mina matricasi on' aniqlang'an matrica boladi.

$$C_1 = C_0 - \delta[A^T U S U^T + U S U^T A].$$

Solay etip H_1 matricasi, tomendegi ten'lemeden aling'an

$A^T H_1 + H_1 A = -C_1$, xəmə H_0 matricasi mina qatnas penen baylanisli

$H_0 = H_1 - \delta U S U^T$, onda

$$\varphi_1(H_0) = \frac{\lambda_{\max}(H_0 + \delta U S U^T)}{\lambda_{\min}(H_0 + \delta U S U^T)} = \frac{\lambda_{\max}[U^T (H_0 + \delta U S U^T) U]}{\lambda_{\min}[U^T (H_0 + \delta U S U^T) U]} =$$

$$\frac{\lambda_{\max}[\Lambda(H_0 + \delta S)]}{\lambda_{\min}[\Lambda(H_0 + \delta S)]} = \frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(H_0) + \delta} < \varphi_1(H_0) = \alpha$$

Solay etip, H_1 matricasin duzdik, $1 \leq \varphi < \alpha$ bolatug'in ha'm bunnan kelip shig'adi $\alpha > 1$ din' duris emesligi. Solay etip $\alpha = 1$ ham teoremadan $A + A^T$ din' aniqlang'anlig'i kelip shig'adi.

Jetkilikliligi. Egerde $A + A^T$ teris aniqlang'an bolsa, onda $C_0 = -(A + A^T)$ de alip, $H_0 = E$ xəmə $\varphi_1(H_0) = 1$ iye bolamiz.

Endi $\varphi_1(H)$ funksiyasinin' aniqlanuv oblastin ken'eytemiz, $G(H)$ konusinin' qaptal beti kiritip yag'niy $H \in \overline{G}(H)$ di qaraymiz, bunda $\overline{G}(H) = G(H) \cup \partial G(H)$, $\partial G(H) = \{H : \lambda_{\min}(-A^T H - HA) = 0\}$. Al, $G(H)$ ko'pligi tuyiq bolip tabiladi, egerde $\bar{H} \in \partial G(H)$ bolsa, onda $\bar{H}$ on' yarimo aniqlang'an boliwi mumkin, yag'niy $\bar{H}$ matrisasin, uliwma ayqanda, Lyapunov funksiyasin duziw ushin paydalaniwg' bolmaydi.

Teorema: $V_0(x) = x^T H x$ Lyapunov funktsiyasi, $H_0 \in \overline{G}(H)$, baslang'ish mag'lumatlar baxasi ushin optimal bolg'an, $\varphi_1(H_0) = 1$ bolg'an, sonda tek g'ana sonda bar boladi, egerde $(A + A^T)$ on' yarim aniqlang'an matrica bolsa.

Za'rualigi: Meyli ha'm $\varphi_1(H_0) = 1$ bolsin. Sonda $\lambda_1(H_0) = \lambda_1(H_0) = \dots = \lambda_1(H_0) = 1$ boladi. Al, U orthogonal matricasi bar boladi, Lyapunov ten'lemesin mina turge alip keletug'in $U^T [A^T (\lambda E) + (\lambda E) A] U = -U^T C_0 U$.

Bunnan $A + A^T = -\frac{1}{\lambda} C_0$. Solay etip $\lambda_{\min}(C_0) = 0$, onda $(A + A^T)$ on' yarim aniqlang'an matrica.

Jetkilikliligi. Endi $C_0 = -(A + A^T)$ dep belgilep, $\varphi_1(H_0) = 1$ ge iye bolamiz. S Solay etip $-(A + A^T)$ on' yarim aniqlang'an matrica, onda $H_0 \in \overline{G}(H)$.

Endi mina jag'daydi karaymiz, egerde $-(A + A^T)$ matricasi yarim aniqlang'anbag'an bolg'an jag'daydi, yag'niy $\lambda_{\min}(-A - A^T) < 0$. Optimal funksiyanin bar bolatug'in ko'rsetemiz, biraq $\varphi(H_0) > 1$ ha'm H_0 matricasi uliwma jag'dayda bir ma'nisli emes duziledi.

Teorema. Meyli $(A + A^T)$ matricasi on' yarim aniqlanbag'an bolmasin. Sonda optimalliqtin' za'rurli sha'rt bolip, C_0 matrisasinin' on' yarim aniqlang'anlig'i, yag'niy $\lambda_{\min}(C_0) = 0$ ha'm bunnan $H_0 \in \partial G(H)$.

Da'liylew. Meyli kerine bolsin, H_0, C_0 jubi optimizasion ma'selenin' sheshimi bolip tabiladi ha'm $H_0 \in \overline{G}(H)$, yag'niy C_0 on' aniqlang'an boladi ha'm

$\lambda_{\min}(C_0) > 0$. Soni ko'rsetemiz, yag'niy sonda $\bar{H}$, $\bar{C}$ jubi tabiladi, Lyapunov ten'lemesinin' sheshimi bolatug'in ha'm $\varphi_1(\bar{H}) < \varphi_1(H_0)$. Sonliqtan $\lambda_{\min}(C_0) > 0$, onda $0 < \lambda_{\min}(C_0) = \lambda_1(C_0) = \dots = \lambda_{\min}(C_0) = \lambda_{\min}(C_0)$.

Sunday bir ayriqsha emes orthogonal U matricasi bar boladi, C_0 di diagonal tu'rge alip keletug'in yag'niy $U^T C_0 U = \Lambda(C_0)$.

Lyapunov ten'lemesin shep ta'repte U^T g'a, al on' ta'reptegi U g'a ko'beytip to'mendegi iye bolamiz.

$$A_1^T H_1 + H_1 A_1 = -\Lambda(C_0). \text{ bunda } A_1 = U^T A U, H_1 = U^T H_0 U$$

Bolsa, onda simmetruyali matrica $-(A + A_1^T)$ ha'm $-(A + A^T)$ matricasi birdey sang'a iye boladi.

$$\lambda_i(-A_1 - A_1^T) = \lambda_i(-A - A^T), i = \overline{1, n}.$$

$$\lambda_1(-A - A^T) \leq \lambda_2(-A - A^T) \leq \dots \leq \lambda_n(-A - A^T).$$

Solay etip, $-(A + A^T)$ matricasi on' aniqlang'an bolmaydi, onda $\lambda_i(-A - A^T) < 0$. Bilay belgileymiz $\delta = |\lambda_1(-A - A^T)| / \lambda_{\min}(C_0)$ ha'm Lyapunov ten'lemesin qaraymiz.

$$A_1^T H + H A_1 = (A_1 + A_1^T)' - \delta \Lambda(C_0) \quad (6)$$

Soni ko'setemiz, yag'niy $-(A_1 + A_1^T)' - \delta \Lambda(C_0)$ matrisasinin' on' aniqlang'anilig'in xaqiyqatinda da

$$-(A_1 + A_1^T)' + \delta \Lambda(C_0) = -(A_1 + A_1^T)' + |\lambda_1(-A - A^T)| E + \lambda \Lambda_1(C_0),$$

bunda $\Lambda_1(C_0) = \Lambda(C_0) - \lambda_{\min}(C_0) E$.

Ja'nede $0 < \lambda_{\min}(C_0) = \lambda_1(C_0) \leq \lambda_2(C_0) \leq \dots \leq \lambda_n(C_0)$. ha'm $\delta > 0$, onda $\delta\lambda_1(C_0)$ matricasi on' yarim aniqlanbag'an. Al, $-(A_1 + A_1^T) + |\lambda_1(-A - A^T)|E$ menshikli ma'nisilari bolip,

$$\lambda_1 = 0, \lambda_i = \lambda_i(-A - A^T) + |\lambda_1(-A - A^T)| \geq 0, \quad i = \overline{2, n}$$

Bunnan $-(A_1 + A_1^T) + \delta\lambda(C_0)$ matricasi on' yarim aniqlang'an boladi.

Endi (6) ten'lemeni qaraymiz, on' ta'repi on' yarim aniqlang'an matrica bolg'an. Meyli onin' sheshimi H_E matricasi bolsin. Ten'lemeni to'mendegishe turlendiremiz.

$$A_1^T(H_2 - E) + (H_2 - E)A_1 = -\delta\lambda(C_0)$$

Shep ta'repten U , al on' ta'repten U^T ko'biytip to'mendegige iye bolamiz. $A^T(\bar{H}_2 - E) + (\bar{H}_2 - E)A = -\delta C_0$, bunda $\bar{H}_2 = UH_2U^T$ ha'm bunnan kelip shig'adi, ja'nede menshikli emes sang'a iye boladi, H_2 matricasi siyaqli.

Solay etip, $\tilde{H}_2$ matricasi to'mendegi Lyapunov ten'lemesinin sheshimi boladi.

$$A^T\tilde{H}_2 + \tilde{H}_2A = (A + A^T) - \delta C_0.$$

Egerde H_0 Lyapunov ten'lemesinin' sheshimi bolsa, on' aniqlang'an C_0 matricasida, al H_2 bolsa, on' yarim aniqlang'an $-(A + A^T) + \delta C_0$ matricasada, onda ol to'mendegi qatnas penen baylanisli.

$$\tilde{H}_2 - E = \delta H_0,$$

al olardın' menshikli ma'nisilari

$$\lambda_i(\tilde{H}_2) = \lambda_i(E + \delta H_0) = 1 + \lambda_i(H_0) \frac{|\lambda_i(-A - A^T)|}{\lambda_{\min}(C_0)}, \quad (i = \overline{1, n}).$$

Bunnan kelip shig'adi $\lambda_i(\tilde{H}_2) > 0, i = \overline{1, n}$, yag'nıy payda bolg'an matrica on'

aniqlang'an. Sonliqtan

$$\varphi_1(\tilde{H}_2) = \frac{\lambda_{\max}(E + \delta H_0)}{\lambda_{\min}(E + \delta H_0)} = \frac{1 + \delta \lambda_{\max}(H_0)}{1 + \delta \lambda_{\min}(H_0)} < \varphi_2(H_0)$$

Solay etip H_2 matricag'a iye boldiq, $\varphi_1(\tilde{H}_2) < \varphi_1(H_0)$.

Da'liylewden ko'rinip turipti, momenttin' bar bolıwı C_0 dın' on' aniqlang'anlıg'ı, yag'nıy $\lambda_{\min}(C_0) > 0$.

Teorema: (1) erkin sisteması ushın Lyapunov funkciyası $U_0(x) = x^T H_0 x$, $H_0 \in G(H)$, baslang'ış qozdırıwdı optimal baqlawshı, barlıq waqıtta bar boladı.

Da'liyllew: Aytıp o'tilgendey $G(H)$ do'n'es konus bolıp tabıladi, formula qaptal betti uslawshı. Al, $\varphi_1(H)$ funksiyası bir tekli, yag'nıy erikli μ ushın $0 < \mu < \infty$, $\varphi_1(H) = \varphi_1(\mu H)$ orınlanadı. Sonliqtan konustın' barlıg'ın qaraw kerek emes, al onın' bir ta'repin radiyusı birge ten' bolg'an kesiliwdi ko'rsetetug'ın

$$\overline{G}_2(H) = \overline{G}(H) \cap \{H : |H| = 1\}.$$

Payda bolg'an ko'plik kompaktlı bolıp tabıladi. Endi $\varphi_1(H)$ funkciyasının' minimumın tabıw ma'selesin og'an ten' ku'shli bolg'an maksimumdı tabıw ma'selesini menen almastıramız. $\tilde{\varphi}_1(H) = \varphi_1^{-1}(H)$. Al, $\overline{G}_1(H)$ ko'pliginde $\varphi_1(H)$ funkciyası mına tu'rge iye boladı. $\tilde{\varphi}_1(H) = \lambda_{\min}(H)$ ha'm H u'zliksiz baylanışlı. Ja'nede funkciya kompakta u'zliksiz, o'zinin' en' u'lken ha'm en' kishi ma'islerine erisedi, onda $\tilde{\varphi}_1(H)$ funkciyanın' ma'nksimumın tabıw ma'selesini $H \in \overline{G}_2(H)$ sheshimge iye boladı. Solay etip, Lyapunov funkciyası, baslang'ış qozdırıw bahası ushın optimal bolg'an, barlıq waqıtta bar boladı.

Sonı ko'rsetip o'temiz, yag'nıy ulıwma jag'dayda ($n \geq 3$), $V_0(x) = x^T H x$ optimal funkciyasın bir ma'nisli. Bul sonın' menen baylanışlı, yag'nıy H matricasının' spektrın maksimal qısg'anda menshikli sanları, olar arasında jatg'an, variyacanın' bazıbir da'rejesine iye boladı. Dara jag'dayda, egerde A matricası

bloklı diagonal struktuvrag'a iye bolsa, onda ha'mme waqıt H_0 di du'ziw mu'mkin, yag'niy $\varphi_1(H_0) = \varphi_1(H_0)$ bolatug'ın.

To'mendegiler belgili.

H matricasının' u'les maticası dep o'lishemi $S > r$ bolg'an, matricasına aytzladı, koefficientleri H baslangısh matricanın' elementleri menen anıqlanatug'ın, bazıbir S joldın' ha'm r bagananın' kesilispesinde turg'an. Egerde $S = r$ nomer jolında ha'm bag'anasında betlesse, onda u'les matrica fayılı dep ataladı.

Meyli H simmetriyalıq on' anıqlang'an matrica bolsın ha'm H' bolsa, onın' fayıllıq u'les matricası. Sonda to'mendegi ten'sizlik orınlı.

$$\lambda_{\min}(H) \leq \lambda_{\min}(H') \leq \lambda_{\max}(H') \leq \lambda_{\max}(H). \quad (7)$$

Endi H_0 din' bir ma'nisli emesligin da'liylew ushın A matricalar klasın qaraymız, bloklı diyaganal struktuvrag'a iye bolg'an

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

bunda A_1, A_2 asimptotikalıq orınıqlı matrica o'lishemleri sa'ykes n_1 ha'm n_2 bolg'an $n_1 + n_2 = n$.

Teorema: Egerde A matricanın' bloklı dioganal struktuvrag'a iye bolsa onda H_0 matricanın' optimal Lyapunov funkcyası usınday tu'rdegi bloklı diyaganal struktuvrag'a iye boladı.

Da'liyllew. Meyli $V_0(x) = x^T H_0 x$ optimal Lyapunov funkciyası bolsın. Endi H_0 ha'm C_0 dı bloklı turde jazamız.

$$H_0 = \begin{bmatrix} H_{11}^0 & H_{12}^1 \\ (H_{12}^1)^T & H_{22}^1 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} c_{11}^0 & c_{12}^1 \\ (c_{12}^1)^T & c_{22}^1 \end{bmatrix}$$

Lyapunov ten'lemesi, usı matricag'a sa'ykes keliwshi, u'sh ten'lemege bo'linedi.

$$A_1^T H_{11}^0 + H_{11}^0 A_1 = -C_{11}^0, \quad A_1^T H_{12}^0 + H_{12}^0 A_{12} = -C_{12}^0, \quad A_1^T H_{22}^0 + H_{22}^0 A_{12} = -C_{22}^0 \dots$$

Sonı ko'riw qıyın emes, yag'niy jup matrica

$$H_1 = \begin{bmatrix} H_{11}^0 & 0 \\ 0 & H_{12}^0 \end{bmatrix}, \quad C_0^1 = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{12}^0 \end{bmatrix}$$

Lyapunov ten'lemesi sheshimi boladı, (7) ni esapqa alsaq,

$$\lambda_{\min}(H_0) \leq \lambda_{\min}(H_0') \leq \lambda_{\max}(H_0') \leq \lambda_{\max}(H_0).$$

Bunnan kelip shıg'adı $\varphi_1(H_0') \leq \varphi_1(H_0)$ ha'm H_0 matricası blokli struktuvrag'a iye boladı.

Keltirilgen teoremadan paydalanıp, to'mendegi mısaldı du'zemiz. Meyli A_1 asimtotikalıq orınıqlı matrica, o'lishemi $(n-1)(n-1)$ bolg'an, ol $A_2 = -a < 0$ skalyar. Endi A_1 u'les matricası ushın optimal Lyapunov funkciyası bolıp, mına funkciya boladı, H_{11}^0 matricası menen sonda $V_0(x) = x^T H' x$ mına matrica menen

$$H_0' = \begin{bmatrix} H_{11}^0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

bunda $\lambda_{\min}(H_{11}^0) \leq b \leq \lambda_{\max}(H_{11}^0)$, baslang'ısh sistema ushın optimal boladı.

Endi $V_0(x)$ funkciyası du'ziw usılların qaraymız. Egerde $A - A^T$ matricası on' yarım anıqlang'an bolmasa, yag'niy $H_0 + E$, onda H_0 di tabıw quramalı optimizatsiyalıq ma'selege keledi. Al $\varphi_1(H)$ funkciyası differenciyanıwshı emes.

Endi kvazioptimllıqtın' eki algoritmin qaraymız, yag'niy $\varphi_1(H)$ funkciyasının' bir adımlı jaqsılanıwın garantiyalaytug'ın.

§3. Nur boyınsha sozıw algoritmi.

Meyli C erikli on' anıqlang'an matrica bolsın ha'm H sa'ykes Lyapunov ten'lemesinin' sheshimi. Onı mına tu'rge a'kelemiz.

$$A^T(H + \delta E) + (H + \delta E)A = -[C - \delta(A + A^T)].$$

Al, $(A + A^T)$ matrica on' anıqlangan bolmaydı. Bazı bir $0 < \delta < \delta_0$ formula ushın, u'zliksiz baylanıslılıq ku'shinen $C - \delta(A + A^T)$ matrica on' anıqlang'an boladı. Sonlıqtan $\delta > 0$ ushın to'mendegi ten'sizlik orınlı.

$$\varphi_1(H + \delta E) = \frac{\lambda_{\max}(H + \delta E)}{\lambda_{\min}(H + \delta E)} = \frac{\delta + \lambda_{\max}(H)}{\delta + \lambda_{\min}(H)} < \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} = \varphi_1(H).$$

ha'm monotonlı baylanıslılıq orınlı, yag'niy $\delta_1 < \delta_2$ ushın $\varphi_1(H + \delta_2 E) < \varphi_1(H + \delta_1 E)$. Endi δ_0 din' maksimal ma'nisin tabamız, yag'niy $C - \delta(A + A^T)$ matricesı on' anıqlang'an bolıp qalatug'ın. Teoremadan kelip shıg'adı, $0 < \delta < \lambda_{\min}(C) / |\lambda_{\min}(-A - A^T)|$ ushın mına ten'sizlik orınlanadı. $\lambda_{\min}[C - \delta(A + A^T)] > \lambda_{\min}(C) - \delta * \lambda_{\min}(A + A^T) \geq 0$. Solay etip, δ_0 retinde tomendegini anıqlawg'a boladı.

$$\delta_0 = \frac{\lambda_{\min}(C)}{|\lambda_{\min}(-A - A^T)|}.$$

Bul algoritim to'mendegi geometiryalıq interpretaciya'ga iye. Al, $H(\delta)$ matricası. Sonday matricanı usinadı, $H + \delta E$ nurda jaylasqan ha'm $\delta \rightarrow \infty$ da optimallıqqa umtıladı, $H_0 = \delta E$ ge sa'ykes keliwshi.

§4. Ko'sherdi sozıw algoritmi.

Algoritimnin' ma'nisi sonnan ibarat, sistemanı ortogonal tu'rlendiriw jolı menen H matricası bas ko'sherge alıp klinedi. Ja'nede ko'sherlerdin' kishisi tartıladı, yag'niy $\lambda_{\min}(H) \rightarrow \lambda_{\min}(H) + \varepsilon$. Al, ε sanı ol waqıtta shekem ko'beytileği, C matricası on' bolg'andı toqtatqansha.

Endi (2) Lyapunov ten'lemesin shep ta'repten U g'a, on'nan U^T g'a ko'beytemiz, bunda U ortogonal matrica, H matricasın diagonal tu'rge alıp keliwshi, to'mendegige iye bolamız.

$$(U^T AU)^T (U^T HU) + (U^T HU)(U^T AU) = -(U^T CU) \text{ yamasa } A_1^T \Lambda + \Lambda A_1 = -C_1, \text{ bunda}$$

$$A_1 = U^T AU, \quad C_1 = U^T CU$$

Payda bolg'an ten'lemenı mına tu'rde jazamız.

$$A_1^T \begin{bmatrix} \lambda_1 + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} A_1 = -C_1 + A_1^T \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} A_1$$

Meyki $A_1 = \{a_{ij}^1\}$, $C_1 = \{C_{ij}^1\}$, $i, j = 1, n$. Sonda bılay belgilep,

$$\Lambda(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

To'mendegige iye bolamız:

$$A_1^T \Lambda(\varepsilon) + \Lambda(\varepsilon) A_1 = -C_1(\varepsilon).$$

bunda

$$C_1(\varepsilon) = \begin{bmatrix} C_{11}^1 - 2\varepsilon a_{11}^1 & C_{12}^1 - \varepsilon a_{12}^1 & \dots & C_{1n}^1 - \varepsilon a_{1n}^1 \\ C_{12}^1 - \varepsilon a_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ C_{1n}^1 - \varepsilon a_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{bmatrix}$$

Bizge belgili, egerde $C_1^1(\varepsilon)$ matricası $\varepsilon=0$ bolg'anda on' anıqlang'an bolsa , ε parametirinin' o'siwi menen on' anıqlang'anlıq joytıladı, onda ε maksimal shaması, on' anıqlang'an qa'siyeti saqlanatug'ın to'mendegi ten'lemeden anıqlanadı.

$$\det C_1(\varepsilon) = 0$$

Yamasa bul ten'lemenı ashıp, to'mendegige iye bolamız.

$$\begin{aligned} & (-\varepsilon)^n \begin{vmatrix} -2a_{11}^1 & -a_{12}^1 & \dots & -a_{1n}^1 \\ -a_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \\ & + (-\varepsilon)^{n-1} \left\{ \begin{vmatrix} C_{11}^1 & -a_{12}^1 & \dots & -a_{12}^1 \\ C_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ C_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2a_{11}^1 & -a_{12}^1 & \dots & -a_{1n-1}^1 & C_{11}^1 \\ -a_{12}^1 & 0 & \dots & 0 & C_{12}^1 \\ -a_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 & C_{1n}^1 \end{vmatrix} + \dots + \right. \\ & \left. + \begin{vmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 & \dots & C_{1n}^1 \\ C_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ C_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix} \right\} = 0. \end{aligned}$$

No'llik ag'zaların taslap ketip, kvadrat ten'lemege iye bolamız.

$$\varepsilon^2 \begin{vmatrix} 0 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & C_{21}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ C_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix} - 2\varepsilon \begin{vmatrix} a_{11}^1 & C_{12}^1 & \dots & C_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 & \dots & C_{1n}^1 \\ C_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ C_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix} = 0$$

yag'niy C_1 matricanın' aniqlang'an, onda bilay belgileymiz.

$$p_0 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ C_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ C_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix} \prec 0, \quad p_1 = \begin{vmatrix} a_{11}^1 & C_{12}^1 & \dots & C_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix}, \quad p_2 = \begin{vmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 & \dots & C_{1n}^1 \\ C_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ C_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & C_{nn}^1 \end{vmatrix}$$

To'mendegi ten'lemege iye bolamiz:

$$p_0 \varepsilon^2 - 2p_1 \varepsilon + p_2 = 0.$$

Ol ha'r qiyli belgidegi haqiqiy ko'renlerge iye.

$$\mu_1 = \frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 - p_0 p_2}}{p_0} < 0, \quad \mu_2 = \frac{p_1 - \sqrt{p_1^2 - p_0 p_2}}{p_0} > 0$$

Endi $\varepsilon = \mu_2$ dep alıp, $H(\varepsilon) = U\Lambda(\varepsilon)U^T$ matricag'a iye bolamiz, yag'nıy

$$\varphi_1(H(\varepsilon)) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\min\{\lambda_1 + \varepsilon, \lambda_2\}} < \mu_1(H).$$

Eskertiw. Egerde $\lambda_1 + \varepsilon > \lambda_2$ bolsa, onda $H(\varepsilon)$ matricasının' minimal menshikli ma'nisi bolıp λ_2 esaplanadı ha'm usıg'an uqsas obraz arqalı to'mendegi menshikli san arqalı tu'rlendiriw jolı menen o'tiw mu'mkin, yag'niy $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1 + \varepsilon$.

§5. Sızılıq` sistemada waqıt boyınsha o`tiw protssesinin`
baqasının` optimallastırıw.

Bul paragrfta sistemanın` sheshiminin` xarakteristikasın qarap o`temiz,
 $V(x) = x^T H x$ Lyapunov kvadratlıq funkciyası ja`rdeminde anıqlanatug`ın.

(1) sistemasının` asimptotikalıq orınıqlılıg`ı ushın texnikalıq a`hmiyetli xarakteristikalarınin` o`tiw biri waqıt boyınsha o`tiw processı. Lyapunov funkciysı ja`rdeminde, kvadratlıq tu`rdegi, waqıt boyınsha o`tiw processin to`mendegi tu`rge bahalaw mu`mkin. Al (*) ten` sizlikten mınaw kelip shıg`adı, yag`niy

$$T(\varepsilon, |x_0| H) \leq \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H) |x_0|^2}{\lambda_{\min}(H) \varepsilon^2} \right].$$

Endi $H \in G(H)$ matricasın tabıw qızıg`ıwshılıq tuwdıdıradı, o`tiw processin da`l tabıwg`a mu`mkinshilik beretug`ın. Egerde waqıt boyınsha o`tiw processinin` bahasın ten` o`lshemli baslang`ısh shekli mag`luwmatlar menen izlese, onda to`mendegi funkciyanı optimizatsiyalaw kerek.

$$\varphi_3(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \right].$$

Anıqlama. $V_0(x)$ Lyapunov funkciyası waqıt boyınsha o`tiw processinin` bahası ushın optimal dep ataladı, egerde

$$H_0 = \arg \inf_{H \in G[H]} \{\varphi_3(H)\} \quad (1)$$

bunda

$$\varphi_3(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \right].$$

Endi (1) optimizatsiyalıq ma'selenin' sheshiminin' bar bolıw ma'selesin qaraymız.

Egerde $0 < \lambda_{\min}(H) \leq \lambda_{\max}(H)$ bolsa, onda Lyapanov funkciyasının' en' jaqsı optimallıg'ı bolıp, (A matrisasına baylanisli) $V_0(x) = |x|^2$ boladı, yagniy $H_0 = E$. Sonin' ushin $\varphi_3(H_0) = 0$.

Teorema. Lyaponov funktsiyasi, waqıt boyınsha o'tiw protsesinin' bahasi ushin optimal bolgan $V_0(x) = x^T H_0 x$, $H_0 \in G(H)$, $\varphi_3(H_0) = 0$ bolatug'in,sonda tek g'ana sonda bar boladı,egerde $A + A^T$ teris anıqlang'an matritsa bolsa.

Dalillew. Teorema korsetilgen siyaqli, onin zarurligi ham jetkilikligi, Lyapunov ten'lemesi $E \in G(H)$ sheshimge iye bolıw ushin $A + A^T$ matricasinin' teris anıqlang'an bolıwi kerek. Al, $\varphi_3(H) = 0$. H on' anıqlang'an matricasi ushin, sonda tek g'ana sonda, egerde $H = E$ bolsa.

Meyli $A + A^T$ teris anıqlangan bolsin. Sonda $\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \rightarrow +\infty$, $H \rightarrow \partial G(H)$ ham $\varphi_3(H)$ funktsiyasi $H \rightarrow \partial G(H)$ uziliske ushiraydi. Egerde, sol siyaqli $H \rightarrow E \in \partial G(H)$ bolsa, onda $\ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \right] \rightarrow 0$ ham $\varphi_3(H)$ funktsiyasi anıqlanbag'an.

Ushinshi jagdaydi qaraymız, $A + A^T$ matritsasi teris yarım anıqlanbagan. Al, $\varphi_1(H)$ funktsiyasi ushin optimal Lyapunov funktsiyasi bar boladı ham mina shegarada jatadı, yag'niy $H_0 \in \partial G(H)$. Waqıt boyınsha o'ti'w protsesinin' bahasi optimallastiriw ushin, egerde $H \rightarrow \partial G(H)$, onda

$$\ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \right] \rightarrow 0, \quad \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \rightarrow +\infty$$

yagniy $\varphi_3(H) \rightarrow \infty$. Soni korsetemiz, $V_0(x)$ optimal funktsiyasi bar boladi, biraq $\varphi_3(H) \geq 0$ ham H_0 bolsa, $G(H)$ konustin' ishinde boladi.

Teorema. Meyli $A + A^T$ teris aniqlanbagan matrica bolsin. $V_0(x)$ Lyapunov funktsiyasi o'tiw protsesinin' bahasi boyinsha optimal bolg'an barliq waqitta bar boladi.

Da'liyllew: $\varphi_3(H)$ funktsiyasnin aniqliqlaniw oblasti $G(H)$ ti tabamiz. Bul ko'plik $\varphi_3(H)$ ta do'n'es ko'plik bolip tabiladi. Sonliqtan $G(H)$ tin' barliq oblastin qaraymiz, al onin' bir bo'lim $G_1(H)$ ti birlik radiusi sfera menen kesiliken $\lambda_{\min}(H) = 1$. Sonliqtan menshikli ma'nisli matrisanin' elementlerine uzilksiz baylanisli, onda $\varphi_3(H)$ bolsa, $\mathbf{h}_{ij}$ g'a uziliksiz baylanisli, $1 \leq i \leq j \leq n$. Al, $\partial G_1(H)$ bolsa, $G_1(H)$ ko'plik no'llge menshikli sanlardin payda boliwi menen aniqlanadi, yag'niy

$$\partial G_1(H) = \{H : \lambda_{\min}(-A^T H - HA) = 0, \lambda_{\min}(H) = 1\}.$$

Al, $\varphi_3(H)$ funktsiyasinin' turinen kelip shig'adi, $\partial G_1(H)$ qa jaqinlaw

$$\lim_{H \rightarrow \partial G_1(H)} \left\{ \frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \ln \left| \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \right| \right\} = +\infty$$

yag'niy optimallasitirw ma'selesi qaraladı, onda $G_1(H)$ tı emes, al $\bar{G}_1^\varepsilon(H)$ tı qaraymız, yag'niy $\bar{G}_1^\varepsilon(H) = \frac{G_1(H)}{\{H : \lambda_{\min}(-A^T H - HA) > \varepsilon\}}$

ε - jetkilikli kishi shama. Al, $\varphi_3(H)$ funkciyası, $\bar{G}_1^\varepsilon(H)$ ko'pliginde u'zliksiz bolg'an, o'zinin' en' kishi ma'nisine erisedi, yag'niy optimal Lyapunov funkciyasın tabıw ma'selesı sheshimge iye boladı. Sol da'liylengen, yag'niy

ulıwma jag'dayda H_0 matricası bir tekli emes du'ziledi, mısal retinde bloklı – diogonal turdegi sistemanı qaraymız.

Teorema: Egerde (1) sistema bloklı diogonal tu'rdegi A matricasına iye bolsa, onda H_0 matricasına optimal Lyapunov funkeiyasının' bloklı diogonal strukturag'a iye boladı.

Da'liylew. O'tken paragrftag'i teoremalardın' da'liyllewlerdin' qaytalap, eki jup sheshimlerin alamız. H_0, C_0 ha'm H_0', C_0' , bunda jup sheshimler ja'rdemshi bloklardın', no'llik matricalar boladı. To'mendegige iye bolamız.

$$\lambda_{\min}(H_0) \leq \lambda_{\min}(H_0') \leq \lambda_{\max}(H_0') \leq \lambda_{\max}(H_0),$$

$$\lambda_{\min}(C_0) \leq \lambda_{\min}(C_0') \leq \lambda_{\max}(C_0') \leq \lambda_{\max}(C_0).$$

Sonlıqtan

$$\varphi_3(H_0') = \frac{\lambda_{\max}(H_0')}{\lambda_{\min}(C_0')} \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(H_0')} \right] \leq \frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(C_0)} \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(H_0)} \right] = \varphi_3(H_0).$$

Sonlıqtan A matricası (1) sistemanın' bloklı diagonal struktuwrag'a iye boladı, onda H_0 da bloklı diogonal strukturag'a iye bolıwı kerek.

Mısal retinde bir ma'nisli emesligin tasiyqlaytug'ın, sistemanı qaraymız, A_1 asimtotikalıq matrica bolatug'ın, $A_2 = -a < 0$ – skalyar. Meyli $A_1 + A_1^T$ teris anıqlang'an bolmasın ha'm birinshi u'les sistema ushın H_{11}^0 optimal boladı, sonlıqtan $\lambda_{\min}(H_{11}^0) < \lambda_{\max}(H_{11}^0)$. Egerde $a > \frac{\lambda_{\min}(C_{11}^0)}{2\lambda_{\min}(H_{11}^0)}$, onda H_0 retinde sonday matricanı alıw mu'mkin, $H_{11}^0 = b$ dan turatug'ın, sonlıqtan $\lambda_{\min}(H_{11}^0) \leq h \leq \lambda_{\max}(H_{11}^0)$, $h > \lambda_{\min}(C_{11}^0) / 2\lambda_{\max}(H_{11}^0)$.

Endi optimallastırıw ma'selesinin' sheshiminin' algoritmin qaraymız.

Nur boyınsha optimallastırıw algoritmi. Lyapunov ten'lemesin mına tu'rge keltiremiz.

$$A^T(H_E + \delta E) + (H_E + \delta E)A = -[E - \delta(A + A^T)].$$

Al, $\varphi_3(H)$ funkciyası H o'zgeriwshisinin' δ o'zgeriwshili funkciyag'a aytiladi:

$$\varphi_3(\delta) = \frac{\delta + \lambda_{\min}(H_E)}{\lambda_{\min}[E - \delta(A + A^T)]} \ln \left[\frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)} \right].$$

Endi $\varphi_3(\delta)$ nin' ekstriymumın izertleyviz.

Yag'nıwıy $H_E + \delta E$ ha'm $E - \delta(A + A^T)$ matritsaları on' aniqlang'an bolıwı kerek, onda δ ni saylap aliw menen to'mendegini esapqa aliw kerek.

$$\delta + \lambda_{\min}(H_E) > 0, \quad \lambda_{\min}[E - \delta(A + A^T)] > 0.$$

Egerde $(A + A^T)$ matricasi on' aniqlang'an bolsa, onda $H_0 = E$ dep aliw kerek. Sonliqtan bilay aytamiz, yag'niy $(A + A^T)$ on' aniqlang'an bolmaydi, bunnan kelip shig'adi, $\lambda_{\max}(A + A^T) > 0$.

Solay etip,

$$\lambda_{\min}[E - \delta(A + A^T)] = \begin{cases} 1 - \delta\lambda_{\min}(A + A^T), & \delta < 0 \\ 1 - \delta\lambda_{\max}(A + A^T), & \delta \geq 0 \end{cases} \text{ ha'm } \varphi_3(\delta) \text{ funksiyasi mina turge}$$

iye boladi.

$$\varphi_3(\delta) = \begin{cases} \frac{\delta + \lambda_{\min}(H_E)}{\lambda_{\min}[E - \delta(A + A^T)]} \ln \left[\frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)} \right], & \min \left\{ -\lambda_{\min}(H_E), \frac{1}{\lambda_{\min}(A + A^T)} \right\} < \delta < 0, \\ \frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{1 - \delta\lambda_{\max}(A + A^T)} \ln \left[\frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)} \right], & 0 \leq \delta < \frac{1}{\lambda_{\max}(A + A^T)} \end{cases}$$

Funksuyani minimumlaw ma'selesin qarap,

$$\psi(\delta) = \frac{\delta + a}{1 - \delta c} \ln \left[\frac{\delta + a}{\delta + b} \right], \quad a > b > 0.$$

Ai $\psi(\delta)$ funksuyanın' $\delta = \delta_0$ toshkadag'ı ekstrimumının' za'ru'rli sha'rti bolıp, $\psi'(\delta_0) = 0$, yag'nıy δ_0 mına ten'lemenı sheshiw arqalı tabıladı.

$$\frac{1 + ac}{a - b} \ln \left[\frac{\delta + a}{\delta + b} \right] - \frac{1 - \delta c}{b + \delta} = 0 \quad (2)$$

Minimumnıń' jetkilikli sha'rti $\delta = \delta_0$ bolg'anda $\psi'(\delta_0) > 0$ esaplanadı. Ekinshi tuwındısıń alıp, to'mendegige iye bolamız.

$$\psi''(\delta_0) = \frac{(b - a)^2}{(1 - \delta_0 c)(\delta_0 + a)(\delta_0 + b)^2}.$$

Solay etip, egerde δ_0 , (2) ten'lemenin' sheshimi bolsa ha'm mına qanatlandırsa $\delta_0 + b > 0$, $1 - \delta_0 c > 0$, onda $\delta = \delta_0$ bolg'anda $\psi(\delta)$ minimal ma'nske iye boladı.

Qarap o'tilgen minimizatsiyalaw ma'selesin, waqıt boyınsha o'tiw processin optimallastırıwg'a qollanamız.

1) Meyli δ_1 mına ten'lemenin' sheshimi bolsın.

$$\frac{1 + \lambda_{\max}(H_E) \lambda_{\min}(A + A^T)}{\lambda_{\max}(H_E) - \lambda_{\min}(H_E)} \ln \left[\frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)} \right] - \frac{1 - \delta \lambda_{\min}(A + A^T)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)} = 0,$$

$$\max \left\{ -\lambda_{\min}(H_E), \frac{1}{\lambda_{\min}(A + A^T)} \right\} < \delta_1 < 0$$

Sonda, $H(\delta) = H_E + \delta_1 E$, $C(\delta) = E - \delta_K (A + A^T)$ dep alıp, to'mendegige iye bolamız, yag'nıy waaqıt boyınsha o'tiw proceccin yag'niy waqıt boyınsha otiw

protsezi, $V_0(x) = x^T H(\delta)x$ Lyapunov funktsiyasi jardeminde aling'an, $V(x) = x^T H_E x$ tan kishi boladi.

2) Meyli δ_2 mina ten'lemenin' sheshimi bolsin.

$$\frac{1 + \lambda_{\max}(H_E) \lambda_{\max}(A + A^T)}{\lambda_{\max}(H_E) - \lambda_{\min}(H_E)} \ln \left[\frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)} \right] - \frac{1 - \delta \lambda_{\max}(A + A^T)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)} = 0.$$

Sonda $H(\delta_2) = H_E + \delta_2 E$, $C(\delta_2) = E - \delta_2(A + A^T)$ dep aliwg'a boladi ham $\varphi_3(H(\delta)) < \varphi_3(H_E)$ iye bolamiz. Egerde eki shart orinlansa, onda $x^T H(\delta_1)$ ham $x^T H(\delta_2)x$ funktsiyalardan soni alamiz, $\varphi_3(\delta)$ kishi boladi, yag'niy

$$\delta_0 = \arg \min \{ \varphi_3(\delta_K), \varphi_3(\delta_E) \}.$$

Egerde sha'rtlerdin' hesh birewi orinlanbasa, $\delta_0 = 0$ dep alamiz, yag'niy optimal Lyapunov funktsiyasi parametrlri berilgen klassta, $V(x) = x^T H_E x$ boladi.

Kosherdi soziw algoritimi.

Meyli U ortogonal matrica, H_E ni diagonal tu'rge keltirish, yag'niy $U^T H_E U = \Lambda$. Lyapunov ten'lemesin shepten U^T g'a, on'nan U g'a ko'beytip to'mendegige iye bolamiz.

$$A_1^T \Lambda + \Lambda A_1 = -E \quad \text{bunda} \quad A_1 = U^T A U = \{a_{ij}^1\}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Ten'lemenini mina tu'rge tu'rlendiremiz.

$$A_1^T \Lambda(\varepsilon) + \Lambda(\varepsilon) A_1 = -C_1(\varepsilon).$$

yag'niy

$$A_1^T \begin{bmatrix} \lambda_1(H_E) + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_E) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H_E) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1(H_E) + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_E) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H_E) \end{bmatrix} A_1 =$$

$$= -E + \varepsilon \begin{bmatrix} 2a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

.

bunnan

$$C_1(\varepsilon) = E - \varepsilon \begin{bmatrix} 2a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

ha'm $\varphi_3(\varepsilon)$ funkciyası ushın

$$\varphi_3(\varepsilon) = \frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}[C_1(\varepsilon)]} \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(H_E)} \right].$$

Al, ε parametirinin' o'zgertiw esabınan, ten'sizlikтин' on' ta'repin kemeytemiz, yag'ny waqzt boyınsha o'tiw processin da'l bahasın tabamız. Endi $C_1(\varepsilon)$ matricasının' harakteristikalıq ten'lemesi mına tu'rge iyeboladı.

$$\det[C_1(\varepsilon) - \lambda E] = (-1)^n (1 - \lambda)^{n-2} \left[(1 - \lambda)^2 - 2\varepsilon a_{11} (1 - \lambda) - \varepsilon^2 \sum_{i=1}^2 (a_{1i}^1)^2 \right]$$

Sa'ykes menshikli sanları bolıp,

$$\lambda_i[C(\varepsilon)] = 0, \quad i = 1, n-2, \quad \lambda_{n-1,n}[C(C\varepsilon)] = 1 - \varepsilon(C_{11}^1 \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2}).$$

Bunnan kelip shıg'adı:

$$\lambda_{\min} i[C(\varepsilon)] = \begin{cases} 1 - \varepsilon(a_{11}^1 \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2}), & \varepsilon \geq 0, \\ 1 - \varepsilon(a_{11}^1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2}) & \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Al, $\varphi_3(\varepsilon)$ funkciyası ushın to'mendegi ten'sizlik orınlı boladı.

$$\varphi_3(\varepsilon) \begin{cases} \frac{a}{1 - \varepsilon C_1} \ln \left[\frac{a}{b + \varepsilon} \right], & 0 \leq \varepsilon < \frac{1}{C_1}, \\ \frac{a}{1 - \varepsilon C_2} \ln \left[\frac{a}{b + \varepsilon} \right], & \max \left\{ -b, \frac{1}{C_2} \right\}, \varepsilon < 0 \end{cases}.$$

$$\text{bunda } a = \lambda_{\max}(H_E), \quad b = \lambda_{\min}(H_E), \quad C_1 = a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2}, \quad C_2 = a_{11}^1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2}.$$

To'mendegi funkciyanı qaraymız:

$$\psi(\varepsilon) = \frac{a}{1 - \varepsilon C} \ln \left[\frac{a}{b + \varepsilon} \right].$$

Ekstimumının' za'ru'rli sha'rti mına tu'rge iye boladı.

$$\psi'(\varepsilon) = \frac{a}{1 - \varepsilon C} \left[\frac{C}{1 - \varepsilon C} \ln \left(\frac{a}{b + \varepsilon} \right) - \frac{1}{b + \varepsilon} \right] = 0. \quad (3)$$

Meyli ε_0 bolsa, (3) ten'lemenin' sheshimi. Sonda ekinshi tuwındı $\psi(\varepsilon)$, ε_0 ushın minag'an ten' boladı.

$$\psi''(\varepsilon_0) = \frac{a}{(1 - \varepsilon_0 C)(b + \varepsilon)^2} > 0.$$

ha'm egerde (3) ten'lemenı ε_0 sheshimge iye bolsa, funkciyanın' anıqlanıw oblastına kiretug'ın, onda bul toshkada $\psi(\varepsilon)$ minimal ma'niske erisedi.

Al, $\varepsilon = \varepsilon_0$ ma'nisti tabıw ushın $\psi_3(\varepsilon)$ minimal ma'niske erisetug'ın, to'mendegi obraz aeqalı kipsisemiz.

1) Ten'lemenı sheshemiz.

$$\frac{C_1}{1 - \varepsilon C_1} \ln\left(\frac{a}{b + \varepsilon}\right) - \frac{1}{b + \varepsilon} = 0.$$

Mına $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{C_1}$ aralıqta.

2) Mına ten'lemenı sheshemiz.

$$\frac{C_2}{1 - \varepsilon C_2} \ln\left(\frac{a}{b + \varepsilon}\right) - \frac{1}{b + \varepsilon} = 0, \quad \max\left\{-b, \frac{1}{C_2}\right\} < \varepsilon < 0. \text{ aralıqta.}$$

Egerde bul ten'lemeler $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sheshimge iye bolsa, onda $\varepsilon_0 = \arg_{\min} \{\varphi_3(\varepsilon_1), \varphi_3(\varepsilon_2)\}.$

Egerde sheshim bolsa, onda $\varepsilon_0 = 0$ ha'm $H = H_E.$

§6. Integral sapa kriteriyasın optimallastırıw.

Sistemani funktsionerlew kriteriyasınin' sanasınin' biri bolıp, o'tiw protseslerinin' xarakterlewshi, integral kriteriyası bolıp tabıladi, yag'niy mına turdegi funktsional

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{\infty} |x(t)| dt.$$

(4) ten'sizlikti paydalanıp, integral sapa kriteriyasınin' bahası ushin mına ten'sizlikke iye bolamız.

$$\begin{aligned} J[x(t)] &\leq \int_{t_0}^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} |x_0| \exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{2\lambda_{\max}(H)}(t-t_0)\right\} dt = \\ &= 2|x_0| \frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} \end{aligned}$$

Geometriyalıq jaqtan alıng'an ten'sizlikti tomendegi obraz arqalı interpretatsiyalaw mumkin. Al, $|x(t)|$ funktsiyasın joqaridan (4) eksponenta arqalı majorantlaymız ham eksponentadan integraldi esaplaymız. Oz-ozinen anıq, kriteriya bahası anıg'ıraq boladı, integraldın' shaması kishi bolsa. Maxset funktsiyasın kiritemiz.

$$\varphi_2(H) = \frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}.$$

H on' anıqlang'an matritsasında anıqlang'an, Lyapunov ten'lemesinin' sheshimi bolıp tabılatur'ın, yag'niy $H \in G(H)$.

Anıqlama. $V_0(x)$ Lyapunov funktsiyasın, yag'niy

$$H_0 = \arg \inf_{H \in G(H)} \{\varphi_2(H)\}, \quad \varphi_2(H) = \frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}$$

Integral sapa kriteriyasi baxasi ushin optimal dep ataymiz.

(1) optimal Lyapunov funktsiyasının' (1) sistemadag'ı A matritsasının' turine baylanısın qaraymiz.

Lemma; Meyli A asimptotikalıq orniqli matritsa bolsin ham $A + A^T$ teris aniqlang'an. Sonda (1) sistemanin' qalegen sheshimi ushin mina ten'sizlik orinli

$$|x(t)| \leq |x_0| \exp \left\{ \frac{1}{2} \lambda_{\max}(A + A^T)(t - t_0) \right\}.$$

Da'liyllew. Solay etip $A + A^T$ simmetriyalı teris aniqlang'an matrica, onda Lyapunov ten'lemesinde $C = -(A + A^T)$ dep alıp, $H = E$ ge iye bolamız ha'm (4), (2) tu'rge keledi.

Lemma. Egerde A asimptotikalıq orınıqlı ha'm normal bolsa (yag'nıy $A^T A = A A^T$), onda $A + A^T$ teris aniqlang'an boladı.

Da'liylew. Endi $H = -(A + A^T)$ dep belgileymiz ha'm qaralıp atırğ'an an'latpanı on'nan A g'a ko'beytemiz.

$$HA = -A^2 - A^T A$$

Keyin ala onı shepten A^T g'a ko'beyten.

$A^T H = -A^T A - (A^T)^2$. Kelesi menen qosamiz. Soni esapqa alıp, yag'niy $A^T A = A A^T$, minag'an iye bolamız. $A^T H + HA = (A + A^T) = -H^2$ payda bolg'an ten'leme $A^T H + HA = -H^2$.

$H = -(A + A^T)$ sheshimge iye boladı. Solay etip, matritsa H simmetriyalı aynimag'an matritsa onda H^2 on' aniqlang'an. Eger payda bolg'an ten'lemeni, Lyapunov ten'lemesi retinde qarasaq ham A matritsasinin' asimptotikalıq orniqlilig'in esapqa alsaq, onda minag'an iye bolamız, yag'niy onin' sheshimi $H = -(A + A^T)$ on' aniqlang'an matrica, yag'niy $A + A^T$ teris aniqlang'an.

Berilgen lemmalardi paydalanıp aling'an baxalardın' mumkinshiligin qaraymiz, integral ma'niste en' jaqsi A matrisasina baylanisli ush jag'dayda qaraymiz:

1) Meyli A asimptotikli orniqli ha'm normali, yag'niy $A^T A = A A^T$.

Teorema. Egerde A asimptotiklaliq orniqli ha'm normal bolsa, onda erikli $\delta > 0$ ushin barliq waqitta $x - x(t)$, $|x(t_0)| < \delta$ (1) sistemanin' sheshimi 6ap boladi, sonday yag'niy $\left| \bar{x}(t) \right| = \delta \exp \left\{ \max_{i=1,n} \operatorname{Re} \lambda_i(A)(t - t_0) \right\}$

Da'liyllew. Yag'nuy A normal bolsa, onda U ortogonal matricasi bar boladi, A ni normal formag'a alıp keliwshi

$$U^T A U = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 00 & \dots & 000 & \dots & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & 00 & \dots & 000 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \beta_2 & \dots & 000 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 \alpha_2 & \dots & 000 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_K \beta_K 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta_K \alpha_K 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \gamma_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 000 & \dots & \gamma_3 \end{bmatrix} = \Lambda \quad (3)$$

bunda $\lambda_p = \alpha_p \pm i\beta_p, \lambda_q = \gamma; p=1, n; q=1, s; 2k + S = n$. A matricasının' sanları.

a) Meyli $\max_{i=1,n} \operatorname{Re} \lambda_i(A) = \gamma_j$ bolsın. O'zgeriwshilerdi kiritip $x = Uz$ sızıqlı differencial ten'lemeler ten'lemesine iye blamız.

$$\bar{Z} = \Lambda Z \quad (4)$$

Bunda Λ bolsa, (3) de anıqlang'an. Sonlı ko'riw qıyın emes, yag'nuy onın' dara sheshimi bolıp, $\bar{Z}(t) = (0, \dots, e^{\gamma_i(t-t_0)}, 0, \dots, 0)^T$ esaplanadı. Bunnan ko'rinip tur

$\bar{x}(t) = V \bar{Z}(t) \delta$ baslang'ish sistemanın' dara sheshimi payda boladı, V vektorının' ku'shine tıykarlanıp, $U : |x(t)| = \delta \exp\{\gamma(t - t_0)\}$.

6) Meyli $\max_{i=1,n} \operatorname{Re} \lambda_i(A) = \alpha_\varepsilon$ bolsın. Sonda (4) ten'lemeler sisteması ushın dara sheshimi bolıp, $\bar{Z}(t) = (0, \dots, 0, e^{\alpha_\varepsilon(t-t_0)} \sin \beta_\varepsilon(t-t_0), e^{\alpha_\varepsilon(t-t_0)} \cos(t-t_0), 0, \dots, 0)^T$ ol izlenip atırğ'an bolsa, $\bar{x}(t) = V \bar{Z}(t) \delta$.

Teorema. Egerde A asimtotikalıq orınıqlı ha'm normal bolsa, onda mına ten'sizlik orınlı

$$\max_{i=1,n} \{\operatorname{Re} \lambda_i(A)\} = \frac{1}{2} \lambda_{\min}(A + A^T). \quad (5)$$

Da'liylew. (1) sistemanı (4) tu'rge keltiremiz. Solay etip A asimtotikalıq orınıqlı bolsa, onda $\alpha_p < 0, \gamma_q < 0, p = \overline{1, n}; q = \overline{1, S}; 2k + S = n$ boladı. Al, U dın' ortogonallılığ'ınan $\Lambda^T = (U^T A U)^T = U^T A^T U$ orınlanadı. Bunnan basqa $\lambda_i(A + A^T) = \lambda_i[U^T (A + A^T) U], i = \overline{1, n},$.

Sonlıqtan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda_{\max}(A + A^T) &= \frac{1}{2} \lambda_{\max}[U^T (A + A^T) U] = \frac{1}{2} \lambda_{\max}[U^T A U + U^T A^T U] = \\ \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\Lambda + \Lambda^T) &= \max(\alpha_1, \dots, \alpha_K, \gamma_1, \dots, \gamma_S) = \max_{i=1,n} \{\operatorname{Re} \lambda_i(A)\}. \end{aligned}$$

Usılın usılın da'liylew kerek edi.

Teorema. Egerde A asimtotikalı orınıqlı ha'm normal bolsa, onda Lyapunov funkciyası baslang'ish magluwmatlar bazası ushın integral ma'niste optimal bolg'an sa'ykes keledi ha'm $H_0 = E, C_0 = -(A + A^T)$.

Da'liylew. Egerde A normal bolsa, onda lemmadan kelip shıg'adı, $A + A^T$ matricasının' teris anıqlang'anlıg'ı. Sonlıqtan Lyapunov funkciyası retinde baslang'ish magluwmatlar bboyınsha optimal bolg'an $V_0(x) = x^T H_0 x$ tı alamız. Sonlı ko'rsetemiz, yag'nıy onın' optimal bolmaytug'ınlıg'ın ha'm integral ma'niste haqıyqatındada saldardan ha'm teoremalardan kelip shıg'adı.

$$|x(t)| \leq x_0 \exp \left\{ \frac{1}{2} \lambda_{\min}(A + A^T)(t - t_0) \right\} = |x_0| \exp \left\{ \max_{i=1,n} \operatorname{Re} \lambda_i(A)(t - t_0) \right\}.$$

Bul ten'sizlik jaqsı emes, yag'nıy $\bar{x}(t)$ sheshim bar boladı ol da'l bolıp tabılatug'ın. Solay etip integral baha, $V_0(x) = x^T H_0 x$ Lyapunov funkciyası ja'rdeminde alıng'an integral ma'niste optimal boladı.

Meyli $A + A^T$ teris anıqlang'an bolsın, biraq $A^T A \neq A A^T$. O'tken paragrftan kelip shıg'adı, baslang'ısh qozdırıw bahası ushın optimal bolıp, $H_0 = E$ esaplanadı.

Sonı ko'rsetemiz, yag'nıy ol ulıwma ayqanda, Lyapunov funkciyası menen betlespeydi, en' jaqsı integral baha beretug'ın (1) sistemanı qaraymız, bunda

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \delta \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Egerde $\delta \neq 0$ bolsa, A matricanın' normal bolmaydı, biraq $|\delta| < 2$ de, $A + A^T$ teris anıqlang'an ha'm onın' xarakteristikalıq sanı

$$\lambda_{1,2} = -(A + A^T) = -2 \pm \delta$$

Sonlıqtan, $C = -(A + A^T)$ dep alamız, onda $H = E$ ha'm

$$\varphi_2(E) = \frac{1}{\lambda_{\max}(-A - A^T)} = \begin{cases} \frac{1}{2 - \delta}, & 0 \leq \delta < \varepsilon. \\ \frac{1}{2 + \delta}, & -2 < \delta < 0 \end{cases}.$$

Ekinshi ta'repten, $C = 2E$ dep alıp ha'm Lyapunov ten'lemesin sheship, mınag'an iye bolamız.

$$H_{2E} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{2} & 1 + \frac{\delta}{2} \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2}(H_{2E}) = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \pm \frac{\delta}{2} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}}.$$

Bunnan $0 \leq \delta < 2$ de

$$\varphi_2(H_{2E}) = \frac{\lambda_{\max}(H_{2E})}{2} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_{2E})}{\lambda_{\min}(H_{2E})}} = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}} \left[\frac{\delta}{2} + \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}} \right].$$

ha'm $\delta_0 \rightarrow 2$ bar boladı, sonday

$$\sqrt{1 + \frac{\delta_0^2}{4}} \left[\frac{\delta_0}{2} + \sqrt{1 + \frac{\delta_0^2}{4}} \right] < \frac{1}{2 - \delta_0},$$

yag'nıy $H = E$ matricasının' integral ma'niste optimal bolmaydı.

§7. Optimizatsioniy ma'selelerdi gradient usılı menen sheshiw.

Sızıqlı emes programmalar dın' ulıwma ma'selesin sheshkende

$$f_0(H) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)} f_i(H) \leq 0, i = \overline{1, m}, H \in \Omega(H)$$

Lagranjdın' anıq emeslik usılınan paydalanıw mu'mkin.

Lagranj funkciyası mına tu'rge iye boladı.

$$Z(H, \beta) = f_0(H) + \sum_{i=1}^m \beta_i f_i(H), \beta_i \geq 0.$$

Kuna– Takker teoremasınan gezektegi kelip shıg'adı. Meyli $f_i(H)$, $i = \overline{0, m}$ do'n'es funkciyalar, $\Omega(H)$ ko'pligi do'es ha;m sleyterden regulyarlıq sha'rti orınlanadı, yag'nıy $\tilde{H} \in \Omega(H)$ bar boladı, yag'nıy $f_i(\tilde{H}) < 0$, $i = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, m}$ bolg'an. Yag'nıy H_0 optimizatsioniy ma'selenin' sheshimi bolıwı ushın, $\bar{\beta}_0 = (\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_m^0)$ vektorının' bar bolıwı za'ru'rli ha'm jetkilikli, yag'nıy (H_0, β_0) jubı $L(H, \beta)$ funkciyasının' erlik toshkası bolıwı kerek ha'm berilgen ma'sele sheklewler menen mına funkciyanı minimizatsionlaw ten' ku'shli.

$$F(H) = \max_{\beta \geq 0} Z(H, \beta) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)}$$

Yamasa minimaks ma'selesinin' sheshimi

$$Z(H, \beta) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)}, \max_{\beta > 0}.$$

Usı ma'seleni sheshiw dın' sanlı usıllarının' biri gradyentlik bolıp tabıladı ha'm onın' modifikatsiyası. Sheshiw dın' eki gradyentlik usılın qaraymız.

1. Tuvrı gradiyentlik usıl

$$H_{K+1} = \begin{cases} \text{EMBED Equation. 3} & \text{EMBED Equation. 3} \\ \text{EMBED Equation. 3} & \text{EMBED Equation. 3} \end{cases} \left[\widetilde{\text{grad}} \text{EMBED Equation. 3} \right] \widetilde{\text{grad}} \text{EMBED Equation. 3}$$

Bunda $\pi_H(z)$ funkciyası Z toshkaszn proekitlew operaciyası $\Omega(H)$ ko'pliginde, al $C_i(H)$ funkciyası to'mendegi obraz arqalı esaplanadı.

$$C_i(H) = \begin{cases} C_i, & \text{egerde } f_i(H) > 0, \quad i = \overline{1, m} \\ 0, & \text{egerde } f_i(H) \leq 0 \quad i = \overline{1, m} \end{cases}.$$

C_i – jetkilikli u'lken san, $\text{grad} f_i(H)$ bolsa, H toshkadag'ı $f_i(H)$ funkciyası toliqtırılğ'an gradienti.

2. Irrow – Gurvica usılı. O leki kordinata boyınsha bir waqıtta erlik toshkanı izertlew procedurasın ko'rsetedi.

$$H_{K+1} = \begin{cases} \text{EMBED Equation. 3} & \text{EMBED Equation. 3} \\ \text{EMBED Equation. 3} & \text{EMBED Equation. 3} \end{cases} \left[\widetilde{\text{grad}} \text{EMBED Equation. 3} \right] \widetilde{\text{grad}} \text{EMBED Equation. 3}$$

$$\beta_i^{K+1} = \max\{0, \beta_i^K + \beta_K f_i(H_K)\}, \quad (i = \overline{1, m}).$$

Yag'niy $L(H, \beta)$ gradientinin' bag'ıtı β boyınsha ha'm H antigradient boyınsha. Egerde $f_0(H)$ qatan' do'n'es funkciya bolsa, $f_1(H)$ – don'es, onda $L(H, \beta)$ funkcciyasının' erlik toshkası bar boladı ha'm egerde

$$\rho_K \rightarrow 0, \quad \rho_K \geq 0, \quad \sum_{K=1}^{\infty} \rho_K = \infty.$$

onda $\{(H_K, \beta_K)\}$ izbe-izligi sonday ma'iste jıynaqlı boladı, yag'niy $\{H\}$ shekli toshkalarının' birewi sheshimler ko'pligine derek bolsa. Usı algoritmlerdi paydalaniw mumkinshiligin qara'miz. $\varphi_i(H)$ funksiyasin minimizasiyalawda $i = \overline{1, 3}$.

1) Mina funksiyani minimizzasiyalaw ma'selesin qaraymiz.

$$\varphi_1(H) \rightarrow \inf_{H \in G(H)}$$

bunda
$$\varphi_1(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}, \quad \bar{G}(H) = \{H : \lambda_{\min}(-A^T H - HA)\}.$$

Joqarida ko'rsetilgenindey, H_0 optimal sheshim $\partial G(H)$ shegarada tabiladi, $\varphi_i(H)$ funksiyasinin' bir tekliginen shardin bir bolimin qaraymiz. $\lambda_{\max}(H)=1$, $\bar{G}(H)$ tin' ishinde jaylasqan. Solay etip mina funksiyani minimizasiyalaw ma'selesin qaraymiz.

$$f_0^1(H) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)}$$

Mina sheklewlerde

$$f_1(H) \leq 0, \quad f_2(H) \leq 0.$$

bunda

$$f_0(H) = -\lambda_{\min}(H), \quad f_1(H) = -\lambda_{\min}(-A^T H - HA), \quad f_2(H) = \lambda_{\max}(H) - 1.$$

$\Omega(H)$ – simmetriyali on' aniqlang'an matrisalardin ko'ligi, Lagranj funksiyasi mina turge iye boladi.

$$L_1(H, \beta) = f_0^1(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i f_i(H)$$

Onin' toliqtirilg'an gradient H boyinsha

$$\widetilde{grad} L_1(H, \beta) = f_0^1(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i \widetilde{grad} f_i(H)$$

Bunda

$$\widetilde{grad} f_0^1(H) = -x_{\min} x_{\min}^T, \quad \widetilde{grad} f_2(H) = x_{\max} x_{\max}^T \quad \widetilde{grad} \text{ EMBED Equation.3}$$

$x_{\min}, x_{\max}$ – bektorlar, birlik sferada jatiwshi, $x^T H x$ kbadratliq fopma minimal ha'm maksimal maniske erisetug'in, $D[\Delta_{ij}] = -A^T \Delta_{ij} - \Delta_{ij} A$ bunda Δ_{ij} -matrica i -jolda ha'm j -bag'anada birlep turg'an, al qalg'an elementleri noller bolg'an, $y_{\min}$ – vektor, birlik sferada jatiwshi, yagniy $y^T (-A^T H - HA)y$ kvadratliq forma minimal ma'niske erisetug'in.

Al, $f_0^1(H), f_i(H), i = \overline{1,2}$ ϕ funksiyalari do'n'es, sleyter sharti orinlanadi. Al, $L(H, \beta)$ Lagranj funksiyasi $(H_0, \beta_1^0, \beta_2^0)$ erlik toshkag'a iye ha'm H_0 optimizasiyalik ma'selenin' sheshimi boladi.

2) Endi funksiyanı minimizasiyalaw ma'selesin qaraymiz.

$$\varphi_2(H) \rightarrow \inf_{H \in G(H)}$$

bunda

$$\varphi_1(H) \rightarrow \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(-A^T H - HA)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Bunda, joqarida ko'setilgendey, H_0 optimal sheshim $G(H)$ oblastinda jatadi ha'm $\varphi_2(H)$ funksiyasinin' birtekliliginin $\lambda_{\max}(H \leq 1)$ shardi bo'limin qaraymiz.

Baslang'ish ma'seleni to'mendegi menen almastiramiz.

$$f_0^2(H) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)}, \quad f_1(H) \leq 0, \quad f_2(H) \leq 0$$

bunda

$$f_0^2(H) = -\ln \left[\lambda_{\min}(-A^T H - HA) - \frac{1}{2} \ln[\lambda_{\min}(H)] \right]$$

Lagranj funksiyasi mina turge iye boladi.

$$L_2(H, \beta) = f_0^2(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i * f_i(H)$$

Al H boyinsha toliqtirilg'an gradient

$\widetilde{grad} \equiv \text{EMBED Equation. 3}$ $\widetilde{grad} \equiv \text{EMBED Equation. 3}$ $\widetilde{grad} \equiv \text{EMBED Equation. 3}$

bunda

$\widetilde{grad} \equiv \text{EMBED Equation. 3}$

Al $f_j^2(H)$ funksiyasi eki do'n'es funksiyanin qosindin ko'rsetedi, bunda da

Sleyter sha'rti orinlanadi.

3) Endi to'mendegi funksiyanini minimizatsiyalaw ma'selesin qaraymiz.

$$\varphi_3(H) \rightarrow \inf_{H \in G(H)}$$

bunda

$$\varphi_3(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(-A^T H - HA)} \bullet \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \right]$$

Bul ma'seleni to'mendegi ma'sle menen almashtiram.

$$f_0^3(H) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)}, \quad f_1(H) \leq 0, \quad f_2(H) \leq 0$$

bunda

$$f_0^3(H) = -\ln[\lambda_{\min}(-A^T H - HA)] - \ln\{\ln[\lambda_{\min}(H)]\}$$

Lagranj funksiyasi mina turge iye boladi.

$$L_3(H, \beta) = f_0^3(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i f_i(H)$$

Onin' H boyinsha toliqtirilg'an gradienti

$$f_0^3(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i f_i(H),$$

bunda

$$f_0^3(H) = -\frac{D[H]}{\lambda_{\min}(-A^T H - HA)} - \frac{x_{\min} x_{\min}^T}{\lambda_{\min}(H) \ln[\lambda_{\min}(H)]}$$

Bul $f_0^3(H)$ funksiyasinda eki do'n'es funksiyanin' qosindisin ko'rsetedi, Sleyter sharti orinlanadi. Toliqtirilg'an gradientlik tusiw algoritmi ken'islikti soziw arqali.

1-ag'im. $H^0, g_1(H_0) - f(H)$ funksiyasinin' H^0 toshkadag'i toliqtirililg'an gradient esaplanadi. Berilgen formula h_{k+1}, α_{k+1} boyinsha H^1, α_1 esaplanadi ha'm keyin $H^1 = h^0 - h_1 g_f(H_0)$ esaplanadi. Endi $B_1 = E$ dep alamiz.

2-adim. $k = 1$ manis beremiz.

3-adim. $g(H)$ - ti esaplaymiz.

4-adim. Egerde $|g_f(x_k)| < \varepsilon$ bolsa, onda tawsiladi yamasa 5-adimg'a o'tedi.

5-adim. Mina ayirma esaplanadi: $rk = B_k^t [g_f(H^k) - g_f(H^{k-1})]$.

6-adim. $k+1$ bag'iti esaplanadi: $\xi_{k+1} = \frac{r_k}{|r_k|}$.

7-adim. $k+1$ qozg'alistag'i adimdi h_{k+1} di esaplanadi ha'm soziliw koffisenti α_{k+1} di.

8-adim. $k+1$ adimdag'i soziliw matrisasin esaplanadi.

$$B_{k+1} = B_k [E + (\alpha_{k+1}^{-1} + 1) \xi_{k+1} \xi_{k+1}^T].$$

9-adim. $g_{k+1} = B_{k+1}^T g_f(H^k)$ esaplanadi.

10-adim. $k+1$ adim iterasiyasi islenedi:

$$H^{k+1} = H^k - h_{k+1} B_{k+1} \frac{\overline{g_{k+1}}}{\left| \overline{g_{k+1}} \right|}.$$

11-adim. $k = k+1$ ma'nis beremiz ha'm 3-adimg'a otemiz.

Juwmaq.

Pitkeriw qaniygelik jumisinda turaqli koeffitsientli siziqli differentsional ten'leme qaraladi. Bul turaqli koeffitsientli differentsional tenlemenin' orniqlilig'in izertlew ushin Lyapunov funktsiyasin kvadratliq forma turinde

alamiz. Turaqli koeffitsientli differentsional ten'lemenin' orniqlilig'in kvadratliq forma turinde izertlew matritsaliq ten'lemeni sheshiwge alip keledi. Berilgen siziqli sistema ushin bahag'a iye bolamiz.

Sunday-aq pitkeriw qaniygelik jumisinda kvazioptimmalliqtin' eki algoritmi qaraladi, nur boyinsha soziw algoritmi ham kosherdi soziw algoritmi. Janede bul pitkeriw qaniygelik jumisinda siziqli sistemada waqit boyinsha otiw protsessinin' bahasin optimallastiriw maselesi qaraladi, optimallastiriw maselesinin' sheshiminin' algoritmi qaraldi, nur boyinsha soziw algoritmi ham kosherdi soziw algoritmi. Janede bul pitkeriw qaniygelik jumisinda integral sapa kriteriyasin optimallastiriw maselesi qaraldi. Janede optimizatsiyalliq maselelerdi gradient usili menen sheshiw maselesi qaraldi. Barliq lemmalar ham teoremlar dalilleniwi menen toliq keltirildi. Matritsaliq ten'lemeni sheshiwge missal qaraldi ham onin' sheshimi elektron esaplaw mashinasinda alindi.

A'debiyatlar

- 1) Ancifirov I.G., Alenikov L.T., Bulatov N.P. Metodi optimizaciy ix prilozheniya. ch.1.matematicheskoe programmirovaniya. Novosibirsk Nauka, 1990 - 158s.

- 2) Barbashin E.A. Funkciy Lyapunova M. Nauka, 1970 - 140s.
- 3) Beyko I.V., Bublik B.N., Zinko P.N. Metodi i algoritmi resheniya zadach optimizatsiy. K. Visha shkola, 1983 - 511 s.
- 4) Valeev K.G., Finin G.P. Postroenie funktsii Lyapunova. K. Naukova dumka. 1981 - 411s.
- 5) Zubov V.I. Ustoychivost dvijeniya. Metodi Lyapunova i ix primeneniye. M. Visshaya shkola, 1973 - 271s.
- 6) Bellman R. Teoriya ustoychivosti resheniy differentsialnix uravneniy. M. Izdatelstvo inostrannix literatura. 1964 - 216 s.

Misal.

To'mendegi matricaliq ten'lemeni sheshin'

$$A^T H + H A = -C$$

bunda

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Egerde A ha'm C matricalarin' koefitsentlerin berilgen ten'lemege qoysaq onda ol to'mendegi ko'rinishe iye boladi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_{11} + h_{21} & h_{12} + 2h_{22} \\ 3h_{21} & 3h_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} + 2h_{12} & 3h_{12} \\ h_{21} + 2h_{22} & 3h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$2h_{11} + 2h_{12} + h_{21} = -4$$

$$4h_{12} + 2h_{22} = 2$$

$$4h_{21} + 2h_{22} = 2$$

$$\begin{cases} h_{11} = -3,5 \\ h_{12} = 0,7 \\ h_{21} = 0,7 \\ h_{22} = -0,5 \end{cases}$$

Demek berilgen matricalar ten'lemesinin' sheshimi bolg'an H matricasə to'mendegi ko'rinishe iye:

$$H = \begin{bmatrix} -3,5 & 0,7 \\ 0,7 & -0,5 \end{bmatrix}$$

$$\det H = 1,75 - 0,49 = 1,26$$

$$\det H = 1,26$$