

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИ-  
КИ УЗБЕКИСТАН**

**ФЕРГАНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИ-  
ТУТ**

**ФАКУЛЬТЕТ «МЕХАНИКА»**

**КАФЕДРА «Технология машиностроения и автома-  
тизация»**

# РЕФЕРАТ

**ПО ПРЕДМЕТУ: «УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИМИ  
СИСТЕМАМИ»**

**НА ТЕМУ: ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗВЕНЯ**

**Выполнил:** *студент группы 17-08 ТМС*  
*Якунов Артур*

**Принял:** *Ст.преп. Шокиров А.Х.*

**ФЕРГАНА – 2012**

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Понятие звена. . . . .                                         | 3  |
| 2. Усилительное звено. . . . .                                    | 3  |
| 3. Интегрирующее звено. . . . .                                   | 4  |
| 4. Аperiodическое звено. . . . .                                  | 8  |
| 5. Колебательное звено. . . . .                                   | 12 |
| 6. Дифференцирующее звено. . . . .                                | 20 |
| 7. Запаздывающее звено. . . . .                                   | 20 |
| 8. Частотные характеристики типовых звеньев. . . . .              | 22 |
| 8.1. Частотные характеристики усилительного звена. . . . .        | 22 |
| 8.2. Частотные характеристики интегрирующего звена. . . . .       | 23 |
| 8.3. Частотные характеристики аperiodического звена. . . . .      | 24 |
| 8.4. Частотные характеристики колебательного звена. . . . .       | 27 |
| 8.5. Частотные характеристики дифференцирующего звена. . . . .    | 34 |
| 8.6. Частотные характеристики запаздывающего звена. . . . .       | 35 |
| 9. Характеристики элементарных звеньев в табличной форме. . . . . | 37 |
| 10. Использованная литература. . . . .                            | 39 |

## 1. Понятие звена

*Звеном системы называется ее элемент (часть), обладающий определенными свойствами в динамическом отношении.* Звенья систем регулирования могут иметь самую разнообразную физическую основу (электрические, гидравлические, механические и т. п.) и конструктивное выполнение, но при этом относиться к одной функциональной группе. Соотношение входного и выходного сигналов в звеньях одной и той же группы описывается одинаковыми дифференциальными уравнениями. Это свидетельствует о том, что такие звенья имеют одинаковые динамические свойства.

Так как процесс автоматического регулирования определяется только динамическими свойствами системы (а следовательно, и ее звеньев), то в основу классификации звеньев положены их динамические свойства. Такая классификация звеньев по виду описывающих эти звенья дифференциальных уравнений дает возможность разработать стройную теорию АСР и единые методы их исследования и расчета, не зависящие от различий в физических процессах и конструктивных решениях, принятых в основу при проектировании АСР и ее элементов.

Простейшими типовыми звеньями АСР являются: усилительное, интегрирующее, апериодическое, колебательное, дифференцирующее и запаздывающее звенья.

## 2. Усилительное звено

В усилительном звене выходная величина в каждый момент времени пропорциональна входной величине, т. е.

$$x_{вых} = kx_{вх}. \quad (1)$$

[Здесь и в дальнейшем для сокращения записи выражения  $x_{вых}(t)$  и  $x_{вх}(t)$  записываются как  $x_{вых}$  и  $x_{вх}$ . Переходные процессы рассматриваются при нулевых начальных условиях.]

Коэффициент пропорциональности  $k$  называется коэффициентом усиления или коэффициентом передачи звена.

Уравнение усилительного звена (1) алгебраическое. Это свидетельствует о

том, что усилительное звено передает сигнал мгновенно, без динамических переходных процессов и искажений.

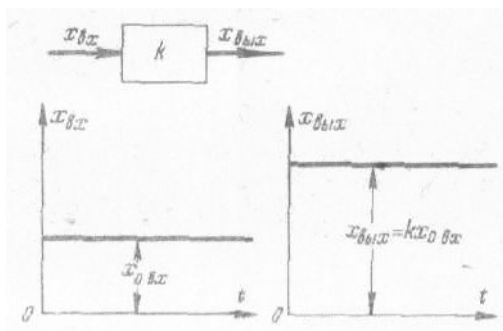


Рис. 1. Передаточная функция и переходный процесс усилительного звена.

На рис. 1 представлен характер изменения по времени выходной величины усилительного звена при подаче на его вход постоянной входной величины  $x_{0вх}$ .

Передаточная функция звена имеет вид:

$$W(p) = k. \quad (2)$$

Примерами усилительных звеньев могут служить механические передачи, потенциометрические датчики, безинерционные усилители (например, электронные) и т. п.

### 3. Интегрирующее звено

Выходная величина интегрирующего звена пропорциональна интегралу входной величины, т. е.

$$x_{вых} = k \int_0^t x_{вх} dt.$$

Дифференциальное уравнение интегрирующего звена имеет вид:

$$\frac{dx_{вых}}{dt} = kx_{вх}. \quad (3)$$

Коэффициент  $k$  называется коэффициентом усиления или передачи звена по скорости. Он численно равен скорости изменения выходной величины при единичном значении входной величины.

Преобразовав дифференциальное уравнение звена (3) по Лапласу, получим:

$$pX_{\text{вых}}(p) = kX_{\text{вх}}(p),$$

откуда находим передаточную функцию звена:

$$W(p) = k/p. \quad (4)$$

Если входная и выходная величины имеют одинаковую размерность, то из выражения (3) следует, что коэффициент  $k$  имеет размерность  $\text{сек}^{-1}$ . В этом случае дифференциальное уравнение (3) удобнее записывать в виде

$$\frac{dx_{\text{вых}}}{dt} = \frac{1}{T} x_{\text{вх}},$$

где  $T = 1/k$ .

При этом передаточная функция звена примет вид:

$$W(p) = \frac{1}{Tp}. \quad (5)$$

Величина  $T$  называется постоянной времени интегрирующего звена.

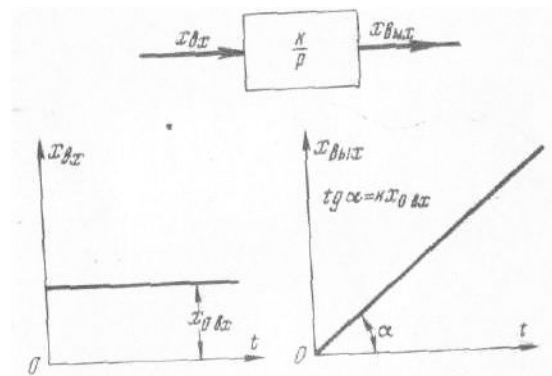


Рис. 2. Передаточная функция и переходный процесс интегрирующего звена.

На рис. 2 представлен характер изменения выходной величины интегрирующего звена при подаче на его вход постоянной входной величины  $x_{0\text{вх}}$ . Тогда из уравнения (4) получим:

$$X_{\text{вых}} = \zeta^{-1}[X_{\text{вых}}(p)] = \zeta^{-1}[kx_{0\text{ex}} \frac{1}{p^2}]$$

$$= kx_{0\text{ex}} t.$$

Примером интегрирующего звена может служить гидравлический исполнительный механизм (рис. 3,а), который находит широкое применение в современных системах регулирования. Входной величиной для него является перепад давлений  $\Delta P_{\text{ex}} = P_1 - P_2$ , а выходной - перемещение  $\Delta S_{\text{вых}}$  поршня.

Сила давления на поршень равна  $f_n = (P_{01} - P_{02})F$ , где  $F$  - эффективная площадь поршня.

Если пренебречь трением и инерцией поршня и связанных с ним масс, то можно считать, что это усиление целиком расходуется на преодоление внешней нагрузки, приложенной к поршню (сопротивление перемещению регулирующего органа, заслонки, шибера и т. п.):

$$f_{\text{в.н}} = (P_{01} - P_{02})F. \quad (6)$$

При небольших отклонениях от состояния равновесия расходы жидкости через вентили  $B_1$  и  $B_2$  пропорциональны перепадам давлений на вентилях

$$Q_1 = K_1(P_1 - P_{01}); \quad Q_2 = K_2(P_{02} - P_2). \quad (7)$$

Так как  $Q_1 = Q_2$ , то решив уравнения (6) и (7), получим:

$$P_{01} = \frac{F(K_1 P_1 + K_2 P_2) + K_2 f_{\text{в.н}}}{F(K_1 + K_2)}. \quad (8)$$

Поступление жидкости за бесконечно малый отрезок времени в левую полость исполнительного механизма при расходе  $Q_1$  составляет  $Q_1 dt$ . За счет этого поршень переместится на величину  $d\Delta S_{\text{вых}}$ .

Так как объем поступившей жидкости равен приращению объема левой полости исполнительного механизма, то можно записать:

$$Q_1 dt = F d\Delta S_{\text{вых}}.$$

или

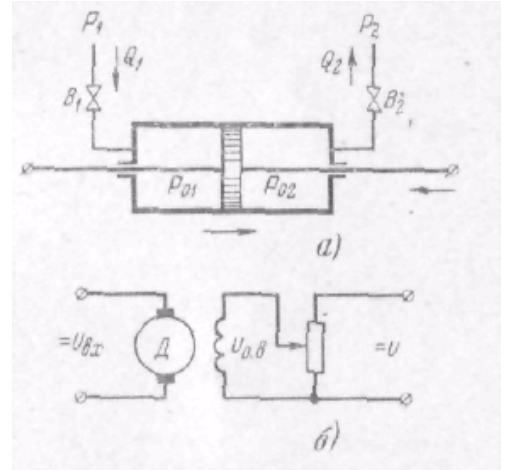


Рис. 3. Примеры интегрирующих звеньев.

$$\frac{d\Delta S_{\text{блх}}}{dt} = \frac{Q_1}{F}.$$

Подставив из (7) значение  $Q_1$ , а из (8) значение  $P_{01}$ , получим:

$$\frac{d\Delta S_{\text{блх}}}{dt} = \frac{K_1 K_2 F (P_1 - P_2) - K_1 K_2 f_{\text{в.н}}}{F^2 (K_1 + K_2)}.$$

В случае, если можно пренебречь величиной внешней нагрузки  $f_{\text{в.н}}$ , уравнение примет вид:

$$\frac{d\Delta S_{\text{блх}}}{dt} = k \Delta P_{\text{вх}},$$

где

$$k = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{1}{F}$$

- коэффициент передачи интегрирующего звена, величину которого можно изменять в широких пределах с помощью вентилях  $B_1$  и  $B_2$ .

Таким образом, дифференциальное уравнение гидравлического исполнительного механизма имеет вид (3) и, следовательно, в динамическом отношении он является интегрирующим звеном.

Другим примером интегрирующего звена может служить электродвигатель постоянного тока  $D$  (рис. 3,б) с независимым возбуждением и малой электро-механической инерцией, если входной величиной является напряжение  $U_{\text{вх}}$ , а выходной - угол поворота якоря  $\beta_{\text{блх}}$ . В этом случае при изменении напряжения якоря на величину  $\Delta U_{\text{вх}}$  изменение числа оборотов двигателя  $\Delta n$  в единицу времени будет пропорционально  $\Delta U_{\text{вх}}$ :

$$\Delta n = K_1 \Delta U_{\text{вх}}.$$

Увеличение угла поворота двигателя  $d\Delta\beta_{\text{блх}}$  за бесконечно малый отрезок времени  $dt$  пропорционально изменению числа оборотов за этот отрезок времени:  $d\Delta\beta_{\text{блх}} = K_2 \Delta n dt$ , или  $d(\Delta\beta_{\text{блх}})/dt = K_2 \Delta n$ .

Подставив значение  $\Delta n$ , получим дифференциальное уравнение интегрирующего звена:

$$\frac{d\Delta\beta_{\text{блх}}}{dt} = K_1 K_2 \Delta U_{\text{вх}}.$$

Коэффициент передачи рассмотренного интегрирующего звена  $k = K_1 K_2$

может изменяться путем изменения величины напряжения  $U_{0.6}$ , подаваемого на обмотку возбуждения двигателя.

#### 4. Аперидическое звено

Аперидическому звену соответствует дифференциальное уравнение

$$T \frac{dx_{6bx}}{dt} + x_{6bx} = kx_{6x}. \quad (9)$$

Перейдя к изображениям, получим:

$$TpX_{6bx}(p) + X_{6bx}(p) = kX_{6x}(p).$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (10)$$

Определим характер изменения выходной величины при подаче на вход в виде скачка входной величины  $x_{06x}$ .

Дифференциальное уравнение (9) достаточно просто решается обычным методом. Однако в качестве примера найдем его решение через передаточную функцию звена.

По таблицам преобразования Лапласа находим изображение входной величины:

$$X_{6x}(p) = \zeta[x_{06x}] = x_{06x}/p.$$

Изображение выходной величины

$$X_{6bx}(p) = W(p)X_{6x}(p) \quad (11)$$

или

$$X_{6bx}(p) = \frac{kx_{06x}}{p(Tp + 1)}.$$

Выразим оригинал функции  $x_{6bx}$  через ее изображение, вынеся постоянную величину за знак преобразования Лапласа:

$$x_{6bx} = \zeta^{-1}[X_{6bx}(p)] = \frac{kx_{06x}}{T} \zeta^{-1} \left[ \frac{1}{p \left( p + \frac{1}{T} \right)} \right].$$

Полагая  $1/T = \alpha$ , по таблицам преобразований Лапласа находим:

$$x_{вых} = kx_{0вх}(1 - e^{-\frac{t}{T}}). \quad (12)$$

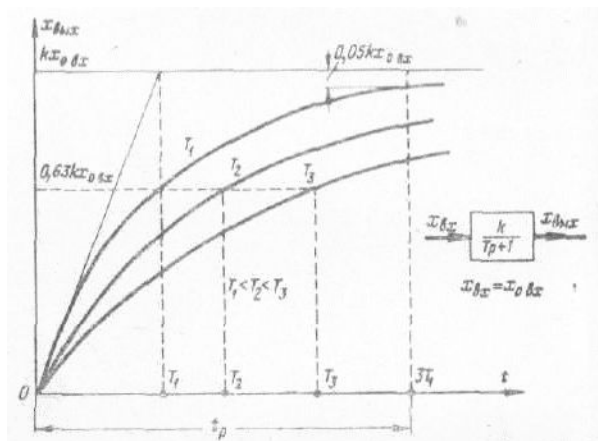


Рис. 4. Передаточная функция и переходные процессы аperiodического звена при различных значениях постоянной времени.

Переходный процесс аperiodического звена представлен на рис. 4. Кривые переходных процессов имеют вид экспонент, т. е. время, необходимое для того, чтобы выходная величина  $x_{вых}$  достигла установившегося значения  $kx_{0вх}$ , теоретически бесконечно велико.

В связи с этим аperiodическое звено часто называют инерционным звеном первого порядка.

Величина  $T$  имеет размерность времени и называется постоянной времени. На рис. 4 представлены переходные процессы аperiodического звена при различных значениях постоянной времени.

Из кривых переходного процесса ясен физический смысл постоянной времени звена. Она может быть определена как время, в течение которого выходная величина достигла бы своего нового установившегося значения, если бы она изменялась с постоянной скоростью, равной скорости изменения ее в начальный момент времени.

Постоянная времени определяет динамические свойства звена. Чем она больше, тем медленнее протекает переходный процесс в звене, и наоборот. В частности, при  $T = 0$  процесс протекает в звене мгновенно и инерционное звено превращается в безинерционное усилительное.

Следует отметить также, что при  $t = T$  значение выходной величины со-

ставляет 63% нового установившегося значения.

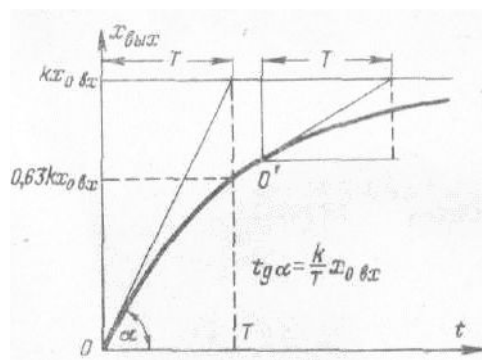


Рис. 5. Графическое определение постоянной времени апериодического звена.

Постоянная времени звена геометрически (рис. 5) определяется как проекция на ось времени отрезка касательной к экспоненте, заключенного между точкой касания и точкой пересечения касательной с линией установившегося значения выходной величины. Длина этой проекции одинакова для касательных, проведенных в любой точке экспоненты (точки  $O$  и  $O'$ ).

На рис. 6 приведены примеры апериодических звеньев. Входной величиной этих звеньев является напряжение  $u_{вх}$ , а выходной - напряжение  $u_{вых}$ , снимаемое с конденсатора  $C$ .

Согласно второму закону Кирхгофа для электрической цепи по рис. 6,а можно записать:

$$u_{вх} = iR_1 + u_{вых}; \quad u_{вых} = \frac{1}{C} \int i_C dt;$$

откуда

$$i_C = C \frac{du_{вых}}{dt}; \quad i_{R_2} = \frac{u_{вых}}{R_2}.$$

По первому закону Кирхгофа

$$i = i_C + i_{R_2} = C \frac{du_{вых}}{dt} + \frac{u_{вых}}{R_2}.$$

Подставив значение  $i$  в выражение для  $u_{вх}$ , получим:

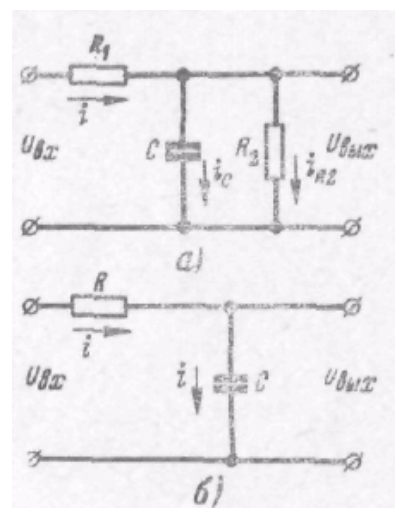


Рис 6. Примеры апериодических звеньев.

$$u_{\text{ex}} = R_1 C \frac{du_{\text{вх}}}{dt} + \left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) u_{\text{вх}}.$$

Преобразовав дифференциальное уравнение по Лапласу, получим:

$$U_{\text{ex}}(p) = \left( \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} p + 1 \right) \left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) U_{\text{вх}}(p),$$

откуда находим передаточную функцию звена:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1},$$

где

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad T = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} = k R_1 C.$$

Таким образом, электрическая цепь, изображенная на рис. 6,а, является апериодическим звеном.

Коэффициент передачи звена регулируется величинами сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ . При этом пропорционально коэффициенту передачи изменяется и постоянная времени.

При  $R_2 = \infty$  получаем электрическую цепь по рис. 6,б. Коэффициент передачи, постоянная времени и передаточная функция в этом случае будут равны:

$$k = 1; \quad T = RC; \quad W(p) = \frac{1}{Tp + 1}.$$

Постоянная времени изменяется путем изменения величины сопротивления  $R$ .

Электрическая цепь, представленная на рис. 6,б, является апериодическим звеном с коэффициентом передачи, равным единице.

## 5. Колебательное звено

Колебательное звено имеет дифференциальное уравнение

$$T_2^2 \frac{d^2 x_{\text{вх}}}{dt^2} + T_1 \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + x_{\text{вх}} = k x_{\text{ex}}. \quad (13)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}. \quad (14)$$

Характер переходного процесса звена или соединения, определяемого дифференциальным уравнением (13), зависит от расположения корней его характеристического уравнения

$$T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0 \quad (15)$$

на комплексной плоскости.

Корни характеристического уравнения (15)

$$p_{1,2} = -\frac{T_1}{2T_2^2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^4} - \frac{1}{T_2^2}} \quad (16)$$

С учетом (14), (11) и таблицы преобразований Лапласа, находим изображение выходной величины:

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{kx_{0\text{ex}}}{p(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)}. \quad (17)$$

В зависимости от знака подкоренного выражения (16) при нахождении оригинала по его изображению (17) могут возникнуть три случая:

1. При  $T_1/T_2 > 2$  оба корня характеристического уравнения вещественные отрицательные:  $p_1 = -\alpha_1$ ,  $p_2 = -\alpha_2$ . С учетом этого запишем выражение (17) в виде

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{kx_{0\text{ex}}}{T_2^2 p(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)}.$$

По этому изображению согласно таблицы преобразований Лапласа находим оригинал:

$$x_{\text{вых}} = kx_{0\text{ex}} \left( 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{-\alpha_1 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{-\alpha_2 t} \right). \quad (18)$$

Таким образом, при  $T_1/T_2 > 2$  переходный процесс определяется двумя экспонентами и в этом случае дифференциальное уравнение (13) характеризует переходные процессы соединения, состоящего из двух соединенных последовательно апериодических звеньев. Это видно также непосредственно из передаточной функции соединения, если ее записать в виде

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 (p + \alpha_1)(p + \alpha_2)}$$

или

$$W(p) = \frac{k}{T_3 p + 1} \frac{1}{T_4 p + 1},$$

где  $T_3 = 1/\alpha_1$  и  $T_4 = 1/\alpha_2$ .

Следовательно, при  $T_1/T_2 > 2$  нет необходимости вводить понятия нового типового звена, хотя на практике часто такое соединение называют инерционным звеном второго порядка.

2. При  $T_1/T_2 = 2$  характеристическое уравнение имеет два одинаковых вещественных отрицательных корня

$$p_1 = p_2 = -\alpha = -1/T_2.$$

С учетом этого запишем выражение (17) в виде

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{kx_{0\text{ex}}}{T_2^2 p(p + \alpha)^2}.$$

По таблице преобразования Лапласа находим:

$$x_{\text{вых}} = kx_{0\text{ex}} \left[ 1 - (1 + t/T_2)e^{-t/T_2} \right]. \quad (19)$$

Переходный процесс периодический. Так как при этом передаточная функция (14) может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1} \frac{1}{Tp + 1},$$

где  $T = 1/\alpha$ , то при  $T_1/T_2 = 2$ , так же как и при  $T_1/T_2 > 2$ , нет необходимости вводить понятия нового типового звена.

3. При  $T_1/T_2 < 2$  характеристическое уравнение имеет два сопряженных комплексных корня

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega,$$

где

$$\alpha = \frac{T_1}{2T_2^2}; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{T_2^2} - \frac{T_1^2}{4T_2^4}}. \quad (20)$$

С учетом этого запишем выражение (17) в виде

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{kx_{0\text{ex}}}{T_2^2 p [(p + \alpha)^2 + \omega^2]}. \quad (21)$$

Обозначив в (21)

$$\frac{kx_{0\text{ex}}}{T_2^2 p} = X_1(p) \quad \text{и} \quad \frac{1}{(p + \alpha)^2 + \omega^2} = X_2(p),$$

найдем оригиналы:

$$x_1 = L^{-1}[X_1(p)] = \frac{kx_{0\text{ex}}}{T_2^2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

Находим характер изменения выходной величины звена:

$$\begin{aligned} x_{\text{вых}} &= - \int_0^t \frac{kx_{0\text{ex}}}{T_2^2} \frac{1}{\omega} e^{-\alpha \tau} \sin \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{kx_{0\text{ex}}}{\omega T_2^2} \left| \frac{e^{-\alpha \tau}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \sin \omega \tau + \omega \cos \omega \tau) \right|_0^t = \\ &= kx_{0\text{ex}} \left[ 1 - e^{-\alpha t} \left( \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right) \right], \end{aligned}$$

$$\text{или} \quad x_{\text{вых}} = kx_{0\text{ex}} \left[ 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\omega T_2} \sin \left( \omega t + \arctg \frac{\omega}{\alpha} \right) \right]. \quad (22)$$

Таким образом, переходный процесс звена при  $T_1/T_2 < 2$ , характеризуемый уравнением (22), периодичен и представляет собой затухающую синусоиду, амплитуда которой убывает от полупериода к полупериоду по экспоненциальному закону  $e^{-\alpha t}$ . В этом случае звено нельзя представить в виде соединения из других звеньев. В связи с этим элементарное звено, динамические качества которого определяются дифференциальным уравнением (13), при  $T_1/T_2 < 2$  относится к типовым звеньям и называется колебательным звеном.

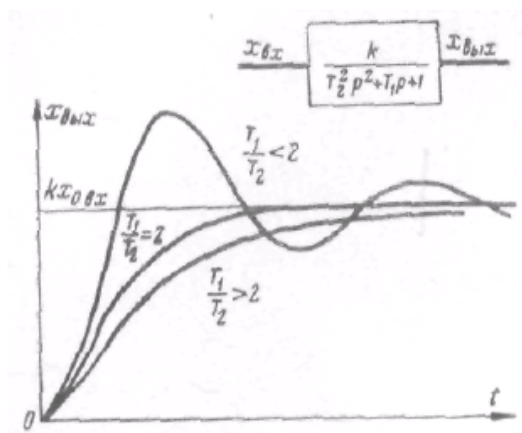


Рис. 7. Передаточная функция и переходные процессы колебательного звена при различных значениях отношения постоянных времени.

Переходные процессы колебательного звена в зависимости от отношения  $T_1/T_2$  представлены на рис. 7.

Как следует из выражения (22), мнимая составляющая  $\omega$  корней характеристического уравнения является круговой частотой колебательного звена. Период колебаний  $T = 2\pi/\omega$ . Оценкой переходного процесса колебательного звена служит степень затухания колебаний. Степенью затухания  $\psi$  называется отношение разности двух соседних амплитуд одного знака (взятых относительно среднего

положения  $kx_{0ex}$ ) к первой из них (рис. 8,а):

$$\psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1}. \quad (23)$$

Как следует из рис. 8,а,

$$A_1 = \frac{kx_{0ex}}{\omega T_2} e^{-\alpha t_1}, \quad A_2 = \frac{kx_{0ex}}{\omega T_2} e^{-\alpha t_2}.$$

Так как  $t_2 - t_1 = T$ , то подставив значения  $A_1$  и  $A_2$  в (23), получим:

$$\psi = 1 - e^{-2\pi \frac{\alpha}{\omega}}. \quad (24)$$

Чем ближе к единице величина  $\psi$ , тем быстрее затухают колебания переходного процесса.

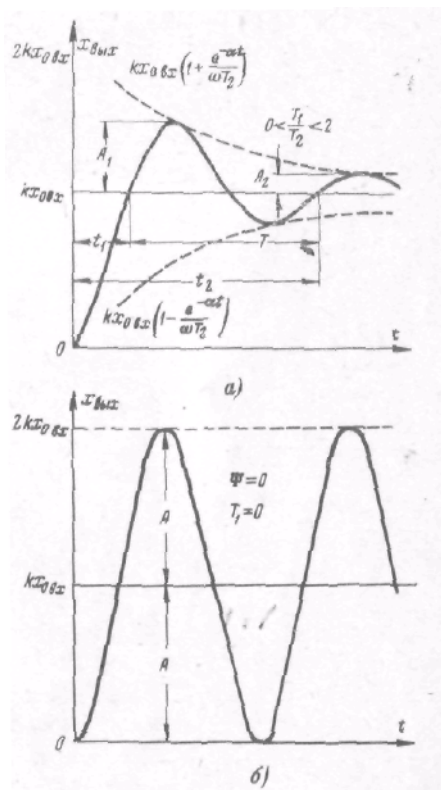


Рис. 8. Переходные процессы колебательного звена при  $I > \psi > 0$  и  $\psi = 0$ .

на, получим

Степень затухания зависит от отношения вещественной составляющей комплексных корней характеристического уравнения  $\alpha$  к их мнимой составляющей  $\omega$ . В свою очередь это отношение определяется отношением постоянных времени  $T_1/T_2$ :

$$\frac{\alpha}{\omega} = \frac{T_1}{2T_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{T_1}{2T_2}\right)^2}}.$$

4. При  $T_1 = 0$   $T_1/T_2 = 0$  вещественная и мнимая составляющие корней характеристического уравнения будут равны:

$$\alpha = 0; \quad \omega = 1/T_2.$$

Подставив эти значения в выражение (22) для переходного процесса колебательного звена,

$$x_{\text{вых}} = kx_{0\text{вх}} \left[ 1 - \sin \left( \frac{t}{T_2} + \arctg \infty \right) \right] = kx_{0\text{вх}} \left( 1 - \cos \frac{t}{T_2} \right). \quad (25)$$

Такое колебательное звено называется консервативным.

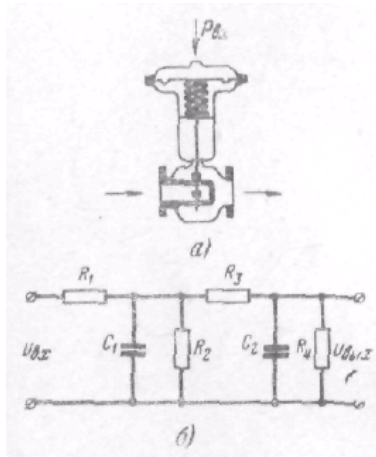
Переходный процесс будет в этом случае незатухающим колебательным (так как  $\psi = 0$ ) с частотой  $\omega_0 = 1/T_2$ , периодом  $T = 2\pi T_2$  и амплитудой  $A = kx_{0\text{вх}}$  (рис.8,б).

Чем больше  $T_1$  и меньше  $T_2$ , тем больше степень затухания колебательного звена.

Следовательно, для уменьшения колебательности систем регулирования в колебательных звеньях необходимо увеличивать постоянную времени  $T_1$  и

уменьшать  $T_2$ . Однако это целесообразно делать лишь в определенных пределах, так как при чрезмерном увеличении отношения  $T_1/T_2$  переходный процесс затягивается (см. рис. 7) и время регулирования увеличивается.

На рис. 9 даны примеры колебательных звеньев.



Входной величиной мембранного пневматического клапана (рис. 9,а) является давление  $\Delta P_{вх}$ , а выходной – перемещение  $\Delta S_{вых}$  штока клапана (отсчет ведется в малых приращениях от равновесного состояния).

Если нельзя пренебречь инерцией подвижной системы клапана и силами трения, то условие равновесия сил, действующих на клапан, запишется как

$$f_u + f_{mp} + f_{np} = f_{вх}.$$

Входное усилие при площади  $F$  мембраны равно:

$$f_{вх} = \Delta P_{вх} F.$$

Сила инерции  $f_u$  равна произведению массы  $m$  подвижной системы на ускорение  $a = d^2(\Delta S_{вых})/dt^2$ :

$$f_u = m \frac{d^2 \Delta S_{вых}}{dt^2}.$$

Учитывая только силу вязкого трения, которая пропорциональна скорости перемещения подвижной системы, получим:

$$f_{mp} = b \frac{d \Delta S_{вых}}{dt}.$$

Сила противодействия пружины пропорциональна ее сжатию

$$f_{np} = c \Delta S_{вых},$$

где  $c$  - жесткость пружины.

Подставив значения сил в уравнение равновесия, получим:

$$m \frac{d^2 \Delta S_{вых}}{dt^2} + b \frac{d \Delta S_{вых}}{dt} + c \Delta S_{вых} = \Delta P_{вх} F.$$

В настоящее время принято составлять дифференциальные уравнения звеньев в безразмерных (относительных) единицах.

Безразмерной единицей давления будем считать отношение  $\Delta P_{\text{вх}}$  к максимальной величине давления  $P_{\text{макс}}$  на мембрану, при котором клапан полностью закрывается; безразмерной единицей перемещения штока клапана примем отношение  $\Delta S_{\text{вых}}$  к полному ходу  $S_{\text{макс}}$

$$p_{\text{вх}} = \frac{\Delta P_{\text{вх}}}{P_{\text{макс}}}; \quad s_{\text{вых}} = \frac{\Delta S_{\text{вых}}}{S_{\text{макс}}},$$

откуда

$$\Delta P_{\text{вх}} = p_{\text{вх}} P_{\text{макс}}; \quad \Delta S_{\text{вых}} = s_{\text{вых}} S_{\text{макс}}; \\ \frac{d\Delta S_{\text{вых}}}{dt} = S_{\text{макс}} \frac{ds_{\text{вых}}}{dt}; \quad \frac{d^2 \Delta S_{\text{вых}}}{dt^2} = S_{\text{макс}} \frac{d^2 s_{\text{вых}}}{dt^2}.$$

Подставив эти значения в дифференциальное уравнение, получим выражение его в безразмерных единицах:

$$m S_{\text{макс}} \frac{d^2 s_{\text{вых}}}{dt^2} + b S_{\text{макс}} \frac{ds_{\text{вых}}}{dt} + c S_{\text{макс}} s_{\text{вых}} = P_{\text{макс}} F p_{\text{вх}}.$$

С учетом того, что  $c S_{\text{макс}} = P_{\text{макс}} F$ , можно записать:

$$\frac{m}{c} \frac{d^2 s_{\text{вых}}}{dt^2} + \frac{b}{c} \frac{ds_{\text{вых}}}{dt} + s_{\text{вых}} = p_{\text{вх}}.$$

Таким образом, при учете инерции подвижной системы и вязкого трения мембранный пневматический клапан при  $b/\sqrt{mc} < 2$  является колебательным звеном.

Постоянные времени и коэффициент передачи его равны:

$$T_2 = \sqrt{\frac{m}{c}}; \quad T_1 = \frac{b}{c}; \quad k = 1.$$

Из этого примера следует, что в элементах систем регулирования вязкое трение не всегда является нежелательным. В данном случае достаточно высокое вязкое трение обеспечивает устойчивую работу клапана, так как постоянная времени  $T_1$  пропорциональна коэффициенту вязкого сопротивления  $b$ .

Практически, когда силы вязкого трения в механических элементах недостаточны, применяют дополнительное демпфирование подвижной системы, т.

е. вводят дополнительную силу, противодействующую перемещению подвижной системы и пропорциональную скорости этого перемещения.

Если пневматический клапан применяется в системе с инерционным объектом, в котором переходные процессы протекают медленно, т. е. скорости изменения  $p_{6x}$  и  $s_{6bx}$  небольшие, то величина ускорения  $d^2 S_{6bx}/dt^2$  с точностью, достаточной для практических расчетов, может быть принята равной нулю. Тогда дифференциальное уравнение клапана примет вид:

$$T_1 \frac{ds_{6bx}}{dt} + s_{6bx} = p_{6bx}.$$

Следовательно, в этом случае можно пренебречь инерционностью подвижных частей пневматического клапана и представлять его в динамическом отношении как апериодическое звено с передаточной функцией; определяемой формулой (10).

На рис. 9,б приведена электрическая схема, переходный процесс которой также описывается дифференциальным уравнением второго порядка.

Постоянные времени и коэффициент передачи в этом случае равны:

$$T_2 = \sqrt{\frac{R_1 R_2 R_3 R_4 C_1 C_2}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)}};$$

$$T_1 = \frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4) C_1 + R_4 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) C_2}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)};$$

$$k = \frac{R_2 R_4}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)}.$$

При  $T_1/T_2 < 2$  схема представляется колебательным звеном. Все три параметра схемы выражаются через одни и те же величины четырех сопротивлений и двух емкостей. Это является ее недостатком, так как параметры настройки, определяющие динамические свойства звена, взаимозависимы. Поэтому установка оптимальной величины одного из трех параметров настройки в большинстве случаев не дает возможности получить оптимальные значения также для двух остальных параметров. Кроме этого, такая настройка трудоемка и требует высокой квалификации наладчика.

## 6. Дифференцирующее звено

Выходная величина дифференцирующего звена пропорциональна производной по времени от входной величины

$$x_{\text{вых}} = k \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}. \quad (26)$$

Передаточная функция

$$W(p) = kp. \quad (27)$$

Из выражения (26) следует, что выходная величина дифференцирующего звена пропорциональна скорости изменения входной величины.

Если входная и выходная величины имеют одинаковую размерность, то коэффициент  $k$  измеряется в секундах. В этом случае его принято обозначать через  $T$  и называть постоянной времени дифференцирующего звена.

Примером дифференцирующего звена может служить тахогенератор, если за его входную величину принять угол поворота его вала  $\beta_{\text{вх}}$ , а за выходную величину - напряжение  $u_{\text{вых}}$  тахогенератора, так как последнее пропорционально угловой скорости вращения  $\omega_{\text{вх}}$ , которая в свою очередь равна производной от угла поворота:

$$u_{\text{вых}} = k\omega_{\text{вх}} = k \frac{d\beta_{\text{вх}}}{dt}.$$

## 7. Запаздывающее звено

Выходная величина в запаздывающем звене точно повторяет входную величину, но с некоторым запаздыванием по времени  $\tau$ :

$$x_{\text{вых}}(t) = x_{\text{вх}}(t - \tau).$$

Для определения передаточной функции звена найдем изображение выходной величины по Лапласу:

$$X_{\text{вых}}(p) = \zeta[x_{\text{вх}}(t - \tau)] = \int_0^{\infty} x_{\text{вх}}(t - \tau) e^{-pt} dt.$$

Введя новую переменную  $\lambda = t - \tau$ , запишем:

$$X_{\text{вых}}(p) = \int_0^{\infty} x_{\text{вх}}(\lambda) e^{-p(\lambda + \tau)} d(\lambda + \tau).$$

Вынеся постоянную величину  $e^{-p\tau}$  за знак интеграла и учитывая, что диф-

ференциал  $d\tau$  постоянной величины равен нулю, получим:

$$X_{\text{вых}}(p) = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} x_{\text{вх}}(\lambda) e^{-p\lambda} d\lambda.$$

Так как интеграл в этом выражении является изображением  $X_{\text{вх}}(p)$  функции  $x_{\text{вх}}(\lambda) = x_{\text{вх}}(t - \tau)$ , получим:

$$X_{\text{вых}}(p) = e^{-p\tau} X_{\text{вх}}(p).$$

Таким образом, запаздывающее звено имеет передаточную функцию

$$W(p) = e^{-p\tau}. \quad (28)$$

Переходный процесс запаздывающего звена при скачкообразном изменении входной величины на  $x_{0\text{вх}}$  представлен на рис. 10.

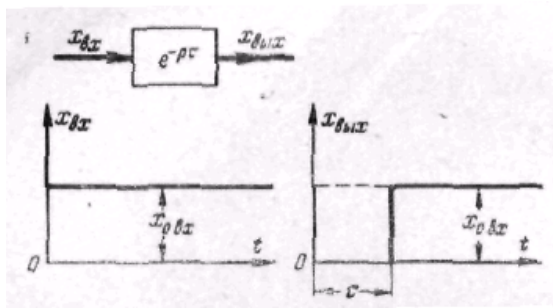


Рис. 10. Передаточная функция и переходный процесс запаздывающего звена.

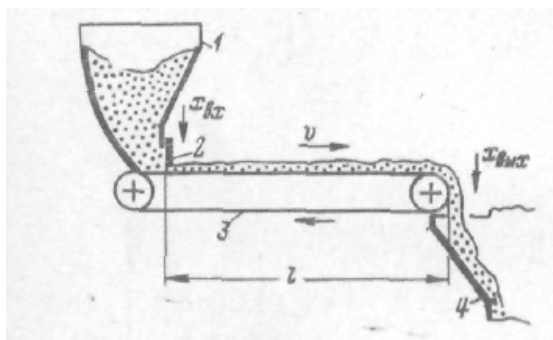


Рис. 11. Пример запаздывающего звена.

дывания звена

$$\tau = l/v.$$

Передаточная функция

$$W(p) = e^{-\frac{l}{v}p}.$$

## 8. Частотные характеристики типовых звеньев

### 8.1. Частотные характеристики усилительного звена

Исходя из выражения (2), можно записать:

$$\left. \begin{aligned} W(j\omega) = k, U(\omega) = k, V(\omega) = 0; \\ W(\omega) = k, \varphi(\omega) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

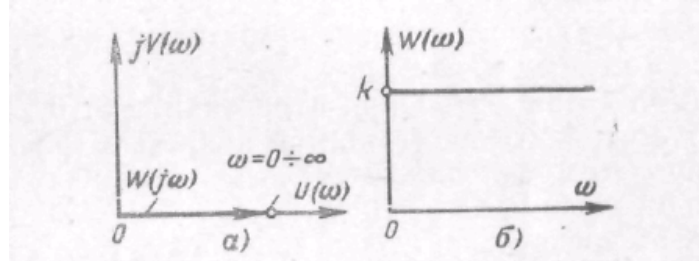


Рис. 12. Частотные характеристики усилительного звена.

Таким образом, амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) усилительного звена представляет вектор, совпадающий с положительным направлением оси абсцисс, модуль которого не зависит от частоты и равен коэффициенту передачи звена.

Отношение выходной величины системы к входной величине, выраженное в комплексной форме называется АФХ системы.

Воздействия любой частоты, поступающие на вход этого звена, усиливаются в одинаковой степени без фазового сдвига. Частотные характеристики усилительного звена представлены на рис. 12.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) звена определяется выражением

$$L(\omega) = 20 \lg k \quad (30)$$

и представляет собой прямую параллельную оси абсцисс и проходящую от нее на расстоянии  $20 \lg k$ .

Зависимость отношения амплитуд выходных и входных колебаний от их частоты называется АЧХ.

Логарифмическая фазо-частотная характеристика (ФЧХ) при всех частотах совпадает с осью абсцисс, так как фазовый сдвиг при всех частотах равен нулю [см. выражение (29)].

Зависимость разности фазы выходных и входных колебаний от частоты

называется ФЧХ системы.

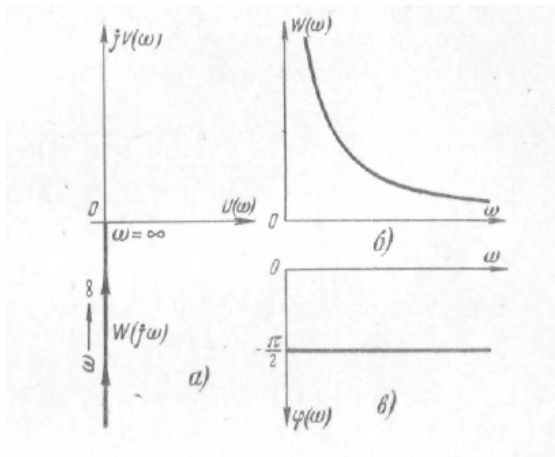
## 8.2. Частотные характеристики интегрирующего звена

Из передаточной функции (4) звена  $W(p) = k/p$  определяем:

$$\left. \begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}; \\ U(\omega) &= 0; V(\omega) = -\frac{k}{\omega}; \\ W(\omega) &= \frac{k}{\omega}; \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Согласно формуле  $W(j\omega) = W(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$  получим также:

$$W(j\omega) = \frac{k}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (32)$$



Частотные характеристики представлены на рис. 13, из которого следует, что

а) АФХ звена  $W(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  совпадает с отрицательной мнимой полуосью (рис. 13,а);

б) при всех частотах выходные колебания отстают по фазе от входных на угол  $90^\circ$  (рис. 13,в);

в) АЧХ представляет собой гиперболу, т.е. чем меньше частота входного сигнала, тем больше этот сигнал

на

усиливается звеном. При  $\omega = 0$  коэффициент усиления равен бесконечности и наоборот, при  $\omega = \infty$  коэффициент усиления звена равен нулю (рис. 13,б).

Логарифмируя  $W(\omega)$  в (31), получим:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega. \quad (33)$$

Таким образом, ЛАЧХ представляет собой прямую линию, пересекающую при  $k = 1$  ось абсцисс в точке  $\omega = 1$  и имеющую наклон к оси абсцисс  $20 \text{ дб/дек}$ . При  $k \neq 1$  ЛАЧХ перемещается параллельно оси ординат на величину  $20 \lg k$  (рис. 14,а).

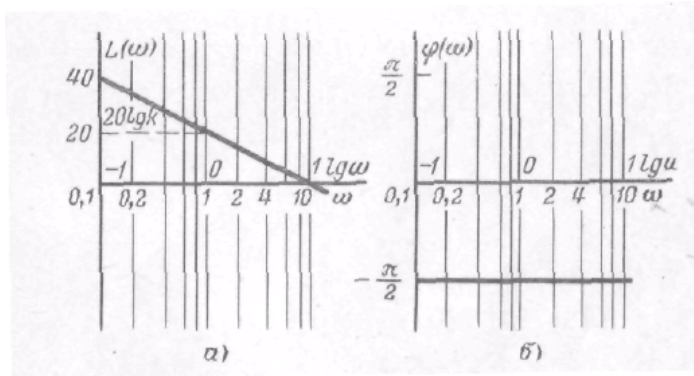


Рис. 14. Логарифмические частотные характеристики интегрирующего звена.

Логарифмическая фазо-частотная характеристика не зависит от частоты и равна  $-\pi/2$  (рис. 14,б). На рис. 14 на оси абсцисс для сравнения указаны значения как  $\omega$ , так и  $\lg \omega$ , а также нанесена координатная сетка частот.

### 8.3. Частотные характеристики

Из передаточной функции звена  $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$  [формула (10)] находим его АФХ:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T} = \frac{k(1-j\omega T)}{T^2\omega^2+1}. \quad (34)$$

Вещественная и мнимая частотные характеристики

$$U(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2+1} \quad \text{и} \quad V(\omega) = -\frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}. \quad (35)$$

Согласно уравнениям  $W(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$  и  $\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$  АЧХ и

ФЧХ имеют вид:

$$W(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}; \quad (36)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg T\omega. \quad (37)$$

Задаваясь различными значениями  $\omega$ , можно по выражениям (34) построить АФХ звена. Однако в данном случае можно из этих же двух уравнений алгебраически получить на плоскости  $U, jV$  уравнение кривой  $W(j\omega)$  в явной форме как функцию.

Складывая выражения (35), получим:

$$U(\omega) + V(\omega) = \frac{k(1 - T\omega)}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Возведя в квадрат левую и правую части равенства, найдем;

$$\begin{aligned} U^2(\omega) + V^2(\omega) + 2U(\omega)V(\omega) &= \frac{k^2[T^2\omega^2 - 2T\omega + 1]}{(T^2\omega^2 + 1)^2} = \\ &= U(\omega) \left[ k \frac{T^2\omega^2 + 1}{T^2\omega^2 + 1} - 2 \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1} \right] = U(\omega)[k + 2V(\omega)], \end{aligned}$$

откуда

$$V^2(\omega) + U^2(\omega) - kU(\omega) = 0.$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства слагаемое  $(k/2)^2$ , получаем:

$$V^2(\omega) + [U(\omega) - k/2]^2 = (k/2)^2. \quad (38)$$

Из полученного уравнения следует, что АФХ имеет вид окружности (рис. 15,а) с радиусом  $k/2$ , центр которой расположен на положительной веществен-

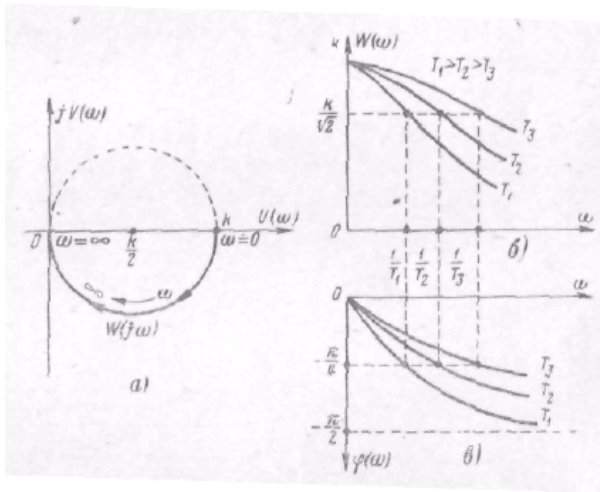


Рис. 15. Частотные характеристики апериодического звена.

ной полуоси в точке с координатами  $(k/2; 0)$ . Окружность касается мнимой оси в начале координат. Изменениям  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  соответствует полуокружность, расположенная в четвертом квадранте, а изменениям  $\omega$  от 0 до  $-\infty$  - полуокружность в первом квадранте.

На рис. 15,б и в представлены также амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики звена. Из графиков частотных характеристик видно, что усиление звена по амплитуде при увеличении частоты уменьшается. Это уменьшение тем резче, чем больше постоянная времени.

С ростом частоты увеличивается также фазовый сдвиг выходных колебаний по отношению к входным. Фазо-частотная характеристика звена отрицательна, следовательно, выходные колебания по фазе отстают от входных. При одной и той же частоте фазовый сдвиг тем больше, чем больше постоянная

времени звена. При небольших частотах ( $\omega \approx 0$ ) апериодическое звено ведет себя как усилительное звено с коэффициентом усиления  $k$ . При больших частотах выходная величина по модулю стремится к нулю, а ее фаза  $\varphi(\omega)$  - к значению  $-\pi/2$ .

При  $\omega = 1/T$  фаза  $\varphi(\omega) = -\pi/4$ , а  $W(\omega) = k/\sqrt{2}$ .

Логарифмируя выражение (36), найдем:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}. \quad (39)$$

Из выражения (39) следует, что при изменении коэффициента усиления звена ЛАЧХ перемещается параллельно оси ординат, не меняя своей формы. При изменении частоты от 0 до  $\infty$  при  $\omega \ll 1/T$  ЛАЧХ можно аппроксимировать горизонтальной прямой  $L(\omega) = 20 \lg k$ , а при  $\omega \gg 1/T$  - прямой  $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega T$ , имеющей наклон  $-20 \text{ дБ/дек}$ .

Действительно, например, при  $\omega_1$ , ЛАЧХ равна  $L(\omega_1) = 20 \lg k - 20 \lg \omega_1 T$ , а при  $\omega_2 = 10 \omega_1$  получаем  $L(\omega_2) = 20 \lg k - 20 \lg 10 \omega_1 T$ . Найдем уменьшение ЛАЧХ на декаду:

$$\Delta L = -20 \lg 10 \omega_1 T + 20 \lg \omega_1 T = -20 - 20 \lg \omega_1 T + 20 \lg \omega_1 T = -20 \text{ дБ/дек}.$$

Следовательно, ЛАЧХ может быть приближенно представлена двумя вышеуказанными прямыми (асимптотами), сопрягающимися друг с другом при частоте  $\omega_1 = 1/T$ . Эту частоту принято называть сопрягающей. При представлении фактической ЛАЧХ приближенной (рис. 16,а) максимальная ошибка будет на сопрягающей частоте

$$\Delta L(\omega_1) = -20 \lg \sqrt{2} = -3 \text{ дБ}.$$

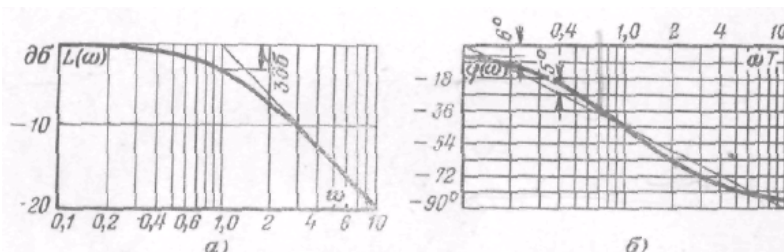


Рис. 16. Логарифмические частотные характеристики апериодического звена.

Логарифмическая фазо-частотная характеристика, построенная в полулогарифмическом масштабе по выражению (37), представляет собой кососимметричную линию (рис. 16,б). На интервале

частот  $0,1/T < \omega < 10/T$  ЛФЧХ можно аппроксимировать прямой с наклоном -

45°/дек, проходящую через точку с координатами  $[\varphi(\omega) = 45^\circ; \omega T = 1 \text{ дБ}]$ . При этом следует отметить, что при такой аппроксимации ошибка является существенной (до 6°), в связи с чем она не всегда допустима.

#### 8.4. Частотные характеристики колебательного звена

По формуле (14) передаточной функции звена  $W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$  АФХ

можно записать в виде

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T_2^2 + j\omega T_1} \quad (40)$$

Вещественная частотная характеристика

$$U(\omega) = \frac{k(1 - T_2^2 \omega^2)}{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2} \quad (41)$$

Мнимая частотная характеристика

$$V(\omega) = -\frac{kT_1 \omega}{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2} \quad (42)$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$W(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}} \quad (43)$$

Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2} \quad (44)$$

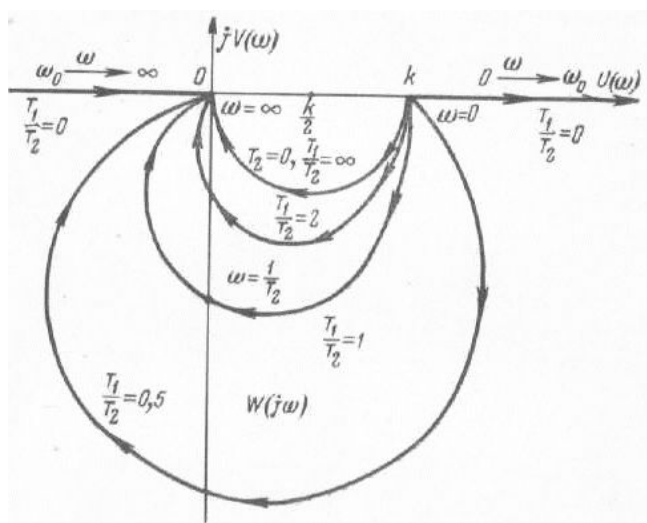


Рис. 17. Амплитудно-фазовые частотные характеристики колебательного звена.

На рис. 17 изображена АФХ звена. Она начинается на вещественной оси в точке с абсциссой, равной  $k$ . Вид АФХ определяется величиной отношения постоянных времени  $T_1/T_2$ . Чем больше это отношение, тем меньше колебательность звена. При  $T_1/T_2 > 2$  колебательное звено превращается в соединение из двух апериодических звеньев.

При  $T_1/T_2=0$  степень затухания  $\psi$  (23) будет равна нулю и возникшие в звене колебания будут незатухающими с собственной частотой колебаний, равной  $\omega_0 = 1/T_2$ .

В этом случае мы получаем консервативное звено.

Амплитудно-фазовая характеристика консервативного звена определяется выражением

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - (\omega/\omega_0)^2}. \quad (45)$$

Графически эта характеристика при изменении входной частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  имеет вид двух полупрямых (рис. 17). Первая полупрямая начинается при  $\omega=0$  на вещественной положительной полуоси в точке  $k$  и при возрастании  $\omega$  до  $\omega=\omega_0$  уходит в бесконечность по вещественной полуоси в положительном направлении. Вторая полупрямая совпадает с отрицательной вещественной полуосью. Начало полупрямой - в бесконечности при  $\omega=\omega_0$ , а конец - в начале координат при  $\omega=\infty$ .

Определяя первую производную АЧХ по частоте и приравнявая полученное выражение нулю, находим:

$$\frac{dW(\omega)}{d\omega} = -\frac{k}{2\sqrt{[(1 - T_2^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2]^{3/2}}} \frac{d[(1 - T_2^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2]}{d\omega} = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{d[(1 - T_2^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2]}{d\omega} = \frac{d[1 + (T_1^2 - 2T_2^2)\omega^2 + T_2^4\omega^4]}{d\omega} = \omega(2T_1^2 - 4T_2^2) + 4T_2^4\omega^3 = 0$$

или

$$\omega(2T_2^4\omega^2 - 2T_2^2 + T_1^2) = 0.$$

Из этого уравнения находим значения частот, при которых АЧХ имеет экстремумы

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} \sqrt{1 - \frac{T_1^2}{2T_2^2}}. \quad (46)$$

Из выражения (43) следует, что при  $\omega = \omega_1 = 0$  АЧХ равна коэффициенту усиления звена

$$W(\omega_1) = W(0) = k$$

и не зависит ни от значений постоянных времени  $T_1$  и  $T_2$ , ни от их соотношения.

Второе вещественное экстремальное значение  $W(\omega)$  имеется только при  $1 - T_1^2 / (2T_2^2) > 0$ , т. е. при  $T_1/T_2 < \sqrt{2} = 1,41$ . При этом чем больше отношение постоянных времени приближается к значению  $T_1/T_2 = \sqrt{2}$ , тем ближе подходит вторая точка экстремума к первой.

При  $T_1/T_2 \geq \sqrt{2}$  АЧХ имеет только один экстремум при  $\omega_1 = 0$ . Так как при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  АЧХ (43) стремится к нулю, то при  $T_1/T_2 \geq \sqrt{2}$  экстремальная точка  $W(\omega_1) = W(0) = k$  является максимумом кривой  $W(0)$ .

Рассмотрим второй экстремум кривой  $W(\omega)$ , появляющийся при  $T_1/T_2 < \sqrt{2}$ . Подставив в выражение (43) величину  $\omega_2$  из формулы (46), найдем:

$$W(\omega_2) = \frac{k}{\sqrt{\left[1 - T_2^2 \frac{1}{T_2^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{T_1^2}{T_2^2}\right)\right]^2 + \frac{T_1^2}{T_2^2} \left(1 - \frac{T_1^2}{2T_2^2}\right)}} = \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{T_1^2}{T_2^2}\right)^2 + \frac{T_1^2}{T_2^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{T_1^2}{T_2^2}\right)^2}}.$$

Полагая  $T_1^2 / T_2^2 = \alpha$ , получим:

$$W(\omega) = \frac{k}{\sqrt{\alpha - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}}. \quad (47)$$

При  $T_1/T_2 < \sqrt{2}$  имеем:  $\alpha < 2$  и  $\alpha/2 < 1$ ; величина  $\alpha/2 < 1$  - правильная дробь и притом подкоренное выражение всегда меньше единицы; следовательно, корень в знаменателе выражения (47) - правильная дробь и  $W(\omega_2) > W(0)$ . Таким образом, при возрастании  $\omega$  от  $\omega_1 = 0$  до  $\omega_2$  АЧХ тоже возрастает, начиная со значения  $k$  при  $\omega = 0$ , и при  $\omega_2$  достигает максимума, равного [см. формулу (47)]

$$W(\omega_2) = \frac{k}{\frac{T_1}{T_2} \sqrt{1 - \frac{T_1^2}{4T_2^2}}}.$$

Частота  $\omega_2$  является собственной частотой колебаний звена. При дальнейшем увеличении частота АЧХ стремится к нулю.

Амплитудно-частотные характеристики колебательного звена для различных значений постоянных времени представлены на рис. 18.

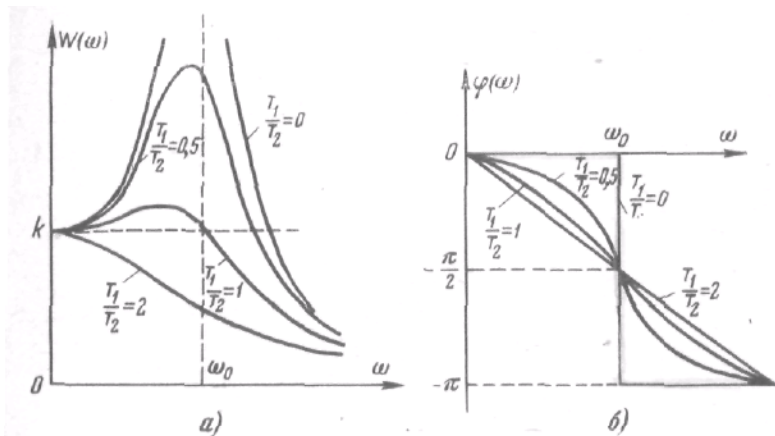


Рис. 18. Амплитудно-частотные  $W(\omega)$  и фазо-частотные  $\varphi(\omega)$  характеристики колебательного звена.

При уменьшении отношения  $T_1/T_2$  максимум АЧХ увеличивается, увеличивается и значение частоты, при котором наступает этот максимум, приближаясь к собственной частоте колебаний консервативного звена  $\omega_0$ .

При  $T_1/T_2=0$  максимум  $W(\omega)$  равен бесконечности

на частоте  $\omega=\omega_0=1/T_2$ . При этом колебательное звено превращается в консервативное.

На рис. 18,б представлена ФЧХ  $\varphi(\omega)$ . Все характеристики  $\varphi(\omega)$  для различных отношений  $T_1/T_2$  равны нулю при  $\omega=0$ , равны  $-\pi/2$  при частоте  $\omega=\omega_0$  и стремятся к  $-\pi$  при частоте  $\omega \rightarrow \infty$ . Так как  $\varphi(\omega)$  отрицательна, то выходные колебания во всем диапазоне изменений  $\omega$  отстают от входных колебаний.

При  $T_1=0$  фаза выходных колебаний совпадает с фазой входных колебаний в диапазоне изменений  $\omega$  от 0 до  $\omega_0$ . При  $\omega=\omega_0$  происходит изменение фазы скачком от  $\varphi(\omega)=0$  до  $\varphi(\omega)=-\pi$  и в диапазоне изменений  $\omega$  от  $\omega_0$  до  $\omega=\infty$  фаза выходных колебаний отстает от фазы входных колебаний на  $\pi$ .

Из частотных характеристик колебательного звена следует, что при малых частотах входных колебаний ( $\omega \approx 0$ ) оно по своим свойствам приближается к усилительному звену, а при больших частотах входных колебаний вообще не пропускает сигнала. Логарифмируя выражение (43), находим:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2} \quad (48)$$

или

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \frac{T_1^2}{T_2^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \quad (49)$$

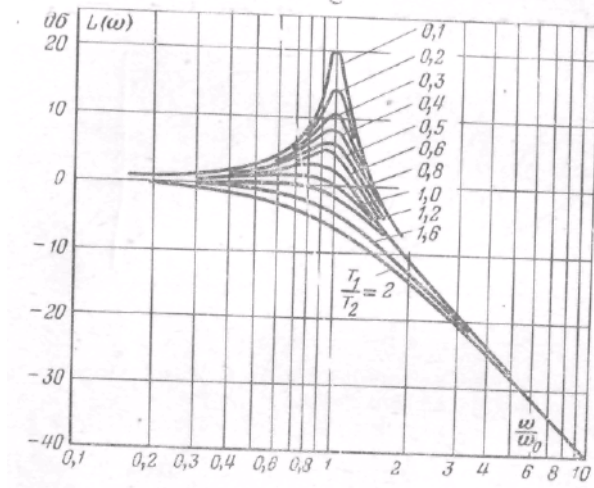


Рис. 19. Логарифмические амплитудно-частотные характеристики колебательного звена.

На рис. 19 по выражению (49) при  $k=1$  для различных отношений  $T_1/T_2$  приведены ЛАЧХ звена в относительных частотах  $\omega/\omega_0 = T_2 \omega$ . Из рис. 19 видно, что ЛАЧХ при низких частотах приближаются к асимптоте, совпадающей с вещественной осью, а при высоких частотах - к асимптоте в виде прямой с наклоном - 40 дБ/дек.

Это также следует из выражения (49). Так, при  $\omega/\omega_0 \approx 0$  находим аналитическое выражение для первой асимптоты:

$$L_{a1}(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg 1 = 20 \lg k.$$

При  $k = 1$   $L_{a1}(\omega) = 0$ .

При больших значениях частот, когда  $(\omega/\omega_0)^4 \gg (\omega/\omega_0)^2$ , можем записать

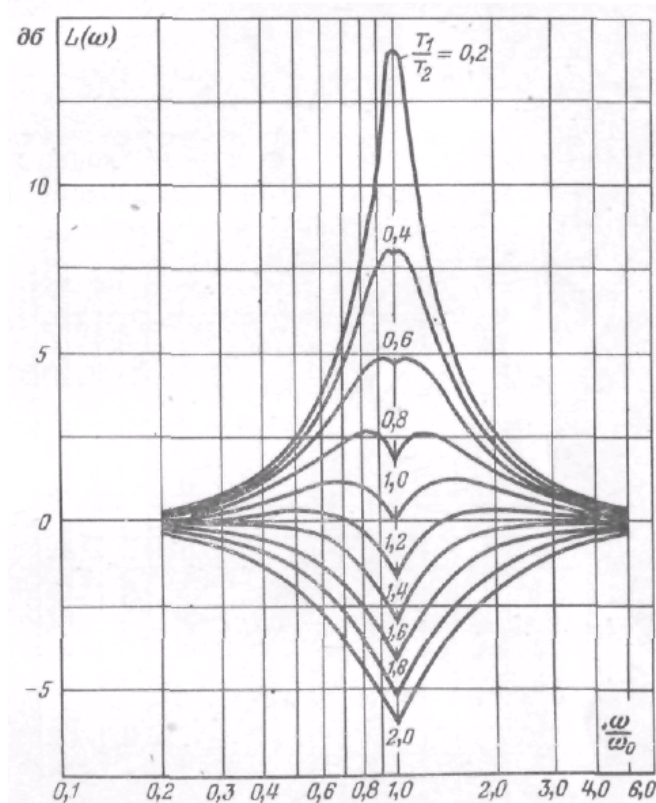
$$L_{a2}(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(\omega/\omega_0)^4} = 20 \lg k - 20 \lg (\omega/\omega_0)^2 = 20 \lg k - 40 \lg (\omega/\omega_0).$$

При  $k = 1$   $L_{a2}(\omega) = -40 \lg (\omega/\omega_0)$ . Следовательно,  $L_{a2}(\omega)$  в логарифмическом масштабе является прямой с наклоном - 40 дБ/дек, пересекающей вещественную ось при  $\omega/\omega_0 = 1$ .

Так как первая асимптота совпадает с вещественной осью, то сопряжение асимптот происходит при относительной частоте  $\omega/\omega_0 = 1$ . Абсолютное значение частоты при этом равно  $\omega = \omega_0 = 1/T_2$ .

Из выражения (48) следует, что при  $k \neq 1$  вид ЛАЧХ сохраняется, но они только перемещаются параллельно оси абсцисс на величину  $20 \lg k$ .

На рис. 19 видно, что реальные ЛАЧХ звеньев, у которых  $0,8 < T_1/T_2 < 1,4$ , могут быть заменены приближенной ЛАЧХ с погрешностью, не превышающей



При  $T_1/T_2 > 2$  колебательное звено

Рис. 20. Поправочные кривые к аппроксимированной двумя прямыми ЛАЧХ колебательного звена.

представляется двумя соединенными последовательно апериодическими звеньями с передаточными функциями

$$W_1(p) = \frac{k}{T_3 p + 1} \text{ и } W_2(p) = \frac{1}{T_4 p + 1}.$$

При этом передаточная функция соединения имеет вид

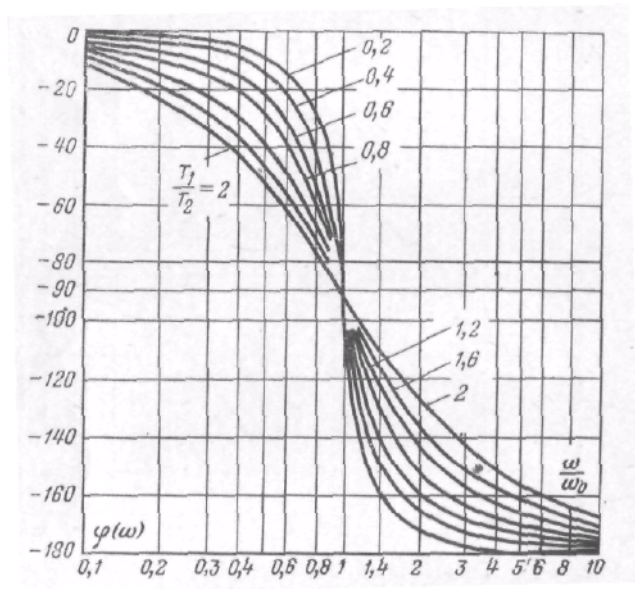
$$W(p) = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}, \quad (50)$$

где  $T_3 = 1/\alpha_1$  и  $T_4 = 1/\alpha_2$ , здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - корни характеристического урав-

Рис. 21. Логарифмические фазо-частотные характеристики колебательного звена.

3 дБ. Для звеньев, у которых это отношение находится внеуказанных пределов, необходимо строить точные ЛАЧХ. Это можно сделать или по выражению (49), или же графически с помощью кривых поправок к приближенной (асимптотической) ЛАЧХ, представленных на рис. 20.

Логарифмические фазо-частотные характеристики представлены на рис. 21.



Из выражения (50) с учетом (36) и (39)

получим:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{T_3^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_4^2 \omega^2 + 1}. \quad (51)$$

При  $T_3 < T_4$  сопряженными частотами асимптотической ЛАЧХ являются  $\omega_1 = 1/T_4$  и  $\omega_2 = 1/T_3$ . При  $T_1/T_2 > 2$  ЛАЧХ представляет собой ломаную линию, образованную: отрезком прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей от нее на расстоянии  $20 \lg k$  при  $\omega \leq \omega_1 = 1/T_4$ ; прямой с наклоном  $-20 \text{ дБ/дек}$  на отрезке с частотами  $1/T_4 \leq \omega \leq 1/T_3$ ; лучом прямой с наклоном  $-40 \text{ дБ/дек}$  при  $1/T_3 \leq \omega \rightarrow \infty$  (рис. 22).

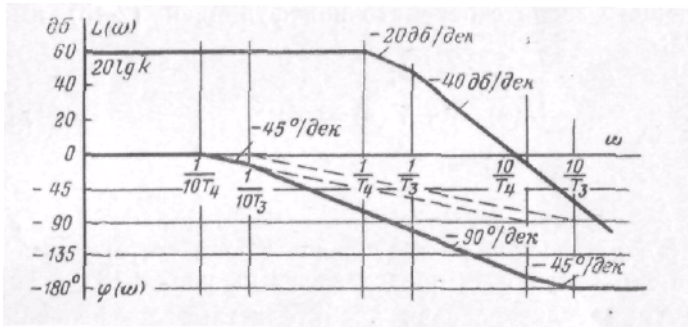


Рис. 22. Асимптотические логарифмические частотные характеристики колебательного звена при  $T_1/T_2 > 2$ .

$$\varphi_1(\omega) = -\arctg T_3 \omega = 0.$$

$$\text{При } \omega = 0, 1/T_3 \quad \varphi_1(\omega) = -\arctg 0, 1 = -6^\circ.$$

При  $\omega = 10/T_3$   $\varphi_1(\omega) = -\arctg 10 = -84^\circ$ , а при  $\omega = \infty$   $\varphi_1(\omega) = -90^\circ$ . Следовательно, на участке частот  $0 \leq \omega \leq 0, 1/T_3$  составляющая  $\varphi_1(\omega)$  монотонно уменьшается от 0 до  $-6^\circ$ . На участке  $10/T_3 \leq \omega \rightarrow \infty$  она уменьшается от  $-84$  до  $-90^\circ$ .

С учетом этого можно принять  $\varphi_1(\omega) \approx 0$  в интервале частот  $0 \leq \omega \leq 0, 1/T_3$  и  $\varphi_1(\omega) \approx -90^\circ$  в интервале частот  $10/T_3 \leq \omega \rightarrow \infty$ . Так как интервал частот  $0, 1/T_3 \leq \omega \leq 10/T_3$  равен двум декадам, то на нем  $\varphi_1(\omega)$  можно аппроксимировать в виде прямой с наклоном  $-45^\circ/\text{дек}$ .

Таким же образом можно аппроксимировать составляющую ЛФЧХ  $\varphi_2(\omega) = -\arctg T_4 \omega$  в интервалах частот

$$0 \leq \omega \leq 0, 1/T_4; \quad 0, 1/T_4 \leq \omega \leq 10/T_4; \quad 10/T_4 \leq \omega \rightarrow \infty.$$

Так как ЛФЧХ приближенно выражается в виде суммы аппроксимированных составляющих  $\varphi_1(\omega)$  и  $\varphi_2(\omega)$  (пунктирные линии на рис. 22), то передаточ-

Из выражения (50) с учетом (37) находим ФЧХ звена:

$$\varphi(\omega) = -\arctg T_3 \omega - \arctg T_4 \omega. \quad (52)$$

Логарифмическую фазо-частотную характеристику можно также аппроксимировать в виде ломаной линии.

При  $\omega = 0$  составляющая ЛФЧХ

ная функция соединения (50) при  $T_1/T_2 > 2$  и  $0,1/T_3 < 10/T_4$  может быть приближенно представлена в виде ломаной линии с отрезками прямых:

$\omega \leq 0,1/T_4$  - прямая  $\varphi(\omega) = 0$ ;

$0,1/T_4 \leq \omega \leq 0,1/T_3$  - прямая с наклоном -  $45^\circ/\text{дек}$ ;

$0,1/T_3 \leq \omega \leq 10/T_4$  - прямая с наклоном -  $90^\circ/\text{дек}$ ;

$10/T_4 \leq \omega \leq 10/T_3$  - прямая с наклоном -  $45^\circ/\text{дек}$ ;

$\omega \geq 10/T_3$  - прямая  $\varphi(\omega) = 0$ ;

### 8.5. Частотные характеристики дифференцирующего звена

Частотные характеристики идеального дифференцирующего звена с передаточной функцией (27) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} W(j\omega) &= j\omega k; \\ U(\omega) &= 0; V(\omega) = \omega k; \\ W(\omega) &= \omega k; \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

В комплексной показательной форме  $W(j\omega) = \omega k e^{j\frac{\pi}{2}}$ . Эти характеристики представлены на рис. 23.

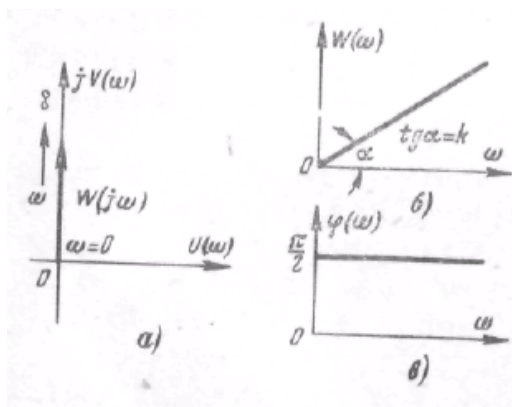


Рис. 23. Частотные характеристики дифференцирующего звена.

Амплитудно-фазовая характеристика дифференцирующего звена совпадает с положительной мнимой полуосью (рис. 23,а).

При всех частотах выходные колебания опережают по фазе входные колебания на угол  $90^\circ$ , так как фазо-частотная характеристика  $\varphi(\omega)$  не зависит от частоты и равна  $\pi/2$  (рис. 23,в).

Амплитудно-частотная характеристика  $W(\omega)$  имеет вид прямой линии, проходящей через начало координат под углом  $\alpha = \arctg k$ . Чем больше частота входных колебаний, тем больше они усиливаются звеном. При малых частотах ( $\omega \approx 0$ ) сигнал через звено не проходит (рис. 23,б).

Скачкообразное единичное изменение входной величины вызывает мгно-

венное изменение выходной величины от 0 до  $\infty$  и мгновенный спад ее от  $\infty$  до 0.

Логарифмируя  $W(\omega)$  в выражении (53), получаем:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega. \quad (54)$$

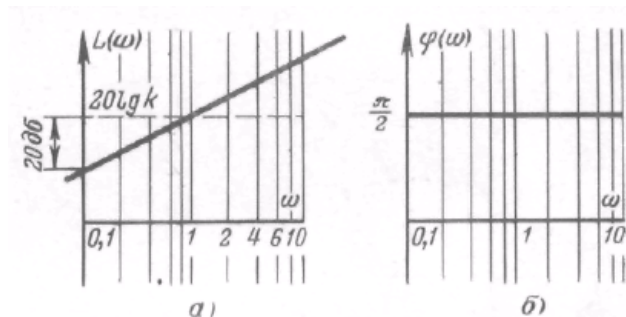


Рис. 24. Логарифмические частотные характеристики дифференцирующего звена.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика дифференцирующего звена представляет собой прямую (рис. 24,а) с наклоном  $+20$  дБ/дек, ордината которой при  $\omega = 1$  равна  $20 \lg k$ .

Фазо-частотная характеристика звена в полулогарифмическом масштабе в соответствии с (53) представлена на рис. 24,б.

### 8.6. Частотные характеристики запаздывающего звена

В соответствии с формулой (28) передаточной функции звена  $W(p) = e^{-p\tau}$  частотные характеристики запаздывающего звена имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} W(j\omega) &= e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau; \\ U(\omega) &= \cos \omega\tau; V(\omega) = -\sin \omega\tau; \\ W(\omega) &= 1; \varphi(\omega) = -\omega\tau. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Так как АЧХ такого звена равна единице и не зависит от частоты, а ФЧХ пропорциональна частоте с коэффициентом пропорциональности, равным  $\tau$ , то АФХ представляет собой окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 25,а).

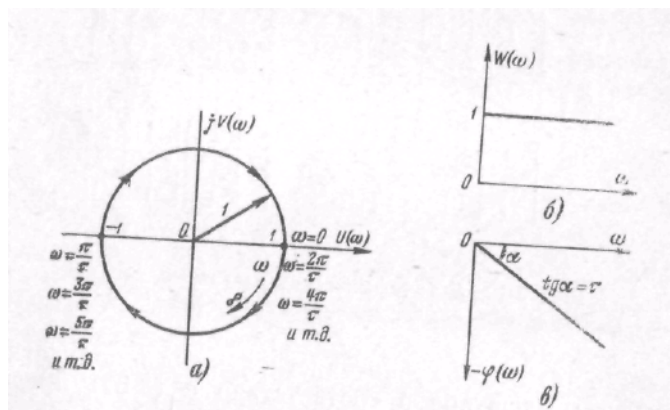


Рис. 3-20. Частотные характеристики запаздывающего звена.

При  $\omega = 0$  вектор АФХ совпадает с положительной вещественной полуосью и конец его расположен в точке  $(1, j0)$ .

При увеличении частоты конец вектора АФХ поворачивается по окружности по часовой стрелке, так

как ФЧХ отрицательна.

При бесконечном увеличении частоты вектор  $W(j\omega)$  бесчисленное число раз поворачивается вокруг начала координат.

При его повороте на  $360^\circ$  он займет первоначальное положение. Так как приращение фазы при этом будет равно  $-2\pi$ , то  $\varphi(\omega) = -\omega\tau = -2\pi$ . Следовательно, в исходное положение вектор АФХ вернется при частоте  $\omega = 2\pi/\tau$ . При дальнейшем увеличении частоты вектор  $W(j\omega)$  будет занимать исходное положение при частотах  $4\pi/\tau$ ,  $6\pi/\tau$ ,  $8\pi/\tau$  и т. д.

Соответственно отрицательная вещественная полуось будет совпадать с вектором  $W(j\omega)$  при частотах  $\pi/\tau$ ,  $3\pi/\tau$ ,  $5\pi/\tau$  и т. д. и при этом конец вектора будет находиться в точке  $(-1, j0)$ .

Таким образом, запаздывающее звено на выходе воспроизводит входные колебания без искажений по форме, но с отставанием по фазе. Это отставание тем больше, чем больше запаздывание звена и чем больше частота входных колебаний.

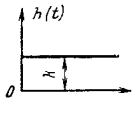
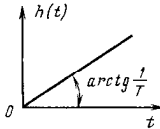
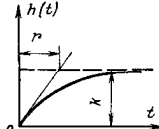
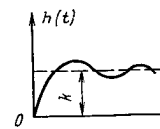
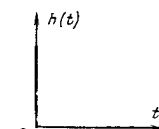
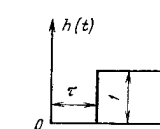
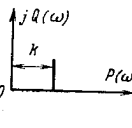
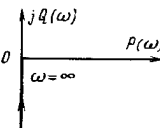
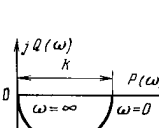
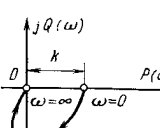
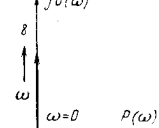
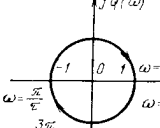
Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика звена

$$L(\omega) = 20 \lg 1 = 0 \quad (56)$$

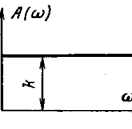
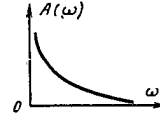
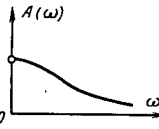
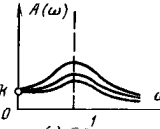
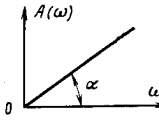
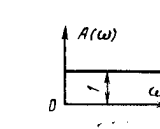
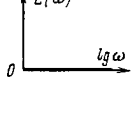
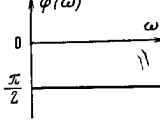
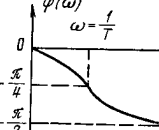
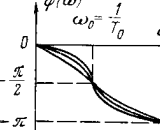
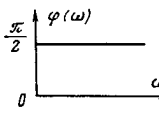
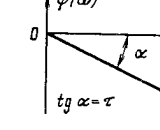
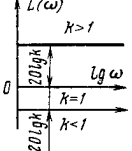
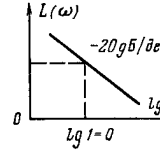
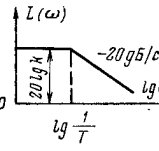
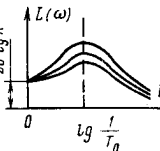
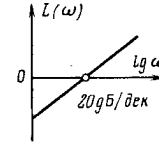
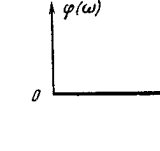
представляет собой прямую, совпадающую с осью абсцисс. Логарифмическая фазо-частотная характеристика строится по выражению  $\varphi(\omega) = -\tau(\omega)$  в полул로그арифмическом масштабе.

## 9. Характеристики элементарных звеньев в табличной форме

Таблица 1

| Характеристики элементарных звеньев |                                                                                          |                                                                                    |                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                      |                                                                                      |                                                                                      |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Характеристика                      | Усилительное                                                                             | Интегрирующее                                                                      | Апериодическое                                                                                                                       | Колебательное                                                                                                                                                                        | Идеальное дифференцирующее                                                           | Запаздывающее                                                                        |
| Уравнение                           | $x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}$ ,<br>где $k$ — коэффициент усиления или передачи звена | $T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} = x_{\text{вх}}$ ,<br>где $T$ — постоянная времени   | $T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}$ ,<br>где $k$ — коэффициент передачи звена; $T$ — постоянная времени | $T_0^2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} + T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}$ ,<br>где $T_0$ , $T$ — постоянные времени; $k$ — коэффициент передачи звена | $x_{\text{вых}} = T \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}$ ,<br>где $T$ — постоянная времени     | $x_{\text{вых}}(t - \tau) = x_{\text{вх}}(t)$ ,<br>где $\tau$ — время запаздывания   |
| Передаточная функция $W(p)$         | $k$                                                                                      | $\frac{1}{Tp}$                                                                     | $\frac{k}{Tp + 1}$                                                                                                                   | $\frac{k}{T_0^2 p^2 + Tp + 1}$                                                                                                                                                       | $Tp$                                                                                 | $e^{-p\tau}$                                                                         |
| Переходная характеристика $h(t)$    |         |   |                                                     |                                                                                                    |   |   |
| АФЧХ $W(j\omega)$                   |        |  |                                                    |                                                                                                   |  |  |

Продолжение табл. 18-1

| Характеристика        | Усилительное                                                                        | Интегрирующее                                                                       | Апериодическое                                                                      | Колебательное                                                                        | Идеальное дифференцирующее                                                            | Запаздывающее                                                                         |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| АЧХ $A(\omega)$       |  |  |  |  |  |  |
| ФЧХ $\varphi(\omega)$ |  |  |  |  |  |  |
| ЛАЧХ $L(\omega)$      |  |  |  |  |  |  |

## Использованная литература

1. Клюев А.С. Автоматическое регулирование. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергия, 1973.
2. Проектирование систем автоматизации технологических процессов: Справочное пособие/ Клюев А.С., Глазов Б.В., Дубровский А.Х.; Под ред. А.С. Клюева. – М.: Энергия, 1980. – 512 с., с ил.