

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI ALOQA, AXBOROTLASHTIRISH VA
TELEKOMMUNIKATSIYA TEXNOLOGIYALARI DAVLAT
QO'MITASI**

**TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
NUKUS FILIALI**

KOMP'YUTER INJINIRING FAKULTETI

Axborot texnologiyalari kafedrası

«Axborot texnologiyalari» yunalishining 4 kurs studenti

DJIMOV NURSULTAN TAUBEKOVICHNING

**«TABIYAT JARAYONLARINI XUSUSIY XOSILALI
DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR YORDAMIDA
MODELLASHTIRISH» mavzusidagi**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Kafedra mudiri:

t.f.n. T. Arzimbetov

Ilmiy raxbar:

Kuandikov K., «O'zbekiston
pochtasi» OAJ
Qoraqalpog'iston filiali
direktorining o'rinbosari

Ilmiy maslahatchi:

f.-m.f.n. Sh. Allamuratov

Bitiruv malakaviy ishi kafedradan dastlabki himoyadan o'tdi
___ sonli bayonnamasi «___» _____ 2014 yil

Nukus-2014

Mundarija

Kirish.....	6
§1. Matematik model tushinchasi.....	8
§2. Matematik modellarning klassifikatsiyasi.....	15
2.1 Diskret modellar.....	16
2.2 Uzliksiz modellar.....	20
2.3 Ierarxik modellar.....	28
§3. Parabolik tipdagi tenglamalarga keladigan oddiy masalalar.....	32
3.1 Haroratning tug`ri chiziq buylab tarqalish masalasining modeli.....	32
3.2 Haroratning chegaralanmagan soha buyicha tarqalishi.....	38
3.3 Maksimum qiymat printsipli.....	41
3.4 Haroratning chegaralanmagan tug`ri chiziq buylab tarqalish masalasi echimini Fur`e usuli bilan topish.....	45
3.5 MathCad tizimida harorat tarqalishi tenglamasiga qo'yilgan chegaraviy masalani echish.....	47
Xulosa.....	52
Foydalanilgan adabiyotlar.....	54
Texnika xavfsizligi qoidalari.....	55

Kirish

Bu murakkab dunyoning azaliy va abadiy muammolari, shu bilan birga, har bir davrning dolzarb masalalariga har tomonlama asosli ilmiy javoblar topilgan taqdirdagina ma'naviyat olami yangi ma'no-mazmun bilan boyib boradi. Boshqacha aytganda, har bir ilmiy yangilik, yaratilgan kashfiyot-bu yangicha fikr va dunyoqarashga turtki beradi, ma'naviyatning shakllanishiga o'ziga xos ta'sir o'tqazadi [1].

Mavzuning dolzarbligi.

Hozirgi vaqtda matematik modellashirishni qullamasdan zamonaviy ilmni tasavvur etish qiyin. Bu metodologiya ma'nosi berilgan ob'ektni uning "obrazi"-matematik modeli bilan almashtirish va keyinchalik modelni komp'yuter yordamida bajariladigan xisoblash algoritmlari yordamida sonli echib o'rganishdan iboratdir [2]. Ob'ektning o'zi bilan emas balki uning matematik modeli bilan ishlash tez va ko'p narsa yutqozmasdan uning xossalarini tadqiq qilish imkonini beradi [8]. Shu asnoda o'quvchilarga real jarayonlarning matematik modeli, uni qurish haqida urgatish dolzarb masalalarning biri bulib qoladi.

Mavzuning maqsadi. Matematik model haqida asosiy tushunchalarni, modellarning klassifikatsiyasi, diskret, uzliksiz va ierarxik modellar haqida tushunchalar, harorat utkazuvchilik masalasining matematik modellarini o'rgatish bilan birga ob'ekt modeli ustida hisoblash tajribasi zamonaviy hisoblash usullariga asoslangan holda nazariy jihatdan yondashib bulmaydigan ob'ektni to'liq va chuqur o'rganish [5].

Tadqiqot ob'ekti.

Xususiyl hosilali differentsial tenglamalar bitiruv malakaviy ishining tadqiqot obyektidir. Parabolik turdagi tenglamalarni taqribiy yechish usullari yetarlicha mufassal [6-9, 11,12, 13-18] adabiyotlarda keltirilgan.

Tadqiqot yangiligi.

1. Bitiruv malakaviy ishda keltirilgan nazariy bilimlar asosida bizga malum parabolik tipdagi tenglamalarni echish usullaridan foydalanib real jaraenlardan biri

harorat utkazuvchilik masalasiga soxa chegaralangan va chegaralanmagan hollar uchun matematik modellar kursatilgan.

2. MathCad tizimida parabolic tipdagi differentsial tenglamaga qo'yilgan chegaraviy masala echilgan.

Ishning amaliy ahamiyati. Bitiruv malakaviy ishidan «Hisoblash matematikasi» va «Hisoblash usullari» fanlaridan bo'ladigan amaliy va laboratoriya mashg'ulotlarida, xususiyl hosilali differentsial tenglamalarni sonli yechish bilan bog'liq tanlov fanlari mashg'ulotlarida foydalanish mumkin.

Ishning tuzilishi. Bitiruv malakaviy ishi kirish qismi, asosiy qism, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovalardan iborat bo'lib, jami 50 betdan iborat. Asosiy qism 3 ta paragraftan iborat bo'lib, 1-paragrafta masalaning qo'yilishi, matematik model haqida umumiy tushincha, ikkinchi paragrafta matematik modellarning klassifikatsiyasi, uchinchi paragrafta esa parabolik tipdagi tenglamalarga keladigan oddiy masalalar kurib chiqilgan, aynan 3.1 bandda haroratning to'g'ri chiziq bo'ylab tarqalish modeli, 3.2 da esa haroratning chegaralanmagan to'g'ri chiziq buylab tarqalish modeli kurib chiqilgan. Bundan tashqari quyilgan masala echimining yagonaligi va birdan birligi, maksimum qiymat printsipli 3.3 bandda keltirilgan. Oxirgi paragrafta esa MathCad tizimida harorat utkazuvchanlik tenglamasiga qoyilgan chegaraviy masala echilgan.

§1. Matematik model tushinchasi

Keng ma'noda model` biror ob`ekt yoki ob`ektlar sistemasining obrazi yoki namunasi. Shunday bulsa bu tushuncha xar birimizga tanish: uyinchok samolyot-samolyotning modeli, globus-Erning modeli, planetariy ekrani-osmon va undagi yulduzlar modeli, $S=vt$ formula- jism xarakati modeli.[8]

Modellarni yasash kishilar faoliyatida juda katta ahamiyatga ega. Modelni kurish jarayonini modellashtirish deyiladi. Modellashtirish deganda obe`kt (sistema) ning modeli yordamida shu obe`ktning xossalari tadvik qilish jarayonini tushuniladi. Modellashtirish bilish obe`ktlarini ularning modellari yordamida tadvik etish, kuzatilayotgan predmet va xodisalarining modellarini yasash va urganishdir. Obe`ktni uning modeli yordamida bilish modellashtirishdir. Xar kaday bilish modellashtirishdan iborat, chunki bunda tegishli obe`kt bosh miyada nerv xujjayralari majmui yordamida ideal kurinishda aks etadi, ya`ni biz obe`ktning modeli bilan ish kuramiz. Modellashtirish-turli jarayon va xodisalarni urganishning eng keng tarkalgan metodlaridan biri.

Model tushunchasi biologiya, meditsina, ximiya, fizika, iktisodiyot, sotsiologiya, demografiya va boshka fanlarda xam kullaniladi. Matematik model`, fizik model`, biologik model`, iktisodiy model` va boshka modellar turlari mavjud.[5,6]

Iktisodiy sistemalarni modellashtirishda matematik modellar keng kullanilmokda. Bu soxadagi matematik modellar iktisodiy-matematik va iktisodiy -statistik guruxlarga ajraladi. Biz matematik modellar xakida suz yuritamiz. Matematik modellarni tuzish sistemaviy taxlilining asosidir. Bu ixtiyoriy sistemani tadvik qilishning markaziy boskichidir. Keyingi taxlilning natijasi modelning sifatiga boglik.

Jarayonning matematik tavsifini, ya`ni jarayonni matematik tilda bayonlashni matematik model` deb yuritamiz. Matematik model` olamning ma`lum xodisalari sinfining matematik belgilar bilan ifodalangan takribiy ifodasidir.

Real sistemaning (anikrogi sistema ishlashi jarayonining) matematik modeli deganda biz sistema parametrlariga, kirish signallariga, boshlangich shartlar va

vaktga bogliq sistema xolatlari xarakteristikalarini (bular orkali chikish signallarini) aniklovchi munosabatlar (masalan, formulalar, tenglamalar, tengsizliklar, mantiqiy shartlar, operatorlar va boshkalar) tuplamini tushunamiz.[8]

Urganilayotgan jarayon yo xodisani matematik simvollar yordamida bayon kiluvchi matematik munosabatlar sistemasini matematik model` deyiladi.

Ob`ektning xarakteristikalarini bayon kiluvchi matematik ifodalarni matematik model` deyiladi. Formulalar kurinishida yozilgan fakat mikdoriy xarakteristikalarni uz ichiga olgan modellarni matematik model` deyiladi. Xodisalar sinfining soddalashtirilgan matematik belgilar bilan ifodalangan bayonini matematik model` deyiladi.

Tashki dunyoning biror xodisalar sinfining matematik belgilar yordamida takribiy bayoni matematik model` deyiladi.

Misollar. Eng qadimgi matematik modellardan biri Evklid geometriyasidir. Bu bizni kurshab olgan fazo va undagi predmetlar modelidir. Predmetlar sonining abstrakt modeli sonidir. Xammaga ma`lum matematik modellar: butun sonlar sistemasi, xakikiy sonlar sistemasi. Xozirgi zamon algebrasida gruppalar, xalkalar, maydonlar, vektor fazolar, chizikli algebralar, bul` algebralari kabi matematik modellar bilan ish kuruladi.

Konkret sonli xarakteristikalariga ega bulgan modelni sonli model`, mantiqiy ifodalar yordamida yozilgan modelni mantiqiy model` (masalan, algoritm blok-sxemasi), grafik usuldagi modelni grafik model` (masalan, grafiklar, diagrammalar, rasmlar), EXM yordamida ruyobga chikarilgan modelni mashina(elektron)modeli deyiladi.

Model` nima uchun kerak degan savolga kuyidagi javobni berish mumkin. Model`

1) ob`ekt (jarayon)ning tarkibi, tuzilishi, asosiy xossalari, rivojlanishi konunlari va tashki dunyo bilan uzaro ta`sirini tushunish uchun;

2) ob`ekt(jarayon)ni boshkarishni urganish va berilgan maksad va kriteriylarda boshkarishning eng yaxshi usullarini aniklash uchun ;

3) ob`ektga ta`sir kilishning berilgan usullarining va formalarini ishga solishning tugri va bilvosita okibatlarini oldindan aytib berish uchun kerak. Matematik model` olamni bilish, boshkarish va oldindan aytib berishning kuchli usulidir.

Xar qanday matematik model` uch yul bilan paydo bulishi mumkin;

a) xodisani tugridan-tugri kuzatish natijasida, uni tugridan-tugri urganish va tushunish natijasida; bunday usul bilan olingan modelni fenomenologik model` deyiladi;

b) biror deduktsiya jarayoni natijasida, bunda yangi model` biror umumiyrok modeldan xususiy xol sifatida olinadi; bunday modellarni asimptotik modellar deyiladi;

v) biror induktsiya jarayoni natijasida, bunda yangi model` "elementar" modellarning tabiiy umumlashmasidan iborat buladi. Bunday modellarni ansambl` modellari deyiladi.

N`yuton mexanikasining xamma modellari fenomenologik modellardir. Bular kishilarning xarakatlardan eng soddasi bulgan mexanik xarakatlarning tabiatini tushunish va anglash yulidagi (xarakatlari) tirishishlari yakunini chikardilar. Kuchning xarakat xarakteriga ta`sirini N`yutongacha bilishar edi. N`yutonning ba`zi utmishdoshlari xarakat sirlarini ochishga juda yakin keldilar. Bulardan biri I. Kepler edi. N`yuton birinchi bulib impul`sning saklanish konunini tushundi va bayon kilib berdi. Ma`lum bulishicha, kuch tezlikning uzgarishini aniklaydi, tezlikning uzini emas, ya`ni kuch tezlikni emas, balki tezlanishni aniklaydi:

$$F = m \frac{dv}{dt}.$$

Bu erda massa vaznli proportsionallik koeffitsienti rolida ishtirok etmokda. Shu kabi kator kashfiyotlar yaratildi.

Matematiklar va fiziklarning birgalikdagi xarakatlari tufayli fizika modellarining xozirgi zamon sistemasi barpo etildi. Bu erda kizigi va muximi shuki modellarining tuplamigina emas, balki sistemasi yaratildi. Xozirgi zamon fizikasi - bu matematik modellarning mantikan boglangan sistemasidir. Bu

jarayonda asimptotik taxlik goyalarining rivoji katta rol` uynadi. Yangi modellar eskilarini iskor kilmadi, balki ularni ba`zi xususiyxol sifatida kiritdilar. Masalan, Nav`e-Stoks modellari uz ichiga xususiy xol sifatida Eyler modelini kiritdilar. Agar Nav`e-Stoks modelida kovushkoklik v ni nulga teng desak, Eyler modeliga kelamiz.

Biror tabiat xodisasi, protsessini matematik urganish uchun, uni avvalo soddalashtiriladi, ya`ni xodisaga xos xossalarning xilma-xilligidan bir kismini tekshirish uchun kiritadilar, xamda xodisa xarakteristikolari va tashki muxit orasidagi aloka(boglanish)lar xakida ba`zi muloxazalar kilinadi. Bir kancha xodisalar modellari bir xil bulishi mumkin. Aksincha bir xodisa uchun bir necha turli modellar kurish mumkin. Model` xodisa bilan aynan bir emis, u xodisa strukturasi xakida biror takribiy tasavvur beradi xolos. Model` ba`zan birinchi karaganda juda kupol bulishi mumkin, lekin u konikarli natijalar berishi mumkin.

Masalan, I. Kepler va I. N`yuton vaktlaridan osmon mexanikasi Kuyosh sistemasi tuzilishining kuyidagi modeliga asoslangan: Kuyosh va planetalar mos massalarga ega va ular orasida tortilish kuchlari

$$F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}$$

konun buyicha ta`sir kiladigan material nuktalarni bildirgan, bu erda F -bu massalari m_1 , m_2 va oralaridagi masofa r ga

teng bulgan ikkita osmon jismlari orasidagi tortilish kuchi, γ -tortilish doimiysi. Planetalarni modellashtirgan material nuktalar ularning ogirlik markazlarida joylashgan. Bu model` birinchi karashda kupol bulsa xam, u planetalar xarakatini tula konikarli bayon kiladi va bu model` katta natijalarga olib keldi, xususan Kuyosh sistemasida astronomlarga noma`lum planetalar mavjudligini isbotladi. 1846 yil Neptun, 1930y Pluton planetalarining mavjudligi isbotlandi.

Model sistemani etarli tugri akslantirishi va foydalanish uchun kulay bulishi kerak. Modelning modellashtirilgan ob`ektga mosligini modelning adekvatligi deyiladi. "Adekvatlik"suzi lotinchadan tarjimada teng, tenglashtirilgan degan

ma`noni bildiradi. Bu shartli tushuncha, chunki model` real ob`ektga tula mos bulolmaydi, aks xolda bu model` emas, ob`ektning uzi bulardi. Odatda model` kancha adekvatrok bulsa, u shuncha murakkab buladi. Shuning uchun modelning soddaligi va adekvatligi talablari kandaydir ma`noda karama-karshidir. Modellashtirishda adekvatlik umuman emas, balki tadkikot uchun muxim xisoblangan xossalari buyicha nazarda tutiladi.

Misollar. 1. Avtomobilni boshkarishni urganishda kerak buladigan stend-trenajerdagi avtomobil modeli avtomobil ga shakl, ulchovlari buyicha uxshamaydi, gildiriraklari xatto yuk. Shunday bulsa xam boshkaruvni urganish uchun bu adekvat model` buladi.

2. Garaj maketini kurishda usha avtomobilning modeli mashinaga tashki uxshash (kengligi, balandligi, uzunligi buyicha proportsional), ammo aslida u yogochning uzi. Bu kuriladigan masala uchun adekvat model` buladi.

3. Agar bizni iktisodiyotida xomashyoning mikdoriy xarakteristikolari (ogirligi) kiziktirsa (masalan, bir tonna kandaydir yarim fabrikat olish uchun kancha xomashyo kerakligini aniklaydigan bulsak), u xolda bizni usha jarayonning narx xarakteristikolari kiziktirmasligi mumkin; agar aksincha bizni narx xarakteristikolari kiziktirsa, u xolda biz modelga mikdoriy xarakteristikalarini kiritmasligimiz mumkin. Bizni kiziktirgan xarakteristika buyicha modelning jarayonga adekvatligi tekshirilaveradi.

Boshlang`ich nuqtani topish amaliyot fanining o`ziga xos masalasidir. Ko`pgina hollarda u noformal usulda keltriladi. Bu kamchilikdan qutilish uchun masala formallashtirilishi kerak. Olim o`z ilmining “tili” (terminalogiya)dan foydalanib oddiy formal ifodalashda masalaning to`la va aniq yozilishini keltirishi kerak. Keyingi qadamda masala matematik *formallashtirilishi mumkin*. Bu qadamda kelishmovchiliklar va ortiqcha informatsiyalar yo`qotilib masala sonli hisoblashga tayyor bo`lishi kerak. Shunday qilib modellashtirishning asosiy savollari quyidagilardir:

Qanday kattaliklar haqiqatan ta`sirga ega? Qanday sonlar haqiqatan asosiydir?

Ikkita misol:

- Sunʼiy sputnik uchishini optimal marshrutini hisoblaydigan boshqaruv tenglamani aniqlashda Pluton planetasining gravitatsion taʼsirini hisobga olmasa boʻladi, ammo Yupiterning taʼsiri albatta eʼtiborga olinishi kerak.
- Dou Djons indeksining keyingi haftaga oʻzgarish maʼlumotini keltirish mumkin, bu albatta taxmindir. Ikkinchi tamondan, shu kundagi prezidentlarning fikrlarini eʼtiborga olmaslik bu hatodir albatta.

Sonlar qanday oʻzaro taʼsir koʻrsatishadi?

Bu erda no tanho sifat tasirini va albatta, sonli taʼsirni ham koʻrib chiqishimiz kerak. Bu oʻzaro taʼsirlar quyidagicha yozilishi mumkin:

- *algebraik tenglamalar va tengsizliklar*, yaʼni chiziqli tenglamalar sistemasi va chiziqli optimizatsiyadagi tengsizliklar $Ax \leq b$ kabi;
- *oddiy differentsial tenglamalar sistemasi yoki xususiy hosilali differentsial tenglamalar*, masalan: ideal generator tenglamasi

$$\ddot{y} + y = 0$$

yoki ushbu tenglama $\Delta u = f$ on $[0,1]^2$ berilgan kuch ostida membrananing surilishi;

- differentsial tenglamalar uchun boshlangʻich va chegaraviy shartlar, masalan,
- $y(0) = 1,5$ *u* $u(x,y)=0$ barcha $x, y \in \{0,1\}$
- Markov zanjirlarini tartiblash masalasi uchun graflar va holatlar.
- ...

Hosil boʻlgan masala turi qanday?

- tenglama yoki tenglamalar sistemasini echish.
- mavjudlik masalasini echish: berilgan grafda Gamilʼton yoʻli mavjudmi?

- minimizatsiya/maksimizatsiya masalasini echish: grafda eng qisqa uzunlikdagi yo'lni toping.

Qandaydir mavjudlik va yagonalik teoremlari mavjudmi?

Echimlar berilganlarga uzluksiz bog'liqmi (boshlang'ich va chegaraviy berilganlar, o'ng tomon va h.k.)?

Echimi mavjud, yagona va berilganlarga uzluksiz bog'lik bo'lgan masalalar korrekt qo'yilgan masalalar deyiladi. [Adamar, 1923]. 1930-yillarda Tixonov va Djon ko'pchilik masalalar korrekt qo'yilmagan ekanligiga e'tibor berdilar. Bu holat ko'pgina amaliyot masalalarida uchraydigan teskari masalalarda ham mavjud. Teskari masala uchun sistema parametrlarini qanday kelishtirilishi va asosiy shartlarning bajarilishi so'ralmaydi. Buning o'rniga kerakli natijaga erishish uchun qanday shartlar keltrilishi qaraladi. Bu holda teskari masala o'rniga regulyarlashtirilgan korrekt qo'yilgan masala echiladi.

Sonli hisoblash uchun model` qulaymi?

Qandaydir hatoliklarga yo'l qo'yilmadimi?

Modelning to'la aniqligini doimo tekshirish zarur (model` masalani echishi, haqiqatga yaqinligi, eksperimental berilganlar bilan natijalarni solishtirish).

Matematik modellarga qo'llanishi mumkin bo'lgan turli xil echish texnikalarini ajratishimiz mumkin:

- *Analitik usulda echimni mavjudligini va yagonaligini isbotlash bilan chegaralanmasdan echimni qurish uchun ham foydalaniladi.* Umuman aytganda bu usul oddiy modellar uchun qo'llaniladi.
- Odatda nazariyada ba'zi bir diskret masalalarda, echim bo'lishi mumkin bo'lgan to'plam elementi chegaralangan bo'lgani uchun, tajribalar o'tkazish yordamida topilishi mumkin. Afsuski echim bo'lishi mumkin bo'lgan to'plam elementlari soni etarlicha katta bo'lgani uchun bu usul kam qo'llaniladi. Bunda tajriba maqsadga etkazishi mumkin.

- *Turli sonli usullar* bilan mumkin qadar bir nechta ketma-ket qadamda algoritmik usul bilan masalaning aniq echimi topiladi. Tipik misol – chiziqli optimizatsiya masalalarida simpleks algoritmdan foydalanish.
- *Iteratsion sonli usullar* mavjud yaqinlashishlarni ketma-ket tuzata borib, taqribiy echimni xisoblaydi. Bunday sonli usullar bilan odatda oddiy differentsial tenglamalar echiladi.

Ilmiy hisoblashda odatda oxirgi usullar sinfiga tegishli usullar qaraladi. Bu usullar qo'llaniladigan modellar ichida xususiy hosilali differentsial tenglamalar sistemasiga keladigan modellar ko'pchilikni tashkil etadi. Shuning uchun 3–bobda bu tipdagi modellar, usullarga ko'proq to'xtalamiz. Hozir esa, matematik modellar haqida qisqacha ma'lumot beramiz.

§2. Matematik modellarning klassifikatsiyasi

Matematik modellarning klassifikatsiyasi oddiy ish emas. Matematik modellash printsiplariga bag'ishlangan adabiyotlar soni, ba'zi konkret masalarga bag'ishlanganlaridan tashqari, etarlicha kam. Biz quyidagi ajratishlarni keltirishimiz mumkin :

- *Diskret modellar* butun sonlar yoki kombinator strukturalar bilan masalani yoza oladi. Haqiqiy funktsiyalardan foydalanilmaydi. Tabiiy, diskret modellar asosan diskret masalalar uchun qo'llaniladi. Samoletlar harakatini optimallashtirish yoki Internet orqali berilganlarni optimal qidirish yo'li bularga misol bo'la oladi. Diskret usul bilan fizikaning uzluksiz masalasini ham modellash mumkin. Misol uchun, gaz avtomat turlaridan suyuqliqlarning harakatini yoritish uchun foydalanish mumkin. Uzluksiz bosim va tezlik o'zgaruvchilarini ishlatish o'rniga, ular gidrogazodinamikaning zich suyuq diskret paketlari harakati sifatida ta'riflanadi.

- *Uzluksiz modellar* haqiqiy funktsiyalardan mos xodisalarni yoritishda foydalanishadi. Tabiiy amaliyot masalalari odatda uzluksiz. Hattoki diskret masalalar diskret masalalardan tashkil topmagan. Svetofordagi harakat oqimida

diskret o'zgaruvchilar (t vaqtda kutayotgan transport vositalari soni) bilan birga uzluksiz kattaliklar (kutayotgan transport vositalari soni o'rta qiymati) ham qaraladi. Shunday qilib shahardagi transport oqimi modeli suyuqlikning kanallar, chiqish va kirish klapanlari orqali oqimi kabi modellanadi.

- Aniq modellardan tashqari imkoniyat va tasodifiyotga bog'lik *stoxastik modellar* ham mavjud. Stoxastik modellarni haqiqiy stoxastik eksperiment, misol uchun, tanga tashlash, yorita oladi. Hattoki aniq xarakterli hodisalar, misol uchun radio asboblarning ishlab chiqarish defektini aniqlashda ham stoxastik nuqtai nazar unumli bo'ldi. Stoxastik modellar diskret va uzluksiz modellarga bo'linadi.

Keyingi bo'limlarda ba'zi bir modellarni misol sifatida o'rganamiz. Yuqorida keltirilgan matematik modellarning har bir turini o'rganamiz va mos matematik usullarni keltiramiz.

2.1 Diskret modellar

Ko'riladigan ikki matematik modellashtirish misollari diskret modellar sinfiga tegishli bo'lib, birinchisi dasturlash masalasiga, ikkinchisi esa saylov protsedurasi bilan bog'lik.

Dasturlash

Odatdagi dasturlash masalasi quyidagicha yozilishi mumkin:

- $A_1, \dots, A_n$ n -ta ishlar m -ta $M_1, \dots, M_m$ mexanizmda bajarilishi kerak;
- Har doim har bir mexanizmda faqat bitta ish bajarilishi kerak
- Har bir mexanizm berilgan vaqtda faqat bitta masalani echa oladi (ketma-ket o'tkazuvchan quvurga o'xshab).
- Mexanizmlar parallel ishlashlari mumkin.

Yanada kengrok masalalar sinfini o'z ichiga olishi uchun modelga qo'shimcha yangi parametrlar kiritamiz:

Ishni harakterlovchi parametrlar:

- m_j A_j ishni bajarish uchun zarur qadamlar soni (har bir mexanizmga) ,
- p_{ij} M_i mexanizmda A_j ishni bajarish uchun kerakli vaqt,
- r_j yarash vaqti (qancha vaqtdan keyin A_j ish boshlanishi mumkin?),
- d_j bajarish vaqti (qancha vaqtdan keyin A_j ish tugashi mumkin?),
- w_j A_j ishning muximligini aniqlovchi og'irlik koeffitsienti ,
- $f_j(t)$ A_j t vaqtda tugagan harajatni aniqlovchi qiymat funktsiyasi.

Mexanizmlar va ish tugashi xarakteristikalar:

- ajratilgan mexanizm/
bir xil mexanizmlar, ya'ni qayta ishlash intensivligi faqat ishga bog'liq
($p_{ij} = p_j$)/
sifat jihatdan bir xil mexanizmlar, bu erda ish davomiyligi masalaga va
mexanizmga bog'liq: $p_{ij} = q_i p_j$ /
mexanizmlar (p_{ij} ixtiyoriy)
- A_j masalaning bir qismi ixtiyoriy tartibda boshqa mexanizmda bajarilishi mumkin (ochik *magazin*) / qism masalalar qat'iy tartibda bajarilishlari kerak (oqimdagi (*potochniy*) *magazin*) / qat'iy tartib, har bir mashina har bir ishga faqat bir marta tashrif byuradi,
- Qism ishni to'xtatish mumkin yoki u to'xtatishsiz bajarilishi kerak,
- Tartib bilan bajarishga rioya qilish kerak, ya'ni ba'zi bir masalalar echilgandan keyingina keyingisi echilishi kerak.
- ...

Optimal echim kriteriysi:

- c_j A_j ishning tugash vaqti,
- $l_j = c_j - d_j$ A_j ishning surilish vaqti,

- $t_j = \max(0, l_j) : A_j$ ishning kechikish vaqti,
- $s_j = \max_j c_j - \sum_{j=1}^n p_{ij} : M_j$ ishning bekorga turish vaqti;

U holda ish yuqoridagi kattaliklardan birining minimizatsiyasi bo'lishi kerak. Uning o'rniga masala j yoki i kattaliklarini eng katta qiymatlari ichida eng kichigini topish bo'lar edi. Va oxirida barcha j va i kattaliklari bo'yicha og'irlik funksiyasining eng kichik qiymatini topish masalasini qo'yish mumkin.

Graf nazariyasi erdamida "tsex" masalasi modeli

m -ta har xil mexanizmli n -ta $A_j = (A_{1,j}, \dots, A_{m,j})$ ishdan iborat holatni "tsex" sifatida qaraymaz (ma'lum tartibda, ya'ni har bir ish har bir mashinaga faqat bir marta tashrif buyuradi). Undan tashqari ish o'rinlari orasida oldin-keyin kelish tartibi o'rnatilgan bo'lishi kerak. Barcha ishlar tugashining eng katta vaqti $c_{\max} = \max_j c_j$ minimallashtiradigan funktsiya bo'ladi.

Bizning modelimiz uchun **graf nazariyasi** strukturasi qo'llaymiz:

- Graf tugunlari $- A_{i,j}, 1 \leq i \leq m_j, 1 \leq j \leq n$; ishning qismi, undan tashqari boshlang'ich va oxirgi tugun nuqtalarga ega.
- Grafda bir necha tur qirralar mavjud:
- *Birlashtiruvchi qirralar* $A_{i,j}$ dan $A_{i+1,j}$ gacha (ishga nisbatan qism masalalarning oldin kelishi),
- *Boshlang'ich tugun nuqtadan barcha* $A_{1,j}$ va $A_{m_j,j}$ lardan *oxirgi nuqtagacha* (ish boshlanishi va tugashini bildiradi),
- *Birlashtiruvchi tugun nuqtalar* $A_{m_j,j}$ dan $A_{1,k}$ gacha, agar A_j A_k dan oldin bo'lsa (oldin kelish printsipli),
- *Diz'yunktiv graflar* $A_{i,j}$ dan $A_{1,k}$ gacha va teskarisi, agarda ikki qism masalalar bitta mexanizmni talab etsa (mexanizmni aniqlaydi; yo'nalish

boshlang'ichdan ma'lum bo'lmagan aniq qirraga yoki ma'lum ketma-ketlikka ega, shuning uchun *diz'yunktiv deb ataladi*).

- Undan tashqari har bir $A_{i,j}$ tugun $A_{i,j} \in M_1$ ta'sir etsa, $p_{1,j}$ ga ega. Boshlang'ich tugun va oxirgi tugun 0 og'irlikka ega.
- Yaralish vaqti boshlang'ich va r_j og'irlikga ega $A_{1,j}$ tugunlar orasiga qirrani qo'shish bilan tushuntiriladi.

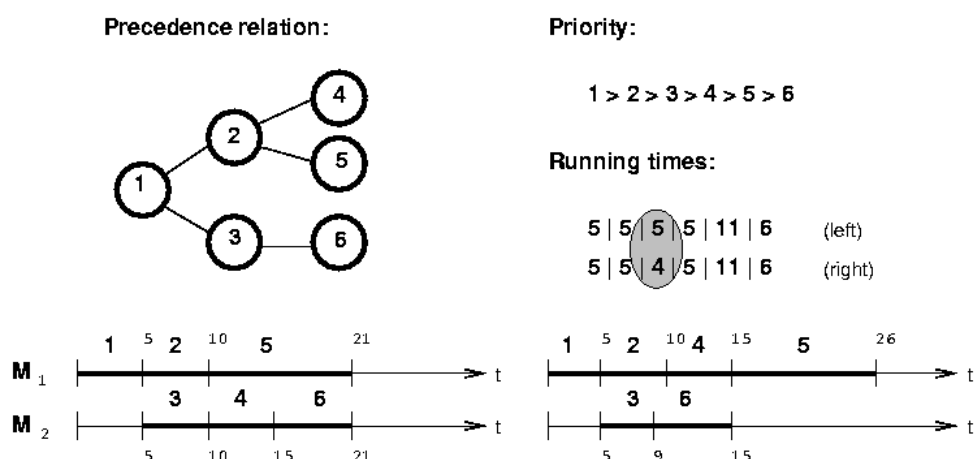
Mumkin bo'lgan echim barcha qism masalalar $A_{i,j}$ uchun $t(A_{i,j})$ boshlang'ich vaqt vektori ko'rinishida berilishi mumkin. Boshlang'ich tugun $t=0$ ga ega, oxirgisi esa $t=c_{\max}$. Bu haqiqatan echimni beradi, agar ketma-ket kelish va boshqa shartlar bajarilsa.

Har bir haqiqiy echim uchun qisqartirilgan graf tsiklik bo'lmaydigan, yagona diz'yunktiv qirralar mavjudligini ko'rsatish mumkin. Diz'yunktiv qirralar bunday tanlanishi *qirralarning diz'yunktiv tanlanishi* deyiladi.

Graf masalasining echilishi.

Berilgan masalamizni graf nazariyasining mos masalasiga keltirganimizdan so'ng graf masalasini echish algoritmini qidiramiz. Masala echishni diz'yunktiv qirrani tanlashdan va haqiqiy echimni, agar u mavjud bo'lsa, qurishdan boshlaymiz. U holda *kritik yo'lni*, ya'ni boshlang'ich tugundan oxirgi tugungacha (tugun og'irliklarni qo'shish bilan birga) maksimal uzunlikka ega bo'lgan yo'lni qidirishimiz kerak. Va nihoyat, agar mumkin bo'lsa, echimni qisqartirishimiz kerak (startlar vektori). Shunday qilib, mos seriya uchun minimal vaqtni olamiz. Asosiy masala, optimal diz'yunktiv qirra tanlanmasini hisoblashdan iborat. Bu masala uchun mos evristika ishlatilishi mumkin. [8] Amaliyotda, diz'yunktiv qirrani yo'nalishini tanlash "siyosat" deb ataladigan atama bilan aniqlanadi. Imkoniyatlardan biri quyidagidan iborat: "prioritet" ro'yxati tuzilib, unda mexanizm oldida bir necha ish turgan bo'lsa qaysi biri oldinma ketin bajarilish sharti aniqlanadi. Ammo bunday siyosat uzluksiz ham, monoton ham emas: barcha ishlar davomiyligining kamayishi umumiy bandlik ko'payishiga olib kelishi

mumkin (rasm. 2.1 qarang). Shuning uchun, jalb etuvchi siyosat rivojlangan va qo'llanuvch bo'lishi kerak.



Rasm. 2.1: Berilgan munosabatlar asosidagi prioritet va oddiy ro'yxat prioriteti asosidagi siyosat. Agar ikki ekvivalent mexanizmlar M_1 va M_2 ishni tugatishsa, maksimal imkonli prioritet ishni tanlaydi (oldingi grafdan) . A_3 ishning davomiyligi 5dan 4gacha qisqargan bo'lsada , umumiy ish davomiyligi ko'payadi (26 oldingi 21 nisbatan) – bu esa prioritet strategiiyasi kamchiligidir. Aniq bo'lmoqdaki A_3 ishning tugashidan keyin M_2 mexanizmning qisqa davrga ishlamasligini qabul qilgan ma`qul bo'lar edi.

2.2 Uzlusiz modellar

Bu bo'limda *uzlaksiz modellarga* ikkita misol keltiramiz: oddiy differentsial tenglamalar bilan ifodalanuvchi populyatsion modellar, modellashtirish uchun differentsial tenglamalar sistemasini foydalanishini ko'rsatadigan harorat tarqalish protsessi modeli.

Populyatsiya modeli:

Populyatsiya modeli aholi o'sishini tasvir etadi. Izolyatsiyalangan (boshqa aholi turar joylari bilan aloqada bo'lmagan) aholi turar joylari mavjud (tashqi ta`sir yo'q) yoki boshqa aholi turar joylari bilan aloqada bo'lgan aholi turar joylari mavjud (o'zaro ahil yoki urush holatida). Maltusa (1798) ning tipik va ma`lum modelini keltiramiz. [6]

Faraz qilaylik γ o'zgaras, musbat tug'ilish koeffitsienti bo'lsin (aholi o'sishi vaqtga va uning berilgan soniga bog'liq), δ esa o'lish ko'rsatkichi (aholi o'lishi vaqtga va uning berilgan soniga bog'liq), u ham o'zgaras va musbat. Tug'ilish koeffitsienti va o'lish ko'rsatkichi bitta o'sish kattaligiga almashtirilishi mumkin: $\lambda = \gamma - \delta$, bu kattalik musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin. U holda aholining o'lchovi quyidagi tenglama bilan modellashtirilishi mumkin: [9]

$$p(t + \Delta t) = p(t) + \lambda p(t) \Delta t,$$

bu esa aholi soni o'sishi kattaligi vaqt davriga proporsional degani. Δt ga bo'lib va limitni $\Delta t \rightarrow 0$ bo'yicha hisoblab quyidagi oddiy differentsial tenglamani hosil qilamiz: $\dot{p}(t) = \lambda p(t)$.

Agarda populyatsiya o'lchovi $t = 0$ da $p(0) = p_0$ desak, ushbu yagona echimga ega bo'lamiz:

$$p(t) = p_0 e^{\lambda t}$$

Shunday qilib, *diskret, haqiqatdan uzluksiz haqiqiy modelni hosil qilamiz*: butun sondagi aholi soni haqidagi natija o'rniga haqiqiy sondagi natijaga ega bo'lamiz.

Butun sonli modelni qarasak ham ko'rsatkichli funktsiya hosil qilamiz. Aholi soni o'sish kattligi λ , aholi soni τ (τ o'zgaras) yilda ikki marta ko'payadi bilan almashtiriladi. Agarda aholi soni boshlang'ich $t=0$ momentda p_0 bo'lsa, u holda aholi soni $k\tau$ yildan keyin

$$p(k\tau) = 2^k p_0 = p_0 e^{[\ln 2 / \tau] k \tau} \quad \text{bo'ladi.}$$

Bu modelda o'zgaras λ va τ quyidagicha bog'langan: $\lambda = [\ln 2 / \tau]$.

Verxalst modeli (Verhulst)

Aholi sonini ko'rsatkichli funktsiya kabi o'sishi haqidagi fikr chegaralangan vaqt uchun to'g'ri kelishi mumkin. [5] Misol uchun, 1700 yildan 1960 yilgacha Er kurrasi aholisining o'zgarishi aniq yuqoridagi qonunga muvofiq o'zgargan. Mos aholi o'sish tezligi $\lambda = 0.02$ har 34 yilu 8 oyda Er aholisini ikki marta ko'payishiga olib keldi. Er kurrasining resurslari chegaralangan bo'lgani uchun bu

protsess doimo davom eta olmaydi. Hattoki aholi o'sish tezligini to'xtatsak ham, sekinlashtirsak ham suv etishmasligi, oziq-ovqat tanqisligi va toza havo etishmasligi sezilaveradi. 19 asrda Verxalst tomonidan Er kurrasining zaxiralariga mos keluvchi holatga keltiradigan aholi sonini o'sish modeli keltirilgan edi. Eng oddiy holda model` tug'ilish va o'lish koeffitsientlari orasidagi chiziqli bog'liqlikni faraz qiladi (vaqt ichida ko'payish va kamayish):

$$\gamma(t) = \gamma_0 - \gamma_1 p(t), \quad \delta(t) = \delta_0 + \delta_1 p(t),$$

Bu erda $\gamma_0 > \delta_0 > 0$ va $\gamma_1, \delta_1 > 0$. Ta'kidlaymizki, bu modelda o'sish normasi populyatsiya o'lchovi o'zgarishini faqat vaqtga nisbatan ko'rsatadi. Wsish normasi populyatsiya kattaligiga bog'liq emas. Shuni ta'kidlashimiz mumkinki, aholi sonining ko'pligi tug'ilish koeffitsientini kamaytirib o'lish ko'rsatkichini ko'paytiradi. Shunday qilib, modeldan tug'ilish bahosini olish mumkin. [10]

Asosiy differentsial tenglama sifatida

$$\dot{p}(t) = \gamma(t) - \delta(t) = -m(p(t) - p_\infty) \text{ topamiz,}$$

bu erda

$$m = \gamma_1 + \delta_1 > 0, \quad p_\infty = \frac{\gamma_0 - \delta_0}{\gamma_1 + \delta_1} > 0.$$

$p(0) = p_0$ (boshlang'ich qiymat) da mos echim

$$p(t) = p_\infty + (p_0 - p_\infty)e^{-mt} \text{ bo'ladi.}$$

Bundan esa $p(0) = p_0$ va $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_\infty$.

Kvadratik o'sishning ifodasi

Ko'pgina hollarda bunday cheklangan o'sish oddiygina ko'rsatkich o'sish bo'lib qolmay yanada aniqroq o'sish bo'ladi. Lekin, model` o'zida hali ham ifoda eta olmaydigan ba'zi holatlar mavjud. Masalan, $p(t)$ populyatsion funktsiyaning qiyshayishi uning belgisini o'zgartirmaydi. Shunday qilib, biz aholining S-shaped oqimini AQSh da 1790 va 1950 yillarda populyatsion o'lchovni o'rganish natijasida olingan oqim kabi keltirib chiqara olmaymiz. Bunday holatni quyidagi

oddiy differentsial tenglamani populyatsiya modeli sifatida ishlatib hosil qilish mumkin:

$$\dot{p}(t) = a p(t) - b p^2(t)$$

$a > b > 0$ lar musbat o'zgarmlar.

U modelda kvadrat had kichik qishloqlar $p(t)$ uchun o'rinli emas. Shunday qilib, umuman olganda tinch (jangsiz) o'sish ko'rsatkichi tugaydi. Agar $p(t)$ o'ssa, kvadrat had ta'sir oladi va aholi o'sishini tez sekinlashtiradi. Bu aholining kamayishi bilan ham tugashi mumkin.

Kvadrat hadni ishlatish bu tasdiqlanishi kerak bo'lgan model ko'rinishidagi taxmin. Bu taxminning asosiy fikri shundan iboratki, inson qolgan aholi tomonidan $p(t)$ o'lchovga proportsional darajada bezovta qilinadi. Shunday qilib, butun aholining bezovtalanishi quyidagicha bo'ladi: $O(p^2(t))$.

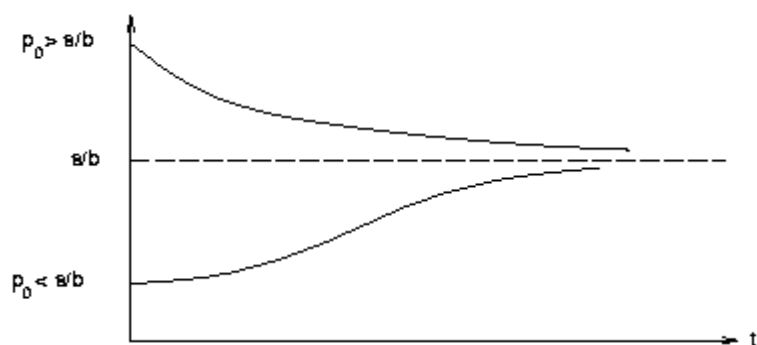
Differentsial tenglamani o'zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida ishlash mumkin.

$$p(t) = \frac{a p_0}{b p_0 + (a - b p_0) e^{-at}}, \quad p(0) = p_0 \text{ echim bo'ladi.}$$

Hisoblashlar asosida (2.2 rasm):

- $\lim_{t \rightarrow 0} p(t) = a/b,$
- $p_0 > a/b \Rightarrow p(t) > a/b \quad \forall t \geq 0, \text{ egilish nuqtasi yo'q,}$
- $p_0 < a/b \Rightarrow p(t) < a/b \quad \forall t \geq 0, \text{ egilish nuqtasi,}$
- $p_0 = a/b \Rightarrow p(t) = p_0 \quad \forall t \geq 0.$

AQSh ning 1790 va 1950 (yuqorida ta'kidlangan) yillardagi populyatsiyasi o'lchovi $a=0.03134$ va $b=1.5587 \cdot 10^{-10}$ parametrlarni ishlatgan holda taxminan quyidagicha ifodalanishi mumkin. Lekin, bu kabi tozalangan model uchun ham u qay darajada etarli yaqin ifodalanganligi tushunarsiz.



2.2 rasm: Boshlang'ich aholi o'lchovi bilan aholining o'sishi va kamayishi

Tibbiyotda logistik o'sishni modellashtirish.

Oldingi paragrafda berilgan S-formalar *logistik o'sishiga* olib keluvchi differentsial tenglama albatta yagona model` emas. Tibbiyotda quyidagi tipdagi

$$\dot{p}(t) = \lambda(t) p(t)$$

differentsial tenglamalar ko'pincha o'simta o'sishining matematik modeli uchun ishlatiladi. $\lambda(t)$ musbat, monoton kamayuvchi, uzluksiz funktsiya.

Asosiy (empirik) model` taxminlar **vaqt o'tishi bilan o'chib ketadigan o'sish templarini** taxmin qiladi. Agar  $\lambda(t)$ , boshqa model` taxmin ko'rilyotgan bo'lsa ham, taxmin bo'yicha eksponentsial kamayuvchi funktsiya bo'lsa, $p(t)$ funktsiya logistik o'sishli echim bo'ladi. Ikkita differentsial tenglamaning yanada qisman taxlili ularning

$$\dot{p}(t) = f(p(t)) p(t)$$

tipda ekanligini ko'rsatadi, bu erda f musbat, monoton kamayuvchi, va $t \rightarrow \infty$ da nolga intiluvchi funktsiya. Bundan (spekulyativ, lekin praktika bilan qo'llab quvvatlangan), alohida qishloqlarning o'sishi umuman shu tipdagi differentsial tenglamalar bilan ifodalanishi mumkin; o'sish ko'rsatkichi $f(p)$ manfiy bo'lmagan, monoton kamayuvchi populyatsiya o'lchovining funktsiyasi.

Harorat o'tkazuvchanlik:

Bizning populyatsion modellarda vaqt yagona o'zgaruvchi edi. Biz aholining fazoviy tarqalishini qaramagan edik. Shunday qilib, oddiy differentsial tenglamalar

bizning modellarimizda etarli edi. Lekin, yanada aniqroq populyatsion modelga mintaqaviy farqlarni qo'shish mumkin. Masalan, AQSh ning nafaqat butun aholisining, balki har bir shtat yoki hattoki graflik aholisining ko'payishi yoki kamayishi qiziqish uyg'otishi mumkin. Bunday hollarda, fazoviy bog'liq parametrlarni (tug'ilish va o'lim ko'rsatkichlari) kiritish, shuningdek shtatlarning chegaralarida emigratsiya va immigratsiyani hisobga olish kerak. Unda $p(t)$ aholi nafaqat vaqtga, balki fazoviy o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi. Bunday model albatta yanada haqiqiyroq, lekin sonli echim uchun murakkab va qiyin bo'ladi.

Populyatsiyani modellashtirishda fazoviy bog'liqlik sun'iy bo'lib tuyulsada, bu fizika masalalarini modellashtirishda standart holat bo'lib hisoblanadi. Ta'riflashning bosh asbobi bu *xususiy hosilali* differentsial tenglamalar. *Xususiy hosilali* differentsial tenglamalar o'zida bir nechta o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan *xususiy hosilalarni* mujassamlashtiradi:

- *statsionar masalalardagi* ko'p o'lchovli o'lchovlar yoki
- *nostatsionar masalalardagi* yoki *vaqtga bog'liq bo'lgan masalalardagi* aralashgan fazoviy va vaqt o'zgaruvchilari.

Misol sifatida harorat o'tkazuvchanlik masalasini ko'rib chiqamiz.

Metal plastinada harorat o'tkazuvchanlik

Faraz qilaylik, masalan, metal plastina yoki suv bilan to'ldirilgan idish. Mos sohaning chegarasidagi harorat rejimi uning ichki sohasiga ta'sir ko'rsatadi, ya'ni isitadi, sovitadi yoki izolyatsiyalaydi. Bizni chegaradagi shartlar sohaning ichki qismiga qanday ta'sir ko'rsatishi qiziqtiradi, ya'ni harorat funktsiyasi $T(x, y, t)$ yoki $T(x, y, z, t)$ qanday qilib fazoviy o'zgaruvchilar x, y , (va z) va t vaqtga bog'liq o'zgaradi. Albatta, harorat mos material va uning o'tkazuvchanlik xossasiga bog'liq. Mos keluvchi matematik model - *harorat o'tkazuvchanlik tenglamasi* deb nomlanadi:

Tenglama uch o'lchovli hol uchun berilgan. $c > 0$ musbat parametr material xossasini ifodalaydi. Laplas operatorini ishlatib va vaqtga bog'liq bo'lgan xususiy hosilani mos ravishda t indeksi orqali belgilab, biz harorat o'tkazuvchanlik tenglamasini quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$c^2 \cdot \Delta T = T_t.$$

Chegaraviy shartlar

Echimning yagonaligi uchun biz ma'lum chegaraviy shartlarni yoki

- *Dirixlening* chegaraviy shartlari:

$T(x,y,z) = \varphi(x,y,z)$ qaralayotgan Ω ning chegarasi $\delta\Omega$ dagi hamma (x, y, z) lar uchun,

- *Heймана* chegaraviy shartlari:

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial n} = \varphi(x,y,z); \quad (x, y, z) \in \delta\Omega.$$

kabi boshlang'ich va chegaraviy shartlarni aniqlashimiz kerak.

Agar $\varphi(x,y,z) \equiv 0$ bo'lsa, chegaraviy shartlarni *bir jinsli* deb aytamiz. Dirixle va Neyman shartlarining aralashmasi ham bo'lishi mumkin.

Statsionar va nostatsionar, elliptik va parabolik masalalarning klassifikatsiyasi

Agar haroratning tarqalishi vaqtga bog'liq bo'lmasa, muammo *statsionar* deyiladi. Haroratning iliq honada tarqalishi bu holatga tipik misol. Harorat o'tkazuvchanlik tenglamasida harorat funksiyasidan vaqt bo'yicha hosila nolga aylanadi va biz ikkinchi tartibli elliptik tenglama bo'lgan Laplas tenglamasiga ega bo'lamiz. Laplas tenglamasining yagona echimini olish uchun, masalan,

chegaradagi (Dirixlarning chegaraviy shartlari) haroratning holatini ta'riflashimiz kerak. Chegara qismida Neyman shartining berilishi, chegaraning qolgan qismida Dirixle shartining berilishi ham Laplas masalasining berilgan sohaning ichki qismida echimining yagonaligini ta'minlaydi. Masalan, Neyman bir jinsli shartining bajarilishi qaralayotgan sohaning chegarasidan harorat o'tishi mumkin emasligini ta'minlaydi (chegara izolyatsiya qilingan, ya'ni isitish yoki sovitishsiz). Neyman shartining butun chegarada berilishi echimning yagonaligi uchun etarli emas. Isbotlash qiyin emaski, agar $T(x, y, z)$ masalaning echimi bo'lsa, $T+a$ ham masalaning echimi bo'ladi (a ixtiyoriy o'zgarmas).

Bu turdagi masalalar (chegaraviy shartlar ostida elliptik tenglamalarni echish) elliptik tenglamalar uchun chegaraviy masalalar deb ataladi.

Agar haroratning tarqalishi vaqtga bog'liq bo'lsa, u holda biz nostatsionar masalaga ega bo'lamiz. Haroratning honada tarqalishi misol bo'la oladi, lekin bu holda honaning oynasi ochiq bo'lib tashqi muxit bilan harorat almashinuvi mavjud bo'lib, honadagi harorat o'zgaradi. Bu holda ikkinchi tartibli *xususiy hosilali parabolik turdagi tenglamaga* ega bo'lamiz. Bu masalalarda aralash chegaraviy shartlar bo'lishi mumkin, masalan, boshlang'ich va chegaraviy shartlar:

$$\begin{aligned} T(x, y, 0) &:= \tau(x, y) & (x, y) &\in [0, 1]^2 \text{ yuqur}, \\ T(x, 0, t) &:= \varphi_0(x, y) & x &\in [0, 1], \quad t > 0 \text{ yuqur}, \\ T(x, 1, t) &:= \varphi_1(x, y) & x &\in [0, 1], \quad t > 0 \text{ yuqur}, \end{aligned}$$

$x=0$ va $x=1$ uchun Neymanning bir jinsli shartlari.

Bunday masalani odatda *boshlang'ich-chegaraviy masala* deb ham atashadi.

Chegaraviy va boshlang'ich shartlarni qanday qilib tushunish mumkin? Bizning (sonli) tajribamiz davri $t=0$ vaqtda qaralayotgan sohada (masalan, metal plastinka) harorat holatini aniqlaymiz. $t=0$ dan so'ng sohaning ikki chegarasida haroratning qiymatlarini o'rnatamiz; $y \in \{0, 1\}$ uchun Dirixle chegaraviy shartlarini aniqlaymiz. Qolgan ikki chegara uchun ($x \in \{0, 1\}$) Neymanning bir jinsli shartlarini keltiramiz (metal listning bu chegarasida harorat izolyatsiyasi o'rnatilgan deb faraz qilinadi).

Statsionar va nostatsionar hollarni sonli usullar bilan echish zarur. Nostatsionar masalalarni echish statsionarga nisbatan qiyinroq. Bu masalalarning farqini ularni elliptik, parabolik va giperbolik turlarga klassifikatsiyasi ta'kidlaydi. Biz bu masalaga keyingi boblardan birida qaytamiz.

2.3 Ierarxik modellash:

Modellashtirishning boshida hodisani *formallashtirish uchun* masshtab tanlashimiz kerak. Bunday holatni populyatsiyani modellashtirishda ko'rgan edik: aholining ko'payishi yoki kamayishi mintaqaviy effektlarni e'tiborga olish yoki olmaslik bilan bajarilishi mumkin (mintaqaviy qismlarsiz qo'pol masshtab). Oddiy differentsial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, agar modellashtirishda mintaqaviy effektlarni e'tiborga olmasak. Agar modelga fazoviy o'lchovlarni (fazoviy va vaqt o'lchovlarini ishlatuvchi masshtab) qo'shsak, unda xususiy hosilali tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Fazoviy o'lchovlar soni ham modeldagi turli xildagi aniqliklarga sabab bo'ladi.[8]

Quyidagi ikkita savolga javob qaysi usulning ishlatilishiga tavsiya bo'la oladi:

- Qaralayotgan masala uchun qaysi darajadagi detallashtirish zarur?
- Xozirgi zamon sonli usullari va komp'yuterning imkoniyatlaridan kelib chiqib, berilgan masala modeli keltirilgan vaqt ichida echiladi?

Ma'lumki, ikkinchi savol masalamiz berilgan modelning detalizatsiyasiga ma'lum chegaralar qo'yadi. Boshqa tomondan, barcha sonli ko'rinishdagi hisoblar va sonli ko'rinishdagi keltirishlar zarur bo'ladi. Ba'zan *ierarxik modellash* tavsiya etiladi: birinchidan, ko'p hollarda qo'pol modellar ham etarli, misol uchun, faqat fazoviy o'zgaruvchili model yoki qisqartirilgan sondagi o'lchovli (3 o'lchovli o'rniga 2 o'lchovli) model. Protsessni to'la ifodalash uchun (masalan, dvigateldagi optimal yonish protsessi, havo ventilyatsiyasining aylanish dastasining to'g'ri taqsimlanishi va h.k.) yanada detallashtirilgan model zarur.

Yarim o'tkazgich texnologiyasida ierarxik modellash

Yarim o'tkazgich texnologiyasi modellashtirishga yuqori talabli tipik misol bo'lib hisoblanadi.

Proektning fazasidan so'ng, tekshirilayotgan nusxalarning ishlab chiqarilishi yoki maxsulotning ishlab chiqarilishi boshlanishidan oldin integral sxemalar sonli modellashtirish bilan tekshiriladi. Alohida bir chipda tranzistorlarning soni juda ham ko'pligi sababli (hozirgi zamon mikro protsessorlarida bir necha million) Maksvell tenglamalari asosida hamma tranzistorlarni fazoviy modellashtirib bo'lmaydi. Shuning uchun, oddiy differentsial tenglamalarning katta sistemalarini modellashtira oladigan SPACE yoki TITAN modulyatorlari ishlatiladi. Demak, integral sxemalarning asosiy modeli alohida komponentalarning o'zini tutishi va vaqtga bog'liq bo'lgan Kirxgoff qoidalariga asoslangan.

Lekin, mikrochiplarning integratsiya darajasi o'sib borayotganligi sababli, bu usulning limiti torayadi. Tranzistorlar va chiziqli o'tkazgichlar shunday yaqinlashadiki, ularning kutilgan ta'siridan tashqari, ular o'z fizik qo'shnilarida ma'lum me'yordan tashqari effekt ko'rsata boshlaydilar. Bunday effektlarga odatda *tranzitlik effekti* (shu bilan birga *elektromagnit moslik* haqida ham gapiramiz) deyiladi. Agar to'la fazoviy modellashtirishning imkoni bo'lmasa, bu effektlarni modelga qo'shishimiz kerak, balki boshqa effektlar bilan birga. Bu quyidagicha bajarilishi mumkin: qo'shimcha parametrlar kiritish; kichik o'lchovli (ayniqsa bir o'lchovli) differentsial tenglamalarni sistemaga kiritish; modellashtirish xarakteristikalarini va differentsial tenglamalarda fazoviy modelni kiritadigan parametrlar komponentalarni aniqlash va boshqa shu kabi usullar.

Ko'p o'lchovli modellar

Avvalgi seksiyada ko'rganimiz kabi, muammo har xil modellarga olib keladigan har xil daraja yoki masshtablarda o'rganilishi yoki modellashtirilishi mumkin. Boshqa qiziqarli hol, bunda bir hodisada har xil masshtabli ko'rinishlarda qatnashadi. Sonli qayta ishlashda mavjud bo'lgan eng kichik masshtab odatda modelning echimini aniqlaydi. Yaxshi echimdan qutilish uchun (va shuningdek

katta tenglamalar sistemasidan), eng yaxshi masshtabdagi tuzilishlar alohida modellashtiriladi.[6]

Misol sifatida turbulent *suyuqlik oqimini* ko'rib chiqamiz. Berilgan suyuqlik oqimi sekin va tinch (asal suyuqlik sifatida, tinch daryolar) bo'lgan *laminar* oqimdan farqli, turbulentlar quyidagi xossalar orqali xarakterlanadi:

- turbulent oqimlar– nostatsionar va uch o'lchovli (ya'ni oqim chiziqlari notekis);
- har xil kattalikdagi o'ramalar oqimda yuz beradi;
- ayniqsa kichik o'ramalar oqimdagi diffuziyaning (transport va energetika muammolari) kattalashishiga olib keladi;
- masshtablar orasida energiyaning kuchli olib o'tilishi (energiya kaskadi) hosil bo'ladi, ishqalanishning oshishi natijasida energiyaning katta qismi yo'q qilinadi.

Amaliy misol-uchmoqchi bo'layotgan samolyotning orqasida hosil bo'layotgan o'ramalar. Bo'ron effektlari shu darajada kuchliki, keyingi samolyotning start olishi uchun xavfsizlik intervallari yozilgan (hozirgi vaqtda taxminan 45 sekund). Aks holda Boing 747 ning start olishi natijasida hosil bo'lgan bo'ron keyingi Boing 737 ning talofatiga olib keladi. Wramaning paydo bo'lishi yangi Airbus 3XX proektidagi asosiy masalalardan biri. Mavju modellashtirishlar 5 minutlik xavfsizlik intervalining kerakligini bashorat qiladi!

Toshqin oqimlarda kattalashgan energiya yo'qolishidan kelib chiqadigan texnik muammoning misoli - suv quvurining tuzilishi. Bo'ron mos suyuqlikni tashish uchun kerak bo'ladigan energiyani qattiq kattalashtirishi mumkin. Bu holda polimer qo'shimchasining qo'shilishi energiyaning 70% gacha saqlanishiga olib keladi.

Suyuqlikning toshqin oqimini modellashtirish

Toshqin oqimni *to'g'ri sonli modellashtirish* (TSM), mos model` sifatida, hamma mavjud bo'lgan suv o'ramalarini hisobga oluvchi sonli echimni olishga

harakat qiladi va shuning uchun energiya, massa va impul's (*Nov'e-Stoks tenglamasi*) saqlanish qonunlarini ishlatadi. Kerakli echim Kolmogorov qonuni $k^{-5/3}$ deb ataluvchi qonun orqali aniqlanadi: eng kichik suv o'ramalarining o'lchami $\nu^{3/4}$ tartibga ega, bu erda ν -suyuqlikning *jipsligi* (*vyazkost*).[5]

Aerodinamik modellashtirishda, masalan, havoning jipsligi suyuqlinikidek $\nu < 10^{-6}$ bo'ladi. Demak, eng kichik suv o'ramalarining o'lchami $h < 10^{-9/2}$ bo'ladi. Bu o'lchov diskretizatsiya to'ri tugunining o'lchovini aniqlaydi. Bu tartib kattalikdagi tugun o'lchovini uch o'lchovli modellashtirishni bir necha yillardan beri amalga oshirib bo'lmaydi. Buning o'rniga turbulentlik modellari rivojlanyapti, ular o'ramalarni echish zaruriyati tug'ilmasligi uchun statik (ya'ni, o'rtalashtirilgan) miqdorlarni ishlatadi. Olingan modellar albatta yanada noaniq, odatda etarlicha noaniq.

Ko'p o'lchovli muammoni echish uchun (hech bo'lmaganda ma'lum darajagacha) *katta o'ramani modellashtirish (LES)* kiritilgan edi. LES da qo'pol konfiguratsiya va suv o'ramalaridan tarkibiy bog'langan masala to'g'ridan-to'g'ri echilgan, kichik suv o'ramalari esa soddalashtirilgan modellar (*qism to'r masshtab modeli*). Demak, katta o'ramani modellashtirish haqiqiy modellashtirish, hisoblash vaqti va to'g'ri sonli modellashtirish va turbulentlikni sonli modellashtirish orasidagi kerakli xajm va xotira konfiguratsiyasiga nisbatan kompromiss hisoblanadi.

Ko'p o'lchovli masalalarning boshqa misollari

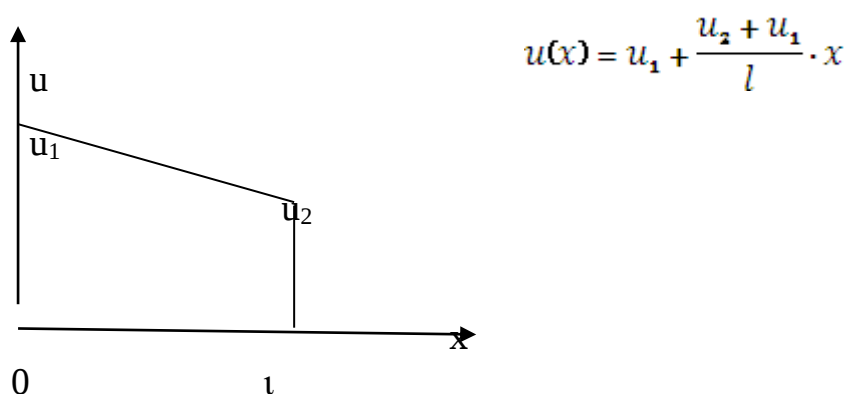
Har xil masshtablar nafaqat fazoda, balki vaqtda ham uchraydi. Tipik misol-molekulyar dinamika. Bu erda yuqori chastotali tebranish past chastotaning o'tuvchi holatining ustma-ustligi bo'lishi mumkin. Mos chastotalar ba'zi o'lchovlarning tartiblari bilan farqlanishi mumkin. Bio-qatlam (ya'ni tishlarda yoki hattoki suv oqadigan trubalarning tozalagich reaktorlarida mikro tanalarning to'planishi) o'sishi singari bu bio-qatlamlarda suyuqlik oqimi va transportirovka protsessi bo'ladi, ular vaqt masshtabi bilan yuz beradi, u taxminan bio-qatlamning kuzatilayotgan o'sishining 10 tartib kattalikka tezroq. Sonli modellashtirishni

hozirgi vaqtning hamma masshtablarini hisobga olgan ravishda qilib bo'lmaydi. Ko'p o'lchovli modellarda aniqlikning yomonlashmasligida masshtabning hamma yaxshi tomonlarini birlashtirishni hisobga olgan holda usullarni rivojlantirish kerak.

§3 Parabolik tiptagi tenglamalarga keladigan oddiy masalalar

3.1 Haroratning tug'ri chiziq buylab tarqalish masalasining modeli

l -uzunlikdagi, birjinsli yon tomonlaridan harorat utkazmaydigan, etarli darajada yingichka sterjenda, ya'ni kesa-kesimining barcha nuqtalarida haroratning tarqalishini kurib o'tamiz. Agar sterjen uchlarini doimiy haroratda u_1 , u_2 da ushlab tursak, u holda sterjen buyicha haroratning chiziqli tarqalishi bulib o'tadi.[4] 1-surat



1-surat

Yuqori haroratga ega sterjen uchidan past haroratga ega uchi tomonga harorat tarqaladi. Birlik vaqt davomida sterjen kesa-kesimi S – arqoli oqib utadigan harorat mug'dori

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} \cdot S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S \quad (1)$$

Formula bilan beriladi.

Bu erda k -harorat utkazuvchanlik koefitsenti, u sterjen materialiga bog'lik buladi. Harorat oqimining mug'dori musbat, agar harorat x ning usish tarafiga yunalgan bulsa.

Temperaturaning sterjendagi tarqalish jarayoni kurib utamiz. Bu jarayon $u(x,t)$ funktsiya yordamida berilishi mumkin. Bu t -vaqt momentida x -kesimdagi temperaturani anglatadi.

$u(x,t)$ funktsiya qanoatlantiradigan tenglamani topamiz. Buning uchun harorat utkazuvchanlik bilan bog'lik bulgan fizik jarayonlarni formulirovka qilamiz.

1. Fur'e nizomi

Agar jism temperaturasi notekis bulsa u xolda xararat yuqori joydan xarorat past joyga harorat oqimi xosil buladi.

$(t, t+dt)$ vaqt ichida x – kesim buyicha oqib utadigan harorat mug'dori

$$dQ=qSdt \quad (2)$$

Bu erda $q=-k(x)\frac{\partial u}{\partial x}$

(3)

1 sm^2 yuzdan birlik vaqt ichida oqib utuvchi harorat mug'dorining zichligi. Bu (1) formulaning umumiy holi desa yam buladi. Unga quydagicha integral` forma bersa yam buladi.

$$Q = -S \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt \quad (4)$$

Bu erda Q -berilgan (t_1, t_2) vaqt oralig'ida x -kesma orqali oqib utuvchi harorat mug'dori.

2 . Bir jinsli kesmga uning temperaturasini Δu ga kutarish uchun zarur bulgan harorat mug'dori

$$Q=cm\Delta u=c\rho V\Delta u \quad (5)$$

Bu erda s -haroratsig'imi, m -jism massasi, ρ -uning zichligi, V hajmi.

Agar temperatura uzgarishi sterjenning har hil uchastkasida har turli bulsa va sterjen` bir jinsli bulmasa u holda

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S\Delta u(x)dx \quad (6)$$

3.Sterjen` ichida harorat yutilishi yaki chiqishi mumkin.

(misol uchun toknin utishi, ximik reaksiya bulishi) Harorat ajirali chiqish harorat istochnigi $F(x,t)$ bilan ham xarakterlanishi mumkin (x -nuqtada t vaqt momentida)

Sterjenning $(x, x+dx)$ uchastkasida $(t, t+dt)$ vaqt momentida ushbu istochniklarning harakatidan

$$dQ = SF(x,t)dxdt \quad (7)$$

Harorat ajirali chiqishi mumkin yaki integral formada

$$Q = S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x,t) dx dt \quad (8)$$

Bu erda (t_1, t_2) vaqt momentida (x_1, x_2) sterjen uchastkasida ajirali chiqadigan harorat mug'dori. Energiyaning saqlanish qonuni va (4), (6) va (8) formulalardan foydalansak [4,5]

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \int_{x_1}^{x_2} c\rho [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi \quad (9)$$

Harorat utkazuvchanlikning integral kurinishidagi formulasining olamiz.

Harorat utkazuvchanlik uzning tenglamasining differentsial formada olish uchun $u(x,t)$ funktsiya u_x va u_t buyicha uzluksiz hosilaga ega bulsin deb faraz qilamiz.

Urta qiymat haqidagi teoremadan foydalansak

Uni quydagi kurinishiga keltirish mumkin.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]_{t=t_3}^{x=x_5} \Delta t \Delta x + F(x, t) \Delta x \Delta t = \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]_{t=t_3}^{x=x_5} \Delta x \Delta t,$$

Bu erda

t_3, t_4, t_5 va x_3, x_4, x_5 lar (t_1, t_2) va (x_1, x_2) intervalining oraliq nuqtalari. $\Delta x \Delta t$

kupaytmani qisqartirgandan sung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]_{t=t_3}^{x=x_3} \Delta t \Delta x + F(x, t) \Big|_{t=t_4}^{x=x_4} = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \Big|_{t=t_3}^{x=x_3}$$

$x_1, x_2 \rightarrow x$ ga $t_1, t_2 \rightarrow t$ ga intilganda limitga utsak

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (10)$$

Harorat utkazuvchanlik tenglamasiga ega bulamiz.

Xususiyl hollarini kurib utamiz.

1. Agar sterjen bir jinsli bulsa u holda k, c, ρ -lar doymiy, va tenglama

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

kurinishga keladi

Bu erda $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ -temperatura utkazuvchanlik koeffitsienti. Agar harorat manbayi bulmasa $F(x, t) = 0$. U xolda harorat utkazuvchanlik tenglamasi

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (11)$$

kurinishga keladi.

2. Harorat manbayining zichligi temperaturaga bog'liq bolishi mumkin. Tevarak atrof bilan harorat almashuv nyuton nizomiga muvofiq.

$$F_0 = h(u - \theta)$$

buladi, bu erda $\theta(x, t)$ -atrofining temperaturasi, h – harorat almashuv koeffitsienti.

Shunday qilib x – nuqtadagi harorat manbayining zichligi

t – vaqt momentida

$$F = F_1(x, t) - h(u - \theta)$$

bunda $F_1(x, t)$ boshqa harorat manbayining zichligi.

Agar sterjen` bir jinsli bulsa, u xolda harorat utkazgichlik tenglamasi

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x, t)$$

Kurinishga ega bo'ladi. Bu erda

$$\alpha = h/c\rho; \quad f(x, t) = \alpha\theta(x, t) + \frac{F_1(x, t)}{c\rho}$$

belgili funktsiya.

3.K va s koefitsentlari temperaturaning sekin uzgaruvchi funktsiyalari bulib topiladi. Harorat protsessining katta intervallarida uzgarish harorat utkazuvchanlikning kvazichiziqli tenglamasiga keltiriladi va bir jinsli emas atrof uchun

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = \frac{c(u, x) \rho(u, x) \partial u}{\partial t}$$

Diffuziya tenglamasi

Agar atrof muxit gaz bilan tuldirilgan bulsa u holda kontsentratsiyasi yuqori bo'lgan joydan kontsentratsiyasi past joyga diffuziya urin oladi.[9] Bu jarayon suyuqliklarda ham urin oldi. Govak urtaga ega trubkada diffuziya jarayonini kuzatamiz. U holda diffuziya jarayoni $u(x, t)$ funktsiya yordamida yoziladi. U t-vaqt momentidagi x-kesmadagi kontsentratsiyani beradi. Nerist nizomiga muvofiq $(t, t+\Delta t)$ vaqtida x – kesma buyicha oqib utadigan gazning massasi.

$$dQ = -D \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) S dt = W S dt,$$

$$W = -D \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Bu erda D-diffuziya koefitsenti, S-trubkaning kesim yuzasi, $W(x, t)$ - diffuzion oqimning zichligi, u birlik vaqt ichida birlik yuzadan oqib u'tuvchi gazning massasiga teng. Kontsentratsiyaning ta'rifiga ko'ra V- hajmdagi gazning muqdori

$$Q = uV;$$

Bu erdan gaz massasining trubka oralig'i (x_1, x_2) dagi o'zgarishi Δu kontsentratsiya o'zgarishida

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x) \Delta u \cdot S \quad \text{bo'ladi}$$

bu erda $s(x)$ - govaklik koefitsenti (t_1, t_2) vaqt oralig'ida u (x_1, x_2) trubka uchastkasidagi gaz massasining balansini kurib o'tamiz.

$$S \int_{t_1}^{t_2} \left[D(x_2, \tau) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) - D(x_1, \tau) \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, \tau) \right] d\tau =$$

Bu erdan (1) ga nisbatan

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) = c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (12)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu diffuziya tenglamasi bo'lib topiladi. U harorat o'tkazuvchanlik tenglamasining uzi. Agar diffuziya koeffitsienti doimiy bo'lsa u holda tenglama

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{ko'rinishga keladi}$$

bu erda

$$a^2 = \frac{D}{c}$$

Agar govaklik koeffitsienti $c=1$, diffuziya koeffitsienti doimiy bo'lsa diffuziya tenglamasi quydagicha bo'ladi.

$$u_t = D u_{xx}$$

Chegaraviy shartlarining qo'yilishi

Harorat tenglamasining birdan bir echimini topish uchun tenglamaga boshlang'ich chegaraviy shartlar qushib yoziladi [10]. Boshlang'ich shart $u(x,t)$ funktsiya qiymati $t=t_0$ vaqt momentida beriladi. Chegaraviy shartlar chegarada temperaturaning uzgarishiga qarab har hil bo'lishi mumkin. Ularning asosiy uch tipi mavjud.

1. Sterjen` uchida $x=0$ da temperatura berilgan.

$$u(0,t) = \mu(t)$$

Bu erda $\mu(t)$ qandaydir $t_0 \leq t \leq T$ intervalda berilgan funktsiya. T-protsess urganilayotgan vaqt oralig'i

2. $x=l$ sterjen` uchida hosila qiymati berilgan

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = v(t)$$

Agar sterjen` uchida $Q(l,t)$ harorat oqimi berilsa

$$Q(l, t) = -\frac{\partial u}{\partial x}(l, t)$$

bundan $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = v(t)$, **bu erda** $v(t)$ - berilgan funktsiya

$$v(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}$$

3. $x = l$ uchida funktsiya bilan hosila urtasida chiziqli bog'liklik bor

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \theta(t)]$$

Bu chegaraviy shartlar N'yuton nizomiga muvofiq jism yuzasi bilan atrof muxit bilan harorat olmasadi. θ -bu erda berilgan temperatura $x=l$ kesmadan oqib chiquvchi ikkita harorat oqimi formulasidan foydalansak

$$Q = h(u -$$

Uchinchi chegaraviy shart uchun matematik formula olamiz

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \theta(t)]$$

Bu erda $\lambda = h/k$ harorat olmasuv koeffitsienti. $\theta(t)$ - qandaydir berilgan funktsiya. Sterjenning $x=0$ uchi (0,) uchun uchinchi chegaraviy shart quydagicha bo'ladi

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda[u(0, t) - \theta(t)]$$

Chegaraviy shartlar $x=0$ va $x=l$ da har hil tipda bulgani uchun masalalar turi juda yam kup.

Birinchi chegaraviy shart $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $0 < t < T$ harorat utkazuvchilik tenglamasining $u = u(x, t)$ echimini

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

Boshlang'ich va chegaraviy shartlarda topishni bildiradi. Bu erda $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ berilgan funktsiyalar.

Boshqa chegaraviy shartlar ham $x=0$ va $x=l$ ning har xil kombinatsiyalarida har hil masalalar paydo bo'ladi.

3.2. Haroratning chegaralanmagan soha buyicha tarqalishi

Harorat o'tkazuvchanlik jarayoni juda yam uzun sterjenda kuzatamiz. Unchalik kata bo'lmagan vaqt oralig'i uchun chegarada berilgan temperatura sterjenning markaziga unchalik ta'sir ko'rsatmaydi. Bo' holda sterjen uzunligini xisobga olmaymiz.

Koshi masalasini sterjen chegaralanmagan hol uchun quyamiz.

Harorat utgazuvchanlik tenglamasining echimini oblast $-\infty < x < \infty$ va $t \geq t_0$ bo'lganda va

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty$$

boshlangich shartta topish talab etiladi.

Bu erda $\varphi(x)$ - berilgan funktsiya Agar bizni qiziqtirayotgan sterjen uchastkasidagi temperatura bir uchiga yaqin bulsa u holda yaqin uchdagi temperatura va boshlangich shart olinadi. Bunday kurinishidagi masalalarda sterjen yarim cheksiz deb qabul qilinadi va koordinata $0 \leq x < \infty$ deb olinadi.

Yarim chegaralangan sterjen uchun birinchi chegaraviy shartni keltiramiz. Harorat utkazuvchanlik tenglamasi echimini $0 < x < \infty$ sohada va $t \geq t_0$ quydagi chegaraviy shartlarda topilsin

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq t_0$$

Bu erda $\varphi(x)$, $\mu(t)$ - berilgan funktsiyalar. Boshlangich shartning tasiri sterjen buylab temperatura tarqalishida vaqt utishi bilan xolsizlanishi mumkin. Boshqacha aytganda tajriba uzoq davom ettirilsa boshlangich shartlar zarrur bulmaydi.

Shunday qilib biz boshlangich shartlarsiz chegaraviy masalalariga kelamiz. Yani harorat o'tgazuvchanlik tenglamasi echimi

$0 \leq x < \infty$ va $-\infty < t$ da

$$u(0, t) = \mu_1(t)$$

$$u(\infty, t) = \mu_2(t)$$

Chegaraviy shartlarin qanoatlandirsin. Yana boshlang'ich shartsiz yarim cheksiz ($\ell = \infty$) sterjen uchun $0 < x < \infty$, $t > -\infty$ da harorat utkazuvchanlik

tenglamasi $u(0,t)=\mu(t)$ shartini qanoatlantiruvchi echimni topish masalasi ham katta ahamiyatga ega.

Chegaraviy shartlarining quyilishiga aniqroq tuxtab o'tamiz.

Birinchi chegaraviy shartining echimi dep quydagi xossalarga ega $u(x,t)$ funktsiyaga aytamiz

- 1) $u(x,t)$ -funktsiyasi epiq $0 \leq x \leq \ell$, $t_0 \leq t \leq T$ sohoda aniqlangan va uzluksiz .
- 2) $u(x,t)$ echim harorat o'tkazuvchanlik tenglamasini ochiq $0 < x < \ell$, $t_0 < t$ sohada qanoatlantiradi.
- 3) $u(x,t)$ boshlang'ich va chegaraviy shartlarini qanoatlarida ya'ni

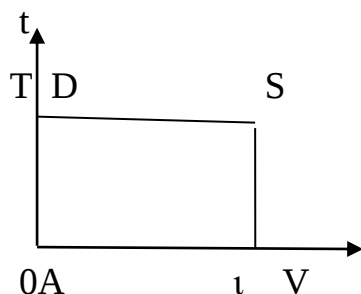
$$u(x,t_0)=\varphi(x), u(0,t)=\mu_1(t)$$

$$u(\ell,t)=\mu_2(t)$$

bu erda $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ -lar quydagi shartlarin qanoatlantiruvchi uzliksiz funktsiyalar

$$\varphi(0)=\mu_1(t_0)$$

$$\varphi(\ell)=\mu_2(t_0)$$



1-surat

Fazalik holatdagi (x,t) tegisligini kurib utamiz 1-surat. Bizning masalamizda AVSD tugriturtburchakning ichida aniqlangan $u(x,t)$ funktsiyasi izlanadi. Bu soxa masalaning quyilishidan aniq buladi. Sababi haroratning sterjenda tarqalish jarayoni $t_0 \leq t \leq T$ vaqt oralig'ida $0 \leq x \leq$

ℓ uzunlik buyicha kuzatiladi. $x = 0$ va $x = \ell$ chegarada harorat rejimi bizga ma'lum

Mayli $u(x, 0) = 0$ va $u(x, t)$ funktsiya tenglamani faqat $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ da qanoatlandirsin. Agar $t=0$ deb olsak biz $\varphi'' = u_{xx}(x, 0)$ hosila mavjud bulishining talab qilamiz. Bu esa kuzatilayotgan fizik jarayonlarining soxasini chegaralab quyadi.

3)shartta $u(x, t)$ berilgan $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ soxada uzluksiz bulmasa uz manosini yuqotadi. Har bir quyilgan masalada quydagi surovlar paydo buladi.

- 1) Quyilgan masala echimining birdan-birligi
- 2) Echimining bor bo'lishi.
- 3) Echimining qushimga shartlarga uzluksiz bog'lik bo'lishi.

Agar quyilgan masala bir nechta echimga ega bo'lsa u holda masalani echish uz ahamiyatini yuqotadi.

Shuning uchun masalani echishdan avval uning echimining birdan-birligini isbotlash zarur

Amaliy masalalarda 2) shart kuproq qullaniladi ya'ni echimining bor bulishinin isbotlashda echimini hisolab topish uslubi kursatiladi. Boshlangich va chegaraviy shartlarining ozgina uzgarishi echimining uzini ozgina uzgarishiga olib kelsa jarayon fizik aniqlangan deb ataladi.

3.3. Maksimum qiymat printsipi

Biz endilikda doymiy koeffitsentli tenglamani qarab o'tamiz

$$\vartheta_t = a^2 \vartheta_{xx} + \beta \vartheta_x + \gamma \vartheta$$

Bu tenglama $\vartheta = e^{\mu x + \lambda t} \cdot u$

bu erda

$$\mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \quad \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2}$$

urniga quyish yordamida

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (13)$$

kurinishiga keltiradi. Tenglama echimining maksimal qiymat printsipi deb ataluvchi quydagi hossasini keltiramiz [3,4].

Agar $u(x, t)$ funktsiya $0 \leq t \leq T$ va $0 \leq x \leq l$ **yopiq sohada aniqlangan va uzluksiz**

bulsa va soxaning $0 < x < l$ va $0 < t < T$ nuqtalarida $u_t = a^2 u_{xx}$ harorat

uzining maksimal

va minimal qiymatini boshlang'ich vaqt momentida yoki $x = 0, x = l$ chegara nuqtalarida erishadi. $u(x,t)=\text{const}$ bulsa funktsiya harorat utkazuvchanlik tenglamasini qanoatlantiradi va uzining maksimal va minimal qiymatiga hohlagan nuqtada erishadi.

Bu teoremaga qarshi kelmaydi, sababi uning sharti buyicha agar maksimal (minimal) qiymat oblast ichida erishilsa u holda $t=0$ yoki $x=0, x=l$ da erishiladi.

Bu teoremaning fizik ma'nosi tushinarlik agar temperatura chegarada va boshlang'ich vaqt momentida qandaydir M sonidan oshib ketmasa, u holda jism ichida harorat manbbasi bo'lmasa M dan katta temperatura faydo bo'lishi mumkin emas.

Maksimal qiymat uchun teoremaning isbotini ko'rib utamiz.

Teorema isbotini qarama-qarshidan boshlaymiz $u(x,t)$ funksiyasining $t=0$ ($0 \leq x \leq l$) yoki $x=0, x=l$ da maksimal qiymatini M orqali elgilaymiz, va qandaydir (x_0, t_0) ($0 < x_0 < l, 0 < t_0 < T$) nuqtada $u(x, t)$ funktsiyasi uzining

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

Maksimal qiymatiga erishsin. (x_0, t_0) nuqtada (13) tenglamaning chap va ung taraflaridagi belgilarini tekshiramiz. (x_0, t_0) nuqtada funktsiya uzining maksimal qiymaticha erishodigan bulsa u holda

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0 \text{ Ba } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leq 0 \quad (14)$$

Bulishi shart sung $u(x_0, t_0)$ da $t=t_0$ maksimal qiymatga erishadigan bulsa

$$(15)$$

(13) ning ung va chap taraflaridan belgilarini solishtirib ularnin har xil ekanligini qo'ramiz. Bu hali teorema isbotlandi degani emas. Tuliq isbotlash uchun (x_1, t_1) nuqtani topamiz u shartini qanoatlanlantirsin. Uning uchun qushimcha

$$\vartheta(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t) \quad (16)$$

Erdamga funktsiya kiritamiz k -qandaydir son

$$\vartheta(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

Va $k(t_0 - t) \leq kT$

$k > 0$ sonini $kT < \frac{\varepsilon}{2}$ **eki** $k < \frac{\varepsilon}{2T}$ buladiganday etib saylab olamiz.

U holda $\vartheta(x, t)$ ning $t = 0$ yoki $x = 0, x = l$ **diga maksimal qiymati** $M + \frac{\varepsilon}{2}$ dan ortib ketmaydi ya'ni

$$\vartheta(x, t) \leq M + \frac{\varepsilon}{2} \quad (t=0, x=0, x=l) \quad (17)$$

(16) formulaning birinchi qushiluvchisi M dan ikkinchisi ega $-\frac{\varepsilon}{2}$ dan ortib ketmaydi. Agar $u(x, t)$ ni chegaralangan $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ sohada uzliksiz deb olmasak u holda $u(x, t)$ hech bir nuqtada uzining maksimum nuqotiga ega bo'la olmaydi. Har qanday uzluksiz funktsiya uzining maksimal qiymatiga tuyiq sohada erishadi degan teorema kuchiga ko'ra

- 1) $u(x, t)$ o'zining maksimal qiymatiga tuo'g'riburchakning pastin yoki yon tarafida erishadi va M ga teng bo'ladi.
- 2) Agar $u(x, t)$ ning qiymati kamida bita nuqtada M dan kata bo'lsa, u holda
- 3) (x_0, t_0) nuqta bor bulib $u(x, t)$ M dan ortib ketmaydigan maksimal qiymatga ega bo'ladi

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0)$$

Bu erda $0 < x_0 < l$, $0 < t_0 \leq T$ haqiqattan xam analizdan biz bilamiz $f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada $(0, l)$ interval ichida min ga ega bo'lishi uchun

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} > 0 \quad \text{sharti urinli bo'lishi zarur.}$$

Shunday etib x_0 nuqtada $f(x)$ funktsiya max ga ega bo'lishi uchun

- 1) $f'(x_0) = 0$
- 2) $f''(x_0) \leq 0$ bulishi kerak.

Bundan $t_0 < T$ bo'lganda $\frac{\partial u}{\partial T} = 0$ agar $t_0 = T$ bo'lsa $\frac{\partial u}{\partial T} \geq 0$

$v(x, t)$ ning uzluksizligidan u qandaydir (x_1, t_1) nuqtada uzining maksimal qiymatiga erishadi. Haqiqatdan ham

$$v(x_1, t_1) - v(x_0, t_0) = M + \varepsilon,$$

Shuning uchun $t_1 > 0$ va $0 < x_1 < l$ $t = 0$ yoki $x = 0, x = l$ da (17) formula o'rinli buladi (x_1, t_1) nuqtada (14) va (15) ga o'xshash $v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0$, $v_t(x_1, t_1) \geq 0$ bo'lishi shart (16)ni hisobiga olib

$$u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0,$$

$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + k \geq k > 0$$

Bundan $u_t(x_1, t_1) - a^2 u_{xx}(x_1, t_1) \geq k > 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak $u_t = a^2 u_{xx}$ tenglama (x_1, t_1) ichki nuqtada qanoatlandirilmaydi. Shuningdek (13) tenglamaning $u(x, t)$ echimi soxa ichidagi qiymati $u(x, t)$ ning chegaradigi qiymatidan oshib ketmas ekan ($t=0, x=0, x=l$) Endi birinchi chegaraviy shart uchun birdan birlik teoremasini isbotlaymiz. Birdan birlik teoremasi

$0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ soxada aniqlangan va uzluksiz $u_1(x, t)$ va $u_2(x, t)$ ikkita funktsiya

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (0 < x < l, t > 0)$$

Harorat utkazgishlik tenglamasini qanoatlantirsa va bir hil boshlangich va chegaraviy shartlarini qanoatlandirsa

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \varphi(x)$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t) = \mu_1(t)$$

$$u_1(l, t) = u_2(l, t) = \mu_2(t)$$

U holda $u_1(x, t) = u_2(x, t)$

Bu teoremani isbotlash uchun $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$

funktsiya kiritamiz. $u_1(x, t)$ va $u_2(x, t)$ funktsiyalari $0 \leq x \leq$

l va $0 \leq t \leq T$ da uzluksiz bo'lgani uchun ushbu soxada $v(x, t)$ ham uzluksizdir.

sohada harorat utkazuvchanlik tenglamasining echimi ham bwladi. Shunday qilib maksimum qiymat printsipli ushbu funktsiyaga ham tegishli ya`ni u uzining maksimal yoki minimal qiymatiga $t = 0$ yoki $x = 0$ yoki $x = \ell$ chegarada erishadi. Lekin shart buyicha

$$\vartheta(x, 0) = 0, \quad \vartheta(0, t) = 0, \quad \vartheta(\ell, t) = 0$$

Shuning uchun

$$\vartheta(x, t) \equiv 0.$$

ya`ni $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$.

Bundan birinchi chegaraviy masalaning echimi yagona.

Xossalari.

1. Harorat utkazuvchanlikning ikkita echimi $u_1(x, t)$ va $u_2(x, t)$ lar

$$u_1(x, 0) \leq u_2(x, 0)$$

$$u_1(0, t) \leq u_2(0, t), \quad u_1(\ell, t) \leq u_2(\ell, t)$$

shartlarini qanoatlantirsa u holda barcha $0 \leq x \leq \ell$ va $0 < t < T$ lar uchun

$u_1 \leq u_2(x, t)$ bo'ladi.

Haqiqattan ham $\vartheta(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ ayirma maksimum qiymat printsipli shartlarini qanoatlantirsa va undan tashqari

$$\vartheta(x, 0) \geq 0, \quad \vartheta(0, t) \geq 0, \quad \vartheta(\ell, t) \geq 0 \quad \text{shuning uchun} \quad \vartheta(x, t) \geq 0,$$

bo'ladi $0 < x < \ell$ va $0 < t < T$. **Teskari holda $\vartheta(x, t)$ funktsiya $0 < x < \ell$ va $0 < t \leq T$ sohada manfiy minimal qiymatni qabul qilar edi.**

2. Harorat utkazuvchanlikning tenglamasining uchta echimi

$$\underline{u}(x, t), \quad u(x, t), \quad \bar{u}(x, t) \quad \text{har} \quad \underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t)$$

3. shartni $t=0$, $x=0$, va

$x=\ell$ **da qanoatlantirsa u holda bu tengsizlik barcha x , va t lar uchun $0 < x < \ell$**

va $0 \leq t \leq T$ sohada urinli bo'ladi.

Harorat utkazuvchanlikning tenglamasining $u_1(x, t)$ va $u_2(x, t)$ echimlari uchun

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon,$$

$t = 0$, $x = 0$, $x = \ell$ da tengsizligi bajarilsa u xolda $0 < x < \ell$ va $0 < t < T$ shartini

barcha x va t lar uchun $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon$

sharti bajariladi.

3.4. Haroratning chegaralanmagan tugʻri chiziq buylab tarqalish masalasi echimini Furʻe usuli bilan topish

$-\infty < x < \infty, t \geq 0$ sohada aniqlangan tenglamani va

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \quad (18)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad -\infty < x < \infty, \quad (19)$$

boshlangich shartni qanoatlantiruvchi $u(x, t)$ chegaralangan echimin topish talab qilinsin. Agar $\varphi(x)$ uzluksiz boʻlsa u holda $t=0$ da $u(x, t)$ uzluksiz

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0)$$

Kurib utkanimizdek harorat utkazuvchilik tenglamasi echimi agar u chegaralangan bulsa uzining boshlangʻich sharti bilan aniqlanadi. Quyilgan masalaning echimining formal sxemasini beramiz (18) tenglamaning chegaralangan trivial emas echimini

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (20)$$

Kurinishda izlaymiz (20)ni (18) ga quyib

$$\frac{x''}{x} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2$$

ga ega bulamiz, bu erda λ^2 - parametr. Bundan

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0 \quad (21)$$

$$x'' + \lambda^2 x = 0 \quad (22)$$

(21) va (22) ni echib (1) ning xususiy echimlarini topamiz.

$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t \pm i \lambda x} \quad (23)$$

Bu echim chegaralanganlik shartini qanoatlantiradi. Bu erda λ - haqiqiy son. $-\infty < \lambda < \infty$ shuning uchun (23) da plyus belgisini olamiz va

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t + i \lambda x} d\lambda \quad (24)$$

funktsiyani tuzamiz. Boshlangʻich sharttan

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{i \lambda x} d\lambda \quad (25)$$

Furening teskari turlandirish formulasidan foydalanib

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \quad (26)$$

(26) ni (24) ga quysak va integrallash tartibini uzgartirsak

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) \cdot e^{-i\lambda\xi} d\xi \right) e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda \right) \psi(\xi) d\xi$$

(27) dan ichki integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \quad (28)$$

(28) ni (27) ga quysak izlanayotgan echimining integral kurinishiga kelamiz

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \psi(\xi) d\xi \quad (29)$$

bu erda

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \quad (30)$$

(30) formula bilan aniqlanadigan $G(x, \xi, t)$ funktsiyasini harorat utkazgichlikning fundamental echimi deb atash ham mumkin.

3.5 MathCad tizimida harorat tarqalishi tenglamasiga qo'yilgan chegaraviy masalani echish

Mayli $x=0$ va $x=L$ uzunlikdagi sterjen` olaylik.  $x=0$  nuqtada  $u(0, t) = f_0(t)$  temperatura ,  $x=L$  nuqtada esa  $u(L, t) = f_1(t)$  temperatura saqlansin. Mayli  $t=0$  boshlang`ich vaqt momentida sterjen` buylab temperatura tarqalishi  $u(x, 0) = g(x)$  bo`lsin. U holda butun vaqt davomida sterjn buo`lab temperatura tarqalishi $u(x, t)$ quydagi tenglama bilan beriladi.

$$u_{xx} = au_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

Bu erda $a = \frac{c\rho}{k}$, s -sterjen materialining issiqlik sig'imi, ρ -material zichligi, k - uning issiqliq o'tkazuvchanligi. Vaqtga $a=1$ buladigan qilib o'zgaruvchi kiritamiz. U holda harorat o'tkazuvchanlik tenglamasi boshlang'ich va chegaraviy shartlarda quydagicha bo'ladi.

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t \\ u(x, 0) &= g(x), \quad u(0, t) = f_1(t), \quad u(L, t) = f_2(t). \\ 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (31)$$

Bu diffuziya tenglamasi yoki harorat o'tkazuvchanlik tenglamasi dep ataladi. Turga quydagi chegirmali sxemani beramiz.

$$u_x = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}, \quad u_{xx} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}, \quad u_t = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}. \quad (32)$$

U holda quydagi chegirmali tenglamaga ega bo'lamiz.

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}.$$

Bundan chegaraviy shartlarda

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \lambda u_{i+1,j} + \lambda u_{i-1,j} + (1-2\lambda)u_{i,j}, \\ u_{i,0} &= g(ih), \quad u_{0,j} = f_1(jk), \quad u_{n,j} = f_2(jk), \\ \lambda &= \frac{k}{h^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Aniq sxemalar uchun turg'unlik sharti $\lambda = \frac{k}{h^2} < 0,5$ bo'ladi.

Misol. №1

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t \\ u(x, 0) &= g(x), \quad u(0, t) = g(x_0), \quad u(L, t) = g(x_n). \\ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,25. \end{aligned}$$

Bu erda dastlabki temperatura $g(x) = 1 + \sin(5x^2)$ bulsa sterjen` buylab harorat tarqalishini aniqlang.

(33) formula buyicha chegirmali tenglama kurinishda bo`ladi.

$$u_{i,j} = \lambda u_{i+1,j} + \lambda u_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j},$$

$$u_{i,0} = g(x_0 + ih), \quad u_{0,j} = g(x_0), \quad u_{n,j} = g(x_n),$$

$$\lambda = \frac{k}{h^2} = 0,41.$$

Ushbu misolning MathCad tizimidagi dasturi quydagicha bo`ladi.

Quydagi chizilmadan kurinib turganidek $T_{i,0}$ - boshlangich baqt momentindagi

harorat tarqalishi, $T_{i,\frac{m}{2}}$ -o`rtada, $T_{i,m}$ -jaraen oxiridagi harorat tarqalishi.

$$xk := 1 \quad x0 := 0$$

$$g(x) := 1 + \sin(5 \cdot x^2)$$

$$tk := 0.25 \quad n := 10 \quad m := 60$$

$$h := \frac{xk - x0}{n} \quad p := \frac{tk}{m} \quad \lambda := \frac{p}{h^2} \quad \lambda = 0.417$$

$$j := 0..m + 1 \quad T_{0,j} := g(x0) \quad T_{n,j} := g(xk)$$

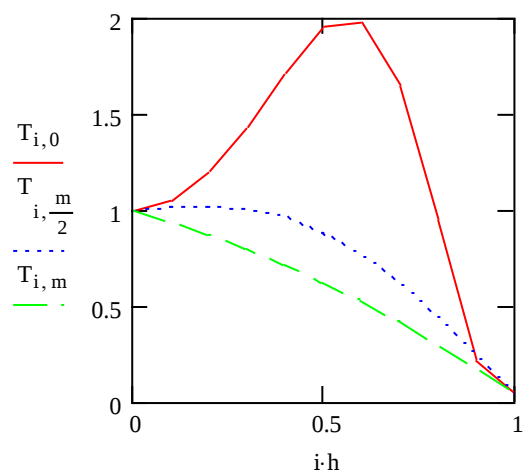
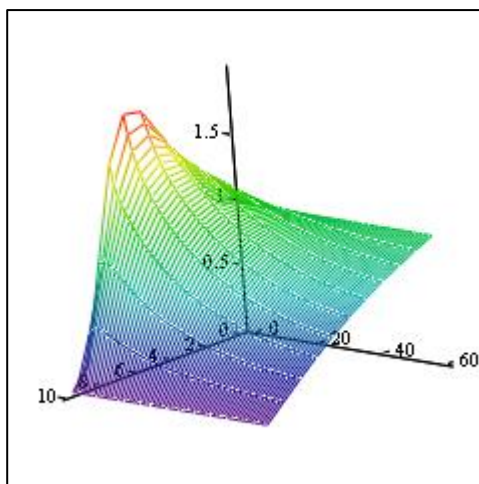
$$i := 0..n \quad T_{i,0} := g(x0 + i \cdot h) \quad T_{n,0} := g(xk)$$

$$u(T) := \begin{cases} \text{for } j \in 0..m \\ \text{for } i \in 1..n - 1 \\ T_{i,j+1} \leftarrow \lambda \cdot T_{i+1,j} + (1 - 2 \cdot \lambda) \cdot T_{i,j} + \lambda \cdot T_{i-1,j} \end{cases}$$

$$T := u(T)$$

T =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1.05	1.091	1.113	1.13	1.14	1.146	1.149	1.148	1.145	1.141
2	1.199	1.235	1.266	1.285	1.295	1.298	1.296	1.29	1.281	1.27
3	1.435	1.454	1.464	1.465	1.458	1.445	1.428	1.41	1.39	1.369
4	1.717	1.696	1.665	1.628	1.589	1.551	1.516	1.481	1.449	1.417
5	1.949	1.863	1.777	1.698	1.63	1.573	1.521	1.475	1.432	1.393
6	1.974	1.823	1.7	1.605	1.534	1.47	1.416	1.366	1.321	1.279
7	1.638	1.488	1.394	1.341	1.284	1.237	1.191	1.149	1.109	1.072
8	0.942	0.927	0.96	0.94	0.922	0.893	0.866	0.836	0.808	0.781
9	0.211	0.445	0.478	0.497	0.492	0.483	0.47	0.456	0.442	0.427
10	0.041	0.041	0.041	0.041	0.041	0.041	0.041	0.041	0.041	0.041



T

Misol. №2

$$u_{xx} = u_t$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad u(0, t) = g(x_0), \quad u(L, t) = g(x_n).$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0,5.$$

Bu erda dastlabki temperatura $g(x) = e^x - 1$ bulsa sterjen` buylab harorat tarqalishini aniqlang.

Chegirmali tenglama

$$u_{i,j} = \lambda u_{i+1,j} + \lambda u_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j},$$

$$u_{i,0} = g(x_0 + ih), \quad u_{0,j} = g(x_0), \quad u_{n,j} = g(x_n),$$

$$\lambda = \frac{k}{h^2} = 0,4.$$

Quyidagi chizilmadan kurinib turganidek $T_{i,0}$ - boshlangich baqt momentindagi

harorat tarqalishi, $T_{i,\frac{m}{2}}$ -o`rtada, $T_{i,m}$ -jaraen oxiridagi harorat tarqalishi.

```

xk:=1    x0:=0
g(x):= (1/e^x) + x^3
tk:=0.2    n:=10    m:=50

h:=(xk-x0)/n    p:=tk/m    λ:=(p/h)^2    λ=0.4

j:=0..m+1    T0,j:=g(x0)    Tn,j:=g(xk)

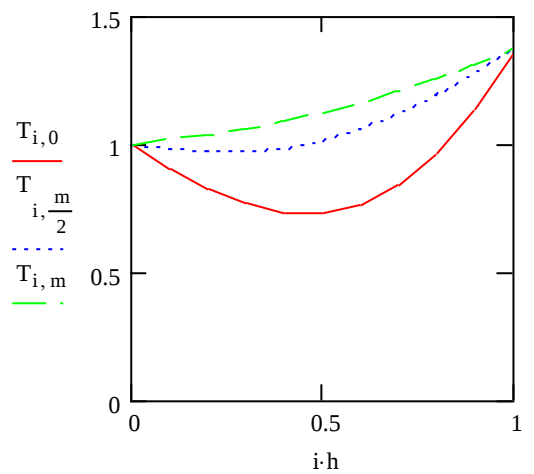
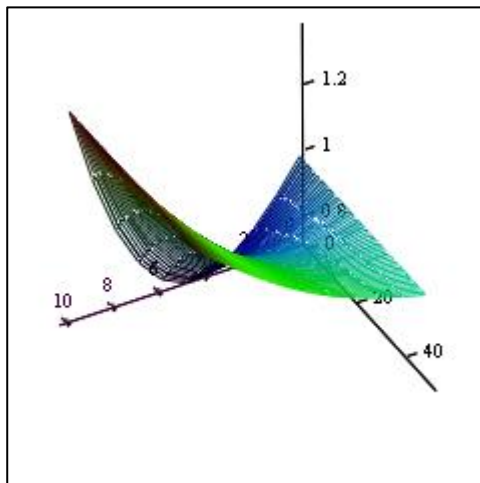
i:=0..n    Ti,0:=g(x0+i·h)    Tn,0:=g(xk)

u(T):=
| for j ∈ 0..m
|   for i ∈ 1..n-1
|     Ti,j+1 ← λ·Ti+1,j + (1-2·λ)·Ti,j + λ·Ti-1,j
|   T
T:=u(T)

```

T =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.906	0.912	0.916	0.92	0.924	0.928	0.931	0.935	0.938	0.941
2	0.827	0.835	0.843	0.85	0.858	0.865	0.871	0.878	0.884	0.891
3	0.768	0.778	0.788	0.798	0.808	0.818	0.828	0.837	0.847	0.856
4	0.734	0.747	0.759	0.771	0.784	0.796	0.808	0.82	0.832	0.843
5	0.732	0.746	0.76	0.775	0.789	0.804	0.818	0.832	0.845	0.858
6	0.765	0.781	0.798	0.815	0.831	0.847	0.863	0.877	0.892	0.905
7	0.84	0.858	0.877	0.896	0.913	0.929	0.944	0.959	0.972	0.984
8	0.961	0.982	1.003	1.02	1.036	1.049	1.061	1.073	1.083	1.093
9	1.136	1.159	1.172	1.183	1.192	1.2	1.207	1.213	1.219	1.224
10	1.368	1.368	1.368	1.368	1.368	1.368	1.368	1.368	1.368	1.368



T

Xulosa

Yuqoridagi misollarda baʼzi bir masalalar fazoviy qarashni talab etsa, baʼzilarida esa tekislik bilan kifoyalanish etarli. Mos modelni tanlash uchun hal qiluvchi savollardan biri, bu mos modelni tanlash. Keyingi savol, amaliyot uchun modelning aniqlik darajasi qanday boʻlishi, ayniqsa model tenglamasini sonli hisoblash uchun kutilayotgan ish xajmi qanday. Shunday qilib, modelga fazoviy oʻzgaruvchilarni kiritish kerakmi degan savolga javob hamma vaqt ham ijobiy emas. Baʼzan masalaning fazoviy darajasini kamaytirish imkoniyatiga egamiz (3 oʻlchovli model oʻrniga 2 oʻlchovli modeldan foydalanamiz). Kichik oʻlchovli model (masalan, fazoviy oʻzgaruvchilar va vaqt), fazoviy oʻzgaruvchisiz arzonroq model (va noaniq) bilan koʻp oʻzgaruvchili (3 fazoviy oʻzgaruvchili va vaqt, aniqroq) modellar orasidagi kompromis deb qarash boʻladi.

Masalaning formal yozuvi uni sistematik usulda qayta ishlash imkoniyatini beradi. U shu usul bilan hisoblanadigan boʻladi. Turli fan sohalari masalani formal yozish uchun *matematik formallashtirish usulini qoʻllashadi*. Baʼzi hollarda masalaning matematik yozilishi oddiy boʻlib u anchadan beri maʼlum, misol uchun, tabiiy fanlarda (hususdan fizikada) va amaliyotning koʻpgina masalalarida. Kvant mexanikasining asosiy tenglamasi, masalan oʻzining tabiatiga muvofiq matematik tip boʻlib, hozirgi kunda amaliy sohalarda umumiyat sifatida qabul qilingan. Ammo boshqa soha masalalarida matematik model aniq emas. Tipik misol sifatida iqtisodiyot, oʻyinlar nazariyasi va ob-havoni modellashtirishni keltirish mumkin. Bu erda modellashtirish farazlarini qoʻllash mumkinligi va asosiy faktlar formalizatsiyasining oʻzi koʻp hollarda bahslidir. Misol uchun, fon Neymanning oʻyinlar nazariyasidagi minimaks printsipi (strategiyani shunday tanlashadiki, yomon natija siz kutgandan koʻra yaxshiroq boʻlib chiqadi) haqiqiy oʻyinchini oʻzini tutishini ifoda etmaydi. Djona Meynarda Keinesning iqtisodiy nazariyasi tarafdorlari va qarshilari orasidagi doimiy bahs (xarajat tanqisligi va h.k.) toʻgʻri strategiya toʻgʻrisidagi kelishuv haligacha qabul qilmaganligini keyingi misol sifatida keltirish mumkin.

Shu asnoda biz ushbu bitiruv malakaviy ishda harorat tarqalishining matematik modelini urgandik. Bitiruv malakaviy ish uch paragraftan iborat bulib birinchi va ikkinchi paragraflar referativ xarakterga ega.

Uchinchi paragrafta esa real jarayonlardan biri harorat tarqalishining matematik modeli berilgan. Ya`ni soha chegaralangan va chegaralanmagan hollar uchun harorat tarqalish protsesi parabolik tipdagi tenglamalar yordamida urganiladi. Umumlashtirib aytganda bitiruv malakaviy ish akademik litsey va kasb hunar kollejlari uquvchilari uchun uquv qullanma bulib xizmat qilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Karimov I.A. Yuksak ma`naviyat engilmas kuch.-T.:Ma`naviyat,2008.-174 b.
2. Samarskiy A.A.,Mixaylov A.P. Matematicheskoe modelirovanie.–M.: Nauka, 1997.-316 s.
3. Samarskiy A.A.,Nikolaev E.S. Metodi resheniy setochnix uravneniy. M.: Nauka,1978.-590 s.
4. Tixonov A.I.,Samarskiy A.A. Uravnenie matematicheskoy fiziki. - M.: Nauka,1977.-735 c.
5. Marchuk G.I. Matematicheskoe modelirovanie v probleme okrujayushey sredi. M.: Nauka, 1982.-319 s.
6. Matematicheskoe modelirovanie. Pod red.Dj.Endryusa.,R.Mak-Louna.M.: Mir, 1979.-278 s.
7. Maslov V.P.,Danilov V.G.,Volosov K.A. Matematicheskoe modelirovanie protsessov teplo-massoperenosa. M.:Nauka. 1987.-352s.
8. Muzafarov X.A.,Baklushin M.B.,Abduraimov M.G. Matematicheskoe modelirovanie. – Tashkent, Universitet, 2002.-225 s.
9. Samarskiy.A.A. Gulin.A.V. Chislennie metodi. M. Nauka, 1989 g.
10. Kalitkin.N.N. Chislennie metodi. M. Nauka,1978 g.
11. Isroilov.M.M. Hisoblash usullari. I-qism.Toshkent «O`qituvchi» 1988y.
12. Abduxamidov A.U., Xudoynazarov S. Hisoblash usullaridan amaliyot va laboratoriya mashg`ulotlari. – Toshkent: Wqituvchi, 1995.
13. Alekseev E.R., Chesnokova O.V. Reshenie zadach vichislitel`noy matematiki v paketax Mathcad, Matlab, Maple (Samouchitel`). – M.: NT Press, 2006. – 496 s.
14. Vorob`eva G.K., Danilova A.N. Praktikum po vichislitel`noy matematike. – M: Visschaya shkola, 1990.
15. Demidovich B.P., Maron I.A. Osnovi vichislitel`noy matematiki. M.: Nauka, 1966.
16. Kopchenova N.V., Maron I. A. Vichislitelnaya matematika v primerax i zadachax. – M.: Nauka, 2008. – 368 s.
17. <http://modeling.narod.ru/>
Matematicheskoe modelirovanie
Kompleks matematicheskix metodov, metodik i algoritmov, napravleniyy na povishenie tochnosti, stabil`nosti i odnorodnosti gruppovix texnologicheskix protsessov, otiskanie ix matematicheskix modeley.
18. <http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/>
Matematicheskie modeli estestvennix nauk. Aspekti matematicheskogo modelirovaniya- ot teorii do matematicheskogo obespecheniya.

Texnika xavfsizligi qoidalari

1. Informatika xonasini beton polli xonalarga yoki binoning erto'lalariga joylashtirish qat'iyon ta'qiqlanadi va sinf xonasining poli elektr tokini o'tkazmaydigan qilib (masalan taxtadan) yasalishi va barcha kompyuterlarning korpuslari yerga ulanishi (yoki elektr ta'minotining yevroandozalarga moslab ulanishi) talab qilinadi.
2. Yuqori kuchlanish (220 Volt) yuradigan simlarning barchasi, shu jumladan uzaytirgichlarning, kompyuter va boshqa elektr qurilmalarining elektr ta'minotiga ulanish simlarining ikki marta izolyasiya qilinganligi talab qilinadi.
3. Xonadagi kompyuterlarni devor bo'ylab yoki xonaning o'rtasiga ikki qator qilib joylashtirilishi kerak
4. Xonadagi barcha kompyuterlarni elektr tarmog'idan uzuvchi yagona uzgich ham bo'lishi kerak.
5. Kompyuter monitori o'tirgan o'quvchilarning ko'zlari darajasida bo'lib, o'quvchilar undan 40 sm dan 80 sm gacha bo'lgan masofada o'tirishlari imkoniyatiga ega bo'lishlari kerak.
6. Kompyuterning klaviaturasi o'tirgan o'quvchilarning bukilgan tirsaklari darajasida bo'lishi kerak. Sichqon uchun klaviaturaning ikkala tomonidan yetarlicha joy qoldirilishi va ular bir xil balandlikda bo'lishlari kerak.
7. Kompyuterda muttasil ishlash vaqti o'quvchilar uchun 60 minutdan ortmasligi kerak.
8. Kompyuter xonasining kvadrat metrlardagi sathi unga joylangan kompyuterlar sonidan kamida 6 marta ko'p bo'lishi kerak.
9. Kompyuter xonalari yetarli quvvatga ega ventilyasiya tizimiga ega bo'lishi kerak.
10. Klaviaturaning kompyuter ishlamayotgan paytda uzoq muddatga ochiq holda qolishi va unda chang yig'ilib qolishining oldini olish lozim