

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

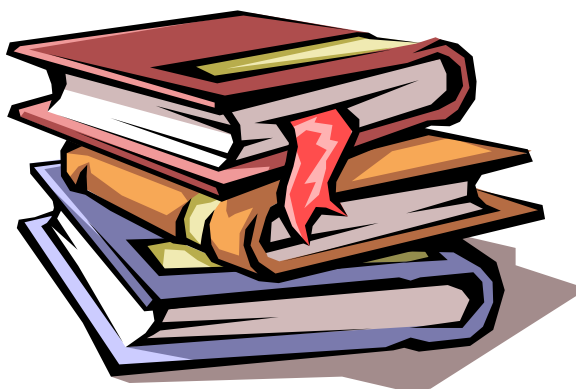
*“Амалий математика ва ахборотлар технологияси”
кафедраси*

Б.Саматов, Т.Эргашев

«Оптималлаш усуллари» фанидан

маърузалар матни

(Ўқув услубий қўлланма)



Наманган-2010

Ушбу ўқув услубий қўлланма Наманган давлат университети илмий-услубий кенгашининг “_____” _____ 2010 йил _____сонли мажлисида тасдиқланган ва нашрга тавсия этилган.

Ўқув услубий қўлланма “Амалий математика ва информатика – 5480100” ва “Математика – 5460100” йўналишида таълим олаётган бакалаврлар учун мўлжалланган.

Тузувчилар: Б.Т.Саматов, ф.-м.ф.н.
Т.Эргашев, ф.-м.ф.н.

Такризчилар: А.Акбаров, Наманган муҳандислик-иқтисодиёт
институти “Амалий математика” кафедраси, ф.-м.ф.н.,
доцент
А.Имомов, Наманган давлат университети
“Амалий математика ва АТ”
кафедраси, ф.-м.ф.н., доцент

Наманган-2010

Маъруза 1

Вариацион ҳисобга кириш. Қадимги масалалар

Берилган бирор $z = f(x)$ функциянинг максимал ёки минимал қийматларини топиш масалалари билан бир қаторда физика масалаларида кўпинча функционаллар деб аталувчи алоҳида турдаги миқдорларнинг максимал ёки минимал қийматларини топишга тўғри келади.

Қийматлари бир ёки бир нечта функциялар ёрдамида аниқланадиган ўзгарувчи миқдорлар функционаллар дейилади.

Масалан, текисликда берилган $A(x_0, y_0)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталарни туташтирувчи текис (ёки фазовий) чизик ёйининг l узунлиги функционал бўлади.

Агар $y = y(x)$ чизик тенгламаси берилган бўлса, l миқдор
$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$
 формула билан ҳисобланади.

Бирор сиртнинг S юзаси ҳам функционал бўлади, чунки бу юза $z = z(x, y)$ сирт тенгламасига кирган $z(x, y)$ функцияни, яъни сиртни танлаш ёрдамида аниқланади. Маълумки,

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dx dy,$$

бу ерда D – берилган сиртнинг Oxy текисликка проекцияси.

Инерция моментлари, статик моментлар, бирор бир жинсли чизик ёки сиртнинг оғирлик маркази координаталари ҳам функционалларга мисол бўлади.

Барча мисолларда биз функционалларга хос хусусиятни кўрамиз: функция (ёки вектор функция)га бирорта сон мос қўйилади.

Вариацион ҳисоб фани функционалларнинг максимал ёки минимал қийматларини топиш усуллари ўрганади. Функционалнинг максимал ёки минимал қийматини топиш масаласи *вариацион масала* дейилади.

Физика ва механиканинг кўпгина қонунлари тасдиқлайдики, ўрганилаётган жараёнда бирор функционал максимум ёки минимумга эришиши лозим. Бундай ҳолларда бу қонунлар механика ёки физиканинг вариацион принциплари деб номланади. Шундай вариацион принциплар қаторига қуйидагилар киради: энг кичик таъсир принципи, энергиянинг сақланиш қонуни, импульснинг сақланиш қонуни, ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни, классик ва релятивистик майдон назариясининг турли вариацион принциплари, оптикадаги Ферма принципи ва ҳоказо.

Вариацион ҳисоб 1696 йилдан ривожлана бошлади ва Леонард Эйлер (1707-1783) нинг тадқиқотлари натижасида мустақил математик фанга айланди. Шунинг учун, Л. Эйлерни ҳақли равишда вариацион ҳисобнинг асосчиси деб аташ мумкин.

Вариацион ҳисобнинг ривожланишига қуйидаги учта масала катта туртки бўлди:

Б р а х и с т о х р о н а ҳақидаги масала. 1696 йилда Иоганн Бернулли математиклар эътиборига энг тез тушиш чизиғи - брахистохрона ҳақидаги масалани баён қилди. Бу масалада битта вертикал тўғри чизикда ётмайдиган берилган A ва B нуқталарни туташтирувчи шундай чизикни топиш керакки, A дан B га тушаётган моддий нуқта шу чизик бўйлаб A дан B га энг қисқа вақтда тушсин.

Кўриниб турибдики, A ва B нуқталар оралиғидаги энг қисқа масофани ифодаловчи чизик тўғри чизик бўлади, энг қисқа вақт чизиғи эса тўғри чизик эмас, чунки тўғри чизик бўйлаб ҳаракатланганда ҳаракат тезлиги нисбатан секин ўсади; агар эгри

чизикни олсак, А дан тушиб келаётган йўл узунроқ бўлсада, йўлнинг кўпроқ қисми каттароқ тезлик билан босиб ўтилади. Брахистохрона ҳақидаги масаланинг ечимини Иоганн Бернулли, Я.Бернулли, Г.Лейбниц, И.Ньютон ва Г.Лопитал топганлар. Энг тез тушиш чизиги циклоида экан.

Геодезик чизиклар ҳақидаги масала. Бунда бирор $\varphi(x, y, z) = 0$ сирт устидаги берилган иккита нукталарни туташтирувчи энг қисқа узунликдаги чизикни топиш талаб қилинади. Бундай энг қисқа чизиклар геодезик чизиклар дейилади. Бундай ҳолда, биз, аслида, шартли экстремум масаласини ўрганаётган бўламиз. $\varphi(x, y, z) = 0$ шарт бажарилганда

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

функционалга минимум берадиган $y(x)$ ва $z(x)$ функцияларни топиш керак. Бу масалани 1698 йилда Я.Бернулли ечган, бироқ бундай масалаларни ечишнинг умумий усулларини Л.Эйлер ва Ж.Лагранж ишларидан топиш мумкин.

Изопериметрик масала.

Энг катта S юзани чегаралайдиган берилган l узунликдаги ёпиқ чизикни топиш керак. Бу чизик кадимги Грецияда ҳам маълум эди: бу доира экан. Бу масалада S функционалнинг минимумини ўзига хос қўшма шарт – чизик узунлиги ўзгармас бўлганда, яъни

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

функционал ўзгармас қийматли бўлганда топиш талаб қилинади. Бундай шартлар изопериметрик шартлар дейилади.

Изопериметрик масалаларни ечишнинг умумий усуллари Л.Эйлер томонидан ишлаб чиқилган.

Биз келгусида қуйидаги энг кўп учрайдиган функционаллар учун қўйилган турли вариацион масалаларни ечиш усулларини ўрганамиз:

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \\ & \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx, \\ & \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), \dots, y'_n(x)) dx, \\ & \iint_D F(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) dx dy, \end{aligned}$$

бу ерда F – берилган функциялар, $y(x)$, $y_1(x), \dots, y_n(x)$, $z(x, y)$ функциялар эса функционалларнинг аргументларидир.

Маъруза 2

Вариацион ҳисобнинг асосий тушунчалари. Эйлер тенгламаси.

Таъриф. Агар бирор X функционаллар фазосидаги G тўпламнинг ҳар бир $y = y(x)$ элементиға аниқ битта J сон мос қўйилса, у ҳолда $G \subset X$ тўпламда $J(y) \equiv J[y(x)]$ функционал берилган дейилади.

Вариацион ҳисобда X функционал фазо сифатида қўлланиладиган $C_n[a, b]$ (бу ерда ва бундан кейин $n=0, 1, 2, \dots$) фазо қуйидагича аниқланади:

Чизикли нормаланган $C_n[a, b]$ фазо нормаси

$$\|y\|_n = \sum_{k=0}^n \max_{x \in [a; b]} |y^{(k)}(x)|$$

бўлган ҳамда $[a, b]$ кесмада n -тартиблигача (n -тартибли ҳам киради) узлуксиз ҳосилаларға эға бўлган $y(x)$ функциялардан тузилган.

$C_n[a, b]$ фазода y_1 ва y_2 функциялар (чизиклар) ўртасидаги $\rho(y_1, y_2)$ масофа

$$\rho(y_1, y_2)_n = \|y_1 - y_2\|_n = \sum_{k=0}^n \max_{x \in [a; b]} |y_1^{(k)}(x) - y_2^{(k)}(x)|$$

формула билан топилади.

$y^*(x) \in C_n[a, b]$ функция ва $\varepsilon > 0$ - ихтиёрий сон бўлсин.

Ушбу $\rho(y^*, y)_n < \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирадиган $y(x) \in C_n[a, b]$

функциялар (чизиклар) тўплами $y^*(x)$ чизикнинг n -тартибли ε -атрофи дейилади.

Агар $y^*(x)$ чизикнинг бирор ε -атрофига тегишли бўлган барча $y(x)$ функциялар учун

$$J[y^*(x)] \leq J[y(x)] \quad (J[y^*(x)] \geq J[y(x)]) \quad (1)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $J[y(x)]$ функционал $y^*(x)$ чизикда локал ёки нисбий минимум (максимум) га эришади дейилади.

$J[y(x)]$ функциянинг локал минимум ва максимумлари унинг локал экстремумлари дейилади.

Агар (1) муносабат бирор $G \subset C_n[a, b]$ тўпламға тегишли бўлган барча $y(x)$ чизикларда бажарилса, у ҳолда $J[y(x)]$ функционал G тўпламдаги ўзининг абсолют экстремумиға $y^*(x)$ чизикда эришади дейилади.

$J[y(x)]$ функционал $G \subset C_1[a, b]$ тўпламда аниқланган бўлсин. $y(x) \in G$ функциялар нафақат $C_1[a, b]$ фазонинг элементлари, балки $C_0[a, b]$ фазонинг ҳам элементларидир. $J[y(x)]$ функционалнинг $C_0[a, b]$ фазодаги локал экстремуми кучли, $C_1[a, b]$ фазодаги локал экстремуми эса кучсиз локал экстремум дейилади. Функционалнинг ҳар қандай кучли экстремуми бир вақтнинг ўзида кучсиз экстремум ҳам бўлади, тескараси умуман олганда ўринли эмас.

$J[y(x)]$ функционалнинг ҳар қандай абсолют экстремуми кучли ва кучсиз локал экстремум бўлади, бироқ ҳар қандай локал экстремум абсолют экстремум бўлавермайди.

Вариацион ҳисобнинг энг содда масаласи.

$F(x, y, z)$ функция ўзининг барча аргументлари бўйича иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин.

Энди

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (2)$$

кўринишдаги функционални ўрганамиз.

Вариацион ҳисобнинг энг содда масаласи.

Ушбу $y(x) \in C_1[a, b]$ кўринишдаги

$$y(a) = y_0, y(b) = y_1 \quad (3)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирадиган барча функциялар ичидан шундай функцияни топингки, бу функцияда (2)

функционал кучсиз экстремумга эришсин.

Бошқача айтганда, $M_0(a, y_0)$ ва $M_1(b, y_1)$ нукталар орқали ўтувчи барча силлиқ чизиклар ичидан (2) функционалга кучсиз экстремум берадиганини топиш керак.

Вариацион ҳисобнинг энг содда масаласини ечишда қуйидаги теорема қўлланилади.

Теорема 1. (2) функционал $y(x) \in C_1[a, b]$ да кучсиз экстремумга эришиши учун бу функция

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (4)$$

кўринишдаги тенгламани қаноатлантириши зарур.

(4) тенглама Эйлер тенгламаси дейилади ва унинг ечимлари (интеграл чизиклари) (2) функционалнинг экстремаллари дейилади.

Эйлер тенгламаси ёйилган ҳолда қуйидагича ёзилади:

$$y''(x)F_{yy'} + y'(x)F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0.$$

Агар $F_{yy'} \neq 0$ бўлса, бу тенглама иккинчи тартибли дифференциал тенглама бўлади, шунинг учун унинг ечими иккита ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ бўлиб, бу ўзгармаслар (3) чегаравий шартлар ёрдамида топилади.

Функционалнинг ҳар қандай экстремуми бир вақтнинг ўзида кучсиз экстремум ҳам бўлганлиги учун 1-теорема (2) функционалнинг кучли экстремуми учун ҳам зарурий шарт бўлади.

Бундан ташқари, (2) функционалнинг

$$G = \{y(x) \in C_1[a, b] \mid y(a) = y_0, y(b) = y_1\} \quad (5)$$

тўпламдаги абсолют экстремуми локал (кучсиз ва кучли) экстремум ҳам бўлганлиги учун 1-теорема (2) функционалнинг (5) тўпламдаги абсолют экстремумининг ҳам зарурий шартидир.

Шундай қилиб, (4)-(3) масалани ечиб, (5) функциялар тўпламига тегишли бўла туриб, (2) функционалга экстремум бера олиши мумкин бўлган барча чизикларни топиш имконияти бор.

Мисол 1.

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + xy) dx,$$

функционалнинг $y(0) = y(1) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи экстремалларини топим.

Ечиш. Бу ҳолда

$$F(x, y, y') = y'^2 + xy,$$

шунинг учун Эйлер тенгламаси $2y'' - x = 0$ кўринишда бўлади. Унинг умумий ечими

$y = \frac{x^3}{12} + C_1x + C_2$ кўринишда бўлади. $y(0) = y(1) = 0$ шартлардан C_1 ва C_2 ўзгармасларни аниқлаймиз:

$$y(0) = C_2 = 0,$$

$$y(1) = \frac{1}{12} + C_1 + C_2 = 0.$$

Бундан $C_1 = -1/12$, $C_2 = 0$. Демак, биз ўрганаётган масаланинг ягона экстремали

$$y(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x$$

кўринишда бўлар экан.

(4)-(3) масаланинг ечими ҳар доим ҳам мавжуд бўлавермайди, мавжуд бўлган тақдирда эса ҳар доим ҳам ягона бўлавермайди.

Мисол 2.

$$J(y) = \int_0^1 (e^y + xy') dx$$

функционалнинг $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ шартларни қаноатлантирувчи экстремалларини топим.

Ечиш: Эйлер тенгламаси $e^y = 1$ кўринишда бўлади. Бу тенгламанинг ечими бўлган $y(x) = 0$ функция $y(1) = 1$ шартни қаноатлантирмайди ва, демак, берилган масала ечимга эга эмас.

Мисол 3.

$$J[y(x)] = \int_0^\pi (y'^2 - y^2 + 4y \cos x) dx$$

функционалнинг $y(0) = y(\pi) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи экстремалларини топим.

Ечиш: Эйлер тенгламаси $y'' + y = 2 \cos x$ кўринишда бўлади. Унинг умумий ечими

$$y(x) = x \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Энди эса $y(0) = y(\pi) = 0$ шартларни қўллаб,

$$y(x) = (C + x) \sin x$$

ечимларни топамиз, бу ерда C -ихтиёрий ўзгармаслар. Шундай қилиб, берилган масала чексиз кўп ечимга эга.

Маъруза 3

Эйлер тенгламасининг хусусий ҳоллари.

(4) кўринишдаги Эйлер тенгламаси ҳар доим ҳам квадратураларда интегралланавермайди. Кўп ҳолларда (4) тенгламани ечиш анча қийин кечади. Бирок, баъзи хусусий ҳолларда Эйлер тенгламасини ечиш умумий ҳолдагидан анча осон бўлади.

1. F функция y' га боғлиқ эмас, яъни $F = F(x, y)$. Бу ҳолда (4) тенглама $F_y(x, y) = 0$ кўринишга келади. Бу чекли тенглама (яъни дифференциал тенглама эмас)дир, унинг ечими ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ эмас ва, демак, (3) шартларни истисно ҳоллардагина қаноатлантиради.

2. F функция фақат y' га боғлиқ: $F = F(y')$. Эйлер тенгламаси $F_{y'y'} y'' = 0$ кўринишда бўлиб, унинг умумий ечими эса $y(x) = C_1 x + C_2$ тўғри чизиклардир. Шундай қилиб, бу ҳолда функционалнинг экстремаллари тўғри чизиклардан иборат экан.

3. F функция y ўзгарувчига боғлиқ эмас, яъни $F = F(x, y')$. Бу ҳолда (4) тенглама $\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0$ кўринишда ёзилади, бундан ўз навбатида $F_{y'}(x, y') = C_1$ кўринишдаги биринчи интегрални оламиз, яъни биринчи тартибли дифференциал тенглама ҳосил бўлади, буни ечиб функционалнинг экстремаллари топилади.

4. F функция x ўзгарувчига боғлиқ эмас, яъни $F = F(y, y')$. Эйлер тенгламаси $F_y - F_{y'y'} y' - F_{y'y'} y'' = 0$ кўринишда бўлади. Бу тенгламанинг иккала томонини y' га купайтириб, Эйлер тенгламасини $\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = 0$ кўринишга келтирамиз. Бунда Қуйидаги 17-32 масалаларда $J(y)$ функционалнинг тегишли чегаравий ан эса $F - y' F_{y'} = C_1$ биринчи интегрални топамиз.

Вариацион ҳисобнинг геометрик ва физик талқини.

Кўп ҳолларда (2) функционал абсолют экстремумининг (5) функциялар тўпламида мавжуд бўлиши ва унинг хусусиятлари (максимум ёки минимумлиги) физик ёки геометрик мулоҳазалардан ҳам кўриниб туради. Бундай ҳолларда 1-теоремада баён қилинган экстремумнинг зарурий шартига кўра (2) функционалнинг (5) тўпламдаги абсолют минимуми ёки максимумини топиш мумкин бўлади.

Мисол 4. Текисликда жойлашган $M_0(a, A)$ ва $M_1(b, B)$ нуқталарни туташтирувчи чизиклар ичидан энг қисқа узунликка эга бўлган чизикни топинг.

Ечиш. Абсциссалари a ва b бўлган нуқталардан ўтувчи силлиқ $y = y(x)$ чизикнинг

узунлиги $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$ га тенг.

Шунинг учун бу масалани қуйидагича ёзиш мумкин: Шундай $y(x)$ функцияни топингки, бу функция $y(a) = A$, $y(b) = B$ шартларни қаноатлантиргани ҳолда

$$J[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (6)$$

функционални минимизациялаштирсин.

Бу масаланинг Эйлер тенгламаси $y''(x) = 0$ кўринишда бўлади, бундан $y = C_1 x + C_2$ келиб чиқади. Функцияга $x = a$ ва $x = b$ қийматларда қўйилган шартлардан C_1 ва C_2 миқдорларни топиб, $y = \frac{B-A}{b-a}(x-a) + A$ функцияни топамиз. Шундай қилиб, (6) функционал экстремумининг зарурий шarti M_0 ва M_1 нуқталарни туташтирувчи тўғри чизикда бажарилар экан.

Геометрик мулоҳазаларга кўра, иккита нуқтани туташтирувчи чизиклар ичида минимал узунликка эга бўлгани ҳар доим мавжуд, максимал узунликка эга бўлгани эса мавжуд эмас. Шунинг учун юқоридаги тўғри чизик ўша изланаётган чизик бўлади.

Мисол 5. Брахистохрона ҳақидаги масала.

Битта вертикал тўғри чизикда ётмайдиган берилган A ва B нуқталарни туташтирувчи шундай чизикни топиш керакки, A дан B га тушаётган моддий нуқта шу чизик бўйлаб A дан B га энг қисқа вақтда тушсин. (Таранглик ва муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олманг).

Ечиш. Координата бошини A нуқтага жойлаштирамиз, Ox ўқни горизонтал, Oy ўқни эса пастга вертикал йўналтирамиз. Моддий нуқтанинг ҳаракат тезлиги $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$ га тенг, бундан нуқтанинг $A(0,0)$ ҳолатдан $B(a,b)$ ҳолатга етиб боришига сарфланадиган вақтни ҳисоблаб топамиз:

$$J[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx; \quad y(0) = 0, y(a) = b.$$

Бу функционал энг содда ҳоллардан бири (4-ҳол)га тегишли бўлганлиги учун, унинг Эйлер тенгламаси $F - y'F_{y'} = C$ кўринишдаги биринчи интегралга эга, ёки биз қараётган ҳолда

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C,$$

бундан баъзи соддалаштиришлардан сўнг $\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$ ёки $y(1+y'^2) = C_1$

тенгламаларга эга бўламиз. $y' = ctg t$ деб олиб, t параметрни киритамиз; натижада

$$y = \frac{C_1}{1+ctg^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t);$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{ctg t} = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1 (1 - \cos 2t) dt;$$

$$x = C_1 \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2.$$

Демак, изланаётган чизикнинг параметрик шаклдаги тенгламаси

$$x - C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t), \quad y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t)$$

кўринишда бўлади. Агар $2t = t_1$ алмаштириш бажариб, $x = 0, y = 0$ бўлганда $C_2 = 0$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда циклоидлар оиласининг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x = \frac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1), \quad y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t_1),$$

бу ерда $\frac{C_1}{2}$ - айланаётган доиранинг радиуси бўлиб, у циклоиданинг $B(a,b)$ нуқтадан ўтиш шартидан аниқланади. Шундай қилиб, брахистохрона бу циклоида экан.

Мустақил ечиш учун масалалар.

1. Моддий нуқта $M_0(a, A)$ ва $M_1(b, B)$ нуқталарни туташтирувчи $y = y(x)$ ясси чизик устида $v = ky'$ тезлик билан ҳаракатланмоқда. Шундай эгри чизикни топингки, M_0 нуқтадан M_1 нуқтага етиб боргунча кетган вақт энг кичик бўлсин.

2. 33- масалани $M_0(0, 0)$ ва $M_1(1, 1)$ ҳамда $v = x$ бўлганда ечинг.

3. Энг кичик айланиш сирти ҳақидаги масала. $M_0(0, 1)$ ва $M_1(1, 1)$ нуқталарни туташтирувчи $y = y(x)$ силлиқ чизикларни абсцисса ўқи атрофида айлантиришдан айланиш фигураси ҳосил бўлади. $y = y(x)$ чизик қандай бўлганда айланиш фигураси энг кичик юзага эга бўлади.

Маъруза 4

Юқори тартибли ҳосилаларга боғлиқ функционаллар. Кўп функцияли ҳолда Эйлер тенгламаси.

$y(x)$ функциянинг юқори тартибли ҳосилаларига боғлиқ бўлган

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx, \quad (7)$$

функционалнинг экстремумини топиш масаласини ўрганамиз,

бу ерда $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ функция барча аргументлар бўйича $n+1$ тартиблигача бўлган ($n+1$ –тартиблиси ҳам киради) узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга, $y(x) \in C_n[a, b]$.

Бу масалада чегаравий шартлар қуйидагича

$$\begin{aligned} y(a) = y_0, \quad y^{(1)}(a) = \mathfrak{F}_0^{(1)}, \dots, y^{(n)}(a) = \mathfrak{F}_0^{(n)}, \\ y(b) = y_1, \quad y^{(1)}(b) = \mathfrak{F}_1^{(1)}, \dots, y^{(n)}(b) = \mathfrak{F}_1^{(n)}. \end{aligned} \quad (8).$$

Теорема 2. (7) функционал $y(x) \in C_n[a, b]$ функцияда локал экстремумга эришиши учун бу функция ушбу

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y^{(1)}} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y^{(2)}} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \quad (9)$$

Эйлер-Пуассон тенгламасини қаноатлантириши зарур.

Вариацион ҳисобнинг энг содда масаласидаги каби (9) тенгламанинг (8) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимлари (7) функционалнинг экстремаллари) шу функционалнинг

$$G = \{y(x) \in C_n[a, b], y(a) = y_0, \dots, y^{(n)}(a) = y_0^{(n)}, y(b) = y_1, \dots, y^{(n)}(b) = y_1^{(n)}\}.$$

тўпламда мумкин бўлган абсолют экстремумларидир.

Мисол 6. Ушбу

$$J(y) = \int_0^1 (48y - y''^2) dx;$$

функционалнинг

$$y(0) = y'(0) = 0, y(1) = 1, y'(1) = 4$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи экстремалларини топинг.

Ечиш. Эйлер-Пуассон тенгламасини ёзамиз: $y^{(4)} = 24$. Унинг умумий ечими $y(x) = x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$ кўринишда бўлади. Чегаравий шартлар ёрдамида $C_1, \dots, C_4$ ўзгармасларни аниқлаймиз:

$$C_4 = 0,$$

$$C_3 = 0,$$

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0,$$

$$3C_1 + 2C_2 + C_3 = 0,$$

бундан $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Шунинг учун функционал $y(x) = x^4$ чизиқда экстремумга эришиши мумкин.

Кўп функцияли ҳолда Эйлер тенгламаси.

Вариацион ҳисоб энг содда масаласининг яна бир умумлашмаси бир неча функцияли функционалнинг экстремуми ҳақидаги масаладир:

$$J[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x)) dx, \quad (10)$$

бу ерда $F(\dots)$ барча аргументлари бўйича иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлган функция ва

$$y_k(x) \in C_1[a; b], \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Бу масалада чегаравий шартлар

$$y_k(a) = y_k^{(0)}, \quad y_k(b) = y_k^{(1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

кўринишда бўлади.

Бу ҳол учун 1-теорема қуйидагича ёзилади.

Теорема 3. $y_1(x), \dots, y_n(x) \in C_1[a; b]$ функциялар жамламаси (10) функционалга кучсиз экстремум бериши учун бу функциялар Эйлернинг

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y_k'} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

дифференциал тенгламалар системасини қаноатлантириши зарур.

Мисол 7.

$$J[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} (y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1 y_2) dx$$

функционалнинг $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(\pi/2) = y_2(\pi/2) = 1$

шартларни қаноатлантирувчи $y_1(x)$ ва $y_2(x) \in C_1[a; b]$ экстремалларини топинг.

Ечиш. Эйлер тенгламалар системаси

$$y_1'' + y_2 = 0,$$

$$y_2'' + y_1 = 0.$$

кўринишда бўлади. Иккинчи тенгламадан $y_2 = -y_1''$ деб олиб, $y_1^{(4)} - y_1 = 0$ тенгламани оламиз.

Умумий ечим

$$y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

Бундан

$$y_2(x) = -y_1''(x) = -C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

Чегаравий шартлардан $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 1$ эканлиги келиб чиқади ва, демак,

$$y_1(x) = \sin x, \quad y_2(x) = \sin x$$

кўринишдаги функциялар экстремаллар бўлади.

Маъруза 5

Кўп ўзгарувчили функцияга боғлиқ функционаллар. Остроградский тенгламаси.

Ушбу

$$J[z(x,y)] = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy \quad (13)$$

функционални экстремумга текширамиз, бу ерда D соҳанинг C чегарасида $z(x, y)$ функциянинг қийматлари берилган. Ёзувни қисқартириш мақсадида $\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q$ белгилаш киритамиз. F функцияни уч марта, $z = z(x, y)$ функцияни эса икки марта дифференциалланувчи деб фараз қиламиз.

Теорема 4. Агар (13) функционал $z = z(x, y)$ сирт устида экстремумга эришса, у ҳолда $z = z(x, y)$ функция

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0 \quad (14)$$

тенгламани қаноатлантиради.

Бу иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама бўлиб, у Остроградский тенгламаси дейилади.

Мисол 8. Ушбу

$$J[z(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (15)$$

функционални экстремумга текширинг. D соҳанинг C чегарасида $z = z(x, y)$ функциянинг қийматлари берилган: $z = f(x, y)$.

Бу ҳолда Остроградский тенгламаси

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

кўринишда ёки қисқароқ

$$\Delta z = 0$$

кўринишда бўлади, яъни бу машҳур Лаплас тенгламасидир. Демак, Лаплас тенгламасининг D соҳада узлуксиз бўлган ҳамда D соҳанинг чегарасида берилган қийматларни қабул қиладиган ечимини топиш керак. Бу – математик физика тенгламалари фани орқали бизга яхши таниш бўлган Дирихле масаласи–ку, ахир!

Мисол 9. Ушбу

$$J[z(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2z f(x, y) \right] dx dy$$

функционални экстремумга текширинг. D соҳанинг C чегарасида z функциянинг қийматлари берилган. Бу ҳолда Остроградский тенгламаси

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

кўринишда ёки қисқароқ

$$\Delta z = f(x, y)$$

кўринишда бўлади. Бу математик физика масалаларини ечишда кўп қўлланиладиган Пуассон тенгламасидир.

Мисол 10. Берилган C контур ёрдамида ҳосил қилинадиган сиртлар ичидан энг кичик юзага эга бўлганини топиш масаласи ушбу

$$J[z(x,y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

функционални минимумга текширишга келтирилади. Бу ҳолда Остроградский тенгламаси

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right\} = 0$$

ёки

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] = 0,$$

яъни дифференциал геометрия фанидан бизга маълумки, ҳар бир нуктадаги ўртача эгрилик нолга тенг. Физикадан яна шу нарса маълумки, C контурга тортилган совун кўпиклари энг кичик сиртга эга.

Умумий кўринишдаги ушбу

$$J[z(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \iint_D \dots \int F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

функционалга экстремум бериши мумкин бўлган

$$z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

функция

$$F_z - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \{F_{p_i}\} = 0$$

кўринишидаги умумлашган Остроградский тенгламасини қаноатлантириши лозим, бу ерда $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$. Масалан,

$$J[u(x,y,z)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz$$

функционал учун Остроградский тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

кўринишда бўлади.

Кўп ҳолларда J функционалдаги интегралости функция юқори тартибли ҳосилаларга ҳам боғлиқ бўлади. Масалан,

$$J[z(x,y)] = \iint_D F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dx dy$$

функционалга экстремум бериши мумкин бўлган функция қуйидаги тўртинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани қаноатлантириши лозим:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_r\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_s\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_t\} = 0,$$

бу ерда

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Масалан,

$$J[z(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy$$

функционалга экстремум бериши мумкин бўлган z функция куйидаги тенгламани қаноатлантириши лозим:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0.$$

Бу тенглама бигармоник тенглама дейилади ва илмий адабиётларда қисқа қилиб $\Delta \Delta z = 0$ ёки $\Delta^2 z = 0$ кўринишда ёзилади.

Мустақил ечиш учун масалалар.

Қуйидаги функционаллар учун Остроградский тенгламасини ёзинг.

1. $J[z(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$
2. $J[z(x,y)] = \iint_D \left[y^m \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \text{sign}(y) \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$, бу ерда m - ихтиёрий ҳақиқий сон.
3. $J[u(x,y,z)] = \iiint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 u f(x,y,z) \right] dx dy dz$

Маъруза 6

Ўзгарувчан чегарали масалалар. Больц масаласи.

Вариацион ҳисобнинг юқорида ўрганилган масалаларида изланаётган $y(x)$, $x \in [a; b]$ функция (чизик)нинг учлари $[a; b]$ кесманинг четларига маҳкамлаб қўйилган эди. Биз энди ўрганмоқчи бўлган масалаларда эса $y(x)$, $x \in [a; b]$ функцияга $[a; b]$ кесманинг четларида қўйилган шартлар қатъий эмас.

Вариацион ҳисобнинг ўзгарувчан чегарали энг содда масаласи: Шундай $y(x) \in C_1[a; b]$ функцияни ва $x_0, x_1 \in [a; b]$, $x_0 < x_1$ нукталарни топингки, улар

$$y(x_0) = \varphi_0(x_0), \quad y(x_1) = \varphi_1(x_1) \quad (1)$$

шартларни қаноатлантиргани ҳолда ушбу

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (2)$$

функционалга экстремум қиймат берсин, бу ерда

$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x) \in C_1[a; b]$, $F(x, y, z)$ - берилган функциялар ва $F(x, y, z)$ - барча аргументлари бўйича иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга.

Бу масалани қуйидагича баён қилиш ҳам мумкин:

Текисликда $\gamma_1 : y = \varphi_0(x)$ ва $\gamma_2 : y = \varphi_1(x)$, $x \in [a; b]$ силлиқ чизиклар берилган бўлсин. Шундай силлиқ $y = y(x)$ чизикни топиш керакки, бу чизик γ_1 чизикнинг қандайдир нуктасини γ_2 чизикнинг қандайдир нуктаси билан туташтирсин ва (2) функционалга кучсиз экстремум берсин.

Теорема 1. $y(x) \in C_1[a; b]$ функция (2) функционалга (1) шартни қаноатлантирган ҳолда кучсиз экстремум бериши учун, $y(x)$ функция

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Эйлер тенгламасини ва

$$\begin{aligned} [F + (\varphi'_0 - y')F_{y'}]_{x=x_0} &= 0, \\ [F + (\varphi'_1 - y')F_{y'}]_{x=x_1} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

трансверсаллик шартларини қаноатлантириши зарур.

Шундай қилиб, чегаралари ўзгарадиган энг содда масалада экстремалларни аниқлаш учун аввало Эйлер тенгламасининг $y(x, C_1, C_2)$ умумий ечимини топиш керак, сўнгра (3) шартлардан ва

$$\begin{aligned} y(x_0, C_1, C_2) &= \varphi_0(x_0), \\ y(x_1, C_1, C_2) &= \varphi_1(x_1) \end{aligned} \quad (4)$$

тенгламалардан C_1 ва C_2 ўзгармасларни ҳамда $[x_0, x_1]$ кесманинг четларини топиш керак.

Агар изланаётган $y(x)$ чизикнинг учларидан бирида одатдаги чегаравий шарт ($y(a) = y_0$ ёки $y(b) = y_1$) берилган бўлса, у ҳолда (3) кўринишдаги трансверсаллик шартини чизикнинг бошқа учи учун ёзиш керак, холос.

Чегаралари ўзгарадиган силжишли масаланинг хусусий ҳолларидан бири шундайки, бунда $y(x)$ чизик учларидан бирининг абсциссаси, масалан, $x_2 = b$ берилган бўлади, бироқ $x = b$ га мос келган чегаравий шарт қатнашмайди. Бу $y(x)$ чизикнинг $(b, y(b))$ чегаравий нуқтаси $x = b$ вертикал тўғри чизик устида кўчиб юриши мумкинлигини англатади ва, бундай ҳолларда, иккинчи трансверсаллик шarti ўрнига *табиий чегаравий шарт* берилади:

$$[F_{y'}]_{x=b} = 0 \quad (5)$$

Мисол 1. Ушбу

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

кўринишдаги функционаллар учун трансверсаллик шартини ёзинг.

Ечиш. Юкоридаги $F + (\varphi' - y')F_{y'} = 0$ трансверсаллик шarti бу ҳолда $A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} + \frac{A(x, y) y'}{\sqrt{1 + y'^2}} (\varphi' - y') = 0$ ёки $\frac{A(x, y)(1 + \varphi' y')}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$ кўринишни олади.

Чегаравий нуқталарда $A(x, y) \neq 0$ деб фараз қилсак, $1 + \varphi' y' = 0$ ёки $y' = -\frac{1}{\varphi'}$ муносабатларни оламиз, яъни бу ҳолда трансверсаллик шarti ортогоналлик шartига келиб қолди.

Мисол 2. +уйидаги ўзгарувчан чегарали масалада функционалнинг экстремалларини топинг:

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx; \quad y(x_0) = x_0^2 + 2, \quad y(x_1) = x_1.$$

Ечиш: $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ функция фақат y' га боғлиқ (масалан, 1-бобдаги 4-мисолга қаранг) бўлганлиги учун, Эйлер тенгламасининг

$$y(x) = C_1 x + C_2 \quad (6)$$

кўринишдаги умумий ечими учун трансверсаллик шartларини ёзамиз:

$$\left[\sqrt{1 + y'^2} + (2x - y') \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x=x_0} = 0,$$

$$\left[\sqrt{1 + y'^2} + (1 - y') \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x=x_1} = 0.$$

(6) ечимдан фойдаланиб, $y'(x_0) = y'(x_1) = C_1$ муносабатларни топамиз. Бундан,
 (4) шартларни ҳисобга олган ҳолда, C_1 ва C_2 ўзгармасларни аниқлаш учун тўртта тенгламалардан иборат системани ҳосил қиламиз:

$$\sqrt{1 + C_1^2} + (2x_0 - C_1) \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} = 0,$$

$$\sqrt{1 + C_1^2} + (1 - C_1) \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} = 0$$

$$C_1 x_0 + C_2 = x_0^2 + 2,$$

$$C_1 x_1 + C_2 = x_1$$

Бу системани ечиб, топамиз

$$C_1 = -1, C_2 = \frac{11}{4}, x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{11}{8}$$

Демак, экстремалнинг тенгламаси

$$y(x) = -x + \frac{11}{4}, x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{11}{8}$$

кўринишдадир.

Бу масаладаги $J[y(x)]$ функционал $(x_0, y(x_0))$ ва $(x_1, y(x_1))$ нукталарни туташтирувчи чизикнинг узунлигини ифодалайди. Шунинг учун, бу масаланинг геометрик маъноси шуки, $y = x^2 + 2$ парабола ва $y = x$ тўғри чизикни туташтирувчи энг қисқа узунликдаги чизикни топиш керак. Топилган ечим ёрдамида юқорида айтилган парабола ва тўғри чизик орасидаги S масофани топиш мумкин:

$$S = \int_{1/2}^{11/8} \sqrt{1 + (-1)^2} dx = \frac{7}{8} \sqrt{2}.$$

Мисол 3. Қуйидаги масалада функционалнинг экстремалини топинг.

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2) dx; \quad y(0) = 1.$$

Ечиш. Бу масалада $x = \pi/4$ бўлгандаги чегаравий шарт қатнашмаяпти, демак, $y(x)$ чизикнинг ўнг учи $x = \pi/4$ тўғри чизик устида кўчиши мумкин ва, демак, (5) кўринишидаги табиий чегаравий шартни қўллаш зарур.

Эйлер тенгламаси $y'' + y = 0$, унинг умумий ечими эса

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

кўринишдадир. $y(0) = C_1 = 1$ шартдан C_1 ўзгармас топилади, (5) кўринишдаги

$$2y'(\frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} + C_2 \cos \frac{\pi}{4} = 0$$

шартдан эса $C_2 = 1$ топилади, бундан

$$y(x) = \cos x + \sin x$$

эканлиги келиб чиқади.

Кўп функцияли, хусусан, иккита функцияга боғлиқ бўлган

$$J[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$$

функционаллар учун ҳам ўзгарувчан чегарали масалалар юқоридаги каби ҳал қилинади: изланаётган $y = y(x)$, $z = z(x)$ функциялар

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0$$

Эйлер тенгламалар системасини ҳамда

$$\begin{aligned} [F + (\varphi'_0 - y')F_{y'} + (\psi'_0 - z')F_{z'}]_{x=x_0} &= 0, \\ [F + (\varphi'_1 - y')F_{y'} + (\psi'_1 - z')F_{z'}]_{x=x_1} &= 0 \end{aligned}$$

трансверсаллик шартларини қаноатлантириши зарур.

Агар чегаравий нукта бирор $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$ сирт устида силжиётган бўлса, трансверсаллик шартларидан биттасининг ўзи

$$[F - y'F_{y'} + (\varphi'_x - z')F_{z'}]_{x=x_1} = 0, \quad [F_{y'} + \varphi'_y F_{z'}]_{x=x_1} = 0$$

кўринишни олади.

Больц масаласи.

Ўзгарувчан чегарали вариацион ҳисоб масалалари қаторига Больц масаласини ҳам қўшиш мумкин.

Больц масаласида

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx + f(y(a), y(b)), \quad (7)$$

функционалга кучсиз экстремум берадиган $y(x) \in C_1[a, b]$ функцияни аниқлаш талаб қилинади, бу ерда $f(u, v)$ -берилган функция бўлиб u ва v бўйича узлуксиз ҳосилаларга эга.

(7) функционал экстремумининг зарурий шarti куйидаги теоремада ифодаланади.

Теорема 2. (7) функционал $y(x) \in C_1[a, b]$ функцияда кучсиз экстремумга эришиши учун, $y(x)$ функция

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Эйлер тенгламасини ва Больц масаласининг

$$\left[F_{y'} - \frac{\partial f}{\partial y(a)} \right]_{x=a} = 0, \quad \left[F_{y'} - \frac{\partial f}{\partial y(b)} \right]_{x=b} = 0 \quad (8)$$

трансверсаллик шартларини қаноатлантириши зарур.

Теоремадаги (8) шарт Эйлер тенгламасининг $y(x, C_1, C_2)$ умумий ечимидаги C_1 ва C_2 ўзгармасларни аниқлаш учун қўлланилади.

Мисол 3.

$$J(y) = \int_0^{\pi} (y'^2 + y^2 - 4y \sin x) dx + 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi)$$

функционалнинг экстремалларини топинг.

Ечиш. Эйлер тенгламаси $y'' - y = -2 \sin x$ кўринишда бўлиб, у

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \sin x \quad (9)$$

умумий ечимга эга.

(8) трансверсаллик шартини ёзиб,

$$[2y' - 4y]_{x=0} = 2[-C_1 e^x - 3C_2 e^{-x} + \cos x - 2 \sin x]_{x=0} = -C_1 - 3C_2 + 1 = 0,$$

$$[2y' - 2y + 2]_{x=\pi} = [-2C_2 e^{-x}]_{x=\pi} = -2C_2 e^{-\pi} = 0$$

ундан $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ микдорларни топамиз. Шундай қилиб,

$$y(x) = e^x + \sin x$$

функция $J[y(x)]$ функционалга экстремум бериши мумкин бўлган ягона чизикдир.

Шартли экстремум масалалари. Изопериметрик масалалар.

Изланаётган функцияларга чегаравий шартлар билан бир қаторда бошқа қўшимча шартлар ҳам қўйилган вариацион ҳисоб масалалари *шартли экстремум масалалари* дейилади.

Бир неча функцияларга боғлиқ бўлган функционалнинг экстремуми ҳақидаги масалани ўрганамиз:

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x)) dx \quad (10)$$

функционалнинг

$$y_k(a) = y_k^{(0)}, \quad y_k(b) = y_k^{(1)}, \quad k = 1, \dots, n \quad (11)$$

чегаравий шартларни ва қўшимча

$$\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad m < n \quad (12)$$

шартларни қаноатлантирувчи экстремумини топим.

Вариацион ҳисобнинг бу масаласи *Лагранж масаласи* дейилади.

Лагранж функцияси деб аталувчи функцияни тузамиз:

$$\begin{aligned} L(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n', \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \\ = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') + \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') \end{aligned} \quad (13)$$

бу ерда $\lambda_i(x) \in C_1[a, b]$ - ихтиёрий функциялар бўлиб, улар Лагранж кўпайтувчилари дейилади.

Лагранж масаласини ечишда (10) функционалнинг экстремуми учун қуйидаги зарурий шартдан фойдаланамиз.

Теорема 3. Агар $y_1(x), \dots, y_n(x)$ функциялар (11) ва (12) шартлар бажарилганда (10) функционалга экстремум қиймат берса, у ҳолда шундай $\lambda_i(x)$ ($i = 1, \dots, m$) Лагранж кўпайтувчилари топиладики, бунда мос Лагранж функциялари

$$I(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b L dx.$$

функционал учун ёзилган Эйлер тенгламалари системасини қаноатлантиради:

$$L_{y_k} - \frac{d}{dx} L_{y_k'} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (14)$$

3-теорема ёрдамида $J(y_1, \dots, y_n)$ функционалнинг шартли экстремуми ҳақидаги масала $I(y_1, \dots, y_n)$ функционалнинг (12) қўшимча шартларсиз экстремумини топиш масаласига келтирилади.

3-теоремани қўллаш чоғида Лагранж масаласини ечиш учун зарур бўлган изланаётган $y_k(x)$, $k = 1, \dots, n$ функциялар ва $\lambda_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, Лагранж кўпайтувчилари (14) ва (12) кўринишдаги $n + m$ та тенгламали тенгламалар системасидан аниқланади.

Мисол 4. Қуйидаги Лагранж масаласида $J(y_1, y_2)$ функционалга экстремум бериши мумкин бўлган $y_1(x)$, $y_2(x)$ функцияларни топим:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2) dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 2ch1, \quad y_2(1) = 2sh1;$$

$$y_1' - y_2 = 0.$$

Ечиш. Бу масала учун Лагранж функцияси

$$L = y_1'^2 + y_2'^2 + \lambda(y_1' - y_2)$$

кўринишига эга. $y_1(x)$, $y_2(x)$ ва $\lambda(x)$ функцияларни топиш учун, (14) кўринишдаги Эйлер тенгламаси ва

$$2y_1'' + \lambda' = 0,$$

$$2y_2'' + \lambda = 0,$$

$$y_1' - y_2 = 0$$

тенгламалардан иборат системани тузамиз.

Бу системадан аввало $\lambda(x)$ функцияни, сўнггра $y_1(x)$ функцияни йўқотиб $y_2''' - y_2' = 0$ тенгламани тузамиз. y_2' ни z билан белгилаймиз: $z'' - z = 0$. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$z(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Бундан кетма-кет топамиз:

$$y_2(x) = \int z(x) dx = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3$$

$$y_1(x) = \int y_2(x) dx = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x + C_4$$

Энди $C_1, \dots, C_4$ ўзгармасларни топиш учун қуйидаги тенгламалар системасини тузамиз:

$$y_1(0) = C_1 + C_2 + C_4 = 0,$$

$$y_2(0) = C_1 - C_2 + C_3 = 0,$$

$$y_1(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} + C_3 + C_4 = 2ch1,$$

$$y_2(1) = C_1 e - C_2 e^{-1} + C_3 = 2sh1,$$

Бундан $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = C_4 = 0$, яъни мазкур масалада

$J(y_1, y_2)$ функционал

$$y_1(x) = e^x + e^{-x} = 2chx, \quad y_2(x) = e^x - e^{-x} = 2shx,$$

функцияларда экстремумга эришиши мумкин.

Изопериметрик масалалар.

Чегаравий шартлар ва

$$\int_a^b F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx = C_i, \quad i=1, \dots, m, \quad (15)$$

қўшимча шартлар бажарилганда (10) функционалнинг шартли экстремумини топиш масаласи *изопериметрик масала* дейилади.

Изох. Изопериметрик масалада, Лагранж масаласидан фаркли ўларок, қўшимча шартларга $m < n$ тарзидаги шарт қўйилмайди.

Бундай масала учун Лагранж функцияси

$$\begin{aligned}\tilde{L}(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \\ = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) + \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)\end{aligned}\quad (16)$$

кўринишда бўлади, бу ерда $\lambda_i, i = 1, \dots, m$, Лагранж кўпайтувчилари бўлиб, улар ихтиёрий ҳақиқий сонлардир.

Изопериметрик масалани ечишда ҳам экстремумнинг зарурий шарти мавжуд бўлиб, у Лагранж масаласи учун айтилган 3-теоремага ўхшайди.

Теорема 4. Агар $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функциялар (10) функционалга (11), (15)

шартлар бажарилганда экстремум қиймат берса, у ҳолда шундай $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ сонлар (Лагранж кўпайтувчилари) топиладики, қуйидаги Эйлер тенгламалар системаси ўринли бўлади:

$$\tilde{L}_{y_k} - \frac{d}{dx} \tilde{L}_{y'_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (17)$$

Бу ерда $\tilde{L}$ - (16) кўринишдаги Лагранж функцияси.

4-теоремани қўллаш чоғида изопериметрик масалани ечиш учун зарур бўлган изланаётган $y_k(x), k = 1, \dots, n$ функциялар ва $\lambda_i, i = 1, \dots, m$ Лагранж кўпайтувчилари (17) ва (15) кўринишидаги $m + n$ та тенгламали тенгламалар системасидан аниқланади.

Мисол 5. Қуйидаги изопериметрик масалада $J(y)$ функционалга экстремум берадиган $y(x)$ функцияни топинг:

$$J(y) = \int_0^{\pi} y'^2 dx;$$

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1; \quad \int_0^{\pi} y \cos x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ечиш. Бу масалада Лагранж функцияси

$$\bar{L} = y'^2 + \lambda y \cos x$$

кўринишга эга. $\lambda \cos x - 2y'' = 0$ Эйлер тенгламасидан

$$y(x) = -\frac{\lambda}{2} \cos x + C_1 x + C_2$$

ечимларни топамиз. λ Лагранж кўпайтувчисини аниқлаш учун қўшимча

$$\int_0^{\pi} \left(-\frac{\lambda}{2} \cos x + C_1 x + C_2\right) \cos x dx = -\frac{\pi}{4} \lambda - 2C_1 = \frac{\pi}{2}$$

шартдан фойдаланамиз, бундан $\lambda = -2 - \frac{8}{\pi} C_1$ ни топамиз.

Шундай қилиб, Эйлер тенгламасининг умумий ечими

$$y(x) = \cos x + \frac{4}{\pi} C_1 \cos x + C_1 x + C_2$$

кўринишда экан.

C_1 ва C_2 ўзгармаслар

$$y(0) = 1 + \frac{4}{\pi} C_1 + C_2 = 1,$$

$$y(\pi) = -1 + \left(\pi - \frac{4}{\pi}\right) C_1 + C_2 = -1,$$

чегаравий шартлардан аниқланади: $C_1 = C_2 = 0$.

Демак, $J(y)$ функционал $y = \cos x$ функцияда экстремумга эришиши мумкин.

Маъруза 8

Вариацион ҳисобнинг сонли усуллари.

Функционални минимизациялаш масаласининг Эйлер-Лагранж тенгламаларини ечишга келтирилиши билан кўп ҳолларда катта ҳисоблашларни бажаришга мажбур бўламиз. Тақрибий сонли усуллар вариацион ҳисобнинг тўғри усуллари деб аталади. Тўғри (сонли) усулларнинг асосий ғояси шуки, вариацион масал

а чекли сондаги ўзгарувчилик функциянинг экстремумини топишга доир бирор масаланинг лимити сифатида қаралади. Бу усуллар энг кўп тарқалган ва ўрганилган Ритц, Канторович ва Галёркин усуллари. Шунинг таъкидлаш лозимки, вариацион ҳисобнинг сонли усуллари дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишнинг ҳам сонли усуллари.

Ритц усули

Ушбу.

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1 \quad (30)$$

функционалнинг минимумини топиш талаб қилинаётган бўлсин.

Ритц усулининг ғояси шуки, $J(y)$ функционалнинг қийматлари (30) вариацион масаланинг ихтиёрий жоиз эгри чизикларида эмас, балки қуйидаги

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x), \quad (31)$$

кўринишдаги мумкин бўлган барча чизикли комбинацияларда ўрганилади, бу ерда $\varphi_0(a) = y_0$, $\varphi_0(b) = y_1$, ва $\varphi_i(x)$ - чизикли эркин функцияларнинг кетма-кетлиги, $\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Бу функциялар *координата функциялари* дейилади.

(31) кўринишдаги функцияларда (30) функция n та $C_1, \dots, C_n$ ўзгарувчиларнинг функциясига айланади:

$$J(y_n(x)) = \Phi(C_1, C_2, \dots, C_n).$$

$C_1, \dots, C_n$ қийматлар шундай танланадики, натижада $\Phi(C_1, C_2, \dots, C_n)$.

функция экстремумга эришсин, яъни $C_1, \dots, C_n$ қийматлар

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

тенгламалар системасидан аниқланади.

(32) системадан C_i^* , $i = 1, 2, \dots, n$ қийматларни топсак, (32) вариацион масаланинг тақрибий ечими

$$y_n^*(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i^* \varphi_i(x). \quad (33)$$

кўринишда ёзилади.

Минимизацияловчи $\{y_n^*(x), n \in N\}$ кетма- кетликнинг яқинлашиш масалалари анча мураккаб. Улар махсус адабиётларда ўрганилган. Ритц ёки бошқа усулда олинган натижалар аниқлигини баҳолаш учун, одатда, қуйидаги амалий қоидадан фойдаланилади. $y_n^*(x)$ ва $y_{n+1}^*(x)$ ларни ҳисоблаб, уларни $[a, b]$ кесманинг бир неча нуқталарида таққослаб кўрилади. Агар уларнинг қийматлари талаб қилинган аниқликда устма-уст тушса, у ҳолда ўрганилаётган (30) вариацион масаланинг ечими талаб қилинган аниқликда $y_n^*(x)$ га тенг деб ҳисобланади.

Агар $y_n^*(x)$ ва $y_{n+1}^*(x)$ нинг қийматлари ҳеч бўлмаганда баъзи нуқталарда бир-биридан сезиларли фарқ қилса, у ҳолда $y_{n+2}^*(x)$ ҳисоблаб кўрилади ва энди $y_{n+1}^*(x)$ ва $y_{n+2}^*(x)$ ларнинг қийматлари таққослаб кўрилади. Бу жараён $y_{n+k}^*(x)$ ва $y_{n+k+1}^*(x)$ ларнинг қийматлари берилган аниқлик доирасида бир-бири билан устма-уст тушгунча давом эттирилади.

Мисол 12.

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx \quad (34)$$

функционалнинг $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ чегаравий шартлар қаноатлантирувчи экстремалини Ритц усули билан топимиз.

Ечиш. $\varphi_0(x) \equiv 0$ деб оламиз. Координата функциялари сифатида $\varphi_k(x) = x^{k+1} - x^k$, $k \in N$ функцияларни оламиз. Бу функциялар $\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантиради. $n = 2$ деб оламиз. У ҳолда (33) га кўра,

$$y_2(x) = C_1(x^2 - x) + C_2(x^3 - x^2) \quad (35)$$

ва

$$y_2'(x) = C_1(2x - 1) + C_2(3x^2 - 2x) \quad (36)$$

энди (35) ва (36) ни (34) га қўйиб ва интеграллаб, топамиз:

$$\Phi(C_1, C_2) = J(y_2(x)) = \frac{11}{30}C_1^2 + \frac{11}{30}C_1C_2 + \frac{1}{7}C_2^2 - \frac{1}{6}C_1 - \frac{1}{10}C_2$$

$\Phi(C_1, C_2)$ функция экстремумининг зарурий шартидан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial C_1} &= \frac{11}{15}C_1 + \frac{11}{30}C_2 - \frac{1}{6} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C_2} &= \frac{11}{30}C_1 + \frac{2}{7}C_2 - \frac{1}{10} = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

(37) системани ечиб, $C_2^* = 69/473$, $C_1^* = 7/43$, қийматларни топамиз, демак , $y(x)$ экстремалнинг тақрибий $y_2^*(x)$ қиймати

$$y_2^*(x) = \frac{69}{473}(x^2 - x) + \frac{7}{43}(x^3 - x^2) = \frac{1}{473}(77x^3 - 8x^2 - 69x)$$

кўринишда бўлади .

Бу ҳолда қўйилган масаланинг аниқ ечими ҳам бизга маълум:

$$y(x) = \frac{e}{e^2 - 1} (e^x - e^{-x}) - x$$

$y_2^*(x)$ тақрибий ечимнинг Ритц усулида олинган қийматларини унинг аниқ ечими қийматлари билан таққослаймиз.

X	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y(x)	0,0000	-0,0287	-0,0505	-0,0583	-0,0444	0,0000
$y_2^*(x)$	0,0000	-0,0285	-0,0506	-0,0585	-0,0442	0,0000

Таққослаш шуни кўрсатадики, аниқ ва тақрибий қийматлар 0,0002 аниқликда устма-уст тушмоқда.

Канторович усули.

Бу усул функционал бир неча ўзгарувчиларга боғлиқ бўлгандаги вариацион масалаларни ечишда қўлланилади.

$$J[u(x, y)] = \iint_D F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy,$$

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x)\}, \quad u|_{\Gamma_D} = \psi(x, y). \quad (38)$$

бўлсин.

(38) функционалга Ритц усули қўлланиладиган бўлса, қуйидаги координата функциялари танланади :

$$\varphi_0(x, y), \varphi_1(x, y), \dots, \varphi_n(x, y)$$

Ечим
$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \varphi_k(x, y),$$

кўринишда изланади, бу ерда C_k -номаълум ўзгармаслар.

Канторович усулида эса экстремалнинг ифодаси

$$u_n(x, y) = \varphi_0(x, y) + \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x, y), \quad (39)$$

кўринишда олинади, бу ерда $u_k(x)$ - номаълум функциялар бўлиб, улар (38) экстремал қиймат қабул қиладиган қилиб танланади. Ечимни (39) кўринишда қидириш билан экстремаллар синфи анча кенгайди.

Энди (39) ни (38) га қўйиб ва ҳосил бўлган ифодани у бўйича интеграллаб, қуйидаги функционални оламиз:

$$J[u_n(x, y)] = \int_a^b \Phi(x, u_1(x), \dots, u_n(x), u_1'(x), \dots, u_n'(x)) dx$$

$u_k^*(x), k = 1, 2, \dots, n$ функциялар Эйлер-Лагранж тенгламалар системасини қаноатлантириши лозим:

$$\Phi_{u_k^*} - \frac{d}{dx} \Phi_{u_k'^*} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

кўринишдаги $u_n^*(x, y)$ тақрибий қиймат эса $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиклардаги берилган чегаравий шартларни қаноатлантириши лозим.

Мисол 13. Канторович усули билан қуйидаги функционалнинг экстремалини топим:

$$J[u(x, y)] = \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2u \right) dx dy, \quad (40)$$

бу ерда $D = \{(x, y) | -a \leq x \leq b, -b \leq y \leq b\}$, $u|_{\Gamma_D} = 0$, $n = 1$

Ечимни

$$u_1(x, y) = u_1(x)(b^2 - y^2)$$

кўринишда қидирамиз. $y \pm b$ тўғри чизиклардаги чегаравий шартлар бажарилади. $u_1(x, y)$ ни (40) га қўйиб ва y бўйича интеграллаб, топамиз:

$$J[u_1(x)] = \int_{-a}^a \left(\frac{16}{15} b^2 u_1'^2 + \frac{8}{3} b^3 u_1^2 - \frac{8}{3} b^3 u_1 \right) dx.$$

Бу функционал учун Эйлер тенгламаси

$$u_1''(x) - \frac{5}{2b^2} u_1(x) = -\frac{5}{4b^2}$$

кўринишда бўлади.

Бу тенгламанинг умумий ечими:

$$u_1(x) = C_1 ch\sqrt{2,5} \frac{x}{b} + C_2 sh\sqrt{2,5} \frac{x}{b} + 0,5$$

C_1 ва C_2 ўзгармасларни чегаравий шартлардан аниқлаймиз, яъни

$$u_1(-a) = u_1(a) = 0, \quad \text{бундан} \quad C_2^* = 0 \quad \text{ва} \quad C_1^* = -\left(2ch\sqrt{2,5} \frac{a}{b} \right)^{-1}.$$

Пировардида (40) функционал экстремалининг тақрибий ифодасини топамиз :

$$u_1^*(x, y) = u_1^*(x)(b^2 - y^2) = 0,5(b^2 - y^2) \left(1 - \frac{ch\sqrt{2,5} \frac{x}{b}}{ch\sqrt{2,5} \frac{a}{b}} \right).$$

Галёркин усули.

Бу усул ҳам вариацион масалалар, ҳам оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг тақрибий ечимларини топишга мўлжалланган.

Номаълум $u(p)$ функция бирор D соҳада қуйидаги чегаравий масалани қаноатлантирсин :

$$L(u(P)) = f(P), \quad P \in G,$$

$$\gamma \text{ да } \Gamma(u(P)) = 0 \quad (\gamma - G \text{ нинг чегараси}) \quad (41)$$

Бу ерда L - бирор чизикли дифференциал оператор, Γ эса чегаравий шартларнинг чизикли оператори. (41) чегаравий масаланинг тақрибий ечими йиғинди кўринишда изланади:

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(P),$$

бу ерда c_k - ҳозирча номаълум коэффициентлар, $\varphi_k(P)$ - бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирувчи чизикли эркили узлуксиз дифференциалланувчи функцияларнинг системаси δf сифатида

$$\delta f = L(u_n(P)) - f(P)$$

боғланишни белгилаймиз. c_k коэффициентлар D соҳада δf нинг

$\varphi_k(P)$, $k = 1, \dots, n$, функцияларга ортогоналлиги шартидан аниқланади:

$$\int_D [L(u_n(P)) - f(P)] \varphi_k(P) dP = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (42)$$

L оператор чизикли бўлганлиги учун (42) тенгликда c_i ни ҳисоблашга қулай бўлган каноник кўринишда ёзилади:

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_G L(\varphi_i(P)) \varphi_k(P) dP = \int_G f(P) \varphi_k(P) dP,$$

ёки

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_G f_i(P) \varphi_k(P) dP = \int_G f(P) \varphi_k(P) dP,$$

бу ерда $f_i(P) \equiv L(\varphi_i(P))$.

Мисол 14.

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 - 2xy) dx$$

функционалнинг $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи экстремалини топим.

Ечиш: Эйлер тенгламасини тузамиз.

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0, \quad \text{ва}$$

$$Ly = f(x), \quad \text{яъни} \quad y'' = -x. \quad (43)$$

Чегаравий шартлар аввалгидек: $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. Дастлабки масала тенг кучли чегаравий масалага келтирилади:

$$y'' = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Ечимни Галёркин усули билан тақрибий топамиз, бунинг учун изланаётган функцияни

$$y(x) = x(1-x)(A+Bx) = Ax(1-x) + Bx^2(1-x) \quad (44)$$

кўринишда ёзамиз, бу ерда $\varphi_1(x) = x(1-x)$ ва $\varphi_2(x) = x^2(1-x)$. y'' ни ҳисоблаб ва (43) тенгламанинг чап томонига қўйиб δ нинг ифодасини топамиз:

$$\delta f = -2A + B(2-6x) + x.$$

δf нинг $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функцияларга ортогоналлиги шarti ўрнига

A ва B коэффициентлар δf нинг $\psi_1(x)=1$ ва $\psi_2(x)=x$ функцияларга ортогоналлиги шартидан аниқланган ($\psi_1(x)$ ва $\psi_2(x)$ функциялар $[0,1]$ да $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ билан чизикли боғлиқсиз):

$$\begin{aligned} A \int_0^1 -2dx + B \int_0^1 (2-6x)dx &= - \int_0^1 xdx, \\ A \int_0^1 -2dx + B \int_0^1 (2-6x)xdx &= - \int_0^1 x^2 dx. \end{aligned} \quad (45)$$

(45) дан интегралларни ҳисоблаб

$$\begin{aligned} 2A + B &= \frac{1}{2}, \\ A + B &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

тенгламалар системасини оламиз.

Бу системани A ва B га нисбатан ечиб ,

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{6}$$

ни топамиз.

Топилган A ва B коэффициентларни (44) формулага қўйиб экстремал учун изланаётган яқинлашишни топамиз:

$$y^*(x) = \frac{1}{6}x(1-x) + \frac{1}{6}x^2(1-x) = \frac{x(1-x^2)}{6}.$$

Бу масалада топилган тақрибий ечим аниқ

$$y = x(1-x^2)/6$$

ечим билан устма-уст тушмоқда.

Мустақил ечиш учун масалалар.

Галёркин усули билан қуйидаги вариацион масалаларни ечинг. Изланаётган экстремални

$$y_n(x) = \varphi(x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n),$$

кўринишда изланг, бу ерда $\varphi(x)$ чегаравий шартлардан топилади, $n = 1$.

$$1. \quad J(y) = \int_0^2 (xy' + y'^2)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 0.$$

$$2. \quad J(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2 - 2y \sin x)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

$$3. \quad J(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2 - 2ye^x)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Оптимал бошқарув назарияси. Понтрягиннинг максимум принципи

Вариацион ҳисоб ривожланишининг ҳозирги замон босқичини ақс эттирувчи оптимал бошқарув назарияси техника ривожланишининг хилма-хил соҳаларида амалиёт томонидан қуйилган қатор масалаларни ечиш зарурати билан боғлиқ равишда, XX асрнинг 50-йилларида вужудга келди. Бу масалалар математик моҳияти жиҳатидан вариацион булиб, классик моделлар доирасига жойлашмади ва уларни ечишнинг янги усуллари ишлаб чиқишни талаб қилди. Оптимал бошқарув назариясида 1956 йилда Л. С. Понтрягин бошчилигидаги математиклар гуруҳи томонидан очилган Понтрягиннинг максимум принципи асосий усул (натижа) сифатида тан олинган. Оптимал бошқарув масалаларини текширишда Р. Беллманнинг динамик программалаш усули ҳам катта роль ўйнайди.

Оптимал бошқарувнинг асосий масаласи

Оптимал бошқарувнинг математик назариясидаги биринчи масала тез таъсир масаласи бўлиб, у бошқарувнинг оптимал тизимларини куриш хакидаги кўпкина инженерлик масалаларининг умумий холи сифатида юзага келган ва унда мужассам саволлар комплексининг муваффакиятлилигига мувофиқ асосий масала бўлиб колди.

1. Энг содда механик ҳаракатни тез таъсир бўйича оптимал бошқарув масаласи. Бирлик массали моддий нуктани модули бўйича бирдан катта булмаган горизонтал куч ёрдамида минимал вақт давомида горизонтал туғи чизик бўйича у берилган V_0 тезликка эга булган бошланғич A ҳолатдан берилган v_0 тезликда охириги B ҳолатга утказиш талаб қилинсин.

Масаланинг математик куйилишини бошқарув объектининг узгаришини ифодалашдан — моддий нуктанинг ҳаракатидан бошлаймиз. Ньютон қонунига асосан нуктанинг Ox бўйлаб ҳаракати

$$\ddot{x} = u$$

тенглама билан ифодаланади, бу ерда $\ddot{x}(t) = d^2x/dt^2$ — нуктанинг t вақт моментидаги тезланиши; $u(t)$ — бошқарув объектига t $x(t)$ моментда таъсир киладиган кучнинг катталиги.

Масаланинг физик кўйилишидан $x(t)$ учун ўшбу чеклашлар келиб чиқади:

$$x(0)=0, x(0)=v_0, x(t_1)=\beta, x(t_1)=v_1 \quad (2)$$

бу ерда $\dot{x} = dx/dt$ — нуктанинг тезлиги; $t = 0$ — бошланғич моменти $t = t_1$ — ҳаракатнинг охириги моменти.

Фаразимишга кура нуктага куйиладиган ¹¹ кучнинг қийматлари ҳам чегараланган:

$$|u(t)| \leq 1, t \in [0, t_1]. \quad (3)$$

Каралаётган масалага ухшаш масалаларнинг дастлабки инженерлик куйилишларида u кучнинг булакли узлуксиз $u(t) \ t \in [0, t_1]$ функциялар мос келган $u(t), t \geq 0$ конунлари булиши мумкинлиги эътироф килинган.

Шундай қилиб, қаралаётган масаланинг математик модели (3) $t = t_1^0$ чеклашларни каноатлантиридиган шундай булакли узлуксиз $u^0(t), t \in [0, t_1^0]$ функцияни топишдан иборатки (1) тенгламанинг унга мос $x^0(t), t \in [0, t_1^0]$ ечими (2) чегаравий шартларни каноатлантирсин ва охириги t_1^0 момент минимал бўлсин.

Агар $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ фаза ўзгаришчилари (бошқарув объектнинг ҳолат ўзгаришчилари) га утсак, баён қилинган масала қуйидаги қўйилишга олади:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \dot{x}_2 = u, |u| \leq 1, x_1(0) = 0 \\ x_2(0) &= v_0, x_1(t_1) = \beta, x_2(t_1) = v_1, t_1 \rightarrow \min \end{aligned} \quad (4)$$

Понтрягиннинг максимум принципи

Оптималь бошқарув масалаларида масаланинг гамильтонианини максималлаштириш билан боғлиқ бўлган оптималликнинг асосий зарурий шarti максимум принципи деб аталади. Бу маълум биринчи тартибли зарурий шартлар ичида энг кучлисидир. Мазкур параграфда максимум принципи “соф” натижа олишда жуда қулай бўлган терминал бошқарувнинг энг содда масаласи учун исботланади.

1. Терминал бошқарув энг содда масаласининг қўйилиши. Айтайлик, объектнинг ҳаракати

$$\dot{x} = f(x, u, t), x(t_0) = x_0, t \in T = [t_0, t_1] \quad (1)$$

Тенглама билан ифодалансин, бу ерда x - n -ҳолат вектори; u - r -бошқарув вектори; t -скаляр (вақт), t_0, x_0 – бошланғич момент ва ҳолат; t_1 – вақтнинг охириги моменти.

Мувофиқ бошқарувлар синфини 1-§ нинг асосий масаласидагидек қўйибамиз: улар

$$u(t) \in U, t \in T \quad (2)$$

Шартни қаноатлантирувчи бўлакли-узлуксиз r -вектор-функциялардир. Тизимнинг траекторияларига қўшимча шартлар қўйилмаганлигидан, у жоиз бошқарувлар синфи билан устма-уст тушади.

Жоиз бошқарувнинг сифатини (1) тизимнинг охириги (терминал) ҳолатларида аниқланган

$$l(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min \quad (3)$$

Функционал (сифат критерийси, мақсад функционали) билан баҳолаймиз. (1)-(3) масала терминал бошқарувнинг энг содда масаласи деб аталади. Унинг ечими, яъни жоиз $u^0(t), t \in T$ бошқарув ва унга мос $x^0(t), t \in T$ траектория ((1)-(3) масалада) оптимал бошқарув ва траектория деб аталади. (1)-(3) масалани текширишда $f(x, u, t), \partial f(x, u, t) / \partial x, \varphi(x), \partial \varphi / \partial x$ функцияларни узлуксиз деб фараз қиламиз.

2. Сифат критерийси орттирмасининг формуласи. Иккита жоиз $u(t), \bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), t \in T$ бошқарувлар ва (1) тизимнинг уларга мос $x(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t), t \in T$ траекторияларини қараймиз. (3) сифат критерийсининг орттирмаси

$$\Delta l(u) = l(\bar{u}) - l(u) = \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)) \quad (4)$$

Учун формула топамиз. Қилинган фаразларда (4) ифодани қуйидаги қўйилишда ёзиш мумкин:

$$\Delta l(u) = \Delta x'(t_1) \partial \varphi(x(t_1)) / \partial x + O(\|\Delta x(t_1)\|). \quad (5)$$

Траекториянинг орттирмаси $\Delta x(t) = \bar{x}(t) - x(t), t \in T$ ушбу

$$\Delta \dot{x} = f(x + \Delta x, \bar{u}, t) - f(x, u, t), \Delta x(t_0) = 0, t \in T$$

дифференциал тенгламани қаноатлантиради ва уни бундай ёзиш мумкин:

$$\Delta x \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x} \Delta x + \Delta \tilde{u} f(x, u, t) + \frac{\partial \Delta \tilde{u} f(x, u, t)}{\partial x} \Delta x + o_1(\|\Delta x\|, \Delta x(t_0)) = 0. \quad (7)$$

Бу ерда $\Delta \tilde{u} f(x, u, t) = f(x, \bar{u}, t) - f(x, u, t)$, $\partial f / \partial x = \{\partial f_i / \partial x_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}\}$ деб белгиланган. $F(t)$, $t \in T$, $-n \times n$ – матрицали функцияни ушбу

$$F = AF, F(0) = E \quad (8)$$

Тенгламанинг ечими сифатида киритамиз, бу ерда $A = A(t) = \partial f(x(t), u(t)) / \partial x$; E – бирлик диагональ $n \times n$ – матрица. Дифференциал тенгламалар назариясининг тегишли мулоҳазалари орқали (7) тенглама

$$\Delta x(t) = \int_{t_0}^t F(t) F^{-1}(\tau) \Delta \tilde{u} f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \int_{t_0}^t F(t) F^{-1}(\tau) [\partial \Delta \tilde{u} f(x, u, \tau) / \partial x \cdot \Delta x + o_1(\|\Delta x(\tau)\|)] d\tau$$

Энди биз интеграл тенгламага эквивалентлиги кўрсатилади.

Шунинг учун (5) нинг ўрнига

$$\begin{aligned} \Delta I(u) &= [\partial \varphi(x(t_1)) / \partial x]' \int_{t_0}^{t_1} F(t_1) F^{-1}(t) \Delta \tilde{u} f(x, u, t) dt + \\ &+ [\partial \varphi(x(t_1)) / \partial x]' \int_{t_0}^{t_1} F(t_1) F^{-1}(t) [\partial \Delta \tilde{u} f(x, u, t) / \partial x \cdot \Delta x + \\ &+ o_1(\|\Delta x(t)\|)] dt + o(\|\Delta x(t_1)\|) \end{aligned} \quad (9)$$

ни ёзиш мумкин. Энди

$$\psi(t) = -[F^{-1}(t)]' F'(t_1) \partial \varphi(x(t_1)) / \partial x,$$

$$H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t),$$

$$\Delta \bar{u} H(x, \psi, u, t) = H(x, \psi, \bar{y}, t) - H(x, \psi, u, t)$$

Деб белгилаймиз. У ҳолда (9) дан изланган орттирма формуласини оламиз:

$$\Delta I(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta \bar{u} H(x, \psi, u, t) dt + \eta,$$

Бу ерда

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad \eta_1 = o(\|\Delta x(t_1)\|),$$

$$\begin{aligned} \eta_2 &= - \int_{t_0}^{t_1} \Delta x' \partial \Delta \bar{u} H(x, \psi, u, t) / \partial x dt; \eta_3 = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) o_1(\|\Delta x(t)\|) dt. \end{aligned}$$

(8) га мувофиқ, $\psi(t)$ функция қўшма тизим ($u(t)$ $t \in T$ бўйлаб) деб аталадиган

$$\dot{\psi} = -A' \psi, \quad \psi(t_1) = -\partial \varphi(x(t_1)) / \partial x \quad (11)$$

Тенгламани қаноатлантиради. ψ векторнинг $\psi_1, \dots, \psi_n$, компоненталари қўшма ўзгарувчилар деб аталади. $H(x, \psi, u, t)$ функцияни гамильтониан* деб аташ қабул қилинган. Гамильтониан (1), (11) асосий тенгламаларни ихчам (компакт) ва симметрик кўринишда ёзиш имконини беради.

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Игнасимон вариация

Вариацион ҳисоб каби, оптимал бошқарув назариясининг асосий усули-вариациялар усулидир. Лекин оптимал бошқарув назариясининг вариациялари вариацион ҳисобданги усуллардан принципиал фарқ қилади. Янги типдаги энг содда

$$\Delta u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon], \\ v - u(t), & t \in [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon], v \in U, \theta \in [t_0, t_1], \varepsilon \neq 0, \end{cases} \quad (12)$$

фарқли бўлган кесма узунлигининг кичиклиги билан аниқланади.

Кейинги ҳисоблашлар кўрсатадики, кичик ε ларда игнасимон вариация вариация тасвирланган бўлиб, игнасимон деб аталади. Вариациялар $[t_0, t_1]$ да текис кичик бўлиб, игнасимон вариациянинг кичиклиги вариация нолдан ёрдамида ҳосил қилинган $\bar{x}(t)$ траектория $x(t)$ дан кам фарқ қилади:

$$\|\bar{x}(t) - x(t)\| \leq K |\varepsilon|, \quad t \in T \quad (13)$$

лекин унинг $d\bar{x}/dt$ ҳосиласи $v \in U$ векторнинг ихтиёрий бўлганлигидан dx/dt дан катта фарқ қилиши мумкин. Шунинг учун игнасимон вариацияни кучли вариация, VI бобнинг вариацияларини эса кучсиз вариация дейилади. Кучли вариациялар оптимал бошқарув назариясида юқорида аниқланган (кучли) оптимал траекториялар мос келадиган кучли минималларни текшириш учун ишлатилади.

(13) х оссани исботлаш учун (6) тенгламани ечишни игнасимон вариацияда қараймиз. $[t_0, \theta - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ кесмада (6) тенглама

$$\Delta \dot{x} = f(x + \Delta x, u, t) - f(x, u, t), \quad \Delta x(t_0) = 0$$

Кўринишда бўлади ва ягона $\Delta x(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, \theta - \varepsilon]$ ечимга эга бўлади. (6) тенгламани $[\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$ кесмада ёзамиз:

$$\Delta \dot{x} = f(x + \Delta x, v, t) - f(x, v, t), \quad \Delta x(\theta - \varepsilon) = 0.$$

Дифференциал тенгламалар ечимларининг интеграл узлуксизлигидан шундай K_1 соннинг мавжудлиги келиб чиқадики,

$$\|\Delta x(t)\| = \|\bar{x}(t) - x(t)\| \leq K_1 t, \quad t \in [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$$

бўлади, яъни (13) хосса $[\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$ кесмада ўринлидир. Ниҳоят, (6) тенглама $[\theta + \varepsilon, t_1]$ кесмада

$$\Delta \dot{x} = f(x + \Delta x, u, t) - f(x, u, t), \quad \Delta x(\theta + \varepsilon) \sim K_1 |\varepsilon|$$

кўринишда бўлади. Дифференциал тенгламалар ечимларининг бошланғич катталикларга узлуксиз боғлиқлигидан фойдаланиб, бирор $K_2 < \infty$ да $\|x(t)\| \leq K_2 \varepsilon$, $t \in [\theta + \varepsilon, t_2]$ тенгсизлик бажарилишини оламиз. Шундай қилиб, 4. Максимум принципи (13) хосса $K = \max\{K_1, K_2\}$ исботланди.

Понтрягиннинг максимум принципи зарурий шарти

Максимум принципи. Агар жоиз $u(t)$, $t \in T$ бошқарув ва дастлабки (1) ҳамда қўшма (11) тизимларнинг унга мос $x(t), \psi(t)$, $t \in T$ траекториялари бўйлаб тизимнинг гамильтониани максимумга эришса:

$$H(x(t), \psi(t)u(t), t) = \max_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u, t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad \text{жоиз } u(t), t \in T \quad \text{бошқарув}$$

максимум шартини қаноатлантиради дейилади.

1-теорема (Понтрягиннинг максимум принципи). Ҳар бир оптимал бошқарув максимум шартини қаноатлантиради.

Исботи. Айтайлик, $u^0(t)$, $t \in T$ – оптимал бошқарув, $x^0(t), \psi^0(t)$, $t \in T$ – (1), (11) тизимларнинг унга мос ечимлари бўлсин. фараз қилайлик теорема ўринли бўлмасин, яъни бирор $\theta \in]t_0, t_1[$, $v \in U$ ларда

$$\begin{aligned} H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), v, \theta) - H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) = \\ = \Delta_v H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

тенгсизлик бажарилсин. $u^0(t)$, $t \in T$ бошқарувни (12) игнасимон вариация билан вариациялаймиз ва (10) бўйича сифат критерийсининг орттирмасини ҳисоблаймиз.

$$\Delta I(u^0) = I(u^0 + \Delta u) - I(u^0) = \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \Delta_v H(x^0, \psi^0, u^0, t) dt + \eta \quad (15)$$

(12), (13) ни ҳисобга олиб,

$$\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \Delta_v H(x^0, \psi^0, u^0, t) dt = 2\varepsilon \Delta_v H(x^0(\theta),$$

$$\psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) +$$

$$o_2(\varepsilon) = 2\varepsilon\alpha + o_2(\varepsilon), o_2(\varepsilon) \leq K_2\varepsilon^2; \eta_1 \leq K_3\varepsilon^2, \eta_2 \leq K_4\varepsilon^2, \eta_3 \leq K_5\varepsilon^2$$

эканлигини топамиз. Бу баҳоларни (5) га қўйиб, оптималликнинг таърифи $\Delta I(u^0) \geq 0$ га зид бўлган етарлича кичик $\varepsilon > 0$ ларда $\Delta I(u^0) < 0$ кўринишни оладиган $\Delta I(u^0) \leq -2\varepsilon\alpha + K_6\varepsilon^2$ тенгсизликка келамиз. Теорема исботланди.

Максимум принципининг қўлланилиши

Дастлаб оддий тизимлардаги оптимал жараёнлар учун исботланган максимум принципи мураккаб тизимларда ҳам ухшаш натижалар олиш учун асос бўлиб хизмат қилди. Ундан вариацион ҳисобнинг куп классик натижалари олинди мумкин. Амалий масалаларда максимум принципи оптималлаштиришнинг ҳар хил сонли алгоритмларини қуриш учун қўлланилади. Ушбу параграфда максимум принципининг энг содда қўлланишларини келти-рамиз.

1. Максимум принципининг чегаравий масаласи.

2. Ушбу оптимал бошқарув масаласини қарайлик:

$$I(u) = \varphi_0(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad x = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \varphi_i(x(t_1)) \leq 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1] \quad (1)$$

Гамильтон функциясини тузамиз:

$$H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t)$$

ҳада $u = u(x, \psi, t)$ бошқарувни $H(x, \psi, u(x, \psi, t), t) = \max_{u \in U} H(x, \psi, u, t)$ шартдан топамиз. Ушбу

$$x = \frac{\partial H(x, \psi, u(x, \psi, t), t)}{\partial \psi}, \quad \psi = - \frac{\partial H(x, \psi, u(x, \psi, t), t)}{\partial x},$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \psi(t_1) = - \sum_{i=0}^q \lambda_i \partial \varphi_i(x(t_1)) / \partial x, \quad (2)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{0, p}, \quad \sum_{i=0}^q |\lambda_i| > 0,$$

$$\lambda_i \varphi_i(x(t_1)) = 0, \quad i = \overline{1, p},$$

масала **максимум принципининг чегаравий масаласи** деб аталади. (1) масаланинг ҳар бир $u^0(t), t \in T$ оптимал бошқаруви (2) чегаравий масаланинг бирор $x(t), \psi(t), t \in T$ ечимидан олинади: $u^0(t) = u(x(t), \psi(t), t), t \in T$. Шунинг учун, агар (1) масалада $u^0(t), t \in T$ оптимал бошқарув мавжуд бўлиб, (2) чегаравий масала ягона ечимга эга бўлса, $u^0(t), t \in T$ ни қуриш учун (2) масалани ечиш етарлидир.

2. Оптимал бошқарувнинг сифат характеристикаларини олиш.

Амалий масалаларда максимум принципи куп ҳолларда оптимал бошқарувнинг шундай характеристикаларини олиш имконини берадики, улар бошланғич мураккаб масалани бошқа соддарок масалага алмаштириш ёки мураккаб бўлмаган таҳлил ёрдамида бошқарувларнинг у ёки бу синфлари оптимал бошқарувни уз ичига олмаслигини исботлаш имконини беради. Масалан, куп амалий масалаларда (хусусий ҳолда, ракетадинамика масалаларида) бошқарув тизимининг математик модели

$$\dot{x} = f_{(0)}(x, t) + u f_{(1)}(x, t), \quad |u| \leq 1 \quad (3)$$

қурилишга эга бўлади.

Максимум принципи ва $H(x, \psi, u, t) = \psi' f_{(0)}(x, t) + u \psi' f_{(1)}(x, t)$ гамильтонианнинг тузилишидан $u^0(t)$ оптимал бошқарувнинг таркиби келиб чиқади:

$$u^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{агар } \psi'(t) f_{(1)}(x(t), t) > 0 \\ -1, & \text{агар } \psi'(t) f_{(1)}(x(t), t) < 0 \\ \in [-1, 1] & \psi'(t) f_{(1)}(x(t), t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

(3) объект хакида кушимча маълумот берилганда, куп холларда, $u^0(t)$ бошқарув чекли сондаги утишларга (+1 кийматдан -1 кийматга ва аксинча) эга булишини исботлаш ёки $\psi'(t)f_{(1)}(x(t),t) = 0$ булган ораликда *махсус бошқарувни* топиш мумкин булади. Бу фактлар (3) тизимнинг динамикаси хакидаги аниқ тасаввурлар билан бирга мутахассисларга оптимал бошқарувга етарли якин якинлашиш топиш ёки уни аниқ айтиш имконини беради.

Ушбу чизикли $\dot{x} = Ax + bu, |u| \leq 1$ тизим учун *бошқарилувчанлик критерийси* $rank\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\} = n$ бажарилганда оптимал бошқарув (4) га асосан, факат ± 1 кийматларни қабул килади ва чекли сондаги сакрашларга эга булади (релели бошқарув). Шунинг учун оптимал бошқарувнинг чексиз улчовли масаласи сакраш нукталари $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ ларни ва биринчи интервалда бошқарувнинг ишорасини аниқлашга келтирилади, бу чекли улчовли масаладир.

Оптимал бошқарувнинг муҳим характеристикаси у буйлаб тизим **гамильтониани** $H(x, \psi, u, t)$ нинг узгаришидан иборат. Мувофик бошқарувлар $u(t), t \in T$ булакли-узлуксиз булганлигидан $H(t) = H(x(t), \psi(t), u(t), t)$ функция улар буйлаб, умуман айтганда, булакли узлуксиздир. Шу факт ажойибки, U — компакт бўлганда гамильтониан $u^0(t), t \in T$ оптимал бошқарув буйлаб (хар бир $u^0(t), t \in T$ Понтрягин экстремали буйлаб) узлуксиздир. Бунга кушимча равишда, агар $\partial f / \partial t \in C$ булса, $u^0(t), t \in T$ бошқарувнинг узлуксизлик нукталарида вақт бўйича тула хосила $\partial H / \partial t$ мавжуд булиб, у $\partial H / \partial t$ хусусий хосилага тенгдир.

Хакикатан, максимум шартдан $t \in T$ ва $t^* = t + \Delta t \in T$ моментлар учун ушбуларни оламир:

$$\begin{aligned} H(t) = H(x(t), \psi(t), u(t), t) &\geq H(x(t), \psi(t), u(t^*), t), \\ H(x(t^*), \psi(t^*), u(t^*), t^*) &\geq H(x(t^*), \psi(t^*), u(t), t^*) \end{aligned}$$

Биринчи тенгсизликни иккинчисидан айириб,

$$\begin{aligned} H(x(t^*), \psi(t^*), u(t), t^*) - H(x(t), \psi(t), u(t), t) &\leq H(t^*) - H(t) \leq \\ H(x(t^*), \psi(t^*), u(t^*), t^*) - H(x(t), \psi(t), u(t^*), t) \end{aligned} \quad (5)$$

ни оламир. $x(t), \psi(t)$ функцияларнинг узлуксизлигидан (5) даги чап четки ифода нолга интилади. Фараз килайлик, $t^* = t_k \rightarrow t, k = 1, 2, \dots$ кетма-кетлик буйлаб

$H(x(t^*), \psi(t^*), t^*) - H(x(t), \psi(t^*), t) \geq \alpha > 0$ бўлсин. U -тўпламнинг компактлигидан $u(t_k) \in U, k = 1, 2, \dots$ кетма-кетликдан якинлашувчи қисм кетма-кетлик ажратиш мумкин, уни ёзувда соддалик учун бошланғич $u(t_k) \rightarrow u^*, k \rightarrow \infty$ кетма-кетлик сифатида оламир. $f(x, u, t)$ функциянинг U бўйича узлуксизлигига асосан (5) дан

$0 < \alpha \leq \lim_{k \rightarrow \infty} [H(x(t_k), \psi(t_k)u(t_k), t_k) - H(x(t), \psi(t)u(t_k), t)]$ зиддиятни оламир. Шундай қилиб, (5) даги унг четки ифода $t^* \rightarrow t$ да нолга интилади, яъни $H(t^*) \rightarrow H(t)$ ва $H(t)$ функция узлуксиздир.

(5) тенгсизликларни $\forall t > 0$ га бўламир. $\Delta t \rightarrow 0$ деб олиб, амалларни аввало (5) даги чап тенгсизлик учун амалга оширамир:

$$\begin{aligned} & \frac{H(x(t^*), \psi(t^*), u(t), t^*) - H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\Delta t} = \\ & = \frac{H(x(t^*), \psi(t^*), u(t), t^*) - H(x(t), \psi(t^*), u(t), t^*)}{\Delta t} + \\ & + \frac{H(x(t), \psi(t^*), u(t), t^*) - H(x(t), \psi(t), u(t), t^*)}{\Delta t} + \\ & \frac{H(x(t), \psi(t), u(t), t^*) - H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\Delta t} \leq \frac{H(t^*) - H(t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Бунда $\Delta t \rightarrow 0$ да лимитга утсак,

$$\begin{aligned} & x'(t) \partial H(x(t), \psi(t), u(t), t) / \partial x + \psi'(t) \partial H(x(t), \psi(t), \\ & u(t), t) / \partial \psi + \partial H(x(t), \psi(t), u(t), t) / \partial t \leq dH(t) / dt \end{aligned} \quad (6)$$

булади. Шунингдек,

$$\dot{x} = \partial H / \partial \psi, \quad \dot{\psi} = -\partial H / \partial x$$

булганлигидан, (6) тенгсизлик соддалашади:

$$\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t) / \partial e \leq dH(t) / dt \quad (7)$$

Шунга ухшаш, $u(t)$ функциянинг t нуктада узлуксизлигини ҳисобга олсак, (5) даги ун-г тенгсизлик учун

$$\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t) / \partial e \leq dH(t) / dt \quad (8)$$

булади.

(7), (8) дан исбот қилинадиган хосса

$$\frac{dH(x(t), \psi(t), u(t), t)}{dt} = \frac{dH(x(t), \psi(t), u(t), t)}{dt}$$

келиб чиқади. (1) тизимлар стационар ($f(x, u, t) = f(x, u)$) бўлганда хусусий хосила нолга тенг бўлиши тушунарли ва шунинг учун тизимнинг гамильтониани Понтрягин экстремали буйлаб узгармасдир.

Оптимал тизимни аниқ амалга ошириш, бошқарув қонунларининг мураккаблигидан, қўп харажатлар билан борлиқдир. Бу эса қўп ҳолларда тизимлардан воз кечиш учун далил қилиб қўрсатилади. Аслида эса оптимал тизимлар уларда оптимал тизимларга яқинлашиш аниқлиги амалга ошириш харажатлари билан мослаштирилган субоптимал тизимларни қўришда эталон сифатида фойдаланилади.

3. Жоиз бошқарувларни яхшилаш.

Амалий масалаларни текширишда оптимал бошқарув масаласини ечиш урнига қўпинча мавжуд (яхши бўлиши ҳам мумкин булган) бошқарувларни янада яхши сифатлироқлари билан алмаштириш ҳақидаги чегараланган масалани ечиш етарлидир. Тизим қўрсаткичларини 10—15% га яхшилашга имкон берувчи самарали *яхшилаш алгоритмлари* катта аҳамиятга эгадир.

Оптималликнинг ҳар бир зарурийлик шарти билан бу шартни қаноатлантирмайдиган жоиз бошқарувни яхшилаш алгоритмининг боғлаш мумкин. Мазкур бандда максимум принципи ва унинг натижалари билан боғлиқ алгоритмлар баён қилинади.

Айтайлик, $u(t), t \in T$ терминал бошқарувнинг энг содда масаласи (2-§):

$$I(u) = \varphi_0(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad x = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U = [t_0, t_1]$$

да жоиз бошқарув бўлсин, (9) тизимнинг $u(t), t \in T$ бошқарувга мос траекториясини $x(t), u(t), t \in T$ деб белгилаймиз.

Ушбу

$$\psi = - \frac{dH(x(t), \psi(t), u(t), t)}{dt} \quad \psi(t_1) = - \frac{d\varphi(x(t_1))}{dx}$$

кушма тизимни $x(t), u(t), t \in T$ лар буйлаб унгдан чапга интеграллаш натижасида $\psi(t), t \in T$ функцияни топамиз. Гамильтонианга максимум берувчи функцияни $u^*(t)$ орқали белгилаймиз:

$$u^*(t) \in \operatorname{Arg} \max_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u, t)$$

Агар $u(t) = u^*(t), t \in T$ булса, бошланғич бошқарув (9) масалада максимум принципини қаноатлантиради ва уни оптималликнинг бу зарурийлик шarti ёрдамида яхшилаш мумкин эмас.

Айтайлик, $\theta \in]t_0, t_1[$ тўпلامнинг шундай нуктаси бўлсинки, унда $u(\theta) \neq u^*(\theta)$ ва $u(t)$ функция узлуксиз бўлсин. Мувофик булган кичик соҳада $u^*(t)$ бошқарувнинг парчаси киритилган ушбу

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u^*(t), & t \in]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[, \\ u(t), & t \in]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[, \varepsilon > 0 \end{cases}$$

бошқарувни курамиз.

Сифат критерийси орттирмасини тахлил қилиб шундай $\varepsilon_0 > 0$ сон мавжуд булишини ва барча $\varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ учун $\bar{u}(t), t \in T$ бошқарув $u(t), t \in T$ дан яхши эканлигини курамиз: $I(\bar{u}) < I(u)$

(9) масалада жоиз бошқарувни яхшилашнинг иккинчи усулини баён қилиш учун аввало максимум принципдан килинган фаразларга кушимча $f(x, u, t)$ функция u бўйича дифференциалланувчи, U тўпلام эса каварик деб олганда келиб чиқадиган натижани оламиз: ҳар бир $u^0(t)$ оптимал бошқарув ва (9) масаланинг бошланғич ҳамда кушма тизимларининг унга мос $x^0(t), \psi^0(t)$ ечимлари учун

$$\frac{dH'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{du} u^0(t) = \max_{u \in U} \frac{dH'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{du} u, t \in]t_0, t_1[$$

шарт бажарилади. ҳақиқатан, агар шундай $\theta \in]t_0, t_1[$ момент ва $\vartheta \in U$ элемент мавжуд бўлсаки,

$$\begin{aligned} \partial H'(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) / \partial u \cdot u^0(\theta) &= \\ &= \partial H'(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) / \partial u \cdot v - \alpha, \alpha > 0 \end{aligned}$$

булса, етарли кичик $\varepsilon > 0$ лар учун максимум шартига зиддият олинади:

$$\begin{aligned} H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta) + \varepsilon(v - u^0(\theta)), \theta) - \\ H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) &= \\ = \varepsilon \partial H'(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) / \partial u (\vartheta - u^0(\theta)) + o(\varepsilon) &= \\ = \varepsilon \alpha + o(\varepsilon) > 0 \end{aligned}$$

(10) шартни текшириш чизикли функцияни максималлаштириш билан боғлиқдир. У максимум шартини текширишдан соддароқдир. Оптималликнинг (10) муносабатга асосланган зарурийлик шартини **чизиклилаштирилган максимум принципи** деб аташ қабул қилинган.

Айтайлик, $u(t), t \in T$ (10) муносабат бажарилмайдиган жоиз бошқарув бўлсин. Ушбу

$\bar{u}(t) = u(t) + \varepsilon(u^*(t) - u(t)), \varepsilon > 0, t \in T$ (11) жоиз бошқарувни курамиз, бу ерда $u^*(t) \in \operatorname{Arg} \max_{u \in U} u' \partial H(x(t), \psi(t), u(t), t) / \partial u, u \in U$ (11) бошқарувни орттирма

формуласига келтириб қўйсак, $u^*(t) \neq u(t), t \in T$ бўлганда шундай $\varepsilon_0 > 0$ топиладики,

барча ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ учун $I(\bar{u}) < I(u)$ тенгсизлик бажарилади, яъни (11) бошқарув бошланғич бошқарувдан яхшироқдир.

(9) масала учун максимум принципнинг бошқа натижаси олдинги натижадагидек, $f(x, u, t)$ функция u бўйича дифференциалланувчи, U тўплам эса очик бўлганда олинади.

**Динамик программалаштириш. Беллман функцияси ва тенгламаси.
Беллман функциясини ҳисоблаш**

Динамик программалаштириш деб математик моделлари кўп босқичли ва динамик жараёنли характерга эга бўлган чизиксиз программалаштиришнинг махсус масалалари (I-IV) ва оптимал бошқарув масалаларини ечишнинг ҳисоблаш усулига айтилади. Бу усул жараёнларнинг кетма-кет таҳлилига асосланган бўлиб, экстремал масалаларни ечишда америкалик олим Р. Беллман томонидан XX асрнинг 50-йилларидан бошлаб дастлаб систематик ва пирнципиал кенг қўлланила бошланди. Мазкур маърузада бу усулнинг асосий қоидалари чизиксиз программалаштиришнинг қатор махсус масалалари учун баён қилинади. Динамик программалаштиришнинг оптимал бошқарув масалаларига татбиқлари берилади.

1-§. Ресурсларни таҳминлаш масаласи

Айтайлик, c ҳажмли хомашё ва n та технологик жараён мавжуд бўлсин. Агар хомашёнинг x миқдорини x технологик жараёнда сарфланса, $f_i(x)$ фойда олинади.

Максимал фойда олиш учун хом ашёни жараёнлар ўртасида қандай тақсимлаш керак?

Фараз қилайлик, x_i i - жараён учун ажратилган хом ашё миқдори бўлсин. У ҳолда қўйилган ресурсларни тақсимланиш масаласининг математик модели

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n x_i = c, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

кўринишини олади.

(1) чизиксиз программалаш масаласининг ўзига хослиги шундан иборатки, унинг мақсад функцияси $f(x)$ ва асосий чеклаш функцияси $g(x)$ сепарабелдир, яъни улар бир ўзгарувчилик функциялар йиғиндисини шаклида ифодаланган.

Экстремал масалани динамик программалаш усули билан ечишнинг биринчи босқичи-берилган масалани унга ўхшаш масалалар оиласига инвариант туркумлашдан иборатдир. Бу босқич маълум маънода санъат бўлиб, ҳар бир муайян ҳолда тадқиқотчининг тажрибаси, сезгиси ва маҳоратига боғлиқдир. У (1) масала учун ихтиёрий $k, 1 \leq k \leq n$ сондаги технологик жараёнларга ва $y, 0 \leq y \leq c$ хом ашё ғамламасига эга бўлган ресурсларни тақсимлашнинг ушбу

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n x_i = y, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (2)$$

масалаларни қарашдан иборатдир. $k = n, y = c$ бўлганда (2) масалалар оиладан бошланғич (1) масала олинади.

Беллман функцияси ва тенгламаси

(2) масалалар оиласидан олинган ихтиёрий масала мақсад функциясининг оптимал қиймати $B_k(y)$ Беллман функцияси дейилади ва қуйдагича белгилаш киритилади

$$B_k(y) = \max \sum_{i=1}^k f_i(x_i), \quad \sum_{i=1}^k x_i = y, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k} \quad (3)$$

Масалани динамик программалаш усули билан ечишнинг иккинчи босқичи-Беллман функцияси учун тенгламани олишдан иборатдир. Бу босқичда беллманнинг оптималлик принципи умумий ҳолда қўлланилади. (1) масала учун унинг моҳияти қуйида келтирилган мулоҳазалар орқали берилади. Бу мулоҳазалар оддий математик фактларга асосланган ва етарлича универсал. Изланаётган тенгламани тузишда инвариант жойлашнинг тўғрилиги намоён бўлади. Иккинчи томондан, жойлаштириш усули

тенгламанинг кўринишида ҳам сезилади, k жараёнли ва у хом ашё ғамламасига эга бўлган (2) масалада k -жараёнга z , $0 \leq z \leq y$ миқдордаги хомашё ажратамиз. Бунда k жараёндан олинadиган жойда $f_k(z)$ га тенг бўлади. 1, 2, ..., $k-1$ номерли жараёнлар учун эса $y-z$ миқдордаги хомашё қолди. Айтайлик, бу хомашё қолган жараёнларга оптимал тақсимланган бўлсин. (3) нинг аниқланишига кўра $k-1$ та жараёндан келадиган фойданинг максимал миқдори $B_{k-1}(y-z)$ га тенг бўлади.

Шундай қилиб, k жараёнга z миқдорда хомашё ажратилганда барча k жараёнлар ва у хомашё ғамламасидан

$$f_k(z) + B_{k-1}(y-z) \quad (4)$$

фойда оламиз.

Z миқдорни $0 \leq z \leq y$ чегарасида ўзгартириб, (4) умумий фойда максимал бўладиган $x_k^0(y)$ жараён учун хомашёнинг оптимал миқдори) қийматни топамиз:

$$f_k(x_k^0(y)) + B_{k-1}(y - x_k^0(y)) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_k(z) + B_{k-1}(y-z)] \quad (5)$$

Иккинчи томондан, (3)га асосан хомашё миқдори y бўлганда k та жараёндан олинadиган максимал фойда $B_k(y)$ га тенгдир. Бу қийматни (5) ифоданинг ўнг томонига тенглаштириб, $B_k(y)$ функция учун

$$B_k(y) = \max_{0 \leq z < y} [f_k(z) + B_{k-1}(y-z)], \quad k = \overline{1, n}, \quad 0 \leq y \leq c \quad (6)$$

тенгламани оламиз. Бу Беллман тенгламаси деб аталади. (6) тенглама $B_k(y)$ функциянинг нисбатан рекурент бўлганлигидан уни ечиш учун бошланғич шарт берилиши керак. Уни (3) дан $k = 1$ бўлганда топиш мумкин:

$$B_1(y) = \max f_1(x_1), \quad x_1 \geq 0$$

шундай қилиб, Беллман тенгламаси (6) учун бошланғич шарт

$$B_1(y) = f_1(y) \quad (7)$$

кўринишга эга бўлади.

Беллман тенгламасини ечиш

Масалани динамик программалаш усули билан ечишнинг учинчи (ва охириги) босқичи Беллман тенгламасининг ечимини излашдан ва у бўйича (1) масаланинг ечимини куришдан иборатдир. (6) тенгламада $k = 2$ деб оламиз:

$$B_2(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_2(z) + B_1(y-z)] \quad (8)$$

Бу ифоданинг ўнг томонидан берилган $f_2(z)$ функция ва (7) дан топилган $B_1(y)$ функция бор. Шунинг учун (8) формула маълум бир ўзгарувчилиги функцияни максималлаштириш билан $B_2(y)$ функцияни ҳисоблаш имконини беради. Сўнгра (6) да $k = 3, 4, \dots, n$ деб олиб, ҳар бир ҳолда бир ўзгарувчилиги функцияни максималлаштириш амални бажариб, кетма-кет $B_3(y)$, $B_4(y)$, ..., $B_n(y)$ функцияларн оламиз.

(1) га асосан $B_n(c)$ сон (1) бошланғич масала учун максимал фойдадан иборатдир. Хомашёнинг технологик жараёнлар бўйича оптимал тақсимотини топиш учун (5) ифодага мурожаат қиламиз. Унда $k = n$, $y = c$ деб олб, (5) нинг аниқланиши бўйича агар барча c та жараён учун хомашё миқдори c га тенг бўлса, охириги жараёнга (бу ҳолда n - жараёнга) ажратилган хомашёнинг оптимал миқдорга тенг бўлган $x_{0n}(c)$ сонни оламиз. Шундай

килиб, бошланғич масала $x^0 = \{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ оптимал режасининг x_n^0 компонентаси топилади: $x_n^0 = x_n^0(c)$

Агар n - жараён учун x_n^0 миқдор ажратилса, у ҳолда қолган $n-1$ та жараён учун $c - x_n^0$ миқдордаги хомашё қолади. (5) да $k = n - 1$, $y = c - x_n^0$ деб оламиз ва $x_{n-1}^0(c - x_n^0)$ ни топамиз. Равшанки, (1) масаланинг x^0 оптималнинг охиргидан олдинги компонентаси $x_{n-1}^0 = x_{n-1}^0(c - x_n^0)$ га тенгдир. Ечиш жараёнини давом эттириб, (1) бошланғич масала ечимининг $x_{n-2}^0, \dots, x_n^0$ компонентларини топамиз.

Натижани таҳлил қиламиз. Усулнинг афзалликлари: 1) бошланғич n та ўзгарувчи бўйича максималлаштириш масаласи (1) битта ўзгарувчи бўйича $n-1$ та максималлаштириш масаласи (6) га келтирилди ҳамда натижа-глобал оптимал режадан иборат бўлди; 2) ечиш жараёнида масала элементларининг аналitik хоссаларидан фойдаланилмайди; берилган функциялар жадвал, график, алгоритмик ва ҳ.к кўринишда берилиши эди; 3) $B_k(y)$ ларни ҳисоблаш натижалари бўйича c ва n нинг қийматларини вариациялаб, (1) масаланинг ечимини осон қуриш мумкин; бу (1) масала ечимининг кўрсатилган параметрларнинг ўзгаришига сезгирлигини таҳлил имконини беради.

Усулнинг асосий камчилг Беллман томонидан «ўлчовнинг қарғши» деб аталган бўлиб, у шундай иборатки, (6) Беллман тенгламасини ечишда функцияларни эсда сақлашга тўғри келади. Берилган битта хомашёни тақсимлаш масаласида улар бир ўзгарувчи функциялардан иборат. Умумий ҳолда эса аргументларнинг сони хомашёнинг хиллари сонига тенг бўлади. ЭХМ да кўп ўзгарувчи функциялар ($n > 2$) жадвалларини тузиш оператив хотира имкониятининг чегараланганлигидан принципиал қийинчиликларга олиб келади, шунинг учун бу усулнинг муҳокама қилинаётган шу камчилиги кўп ўлчовли (c -вектор) масалаларни ечишда динамик программалашнинг юқорида баён қилинган классик тарҳини амалга ошириш имконини бермайди. «Ўлчов қарғши» ни бартараф этишнинг турли усуллари тавсия қилинган.

Беллман функциясини ҳисоблаш

(1) масалага оид сонли мисол қараймиз, унинг катталиклари I –жадвалда берилган. Беллман функциясини ҳисоблашни 2-жадвалда бажарамиз. Ҳар бир катакда беллман функциясининг қиймати билан бир қаторда, қавс ичида

I-жадвал

x	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	0	1	2	3	4	5
$f_3(x)$	0	1	2	3	4	5

2- жадвал

y	1	2	3	4	5
$B_1(y)$	1	2	3	4	5
$B_2(y)$	1(0)	2(0)	3(0)	4(0.4)	7(5)
$B_3(y)$	2(1)	3(1)	4(1)	5(1)	7(0)

(6) тенгламанинг ўнг томони максимумга эришадиган $x_n^0(y)$ қиймат ҳам кўрсатилган. V.2-жадвалдан кўринадик, қаралаётган масалада максимал фойда $B_3(5) = 7$ бўлади. Ресурсларни оптимал тақсимланишни топамиз. $x_3^0(5) = 0$ бўлганлигидан, учинчи технологик жараёнга ресурс ажратамиз: $x_3^0 = 0$. Шундай қилиб, 1, 2 жараёнларга тўлиқ 5 ҳажмдаги ресурс қолди. V.2-жадвалдан $x_2^0(5) = 5$ эканлигини топамиз. Демак, максимал фойда олиш учун ҳамма ресурсни иккинчи технологик жараёнга ажратиш керак ($x_2^0 = 5$). шунинг учун, $x_1^0 = 0$.

Дискрет жараёнларини оптимал бошқаруви. Дискрет максимум принципи

Ҳолати фақат дискрет вақт моментларида ўзгарадиган ёки ўлчаш мумкин бўлган жараёнлар (тизимлар) дискрет (кўп кадамли, кўп боскичли) деб аталади. Улар кўп амалий масалаларни моделлаштиришда юзага келади. Вақт бўйича узлуксиз жараёнлар ҳам ЭХМни куллаш боскичи олдидан дискрет ҳолатга келтирилади. Чизиксиз программалаш масалаларининг махсус синфини ташкил қилувчи дискрет жараёнларни оптималлаштириш масаласини ечиш учун, динамик программалаш усули ишлаб чиқилган.

1. Дискрет максимум принципи. Ушбу n улчовли $x(t)$ ҳолати дискрет вақт моментлари $t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, \dots (h > 0)$ да

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + hf(x(t), u(t), t), \\ x(t_0) &= x_0, \quad t \in T = [t_0, t_0 + h, \dots, t_1 - h] \end{aligned} \quad (1)$$

рекуррент тенгламага мувофиқ ўзгарадиган жараённи қараймиз, бу ерда $u(t) - t$ моментда бошқарув r -вектори; $h > 0$ — дискрет жараённинг кадами. (1) модель, масалан, $x = f(x, u, t)$ узлуксиз моделдан $x(t) \approx (x(t+h) - x(t))/h$ деб олсак келиб чиқади.

r улчовли фазонинг берилган $U(t)$ тўпламларидан қийматлар қабул қилувчи $u(t), t \in T$ r -векторлар кетма-кетлиги

$$u(t) \in U(t), t \in T \quad (2)$$

ни *жоиз бошқарув* деб атаймиз. *Ҳар* бир жоиз бошқарув $u(t), t \in T$ бўйича (1) га мувофиқ, (1) дискрет тизимнинг *жоиз траекторияси* деб аталадиган $x(t), t \in T_1 = [t_0, t_0 + h, \dots, t_1]$ n га-векторлар кетма-кетлигини қуриш мумкин.

Ушбу

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min \quad (3)$$

максад функциясини (сифат критерийсини) жоиз бошқарувларда минималлаштириш масаласи *дискрет тизимларда терминал бошқарувнинг энг содда масаласи* деб аталади.

Агар $x(t_1)$ векторни (1) дан топиб (3) га қуйсак, чизик, сиз программалаштириш масаласи ҳосил бўлади. Бошқарув масалалари учун хос бўлган катта $t_1 - t_0$ ларда ёки кичик h ларда ҳосил қилинган масала жуда кўп сондаги ўзгаришчиларга эга бўлади ва II, IV боблардаги усулларнинг бевосита қўлланилиши қийин ва самарали эмас. Шунинг учун (1)–(3) масалани ечишда (1) чеклашларнинг «динамиклигидан» иборат бўлган махсус тузилишини исобга олиш зарурдир.

(1) — (3) масала мазкур бандда 2-§ масаласининг дискрет ухшаши сифатида талкин қилинади ва унинг учун $f(x, u, t), \partial f(x, u, t) / \partial x, \varphi(x), \partial \varphi(x) / \partial x \in C$ деб олиниб, *Понтрягин максимум принципининг дискрет варианты* исботланади. (1)–(3) масаланинг $u^0(t), t \in T, x^0(t), t \in T_1$ ечимини оптимал бошқаруви ва траектория дейимиз.

$u^0(t), t \in T$ билан бирга бршқа жоиз $u(t) = u^0(t) + \Delta u(t), t \in T$ бошқарувини қарамиз ва орттирма ҳисоблаймиз:

$$\Delta I(u^0) = I(u) - I(u^0) = \varphi(x(t_1)) - \varphi(x^0(t_1)) = \Delta x'(t_1) \partial x + 0(\|\Delta x(t_1)\|) \quad (4)$$

бу ерда $\Delta x(t) = x(t) - x^0(t), t \in T_1$, тизимининг $u(t), t \in T$ бошқарувга мос траекториясидир. Ихитиёрий $\Delta x(t), \psi(t), t \in T, \Delta x(t_0) = 0, n$ -вектор-функцлар учун

$$\sum_{t \in T} \psi'(t) \Delta x(t+h) = \sum_{t \in T} \psi'(t-h) \Delta x(t) + \psi'(t_1-h) \Delta x(t_1) \quad (5)$$
 айният уринлидир. Бу ерда

$$\psi'(t_1-h) = -\partial \varphi(x^0(t_1)) / \partial x \quad (6)$$

деб олиб, (4), (5) дан $\Delta I(u^0) = -\sum_{t \in T} \psi'(t) \Delta x(t+h) + \sum_{t \in T} \psi'(t-h) \Delta x(t) + 0 \parallel \Delta x(t_1) \parallel$ (7) ни

оламир. Траекториянинг $\Delta x(t) = x(t) - x^0(t)$ орттирмеси

$$\Delta x(t+h) = \Delta x(t) + h[f(x^0(t) + \Delta x(t), u^0(t) + \Delta u(t), t) - f(x^0(t), u^0(t), t)], \Delta x(t) = 0 \quad (8)$$

тенгламани каноатлантирилганлигидан $H(x, \psi, u, t) = \psi'[x + hf(x, u, t)],$
 $\Delta_u H(x, \psi, u, t) = H(x, \psi, \tilde{u}, t) - H(x, \psi, u, t)$

белгилашларни киритиб,

$$\begin{aligned} \psi'(t) \Delta x(t+h) = \\ H(x^0 + \Delta x, \psi, u_0 + \Delta u, t) - H(x^0, \psi, u^0, t) = \\ \Delta_u H(x^0, \psi, u^0, t) + \Delta x'(t) \partial H(x^0, \psi, u, t) / \partial x + 0_1(\parallel \Delta x(t) \parallel) \end{aligned} \quad (9)$$

деб ёзиш мумкин. Бу натижани (7) га қўямиз ва у билан бир вақт

$$\psi(t-h) = \partial H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t) / \partial x, t \in T \quad (10)$$

деб оламир.

Натижада сифат критерийсининг орттирмеси учун изланган

$$\Delta I(u^0) = -\sum_{t \in T} \Delta_{u(t)} H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t) + \eta \quad (11)$$

формулани оламир, бу ерда

$$\begin{aligned} \eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \eta_1 = 0(\parallel \Delta x(t_1) \parallel), \\ \eta_2 = -\sum_{t \in T} \Delta x'(t) \frac{\partial \Delta_{u(t)} H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (12)$$

2-§ дагидек, бошқарувнинг *игнасимон* вариацияси ўхшашини киритамиз:

$$\Delta u(t) = \begin{cases} v - u(\theta), \theta \in T, v \in U(\theta) \\ 0, t \in T, t \neq \theta \end{cases} \quad (13)$$

Бу функцияни (8) тенгламага келтириб қўйиб,

$$\begin{aligned} \Delta x(t) \equiv 0, t \in [t_0, \theta], \Delta x(t+h) = h \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta), \\ \Delta x(t+h) = \Delta x(t) + h[f(x^0(t) + \Delta x(t), u^0(t), t) - f(x^0(t), u^0(t), t)], t \in [\theta+h, t_1-h] \end{aligned} \quad (14)$$

га эга бўламиз. Демак,

$$\Delta I(u^0) = -\Delta_v H(x^0(\theta), \psi(\theta), u^0(\theta), \theta) + \eta \quad (15)$$

шу билан бирга $\eta_3 = 0$. Агар $f(x, u, t) = A(u, t)x + b(u, t)$, $\varphi(x)$ -ботик функция бўлса, у

ҳолда $\eta_2 = 0, \eta_1 \leq 0$ яъни $\Delta_v H(x^0(\theta), \psi(\theta), u^0(\theta), \theta) = -\Delta I(u^0) + \eta_1 \leq 0$ бу эса $u^0(t), t \in T$

оптимал бошқарув бўйлаб максимум шarti

$$H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U(t)} H(x^0(t), \psi(t), u, t) \quad t \in T \quad (16)$$

бажарилишини англатади.

Умумий ҳолда (16) шарт $\Delta I(u^0) \geq 0$ дан ва (15) формуладан келиб чиқмайди, яъни (13) вариация (1)-(3) масала учун максимум принципини исботлаш имконини бермайди. Буни шундай тушинтирилади: узлуксиз ҳолда (2-§) вақтнинг узлуксизлигидан фойдаланиш муҳим бўлиб, унеда игнасимон вариациянинг параметри ε етарли кичик қилиб олигиши мумкин эди. Дискрет тизимларда бошқарувни бевосита вариация қилиш мумкин булган минимал вақт кесмасининг узунлиги $h > 0$ дан кичик бўла олмайди.

Дискрет максимум принципи

1- теорема, (дискрет максимум принципи). Айтайлик $u^0(t), t \in T$ $x^0(t), t \in T_1$ — ушбу $f(x, U(t), t) = \{y : y = f(x, u, t), u \in U(t)\}$ (17) тўплами каварик булган (1) — (3) масаланинг оптимал бошқаруви ва траекторияси бўлсин.

У холда $u^0(t), t \in T$ $x^0(t), t \in T_1$ ва (6) (10) қўшма тизимнинг $\psi(t), t \in T$ траекторияси буйлаб (16) максимум шартни бажарилади.

Исботи. Айтайлик, теорема уринли булмасин, яъни бирор $\theta \in T$ $v \in U(\theta)$ (6) лар учун $\Delta_v H(x^0(\theta), \psi(\theta), u^0(\theta), \theta) = \alpha > 0$ тенгсизлик бажарилсин. У холда ушбу

$$f(x^0(\theta), v(\varepsilon), \theta) - f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) = \varepsilon [f(x^0(\theta), v^0(\theta) - f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta)], \varepsilon \in [0, 1] \quad (18)$$

тенгликни каноатлантирувчи $v(\varepsilon) \in V(\theta), \varepsilon \in [0, 1]$ r - вектор функцияни курамиз. (17) тўпланинг кавариклигидан бундай функция мавжуддир (VII.19- чизма). $v(\varepsilon)$ ни (14) га v нинг урнига куямиз. У холда бевосита хисоблашлар ёрдамида текширсак, $\|\Delta x(t)\| \leq K\varepsilon, t \in T$, яъни $\eta \leq K_1 \varepsilon^2$ булади. Агар (18) тенгликни (15) да фойдалансак,

$$\begin{aligned} \Delta I(u^0) &= -\varepsilon \Delta_v H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) + \eta \leq \\ &\leq -\varepsilon \alpha + K_1 \varepsilon^2 \end{aligned}$$

ни оламиз. Бу ердан етарли кичик $\varepsilon > 0$ ларда $\Delta I(u^0) < 0$ эканлиги келиб чиқади. Бу $u^0(t), t \in T$ бошқарувнинг оптималлигига зиддир. Теорема исботланди. (17) шарт 1-теореманинг уринли булиши учун муҳимдир. Масалан,

$$\begin{aligned} x_2(2) &\rightarrow \min, \\ x_1(t+1) &= x_1(t) + u, \quad x_2(t+1) = x_2(t) + x_1^2(t), \\ x_1(0) &= x_2(0) = 0, \quad U(t) = \{u : u = \pm 1\}, \quad T = [0, 1] \end{aligned}$$

масалада $u^0(0) = 1, u^0(1) = 1$ оптимал бошқарув максимум принципини каноатлантирмайди. Ҳақиқатдан,

$$\begin{aligned} H(x, \psi, u, t) &= \psi_1(x_1 + u) + \psi_2(x_2 + x_1^2), \psi_1(t-1) \\ &= \psi_1(t) + 2\psi_2(t)x_1, \psi_2(t-1) = \psi_2(t), \psi_1(1) = 0, \psi_2(1) = -1 \end{aligned}$$

Бундан $x_1^0(1) = 1, x_1^0(2) = 2, x_2^0(1) = 0, x_2^0(2) = 1$ оптимал траектория буйлаб, $\psi_1(0) = -2, \psi_2(0) = -1, H(x^0(0), \psi(0), u, 0) = \psi_1(0)u = -2u$ ни оламиз.

$H(x^0(0), \psi(0), u, \theta) = -2u, u \in U$ функция $u = u^0(0) = 1$ нуктада (16) максимумга эмас, балки минимумга эришади.

(1)—(3) масала етарли кичик $h > 0$ ларда 2-§ да текширилган терминал бошқарувнинг энг содда масаласига яқиндир. Бу масалаларда оптималлиқнинг зарурий шартлари орасидаги борланиш қуйидаги даъво ёрдамида берилади.

2- теорема (квазимум принципи) Айтлик берилган t^0, t_1 ларда (1) тизимнинг жоиз траекториялари $h, h \leq h_0 < \infty$ бўйича текис чегараланган бўлсин. У холда ихтиёрли $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $h_* > 0$ сон топиладики, $0 < h \leq h_*$ булган (1) — (3) масаланинг ҳар бир $u^0(t), t \in T$ оптимал бошқаруви (1), (6), (10) тизимларнинг унга мос $x^0(t), t \in T_1, \psi^0(t), t \in T$ ечимлари билан бирга ε максимум шартини қаноатлантиради:

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) \geq H(x^0(t), \psi^0(t), u, t) - \varepsilon$$

барча $u \in U(t) t \in T$ лар учун.

Исботи. Фараз қилайлик, теорема уринли булмасин: шундай $\varepsilon_* > 0$ сон мавжуд бўлиб, ҳар бир етарли кичик $h > 0$ учун шундай $\theta = \theta(h) \in T$ ва $v = v(h) \in U(\theta)$ лар топилсинки,

$$H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) - H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), v, \theta) + \varepsilon_* = \alpha = \alpha(h) < 0$$

бўлсин. $u^0(t), t \in T$ бошқарувга (13) вариацияни куллаймиз. 2- § дагига ухшаш курсатиш мумкинки, $x^0(t), t \in T_1, \psi^0(t), t \in T$ траектория ларнинг текис чегараланганлигидан узгармас K ни $h, 0 < h \leq h_0$ га бошлик булмаганда танлаш мумкин. Орттирма формуласи (15) дан

$$\Delta I(u^0) = -\Delta_v H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) + o(h) = \alpha - \varepsilon_* + o(h) \quad (19)$$

ни оламир.

Исталган $h, 0 < h \leq h_0$ лар учун $\alpha - \varepsilon_* < 0$ ва ε_* сон h га борлик булмаганлигидан (19) нинг унги томони етарли кичик h ларда нолдан кичикдир: $\Delta I(u^0) < 0$ бу эса $u^0(t) t \in T$ нинг оптималлигига зиддир. Теорема исботланди.

Маъруза 13

Чизиқли программалаштириш назарияси. Чизиқли программалаштириш масаласига мисоллар.

ЧП масалаларининг қўйилиши ва ёзилиши.

Полиэдрда берилган чизиқли функциянинг максимуми ёки минимумини топиш масаласи чизиқли программалаштириш масаласи (ЧПМ) дейилади. Демак, ЧПМни

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \max, Ax \leq b \quad (1)$$

бу ерда $A \in A(m, n)$, $b \in R^m$, $c \in R^n$ кўринишда ёзиш мумкин. Мазкур масаланинг жоиз тўпламини алоҳида

$$X = \{x \in R^n / Ax \leq b\}, = \{x \in R^n / \langle a_i, x \rangle \leq b_i, i = 1, \dots, m\} \quad (2)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Теорема 1. Чизиқли программалаштириш масаласининг ҳар қандай локал ечими глобал ечим бўлади.

Шу тасдиқни назарда тутиб, келгусида чизиқли программалаштириш масаласининг шунчаки ечими ҳақида гапиримиз.

(2) масала ечимларининг X^* тўплами якка полиэдр бўлади, чунки, агар бу тўплам бўш бўлмаса, бу тўплам

$$X = \{x \in R^n / Ax \leq b, \langle c, x \rangle \geq \phi^*\} \quad (3)$$

кўринишда тасвирланади, бу ерда ϕ^* масаланинг қиймати, яъни

$$\phi^* = \sup_x \langle c, x \rangle.$$

(1) кўринишдаги ЧПМ масаласи чизиқли программалаштиришнинг бош масаласи (ЧПБМ) дейилади. Жоиз тўплами билан бир-биридан фарқ қиладиган бошқа шаклдаги чизиқли программалаштириш масалалари ҳам бор. Бунда илгаригидек,

$A \in A(m, n)$, $b \in R^m$, $c \in R^n$ деб ҳисоблаймиз.

ЧПнинг стандарт масаласи (ЧПСМ)

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \max, Ax \leq b, x \geq 0 \quad (4)$$

ЧПнинг каноник масаласи (ЧПКМ)

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0 \quad (5)$$

ЧПнинг умумий масаласи (ЧПУМ)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, i = 1, \dots, k \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, i = k + 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, S \end{aligned} \quad (6)$$

Чизиқли программалаштиришнинг минимумни топишга доир масаларида ҳам шу каби ёзувлардан фойдаланилади, фақат барча тенгсизликлар $\geq$ кўринишда ёзилади.

Кўриниб турибдики, (1), (4) ва (5) масалаларнинг ҳар бири (6) ЧПУМнинг хусусий ҳоссаларидир.

$K=m$ ва $sk0$ бўлса (1) масала, $k\neq m$ ва skn бўлса, (4) масала, $k=0$ ва skn бўлса, (5) масала ҳосил бўлади. Ўз навбатида ЧПУМ ҳам қолган учта масаладан бири кўринишида ёзилиши мумкин.

Масалан, агар (6) масалада тенгликлар ўрнига унга тенг кучли бўлган

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq -b_i, \quad i = k+1, \dots, m \quad (7)$$

тенгсизликларни қўлласак, (6) масала бош масала кўринишини олади.

Агар шунга қўшимча тарзда ўзгарувчиларни

$$x_j = u_j - v_j, u_j \geq 0, v_j \geq 0, \quad j = s+1, \dots, n \quad (8)$$

тарзда алмаштирсак, у ҳолда (6) масала стандарт шаклга келади. Энди $\omega_i (i = 1, \dots, k)$ қўшимча ўзгарувчиларни олайлик, бу ўзгарувчилар мақсад функциясида ноль коэффициентли бўлиб, формал қатнашади. Агар (6) даги тенгсизликларни

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \omega_i = b_i, \omega_i \geq 0, i = 1, \dots, k \quad (9)$$

кўринишда ёзиб ва (8) кўринишдаги ўзгарувчиларни алмаштиришни қўлласак, (6) масала каноник масалага айланади.

Умуман айтганда, чизиқли программалаштиришнинг ҳар қандай масаласини у ёки бу шаклда ёзиш мумкин.

Чизиқли программалаштириш масаласига мисоллар.

ЧПМга қўплаб мисол келтириш мумкин. Шулардан учтасини мисол келтирамиз.

1-мисол (ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласи).

Битта корхона n та товар ишлаб чиқаради, ва бунга m та хом ашё сарфлайди. қуйидагилар маълум:

a_{ij} – j -товарнинг бир бирлик миқдорини ишлаб чиқариш учун зарур бўлган i хом ашёнинг миқдори $a_{ij} \geq 0 (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$;

b_i – i - хом ашёнинг корхонадаги захираси $b_i > 0$;

c_j - j - товар бирлик миқдорининг нархи $c_j > 0$.

Ишлаб чиқариш технологияси чизиқли, яъни хом ашё сарфи ишлаб чиқариш ҳажми билан тўғри пропорционал ўсади.

x_j - j - товарнинг ишлаб чиқариш режаси ҳажмини белгилайди. У ҳолда

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m \quad (10)$$

Бундан ташқари, қуйидаги табиий чеклаш ҳам бор:

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \quad (11)$$

X товарнинг умумий нархи

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (12)$$

билан ёзилади.

Ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласи қуйидагича қўйилади: (10) ва (11) шартларни қаноатлантирувчи барча x векторлар ичидан (12) миқдорга энг катта қиймат берадиганини топинг. Демак, биз (4) кўринишдаги ЧПСМга эга бўлдик, бу ерда хусусан, $A_k(a_{ij})$ - номанфий матрица, $b_k(b_i)$ ва $sk(c_j)$ векторлар мусбат.

2-мисол. (Рацион ҳақидаги масала). Кишилар катта жамоаларининг масалан, армия, касалхона ва ҳаказо, овқатланишини ташкил қилишда тегишли тиббий талабларни қаноатлантирадиган тежамли овқатланиш рационини ҳақида масала пайдо бўлади.

m та озиқ-овқат (нон, гушт, сут, картошка ва х.к) мавжуд бўлиб, улар n та фойдали (ёғ, оксил, углевод, витамин ва бошқалар) моддалар бор бўлсин.

Қуйидаги параметрлар маълум:

a_{ij} — j — озиқ-овқат бирлик миқдоридаги i модданинг миқдори,

$$a_{ij} \geq 0, (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

b_i — i — фойдали модданинг масалан, бир ойга сарфланиши лозим бўлган минимал миқдори, $b_i > 0$;

c_j — j — озиқ-овқат бирлик миқдорининг баҳоси, $c_j > 0$.

Рацион ҳақидаги масала қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (13)$$

Бу ерда x_j бир ойда j озиқ-овқатнинг миқдори. Бошқача айтганда, барча $x = (x_1, \dots, x_n)$ озиқлар ичидан энг арзонини танлаш керак. Демак, (13)-ЧПнинг стандарт масаласи.

Мисол 3. (Транспорт масаласи). Ҳандайдир бир жинсли маҳсулот (қўмир, ғишт, картошка ва х.к) m та омборларда сақланади ва n та жойларга етказилиши керак.

Қуйидаги параметрлар маълум:

a_i — i — омбордаги маҳсулот захираси $a_i > 0, (i = 1, \dots, m)$

b_j — j — жойдаги маҳсулотга эҳтиёж $b_j > 0, (j = 1, \dots, n)$

c_{ij} — маҳсулот бирлик миқдорини i омбордан

j жойга ташиш нархи $c_{ij} > 0$

Бунда барча захиралар барча эҳтиёжларга тенг:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (14)$$

Транспорт масаласи каноник масала сифатида қуйилади:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (15)$$

x_{ij} — i — омбордан j жойга олиб бориладиган маҳсулот миқдори. Бошқача айтганда, маҳсулот ташишни шундай ташкил этиш керакки, барча транспорт харажатлари энг кам бўлсин.

ЧП масалаларининг геометрик талқини ва асосий хоссалари

Икки ўзгарувчили чизикли программалаштириш масаласи ни геометрик усулда ечиш мумкин. Масалан, чизикли программалаштириш бош масаласи $n=2$ да берилган бўлсин. У холда умумий қоидага кўра, энг аввало текисликда масаланинг жоиз тўплами X полиэдрни тасвирлаш керак ((2)га қаранг). Унинг мақсад функцияси $\langle c, x \rangle = \alpha$ куринишдаги параллел тўғри чизиклар оиласини ташкил қилади. ($\alpha \in R$), уларнинг умумий нормали $\langle c, x \rangle$ нинг ўсиш томонига қараган бўлади. Ечимни топиш масаласи барча α лар ичида шундай энг катта α^* ни топишга келтириладики, бунда $\langle c, x \rangle = \alpha$ тўғри чизик X билан бўш бўлмаган кесишмага эга бўлсин.

Агар шундай (чекли) α^* мавжуд бўлса, бу холда бу α^* масаланинг ечими бўлади.

Бунда X нинг $\langle c, x \rangle = \alpha^*$ тугри чизикда ётган ҳар қандай нуқтаси масаланинг ечими бўлади. X^* ечим ягона бўлиши ҳам, ягона бўлмаслиги ҳам мумкин. Агар етарлича катта α ларда ҳам $\langle c, x \rangle = \alpha$ тугри чизикнинг X билан кесишмаси бўлмаган бўлса, у холда масаланинг қиймати чексиз бўлади ва демак, масала ечимга эга эмас.

Чизикли программалаштиришнинг кўп ўзгарувчили баъзи масаларини ечишда геометрик мулоҳазалар ўринли бўлиши мумкин. Масалан, чизикли программалаштириш масаласи каноник шаклда берилган бўлсин:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (16)$$

Бу ерда $n - m = 2$ ва $A = (a_{ij})$ матрицанинг ранги m га тенг. У холда юқоридаги тенгламалар системасида иккита ўзгарувчилар, айтилиқ,

x_1 ва x_2 озод бўлиб қолади, яъни улар орқали бошқа барча қолган ўзгарувчиларни ифодалаш мумкин:

$$x_j = \alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2 + \beta_j, \quad j = 3, \dots, n \quad (17)$$

Бу ерда $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \beta_j$ – баъзи сонлар. Бу ифодаларни мақсад функциясига қўйиб

$$\gamma = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \delta \quad (18)$$

ифодани оламин, бу ерда $\gamma_1, \gamma_2, \delta$ – сонлар.

Икки ўзгарувчили чизикли программалаштириш масаласини қараймиз:

$$\begin{aligned} \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 &\rightarrow \max \\ \alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2 + \beta_j &\geq 0, \quad j = 3, \dots, n \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Геометрик усулдан фойдаланиб, (x_1^*, x_2^*) ечимни топамиз. Бу сонларни (17) ва (18) га қўйиб, (16) масаланинг ечими ва қийматини топамиз.

Юқорида баён қилинган ўзгарувчиларни йўқотиш усулини нафақат $n - m = 2$ бўлганда, балки $n - m = 1$ бўлганда ҳам қўллаш мумкин.

Бу холда масала бир ўзгарувчили чизикли программалаштириш масаласини ечишга келтирилади.

Чизикли программлаштириш масаласининг асосий хоссалари.

Агар чизикли программлаштириш масаласининг жоиз тўплами бўшмас ва чегараланмаган бўлса, у ҳолда Вейерштрасс теоремасига кўра, масала ечимга эга.

Теорема 2. Агар чизикли программлаштириш масаласи нинг жоиз тўплами бўшмас, қиймати эса чекли бўлса, у ҳолда бу масала ечимга эга.

Юқорида айтилганидек, $I(x^*)$ деганда $x^* \in X$ нуктадаги фаол чеклашларнинг номерлари тўпламини тушунамиз.

$$I(x^*) = \{i, 1 \leq i \leq m \mid \langle a_i, x^* \rangle = b_i\}$$

Бу ерда X - (2) кўринишдаги полиэдр.

Теорема 3. (Чизикли программлаштиришнинг бош масаласида экстремум мавжудлигининг зарур ва етарли шarti). x^* - (1) масаланинг жоиз нуктаси бўлсин. Агар шундай $y_i^* \geq 0$ ($i \in I(x^*)$) сонлар топилиб,

$$c = \sum_{i \in I(x^*)} y_i^* a_i \quad (20)$$

бўлса, фақат шундагина x^* нукта (1) масаланинг ечими бўлади.

Мана шу тасдиқдан умумий масала учун керакли тасдиқни олиш мумкин.

Теорема 4. (Чизикли программлаштиришнинг умумий масаласида экстремум мавжудлигининг зарур ва етарли шarti). x^* (6) масаланинг жоиз нуктаси бўлсин.

Агар шундай $y^* = (y_i^*) \in R^m$ вектор топилиб, барча $i \in \{1, \dots, k\}$ да $y_i^* \geq 0$ ва

$$\sum_{i=1}^m y_i^* a_{ij} \geq c_j \quad j = 1, \dots, s \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^m y_i^* a_{ij} = c_j \quad j = s+1, \dots, n \quad (22)$$

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^m y_i^* a_{ij} - c_j \right) = 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (23)$$

$$y_j^* \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i^* - b_j \right) = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (24)$$

бўлса, ва фақат шундагина, x^* нукта (6) масаланинг ечими бўлади.

Кўриниб турибдики, 3-теорема 4-теореманинг хусусий ҳолидир, чунки $k = m, s = 0$ бўлганда (21) ва (23) шартлар шунчаки қатнашмайди, (24) шарт эса барча $i \in \{1, \dots, m\} \mid I(x^*)$ ларда $y_i^* = 0$ деган шартга тенг кучлидир.

Теорема 5. Чизикли программлаштириш масаласи ечимга эга бўлсин, унинг жоиз тўплами камида битта учга эга бўлсин. У ҳолда масаланинг ечими бўладиган уч топилади. Хусусан, агар ечим ягона бўлса, бу ечим албатта учдан иборат бўлади.

Шундай қилиб, агар максимум топишга доир чизикли программлаштириш масаласи 5-теореманинг шартларини қаноатлантирса, у ҳолда ечимни топиш учун масала жоиз тўпланининг барча учларини топиш ва улар ичидан функцияга максимал қиймат берадиганини олиш етарли.

Бу усул учларни тула топиш усули деб аталади ва чизикли программлаштиришнинг кичик ўлчамли масалаларига кўллаш мумкин ҳолос, чунки ўзгарувчилар сони кўп бўлганда учлар сони жуда кўпайиб кетади ва кўпгина ҳисоблашларни талаб қилади.

ЧПнинг қўшма масалари тушунчаси

Чизикли программлаштиришнинг ҳар бир масаласига қўшма масала деб аталувчи бошқа чизикли программлаштириш масаласини мос қўйиш мумкин. Уларни биргаликда ўрганиш қўшмалик назарияси дейилади.

Қулайлик учун чизикли программлаштиришнинг умумий масаласини яна бир бор кўрайлик:

$$\begin{aligned}
\langle c, x \rangle &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\
\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad i = 1, \dots, k \\
\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j &= b_i \quad i = k+1, \dots, m \\
x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, s
\end{aligned} \quad (25)$$

(25) масалага қўшма масала қуйидагича:

$$\begin{aligned}
\langle b, y \rangle &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min \\
\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} &\geq c_j \quad j = 1, \dots, s \\
\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} &= c_j \quad j = s+1, \dots, n \\
y_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, k
\end{aligned} \quad (26)$$

бунда (25) масала тўғри масала дейилади.

Қўшма масалага ўтиш учун қуйидаги жадвалдан фойдаланамиз:

$$\begin{array}{l}
x_1 \geq 0 \dots \dots \dots x_s \geq 0 \quad x_{s+1} \dots \dots \dots x_n \\
\begin{array}{l}
y_1 \geq 0 \\
\vdots \\
y_k \geq 0 \\
y_{k+1} \geq 0 \\
\vdots \\
y_m \geq 0
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
a_{11} & \dots & a_{1s} & a_{1,s+1} \dots \dots \dots a_{1,n} \\
\hline
\vdots & & \vdots & \vdots \\
\hline
a_{k1} & \dots & a_{ks} & a_{k,s+1} \dots \dots \dots a_{k,n} \\
\hline
a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,s} & a_{k+1,s+1} \dots \dots \dots a_{k+1,n} \\
\hline
\vdots & & \vdots & \vdots \\
\hline
a_{m1} & \dots & a_{ms} & a_{m,s+1} \dots \dots \dots a_{mn} \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{l}
\leq \\
\\
\leq \\
= \\
\\
=
\end{array}
\begin{array}{|c|}
\hline
b_1 \\
\hline
\vdots \\
\hline
b_k \\
\hline
b_{k+1} \\
\hline
\vdots \\
\hline
b_m \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}
\hline
c_1 \dots \dots \dots c_s & c_{s+1} \dots \dots \dots c_n \\
\hline
\end{array}$$

Аввало жадвалга тўғри масала ҳақидаги барча маълумотлар киритилади: a_{ij} , b_i ва c_j параметрларнинг қийматлари, тенгсизлик ва тенгликлардаги ишоралар (ўнг томонга), тегишли ўзгарувчиларнинг номанфийлик шартлари (юкорида). Сўнгра ҳар бир i сатрга y_i қўшма ўзгарувчи мос қўйилади. (агар шу сатрнинг унг томонида тенгсизлик ишораси турган бўлса, y_i га номанфийлик шарти қўйилади).

Қуйидаги жадвалларда энг муҳим хусусий ҳолларда тўғри ва қўшма масалалар кўрсатилган.

Чизиқли масалаларни ёзиш формаси	Икки ўлчовли масалаларни ёзиш формаси
Асосий: $\langle c, x \rangle \rightarrow \max, Ax \leq b$	Каноник: $\langle b, y \rangle \rightarrow \min, yA \leq c, y \geq 0$
Стандарт: $\langle c, x \rangle \rightarrow \max, Ax \leq b, x \geq 0$	Стандарт: $\langle b, y \rangle \rightarrow \min, yA \geq c, y \geq 0$
Каноник: $\langle c, x \rangle \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0$	Асосий: $\langle b, y \rangle \rightarrow \min, yA \geq c$

Чизиқли дифференциал ўйинлар

Манфаатлари ўзаро устма-уст тушмайдиган томонлар иштирок этадиган конфликтли (ихтлофли, нзоли) зиддиятли ҳолатларнинг математик модели ўйин деб аталади. Агар ўйин тавсифлашда дифференциал тенгламалардан фойдаланилса, у дифференциал ўйин деб аталади. Дифференциал ўйинларнинг кенг тарқалган моделлари оптимал бошқарувнинг турли мақсадни кўзлаган кишилар томонидан танланиши мумкин бўлган бошқарувнинг икки ёки бир неча гуруҳин ўз чига олган мос моделларининг умумлашмасидан иборат.

1. Масаланинг қўйилиши. Ушбу

$$\dot{x} = Ax + Bu + C\sigma \quad (1)$$

тенглама билан ифодаланган жараёнга таъсир кўрсатувчи P_1 ва P_2 ўйинлар ўйиннинг иштирокчилари бўлсин (бу ерда A , B , C мос равишда $(n \times n)$, $(n \times r)$, $(n \times s)$ материаллар), P_1 ва P_2 ўйинларнинг ихтиёрида, мос равишда, u ва σ бошқарувлар бўлиб, ўйинчилар ҳар бир вақт momentiда ўз бошқарувини танлашда

$$u \in U, \quad \sigma \in V$$

чеклашларга тоат қилшда, бу ерда U ва V лар, мос равишда, R_r ва R_s нинг қавариқ компакт қисм тўплamlаридир. $u = u(t)$ ва $\sigma = \sigma(t)$ функциялар t вақтнинг функцияси сифатида ўлчовлидир.

Бундан ташқари, қавариқ ёпиқ M тўплам-ўйиннинг терминал тўплами берилган.

Ўйин шундан иборатки, P_1 ўйинчи x фаза нуқтасини терминал тўплам M га келтиришга ҳаракат қилади, бунда айни пайтда P_2 ўйинчи x нуқтан M га тушишга тўсқинлик қилади. x нуқта M га тушгандан бошлаб ўйин тугаган деб ҳисобланади.

P_1 ва P_2 ўйинчиларнинг жоиз стратегиялари сифатида моҳият қуйидагидан иборат ε – стратегияларни қарамаймиз. Бошланғич $t = 0$ моментда P_2 ўйинчи P_1 рақибига ўзининг ноль бўлмаган $\varepsilon_1 > 0$ вақт оралғидаги бошқарувин билдиради, бунда $\varepsilon_1 > 0$ миқдорни P_2 ўйинчи ўз ихтиёри билан танлаши мумкин. Шу маълумот бўйича P_1 ўйинчи кўрсатилган вақт оралғида ўз бошқарувини куради. ε_1 вақт ўтгандан кейин P_2 ўйинчи яна ε_2 вақт оралғи ва ўз бошқарувини билдиради ва ҳ.к.

Агар P_2 ўйинчининг ҳар бир ε стратегиясига P_1 ўйинчи ўзининг шундай ε стратегиясини қарама-қарши қўйсаки, (1) тизимининг бу бошқарувларга мос траекторияси T дан кеч бўлмаган вақтда M тўпламга тушса, x_0 нуқтадан бошланган ўйин T вақтда тамомланиши мумкин дейилади.

2. Тўпламларнинг геометрик айирмаси. Мазкур бандда дифференциал ўйинларни қарашда қўлланиладиган қавариқ тўпламлар билан боғлиқ бир неча қурилмалар баён қилинади.

Айтайлик, A ва B тўпламлар R_n фазонинг иккинчи қавариқ қисм тўплами бўлсин.

$A^* - B$ геометрик айирма деб, шундай $z \in R_n$ нуқталар тўпламига айтиладики, улар учун $z + B \subset A$ бўлади, яъни

$$A^* - B = \{z \in R_n : z + B \subset A\} \quad (3)$$

таърифдан $(A^* - B) + B \subset A$ эканлиги келиб чиқади, бу ерда $A^* - B$ шартан қаноатлантирувчи максимал тўпламдир, яъни $D + B \subset A$ муносабатдан $D \subset A^* - B$ эканлиги келиб чиқади.

Геометрик айирманинг хоссалари:

А) A ва B қавариқ тўпламларнинг $A^* - B$ геометрик айирмаси қавариқ бўлади.

Исботи. $z_1, z_2 \in A^*B$ ва $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$ хақиқий сон бўлсин. $\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2$ нуқтани қараймиз. $\alpha B + (1 - \alpha)B = B$ бўлганлигидан

$$\begin{aligned}\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2 + B &= \alpha(z_1 + B) + (1 - \\ &- \alpha)(z_2 + B) \subset \alpha A + (1 - \alpha)A = A\end{aligned}$$

бу эса $\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2 \in A^*B$ эканлигини билдиради.

Б) А, В, A_1, B_1 қаварик тўпламлар бўлиб, $A_1 \subset A, B_1 \subset B$ бўлсин. У ҳолда

$$A^*B \subset A^*B_1, \quad (4)$$

$$A_1^*B \subset A^*B, \quad (5)$$

4) мансубликни исботлаймиз. Таърифга кўра $(A^*) + B \subset A$ га эга бўламиз. $B_1 \subset B$ бўлганлигидан $(A^*) + B_1 \subset A$ ва демак, $(A^*) \subset A^*B_1$ мансублик шунга ўхшаш исботланади.

В) Айтайлик, А, В лар R_n қаварик қисм тўпламлар бўлиб, А-ёпиқ бўлсин. У ҳолда A^*B ёпиқ тўплам бўлади.

Исботи. A^*B дан ихтиёрий $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликни қараймиз ва $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ бўлсин.

Ихтиёрий n ва $b \in B$ элемент учун $z_n + b \in A$ бўлганлигидан А нинг ёпиқлигга асосан В дан олинган ихтиёрий b учун $z_0 + b \in A$ бўлади, яъни $z_0 \in A^*B$. демак, A^*B тўплам ёпиқдир.

г) Айтайлик, А ва В лар R_n дан олинган ёпиқ қаварик қисм тўпламлар бўлиб, В компакт бўлсин. У ҳолда

$$\delta^*(\lambda, A^*B) \leq \delta^*(\lambda, A) - \delta^*(\lambda, B), \quad \lambda \in R_n \quad (6)$$

бу ерда $\delta^*(\lambda, C) = \sup \lambda'x$ -қаварик С тўпламнинг таянч функциясидир.

Исботи. $(A^*B) + B \subset A$ бўлганлигидан барча $\lambda \in R_n$ лар учун $\delta^*(\lambda, (A^*B) + B) \leq \delta^*(\lambda, A)$ бўлади. Бундан ташқари, $\delta^*(\lambda, (A^*B) + B) = \delta^*(\lambda, A^*B) + \delta^*(\lambda, B)$. Бу муносабатни олдинги тенгсизликка қўшиш (6) га олиб келади.

д) А ёпиқ қаварик тўплам, В эса қаварик компакт бўлсин. У ҳолда

$$((A + B)^*B = A \quad (7)$$

исботи. $A + B \subset A + B$ бўлганлигидан $A \subset (A + B)^*B$. Энди тескари мансубликни исботлаймиз. $F \triangle (A + B^*B)$ деб белгилаймиз.

г) хоссага асосан

$$\delta^*(\lambda, F) \leq \delta^*(\lambda, A + B) - \delta^*(\lambda, B) = \delta^*(\lambda, A), \quad \lambda \in R_n$$

га эга бўламиз, бу ердан $F \subset A$ эканлиги келиб чиқади

е) А, В ва с лар R_n дан олинган қаварик қисм тўпламлар бўлсин. У ҳолда

$$(A^*B) + C \subset (A + C)^*B \quad (8)$$

исботи. Айтайлик, $z \in (A^*B) + C$ бўлсин. У ҳолда $z = x + y$, бу ерда

$$x \in A^*B, \quad (9)$$

$$y \in C \quad (10)$$

(9) дан геометрик айирма таърифига асосан

$$x + B \subset A \quad (11)$$

келиб чиқади.

(10) ва (11) ни қўшиб,

$$z \in (A + C)^*B$$

ни англатувчи

$$Z + B \subset A + C$$

ни оламыз. Демак, (8) мансублик исботланд.

Фараз қилайлик, $\Omega(R_n) - R_n$ фазонинг барча бўш бўлмаган компакт қисм тўпламларнинг S тўплами R_n да бирлик шардан иборат бўлсин. Ихтиёрий $X, Y \subset \Omega(R_n)$ лар учун

$$\rho(X, Y) = \inf \{t \geq 0 : X \subset Y + tS, Y \subset X + tS\} \quad (12)$$

деб оламыз. Унда

$$\rho(X, Y) = \max \left\{ \max_{x \in X} \rho(x, Y), \max_{y \in Y} \rho(y, X) \right\}$$

бўлишини текшириш қийин эмас. $\Omega(R_n) \times \Omega(R_n)$ да (12) муносабатлар билан аниқланган ρ функция матрица аксиомаларни қаноатлантиришини кўрсатамиз:

1) Барча $X, Y \in \Omega(R_n)$ лар учун $\rho(X, Y) \geq 0$ бўлиши таърифдан келиб чиқади. $\rho(X, Y) = 0$ деб фараз қиламиз. Бу $X \subset Y, Y \subset X$ мансубликларнинг ўринли эканлигига эквивалент бўлиб, $X = Y$ ни англатади. Ақсинча, агар $X = Y$ бўлса, $\rho(X, Y) = 0$ тенглик ўз-ўзидан равшандир.

2) ρ функциянинг симметриклиги, яъни $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$ муносабатнинг ўринлиги ўз-ўзидан равшан.

3) Учбурчак хоссасини исботлаймиз:
 $\rho(X, Y) \leq \rho(X, Z) + \rho(Z, Y) \cdot a = \rho(X, Z) \quad b = \rho(Z, Y)$ деб белгилаймиз. (12)
 аниқланишига кўра

$$X \subset Z + aS, Z \subset X + aS, Z \subset Y + bS, Y \subset Z + bS$$

бўлади. Булардан

$$X \subset Y + (a + b)S, \quad Y \subset X + (a + b)S$$

демак,

$$\rho(X, Y) \leq a + b = \rho(X, Z) + \rho(Z, Y)$$

шуни исботлаш талаб қилнган эди.

Шундай қилиб, ρ функция $\Omega(R_n)$ тўпланда матиркани беради. Одатда у Хаусдорф матрикаси деб аталади.

+уйидаги натижани исботсиз келтирамыз.

Бляшке теоремаси. Фараз қилайлик, $G - R_n$ даги компакт бўлсин. У ҳолда $\Omega(G) = \{X \in (R_n) | X \subset G\}$ тўплам $\Omega(R_n)$ матрик фазонинг компакт қисм тўплами бўлади.

Энди ҳақиқий ўқни $\Omega(R_n)$ матрик фазога $X(f)$ узлуксиз акслантиришни қараймиз. ρ ва q ҳақиқий сонлар бўлсин, $\rho \leq q$:

$$Q = \{t_0 = p, t_1, \dots, t_k = q, t_0 < t_1 < \dots < t_k\}$$

ушбу

$$\sum(Q) = \sum_{i=1}^k X(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

йиғиндни англаймиз, бу ерда $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$

сўнгра, $X(t)$ ни ҳар қандай $t \in [p, q]$ да каварик тўплам бўлсин деб фараз қиламиз. У ҳолда $\sum(Q)$ каварик компакт тўплам бўлади. Шу билан бирга $\sum(Q), [h, q]$ кесмани Q

бўлишга боғлиқдир. $\delta(Q) = \max_{1 \leq i \leq k} |t_1 - t_{i-1}|$ деб белгилаймиз. Шундай $Y(p, q)$ каварик

компакт тўплам мавжуд бўлар эканки, $p(Y(p, q), \sum(Q))$ масофа $\delta(Q)$ билан бирга нолга нтилади. Бу лимит $Y(p, q)$ тўплам $X(t)$ акслантиришнинг интеграл деб аталади ва

$$Y(p, q) = \int_p^q X(t) dt$$

белги билан белгиланади. Бунда $Y(p, q) \in \Omega(R_n)$ интеграллаш чегаралари p ва q нинг узлуксиз функцияси бўлади.

Интегралнинг хоссалари (исботсиз):

А. Агар $r, p \leq r \leq q$ тенгсизлик қаноатлантурса, у ҳолда

$$\int_p^q X(t) dt + \int_r^p X(t) dt = \int_r^q X(t) dt$$

Б. $\int_p^q X(t) dt$ интеграл $y = \int_p^q x(t) dt$ кўринишдаги барча ** нукталар тўплами билан устма-уст тушади, бу ерда $x(t)$ – ўзгарувчи t нинг қийматлари R_n да ётувчи ўлчовли функцияси бўлиб, $x(t) \in X(t)$, $t \in [p, q]$.

3. Дифференциал ўинни ечиш. 1-бандда таърифланган дифференциал ўйинга қайтамыз. Ўйиннинг терминал M тўплами R_n фазонинг вектор қисм фазоси бўлсин, деб фараз қиламиз. L деб M қисм фазонинг R_n га ортогонал тўлдирувчисини, π деб эса R_n фазонинг L қисм фазога ортогонал проекциялаш амалини белгилаймиз. Энди

$$U(t) = -\pi e^{tA} B U, \quad V(t) = \pi e^{tA} C V$$

деб белгилаймиз ва $S(t) = U(t)^* V(t)$ тўплам барча $t \geq 0$ ларда L нинг ўлчовига тенг ўлчовга эга бўлсин, деб фараз қиламиз.

1) тенгламанинг бошланғич шартдаги ечимин ёзамиз:

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{sA} [B u(t-s) + C \sigma(t-s)] ds$$

Сўнгра

$$W(t) = \int_0^t S(\tau) d\tau$$

деб оламиз,

$T(x)$, $t \geq 0$ нинг

$$\pi e^{tA} x \in W(t)$$

мансублик ўринли бўлган минимал қийматини белгилаймиз. Агар бундай t мавжуд бўлмаса, $T(x) = +\infty$ деб оламиз. Фақат $x \in M$ лар учун $T(x) = 0$ бўлишни айтиб ўтамыз.

қуйидаги теорема $T(x)$ таърифнинг моҳиятини очиб беради.

1-теорема. Агар $T(x_1) = +\infty$ бўлса, P_1 ўйинчи ҳар қандай ўлчовли $\sigma(t) \in V$, $0 \leq t \leq T(x_0)$ бошқарувни қўлламасин, P_1 да шундай ўлчовли $u(t) \in U$ бошқарув топиладики, $x(T(x_0)) \in M$ бўлади, бу ерда $x(t)$, $t \geq 0$ ечим (1) тизимининг, $u(t)$ ва $u(t)$ га мос ечимидир.

Исботи. $T(x_0) < +\infty$ бўлганлигидан,

$$\pi e^{T(x_0)A} x_0 \in W(T(x_0))$$

бўлади. Демак, шундай ўлчовли $w(t)$, $0 \leq t \leq T(x_0)$ функция топиладики,

$$\pi e^{T(x_0)A} x_0 = \int_0^{T(x_0)} w(t) dt, \quad (14)$$

бу ерда $w(t) \in S(t)$, $0 \leq t \leq T(x_0)$.

Геометрик айирманинг таърифидан охирги мансублик

$$w(t) + \pi e^{tA} CV \subset -\pi e^{tA} BU, \quad 0 \leq t \leq T(x_0)$$

эканлигини англатади. Бу ердан, ҳар қандай ўлчовли $\sigma(t) \in V$, $0 \leq t \leq T(x_0)$ функция учун шундай ўлчовли $u(t) \in U$, $0 \leq t \leq T(x_0)$ функция мавжудлиги ва

$$w(t) = -\pi e^{tA} Bu(T(x_0) - t) - \pi e^{tA} C \sigma(T(x_0) - t), \\ 0 \leq t \leq T(x_0)$$

эканлг келиб чиқади. Демак, (14) дан

$$x(T(x_0)) \in M$$

мансубликка эквивалент бўлган

$$\pi e^{T(x_0)A} x_0 + \int_0^{T(x_0)} \pi e^{tA} (Bu(T(x_0) - t) + C \sigma(T(x_0) - t)) dt = 0$$

муносабатни оламиз (бу ерда $x(t)$, $t \geq 0$ (1) тизимнинг $u(t)$ бошқарувларга мос ечимидир). Теорема исботланди.

1-теоремадан агар P_2 ўйинчининг ε стратегияси шундай бўлсинки, $\varepsilon_1 \geq T(x_0)$ ўйинчи ҳамиша ўйинни $T(x_0)$ дан кеч бўлмаган вақтда тамом қилши мумкинлг келиб чиқади.

Энди P_2 ўйинчининг ε -стратегияси учун $\varepsilon_1 < T(x_0)$ бўлган ҳолни қараймиз.

2-теорема. Айтайлик, $T(x_0) < +\infty$ бўлсин. P_2 ўйинчи $[0, \varepsilon_1]$ вақт оралғида қандай ўлчовли $\sigma(t) \in V$, $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ бошқарувни қўллагасин, P_1 ўйинчида шундай ўлчовли $u(t) \in U$, $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ бошқарув топиладики, $T(x(\varepsilon_1)) < T(x_0) - \varepsilon_1$ бўлади, бу ерда $x(t)$, $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ (1) тизимининг $u(t)$, $\sigma(t)$, $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ бошқарувларга мос ечимидир.

Исботи. $T(x_0) < +\infty$ бўлганлигидан

$$\pi e^{(t+\varepsilon_1)A} x_0 \in W(t_1 + \varepsilon_1) \quad (15)$$

мансублик ўринли бўлсин $t_1 \geq 0$ қиймати тўплам бўш бўлмайди. ((15) мансублик $t_1 = T(x_0) - \varepsilon_1$ бўлганда ўринлдир).

(15) ни унга эквивалент бўлган шубу

$$\pi e^{(t+\varepsilon_1)A} x_0 \in W(t_1) + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} S(t) dt \quad (16)$$

шаклда ёзамиз. Барча t лар учун $S(t) + V(t) \subset U(t)$ бўлганлигидан

$$\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} S(t) dt + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} V(t) dt \subset \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} U(t) dt$$

(16) нинг иккала томонига $\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} V(t) dt$ интегрални қўшиб ва охирги мансубликдан фойдаланиб,

$$\pi e^{(t_1+\varepsilon_1)A} x_0 + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} V(t) dt \subset W(t_1) + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} U(t) dt$$

ни оламиз. Энди бу мансубликда чап томондаги иккинчи ҳад ўринга унинг элементларидан бирини, чунончи,

$$\pi e^{t_1 A} \int_0^{\varepsilon} e^{sA} C \sigma(\varepsilon_1 - s) ds$$

ни қўямиз, бу ерда $\sigma(t)$, $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ P_1 ўйинчининг $[0, \varepsilon_1]$ оралқдаги бошқарувдан иборат. У ҳолда

$$\pi e^{(t_1+\varepsilon_1)} x_0 + \pi e^{t_1+\varepsilon_1 A} \int_0^\varepsilon e^{sA} C \sigma(\varepsilon_1 - s) ds \in W(t_1) +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} U(t) dt$$

t_1 нинг (17) ўринл бўлган минимал қийматни танлаб оламиз ва уни яна t_1 билан белгилаймиз, $t_1 \leq T(x_0) - \varepsilon_1$ эканлигини равшандир бундан ташқари, $\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon_1} U(t) dt$ тўпламнинг (17) мансублик сақланадиган аниқ элементи мавжуд. Бу элементни ушбу

$$- \pi e^{t_1 A} \int_0^\varepsilon e^{sA} B u(\varepsilon_1 - s) ds$$

кўринишда ёзамиз, бу ерда $0 \leq t \leq \varepsilon_1 - u(t) \in U$, $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ шартни қаноатлантирувчи ўлчовли функция бўлиб, уни P_1 ўйиннинг $[0, \varepsilon_1]$ кесмадаги бошқаруви сифатида танлаб оламиз. У ҳолда (17) дан

$$\pi e^{t_1 A} (e^{\varepsilon_1 A} x_0 + \int_0^{\varepsilon_1} e^{sA} (B u(\varepsilon_1 - s) + C \sigma(\varepsilon_1 - s)) ds) \in W(t_1)$$

муносабатни, яъни

$$\pi e^{t_1 A} x(\varepsilon_1) \in W(t_1)$$

ни оламиз (бу ерда $x(t)$, $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ (1) тизимининг, $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ бошқарувларга мос келган ечимидир).

Охирги мансубликдан

$$T(x(\varepsilon_1)) \leq t_1 \leq T(x_0) - \varepsilon_1$$

эканлиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

1-ва 2-теоремаларнинг тасдиқлари P_2 ўйинчининг ҳар ҳар қандай ε – стратегияси ва ўйиннинг $T(x_0) < +\infty$ бўлган ҳар қандай бошланғич x_0 нуқтаси бўйича P_1 ўйинчининг x нуқтани M қисм фазога $T(x_0)$ вақтдан кеч бўлмаган вақтда келтирувчи бошқарувини кетмакет қуриш имконини беради. Ҳақиқатдан, P_2 ўйинчининг $[0, \varepsilon_1]$ кесмада берилган $v(e)$ бошқарув бўйича P_1 ўйинчи 2-теоремага асосан x нуқтани ε моментда $T(x(\varepsilon_1)) \leq T(x_0) - \varepsilon_1$ ни қаноатлантирувчи, $x(\varepsilon_1)$ ҳолатга ўтказувчи $u(t)$ бошқарувни қуриш мумкин. Сўнгра P_2 ўйинчининг $[\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2]$ кесмадаги $v(t)$ бошқаруви маълум бўлади. Яна аввалгидек мулоҳазалар юритиб, P_1 ўйинчининг $[\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2]$ кесмада шундай $u(t)$ бошқарувини топамизки, $x(t)$ траекториянинг $t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ моментдаги, унга мос $x = (x_1 + x_2)$ нуқтаси

$$T(x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) \leq T(x(\varepsilon_1)) - \varepsilon_1 \leq T(x_0) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Бу жараёни кетма-кет давом эттириб, бирор $t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k$ моментда, $T(x(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)) \leq T(x_0) - (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)$, $T(x(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)) \leq \varepsilon_{k+1}$ бўлган $x(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)$ ҳолатга келамиз.

1-теоремага асосан энди P_1 ўйинчи ўйинни бирор $t^* \leq T(x_0)$ моментда тамомлаши мумкин.

Демак, P_1 ўйинчи ε стратегиялар синфида $T(x_0) < +\infty$ ни қаноатлантирувчи ихтиёрий x_0 нуқтада бошланган ўйинни $T(x_0)$ дан ошмайдиган t^* вақтда тамомлаш мумкин.

Чизиқли программалаштириш бўйича лаборатория машқлари

Лаборатория 1. Чизиқли программалаштиришнинг қуйидаги масаласини стандарт шаклда ёзинг.

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 3x_3 &\rightarrow \max \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\sim 1 \\ 3x_2 + x_3 &\approx 2 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\infty 4 \\ x_2 &\geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

	$\sim \approx \infty$		$\sim \approx \infty$		$\sim \approx \infty$		$\sim \approx \infty$
1	$\geq = \leq$	6	$= \leq =$	11	$= \geq =$	16	$\leq \leq =$
2	$= \leq \geq$	7	$\leq = \geq$	12	$= = \leq$	17	$\geq \geq \leq$
3	$\leq = =$	8	$\geq = =$	13	$\geq \geq =$	18	$\geq \leq =$
4	$= \geq \geq$	9	$= \geq \leq$	14	$\leq \geq \geq$	19	$\geq \leq \geq$
5	$\geq = \geq$	10	$\leq \geq =$	15	$= = \geq$	20	$\leq \leq \geq$

Лаборатория 2. Чизиқли программалаштиришнинг қуйидаги масаласини каноник шаклда ёзинг.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &\rightarrow \min \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &\sim 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 &\approx 1 \\ x_2 + x_3 &\infty 3 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_3 \geq 20 \end{aligned}$$

	$\sim \approx \infty$		$\sim \approx \infty$		$\sim \approx \infty$		$\sim \approx \infty$
1	$\geq = \leq$	6	$= \leq \leq$	11	$\geq \leq \leq$	16	$= = \geq$
2	$\geq \geq \leq$	7	$\leq \geq \leq$	12	$= \leq \geq$	17	$\geq = \geq$
3	$\geq \leq \geq$	8	$\leq \leq \geq$	13	$\geq \geq =$	18	$\leq \geq =$
4	$= \geq \geq$	9	$\leq \geq \geq$	14	$\leq = \leq$	19	$= = \leq$
5	$\geq \leq =$	10	$\leq \geq =$	15	$= \geq \leq$	20	$\leq = \geq$

Лаборатория 3. Геометрик қуриш усулини қўллаб, қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини ечинг.

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 &\rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 - x_2 &\geq -b \\ cx_1 - x_2 &\leq 8c + 3 \end{aligned}$$

	a b c		a b c		a b c		a b c
1	5 7 2	6	$-\frac{1}{4}$ 10 2	11	$-\frac{5}{6}$ 8 $\frac{1}{4}$	16	$-\frac{3}{4}$ $\frac{13}{2}$ $\frac{1}{2}$
2	1 6 3	7	4 12 $\frac{1}{2}$	12	3 $\frac{13}{2}$ 2	17	$\frac{3}{2}$ 7 2
3	-1 6 $\frac{1}{8}$	8	$\frac{5}{4}$ 9 $\frac{1}{3}$	13	1 9 1	18	3 6 1
4	5 9 1	9	-1 6 $\frac{1}{2}$	14	$-\frac{1}{3}$ 10 2	19	4 8 $\frac{3}{4}$

5	$\frac{3}{4} \ 7 \ 1$	10	$\frac{5}{6} \ 7 \ 1$	15	$\frac{7}{4} \ 6 \ 3$	20	$-1 \ \frac{15}{2} \ \frac{1}{3}$
---	-----------------------	----	-----------------------	----	-----------------------	----	-----------------------------------

Лаборатория 4. Геометрик куриш усулини қўллаб, қуйидаги чизикли программалаштириш масаласини ечинг.

$$\begin{aligned}
 ax_1 + x_2 &\rightarrow \min \\
 x_1 + (b-3)x_2 &\geq b \\
 (c-4)x_1 + x_2 &\geq c \\
 3x_1 + 2x_2 &\geq 11 \\
 x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

	A	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	$\frac{1}{4}$	5	9	6	$\frac{1}{2}$	7	6	11	$\frac{7}{2}$	5	7	16	$\frac{1}{2}$	4	9
2	$\frac{5}{4}$	4	6	7	$\frac{1}{6}$	8	8	12	$\frac{9}{2}$	6	9	17	$\frac{5}{3}$	8	6
3	$\frac{9}{2}$	7	8	8	$\frac{5}{2}$	4	7	13	$\frac{1}{5}$	7	7	18	$\frac{3}{4}$	5	6
4	$\frac{7}{4}$	8	7	9	$\frac{13}{3}$	5	8	14	$\frac{7}{2}$	4	8	19	$\frac{1}{4}$	6	8
5	$\frac{5}{2}$	6	6	10	$\frac{2}{3}$	6	7	15	$\frac{1}{3}$	8	9	20	$\frac{11}{2}$	7	9

Лаборатория 5. Ўзгарувчиларни йўқотиш ва геометрик куриш усулини қўллаб, қуйидаги чизикли программалаштириш масаласини ечинг.

$$\begin{aligned}
 ax_2 - 3x_3 &\rightarrow \max \\
 2x_1 + bx_2 + x_3 &\leq 15 \\
 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &\leq 0 \\
 cx_1 + 2x_2 - x_3 &\leq -3 \\
 x_2 &\geq 0, \quad x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	10	2	3	6	-2	2	2	11	-1	5	3	16	-2	5	2
2	-1	1	2	7	2	3	4	12	6	6	4	17	4	4	3
3	3	5	4	8	5	5	3	13	10	1	2	18	12	2	4
4	-3	4	2	9	11	1	4	14	-3	3	3	19	5	3	2
5	12	3	3	10	7	7	2	15	7	3	4	20	-1	3	4

Лаборатория 6. Ўзгарувчиларни йўқотиш ва геометрик қуриш усулини қўллаб, қуйидаги чизикли программалаштириш масаласини ечинг.

$$x_1 + x_3 + ax_4 + bx_5 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + bx_4 - 2x_5 \leq 15$$

$$x_1 + x_3 - 4x_4 + 6x_5 \leq 24$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 7x_5 \leq c + 24$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	3	5	6	6	1	1	7	11	1	2	8	16	2	2	6
2	5	2	7	7	6	3	8	12	8	4	6	17	1	3	7
3	1	5	8	8	2	1	6	13	2	5	7	18	7	4	8
4	3	-1	6	9	3	0	7	14	9	5	8	19	6	2	6
5	4	3	7	10	5	7	8	15	7	-1	6	20	3	3	7

Лаборатория 7. Ушбу $x^1 = \left(0, \frac{1}{2b}, 0\right)$, $x^2 = \left(5, 0, \frac{5a}{3c}\right)$, $x^3 = \left(3, \frac{3a+2}{2b}, 0\right)$ нукталар

орасида

$$(4-5a)x_1 + 10bx_2 + 15cx_3 \rightarrow \max$$

$$(2a+1)x_1 - 4bx_2 - 6cx_3 \leq 13$$

$$(5-4a)x_1 + 8bx_2 + 12cx_3 \leq 23$$

$$-(3a+1)x_1 + 6bx_2 + 9cx_3 \leq 3$$

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	-1	1	3	6	3	-1	8	11	5	-2	6	16	1	-1	3
2	-1	1	6	7	-3	2	3	12	5	-2	8	17	1	-1	6
3	-1	1	8	8	-3	2	6	13	-3	1	3	18	1	-1	8
4	3	-1	3	9	-3	2	8	14	-3	-1	6	19	3	-2	3
5	3	-1	6	10	5	-2	3	15	-3	1	8	20	3	-2	8

масаланинг ечими борми?

Лаборатория 8. ρ ва q параметрларнинг шундай қийматларини топингки, ушбу

$$ax_1 + bx_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + qx_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \geq q$$

$$x_1 \geq 0$$

	a	b		a	b		a	b		a	b
1	3	5	6	2	1	11	7	3	16	2	5
2	3	7	7	6	5	12	7	4	17	5	2
3	2	3	8	3	7	13	3	2	18	2	7
4	8	3	9	5	8	14	5	3	19	7	2
5	3	4	10	4	7	15	5	6	20	3	1

Масала

- а). ___ жоиз тўплами бўш.
 б). ∞ га тенг қийматга эга.
 в). ягона ечимга эга.
 г). Чексиз кўп ечимларга эга.

Лаборатория 9. $x^*=(b, a)$ нукта.

$$k x_1 + (2-k) x_2 \rightarrow \max$$

$$a x_1 - b x_2 \leq 0$$

$$2 x_1 + 3 x_2 \leq c$$

$$x_1 - x_2 \leq a + b$$

масаланинг ечими бўладиган к параметрнинг барча қийматларини топинг.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	4	-3	7	6	3	1	13	11	3	-1	8	16	5	1	20
2	3	2	14	7	3	-2	7	12	3	-2	7	17	5	2	20
3	2	-1	5	8	4	2	16	13	4	2	16	18	5	-3	11
4	5	-2	13	9	4	3	19	14	4	3	19	19	6	-5	10
5	5	4	25	10	5	-1	14	15	5	-1	14	20	6	-4	11

Лаборатория 10. Қуйидаги чизикли программалаштириш масаласини учларни тўла топиш усули билан топинг.

$$a x_1 + x_2 + 8 x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + b x_2 + x_2 \geq l$$

$$x_1 + x_2 + c x_3 \leq l$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	$\frac{4}{3}$	4	5	6	$\frac{4}{3}$	4	6	11	$\frac{7}{3}$	4	3	16	$\frac{3}{2}$	2	5
2	$\frac{3}{2}$	6	4	7	$\frac{16}{5}$	3	2	12	$\frac{19}{5}$	6	2	17	$\frac{7}{4}$	5	4
3	$\frac{7}{3}$	2	3	8	$\frac{6}{5}$	2	6	13	$\frac{3}{2}$	2	4	18	$\frac{15}{4}$	7	2
4	$\frac{6}{5}$	3	6	9	$\frac{9}{5}$	3	4	14	$\frac{5}{3}$	6	5	19	$\frac{4}{3}$	5	6
5	$\frac{5}{4}$	2	7	10	$\frac{7}{2}$	4	2	15	$\frac{7}{2}$	5	2	20	$\frac{7}{3}$	6	3

Лаборатория 11. Қуйидаги чизикли программалаштириш масаласини учларни тўла топиш усули билан топинг.

$$x_1 + 3 x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

$$a x_1 - b x_2 + x_2 \geq l$$

$$x_1 + x_2 + c x_3 \leq l$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

а в с		а в с		а в с		а в с	
1	1 2 2	6	1 5 5	11	1 0 0	16	1 3 3
2	3 5 2	7	2 8 5	12	3 1 0	17	2 5 3
3	5 8 2	8	3 11 5	13	5 2 0	18	3 7 3
4	7 11 2	9	4 14 5	14	7 3 0	19	4 9 3
5	9 14 2	10	5 17 5	15	9 4 0	20	5 11 3

Лаборатория 12. Чизиқли программалаштиришнинг қуйидаги масаласига қўшма масалани тузинг.

$$x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 - 4x_2 \sim 1$$

$$5x_1 + 6x_2 \approx 2$$

$$-7x_1 + 8x_2 \infty 3$$

$$x_2 \geq 0$$

$\sim \approx \infty$		$\sim \approx \infty$		$\sim \approx \infty$		$\sim \approx \infty$	
1	$\geq = \leq$	6	$= \leq \leq$	11	$\geq \leq \leq$	16	$= = \geq$
2	$\geq \geq \leq$	7	$\leq \geq \leq$	12	$= \leq \geq$	17	$\geq = \geq$
3	$\geq \leq \geq$	8	$\leq \leq \geq$	13	$\geq \geq =$	18	$\leq \geq =$
4	$= \geq \geq$	9	$\leq \geq \geq$	14	$\leq = \leq$	19	$= = \leq$
5	$\geq \leq =$	10	$\leq \leq =$	15	$= \geq \leq$	20	$\leq = \geq$

**“Оптималлаштириш усуллари” фани бўйича назорат тестлари
1-вариант.**

1. Вариацион ҳисобнинг энг дастлабки масаласи брахистохрона масаласи қачон ва қим томонидан қуйилган

- A) 1704 йилда Леонард Эйлер томонидан
- B) 1696 йилда Якоб Бернулли томонидан
- *C) 1696 йилда Иоганн Бернулли томонидан
- D) 1692 йилда Исаак Ньютон томонидан
- E) Юкоридаги барча жавоблар тугри

2. Энг содда функционал $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ учун Эйлер тенгламасини

курсатинг

- A) $F_y + \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$
- B) $F - \frac{d}{dx} F_{y'} F_{y'} = 0$
- C) $F_{y'} - \frac{d}{dx} F_y = 0$
- D) $F_y - \frac{d}{dx} F = 0$
- *E) $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$

3. Вариацион ҳисобнинг асосий масаласи бу

- *A) Аниқ интеграллар билан ифодаланган функцияларнинг энг катта ва энг кичик қийматларни топиш масаласидир
- B) Аниқмас интеграллар билан ифодаланган функционалларнинг экстремал қийматларини топиш масаласидир
- C) Бирор функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишдир
- D) Аниқ интеграллар билан ифодаланган функционалнинг бирор қийматини ҳисоблаш топиш масаласидир
- E) Карралаи интегралларни ҳисоблаш масаласидир

4. Энг содда функционал $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ учун Эйлер тенгламаси ёйилган

ҳолда қандай қурунишда бўлади?

- *A) $F_{y'y'} y'' + F_{y'y'} y' + F_{xy'} - F_y = 0$
- B) $F_{yy'} y'' + F_{y'y'} y' + F_{xy'} - F_y = 0$
- C) $F_{yy'} y'' + F_{yy'} y' + F_{xy'} - F_y = 0$
- D) $F_{y'y'} y'' + F_{yy'} y' + F_{xy'} + F_y = 0$
- E) $F_{y'y'} y'' + F_{yy'} y' + F_{xy'} - F_{y'} = 0$

5. Бирор α параметрга боғлиқ $J(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x) + \alpha \eta(x), y'(x) + \alpha \eta'(x)) dx$

функциянинг дифференциали бўлган $J'(0)\alpha$ қупайтма α нинг қайси қийматида

$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ функционалнинг биринчи вариацияси дейлади?

- A) α нинг барча қийматларида

- B) $\alpha \neq 0$,
 C) $\alpha > 0$
 D) $\alpha < 0$
 * E) $\alpha = 0$

6. Кидирилаётган функциянинг юкори тартибли хосилаларини ҳам уз ичига олган $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y^1, \dots, y^{(n)}) dx$ функционал учун Эйлер тенгламасини топинг?

- *A) $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$
 B) $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n-1)}} = 0$
 C) $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$
 D) $F_y - \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$
 E) $\frac{d}{dx} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y^{(m-1)}} \right) = 0$

7. Брахистохрона хакидаги масала кайси функционални урганишга келтирилади?

- A) $J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{y}} dx$
 B) $J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{y^1}} dx$
 C) $J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1-y^{12}}}{\sqrt{y^1}} dx$
 *D) $J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$
 E) $J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y^{12}} dx$

8. ХОҲ текисликдаги иккита нуктани тутуштирувчи чизиклар орасида ОХ ук атрофида айлантиришдан энг кичик сиртга эга булганини топиш масаласи кайси функционални урганишга келтиради?

- *A) $J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y'^2} dx$
 B) $J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y^{12}} dx$
 C) $J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y^{12}} dx$
 D) $J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1-y^{12}} dx$

Е) $J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx$

9. а- берилган сон бўлсин. $J_1 = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = a$ тенгликни уринлатадигон

барча $y(x)$ чизиклар ичидан $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ интегралга экстремум киймат

берадиганини ажратиб олиш масаласи

А) Энг кичик сирт хакидаги масала дейилади

В) брахистохрона хакидаги масала дейилади

С) геодезик чизиклар масаласи дейилади

*D) изопериметрик масала дейилади

Е) геометрик оптика масаласи дейилади.

10. Изопериметрик масала, одатда, ушбу $\int_{\varphi}^{q_1} N(x, y, y') dx$ интегралнинг

экстремумларини урганишга келтирилади, бу ерда

*А) $N = F + \lambda G$

В) $N = G + \lambda F$

С) $N = F^2 - \lambda^2 G^2$

Д) $N = F$

Е) $N = F + G$

11. Ушбу $G(x, y, z) = 0$ тенгламани ва $y(x_0) = y_0$; $z(x_0) = z_0$, $y(x_1) = y_1$; $z(x_1) = z_1$

чегаравий шартларин каноатлантирувчи $y = y(x)$ ва $z = z(x)$ чизиклар орасидан

$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z') dx$ интегралга экстремум киймат берадиган иккита $y(x)$ ва

$z(x)$ чизикларни топиш масаласи

А) Шартсиз экстремум масаласи

*В) Шартли экстремум масаласи

С) Чегаравий шартли масаласи

Д) чегаравий масала

Е) Изопериметрик масала дейилади

12. Ушбу $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_1', \dots, y_n, y_n') dx$ интеграл учун куйидаги тенгламадан кайси

бирлари голоном богламлар дейилади?

*А) $G_s(x, y_1, y_n) = 0$ $S = 1, 2, \dots, p$

В) $G_s(x, y_1, y_1', y_2, y_2', \dots, y_n, y_n') = 0$; $S = 1, 2, \dots, p$

С) $G_s(x, y_1', y_2'', \dots, y_n^{(n)}) = 0$; $S = 1, 2, \dots, p$

Д) $G_s(x, y_1^{(1)}) = 0$; $S = 1, 2, \dots, p$;

Е) $y_i(x_0) = y_i^{(0)}$, $y_i(x_1) = y_i^{(1)}$; $i = 1, 2, \dots, p$

13. $\iint_D F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy$ функционалга экстремум киймат берувчи

$z = z(x, y)$ функция Остроградский тенгламаси $F_x - \frac{d}{dx} \{F_z\} - \frac{d}{dy} \{F_y\} = 0$ нинг

ечими булади, бу ерда $P = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$ ва

- *A) $\frac{d}{dx} \{F_p\} = F_{px} + F_{pz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dp}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dx}$
 $\frac{d}{dy} \{F_q\} = F_{qx} + F_{qz} \frac{dz}{dx} + F_{qp} \frac{dp}{dy} + F_{qq} \frac{dq}{dy}$
- B) $\frac{d}{dx} \{F_p\} = F_{px} + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dp}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dx}$
 $\frac{d}{dy} \{F_q\} = F_{qx} + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{qp} \frac{dp}{dx} + F_{qq} \frac{dq}{dy}$
- C) $\frac{d}{dx} \{F_p\} = F_p + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dp}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dx}$
 $\frac{d}{dy} \{F_q\} = F_q + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dp}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dy}$
- D) $\frac{d}{dx} \{F_q\} = F_x + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dz}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dx}$
 $\frac{d}{dy} \{F_q\} = F_y + F_{zz} \frac{dz}{dz} + F_{qp} \frac{dp}{dy} + F_{qq} \frac{dq}{dy}$

14. Агар $\int_{x_0}^{x_0} F(x, y, y') dx$ функционалда $F=F(x, y)$ яъни y' га боғлиқмас

булса, куйидаги тасдиқлардан қайси бири уринли?

- *A) Эйлер тенгламаси $F_y(x, y)=0$ қурилишда булади ва ушбу вариацион масала умуман олганда ечимга эга эмас, баъзи истисно ҳолларда ечимга эга бўлиши мумкин.
 B) Эйлер тенгламаси $F_y(x, y)=0$ қурилишда булади ва ушбу вариацион масала ҳар дам ягона ечимга эга
 C) Эйлер тенгламаси $F_y(x, y)=0$ қурилишда булади ва ушбу вариацион масала чексиз куп ечимга эга
 D) Эйлер тенгламасини ечиб бўлмайди
 E) Эйлер тенгламани ечиб булади, бироқ бу ечим вариацион масаланинг ечими бўлмайди.

15. $\int_{x_0}^{x_1} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$ функционал учун трансверсаллик шартини ёзинг

- *A) $\frac{A(x, y)(1 + \varphi' y')}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$
 B) $\frac{1 + \varphi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$
 C) $A(x, y)=0$
 D) $1 + y'^2=0$
 E) $\emptyset$

16. Ушбу $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ функционалда унғ чегаравий шарт (x_1, y_1) нуктада бирор

$Y_1=\varphi(x_1)$ чизик устида силжисин. Трансверсаллик шартини ёзинг.

- A) $[F_x + (\varphi' + y') F_{y'}]_{x=x_1} = 0$
 B) $F + (\varphi^1 - y^1) F_{y'} = 0$

- C) $\left[F - (\varphi' + y')F_{y'} \right]_{x=x_1} = 0$
 D) $\left[F_x + (\varphi' - y')F_{y'} \right]_{x=x_1} = 0$
 * E) $\left[F + (\varphi' - y')F_{y'} \right]_{x=x_1} = 0$

17. $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада аникланган булиб, $x^* \in [a,b]$ нуктада узининг минумига эришсин.

Куйидаги шартлардан кайси бири бажарилганда $f(x)$ функция унимодал функция дейилади?

- *A) $f(x)$ функция x^* дан унга усади, чапда камаяди
 B) $f(x)$ функция x^* дан унга камаяди, чапда усади
 C) $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада усувчи
 D) $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада камаяди
 E) $f(x)$ функция $[a,b]$ узгармас

18. $f(x)$ функция $[a,b]$ да унимодал функция бўлсин. δ - етарлича кичик мусбат сон. Тенг иккига булиш усулида c ва d нукталар кандай формулалар билан аникланади?

- A) $c = a + b - \frac{\delta}{2}$, $d = \frac{a+b+\delta}{2}$
 B) $c = \frac{a-b-\delta}{2}$, $d = \frac{a-b-\delta}{2}$
 C) $c = \frac{a+b-\delta}{3}$, $d = \frac{a+b+\delta}{2}$
 *D) $c = \frac{a+b-\delta}{2}$, $d = \frac{a+b+\delta}{2}$
 E) $c = a+b-\delta$, $d = a+b+\delta$

19. $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада унимодал функция бўлсин. «Олтин кесим» усулида c ва d нукталар кайси формулалар билан аникланади?

- *A) $c = \frac{1}{2}((\sqrt{5}-1)a + (3-\sqrt{5})b)$ $d = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b)$
 B) $c = \frac{1}{2}((\sqrt{5}+1)a + (3-\sqrt{5})b)$ $d = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b)$
 C) $c = \frac{1}{2}((\sqrt{5}+1)a + (3-\sqrt{5})b)$... $d = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}+1)b)$
 D) $C = \frac{1}{2}((\sqrt{5}-1)a - (3-\sqrt{5})b)$... $d = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a - (\sqrt{5}-1)b)$
 E) $C = (\sqrt{5}-1)a + (3-\sqrt{5})b$... $d = (3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b$

20. $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада аникланган бўлсин ва $a \leq c < d \leq b$ бўлсин. $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада каварик булиши учун кайси шарт бажарилиши лозим:

- A) $f(\alpha c + (1-\alpha)d) < \alpha f(c) + (1-\alpha)f(d)$, $0 \leq \alpha \leq 1$
 B) $f(\alpha c + (1-\alpha)d) \leq \alpha f(c) + (1-\alpha)f(d)$, $0 < \alpha \leq 1$
 *C) $f(\alpha c + (1-\alpha)d) \leq \alpha f(c) + (1-\alpha)f(d)$, $0 \leq \alpha \leq 1$
 D) $f(\alpha c + (1-\alpha)d) < \alpha f(c) + (1-\alpha)f(d)$, $0 < \alpha < 1$
 E) $f(\alpha c + (1+\alpha)d) < \alpha f(c) + (1+\alpha)f(d)$, $0 \leq \alpha \leq 1$

21. I - {1,...,n} тўпланининг қисм тўплами бўлсин.

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i, i = 1, \dots, b,$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, j = l + 1, \dots, m,$$

$$x_s \geq 0, s \in I$$

шартлар бажарилганда $f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ функцияни минимизациялаш масаласи нима деб аталади.

*А) Чизикли программалаштиришнинг умумий масаласи

В) ЧП нинг асосий масаласи

С) ЧП нинг бош масаласи

Д) ЧП нинг каноник масаласи

Е) ЧП нинг стандарт масаласи

22. $f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ мақсад функцияни минимизациялаш ҳақидаги ЧП нинг умумий ва бош масалалари бир-биридан нимаси билан фарқ қилади.

*А) Умумий масалада $x_s \geq 0$ шартлар сони n тадан кўп эмас, бош масалада эса n тага тенг.

В) Умумий ва бош масалалар аслида битта нарс

С) Умумий масалада $\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i$ шартлар l та ($l < m$), бош масалада эса бундай шартлар катнашмайди

Д) Умумий масалада $x_s \geq 0$ шартлар сони n тадан кам, бош масалада факат n та

Е) Умумий ва бош масалаларни таккослаб бўлмайди.

23. $f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ мақсад функцияни минимизациялаш ҳақида киноник масалада $\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i$ шартлар сони нечта?

*А) n тадан кўп эмас

В) n тадан кам

С) n тадан кўп

Д) n та

Е) бундай шартлар катнашмайди

24. Клебшнинг зарурий шартини келтиринг, яъни агар $y(x)$ функция изопериметрик масалада $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ функционалга экстремум қиймат берса, у

ҳолда бу функциянинг иккинчи вариацияси $\delta^2 J$ қандай қиймат қабул қилади.

А) $\delta^2 < 0$

В) $\delta^2 J \leq 0$

С) $\delta^2 > 0$

* Д) $\delta^2 = 0$

Е) $\delta^2 J \geq 0$

25. Ушбу $f(x) = -4x_1 - x_2 + x_3^2 \rightarrow \min;$

$$\varphi_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_3 - 1 \leq 0$$

$$\varphi_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \leq 0$$

$$\varphi_3(x) = -x_1 + x_2 + x_3 \leq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \text{масалада } x^0 = (\sqrt{3}/2, 1/2, 0) \text{ нукта}$$

ёрдамида эгар нуктани топинг.

$$* A) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$B) \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

$$C) \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$D) (0,0,0)$$

$$E) \emptyset$$

$$26. J(y) = \int_0^1 e^x \sqrt{1+y^{12}} dx \text{ функционалнинг экстремалларини топинг}$$

$$* A) y = c_2 + \arccos(c_1 e^{-x})$$

$$B) y = \arccos(c_2 + c_1 e^{-x})$$

$$C) y = \frac{c_1 e^{-x}}{\sqrt{1 - c_2 e^{-2x}}},$$

$$D) y = c_2 + \arcsin(c_1 e^{-x})$$

$$E) y = \arcsin(c_2 + c_1 e^{-x})$$

$$27. J(y) = \int_a^b (16y^2 - y''^2 + e^x) dx \text{ функционални экстремалини топинг}$$

$$A) \text{ экстремаллари йук}$$

$$B) y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x$$

$$C) y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-x/2} + c_3 \sin x/2 + c_4 \cos x/2$$

$$D) y = c_1 e^{-2x} + c_3 e^{-2x} + c_4 \sin 2x$$

$$* E) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$$

$$28. J(y_1, y_2) = \int_a^b (xy_1'^2 + y_2'^2 + xy_1' y_2') dx \quad 0 < a < b < 4 \quad \text{функционалнинг}$$

экстремалларини топинг.

$$* A) y_1 = (-c_1 + c_2) \ln(4-x) + c_1 \ln x + c_3 \quad y_2 = (2c_1 - 2c_2) \ln(4-x) + c_4$$

$$B) y_1 = c_1 \ln(4-x) + c_1 \ln x + c_3 \quad y_2 = c_2 \ln(4-x) + c_4$$

$$C) y_1 = c_1 \ln x + c_3 \quad y_2 = c_2 \ln x + c_4$$

$$D) y_1 = (c_1 + c_2) \ln(4-x) + c_1 \ln x + c_3 \quad y_2 = 2(c_1 - c_2) \ln(4-x) + c_4$$

$$E) y_1 = c_1 \sin x \ln x + c_3 \quad y_2 = c_2 \ln c_4 x$$

$$29. \text{ Ушбу } y(0)=0, \quad y(1)=5, \quad \int_0^1 xy dx = 1 \text{ шартлар бажарилганда } \int_0^1 y'^2 dx$$

функционалнинг экстремалини топинг

$$A) y = x^2 + x + 1$$

$$B) y = 5x^5$$

$$C) y = x^2$$

$$* D) y = 5x^3$$

$$E) y = 5x^3 + 3x + 1$$

30. Ушбу $y(0)=0$, $(x_0-1)y^2(x_0)+2=0$ бажарилишда $\int_0^{x_1} y'^2 dx$ чегаралари

силжишли функционалнинг экстремалларини топинг

- A) $y = \pm x$, $x_1 = \frac{1}{2}$
 B) $y = 4x$, $x_1 = \frac{1}{2}$
 *C) $y = \pm 4x$, $x_1 = 0,5$
 D) $y = x^2$, $x = 1$
 E) $y = x$, $x = 1$;

31. $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ функционал учун иккинчи зарурий шарт - Лежандр

шартини ёзинг.

- A) $F_{y'y'} \leq 0$
 B) $F_{y'y'} > 0$
 *C) $F_{y'y'} \geq 0$
 D) $F_{y'y'} < 0$
 E) $F_{y'y'} \neq 0$

32. Дидона масаласи. Берилган узунликдаги ёпик чизик билан чегараланган энг катта юзали фигурани топинг

- A) мунтазам n бурчак
 B) квадрат
 C) мунтазам учбурчак
 *D) доира
 E) масала ечимга эга эмас

33. $\iint_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy$ функционал учун Эйлер-Остроградский тенгламаси

қандай курунишда бўлади.

- *A) $U_{xx} + U_{yy} = 0$ Лаплас тенгламаси
 B) $U_{xx} + U_{yy} = F(x, y)$ Пуассон тенгламаси
 C) $U_{xx} - U_{yy} = 0$ тулкин тенглама
 D) $U_{xx} - U_y = 0$ параболик тенглама
 E) $U_{xx}^2 + U_{yy}^2 = 0$ бигермоник тенглама

34. $\int_0^1 x_1 dt \rightarrow \min$; $x_1' = x_2$, $x_2' = u$, $-2 \leq u \leq 1$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_2(1) = -1$

масалада оптимал бошқарувчи жараёни топинг

- *A) $x_1(y) = \begin{cases} -\frac{t}{2} + 1, & 0 \leq t \leq \frac{2}{3} \\ t^2/2 - 2t + \frac{5}{3}, & \frac{2}{3} \leq t \leq 1; \end{cases}$

$$B) x_1(y) = \begin{cases} -\frac{t}{2}-1, & 0 \leq t \leq \frac{2}{3} \\ t^2/2 - 2t + \frac{5}{3}, & \frac{2}{3} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

$$C) x_1(y) = \begin{cases} -t_2 + 1, & 0 \leq t \leq \frac{2}{3} \\ t^2/2 - 2t, & \frac{2}{3} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

$$D) x_1(y) = \begin{cases} -t_2 + 1, & 0 \leq t \leq \frac{2}{3} \\ t^2/2 + \frac{5}{3}, & \frac{2}{3} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

$$E) x_1(y) = \begin{cases} -t_2 + 2, & 0 \leq t \leq \frac{2}{3} \\ t^2/2 - 2t + \frac{5}{3}, & \frac{2}{3} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

35. Ушбу $f(x) \rightarrow \min, g(x) = 0$ масала учун Лагранж функцияси

$F(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \lambda g(x)$ бўлсин. Агар X -нисбий минимум нуктаси бўлса, $F(x, \lambda)$

кандай шартни қаноатлантиради.

A) $F(x, \lambda) = 0$

*B) $\frac{df}{dx} = 0$

C) $\frac{df}{dx} = 0, \frac{df}{d\lambda} = 0$

D) $\frac{df}{dx} + \frac{df}{d\lambda} = 0$

E) $F + \frac{df}{dx} = 0$

36. Оптималлаштириш масаласида $F(x, \lambda^*) \leq F(x^*, \lambda^*) \leq F(x^*, \lambda)$ шартни

қаноатлантирувчи (x^*, λ^*) нукта нима деб аталади.

A) Максимум нукта

B) Минимум нукта

*C) Эгар нукта

D) Энг четки нукта

E) оптимал нукта.

2-вариант.

1. Вариацион ҳисобнинг асосий масаласи бу

- *А) Аник интеграллар билан ифодаланган функцияларнинг энг катта ва энг кичик кийматларни топиш масаласидир
- В) Аникмас интеграллар билан ифодаланган функционалларнинг экстремал кийматларин топиш масаласидир
- С) Бирор функциянинг энг катта ва энг кичик кийматларини топишдир
- Д) Аник интеграллар билан ифодаланган функционалнинг бирор кийматини ҳисоблаш топиш масаласидир
- Е) Каррали интегралларни ҳисоблаш масаласидир

2. Кидирилаётган функциянинг юкори тартибли ҳосилаларини ҳам уз ичига олган $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$ функционал учун Эйлер тенгламасини топинг?

- *А) $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$
- В) $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n-1)}} = 0$
- С) $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$
- Д) $F_y - \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$
- Е) $\frac{d}{dx} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y^{(n-1)}} \right) = 0$

3. Ушбу $G(x, y, z) = 0$ тенгламани ва $y(x_0) = y_0; \quad z(x_0) = z_0,$

$$y(x_1) = y_1; \quad z(x_1) = z_1$$

чегаравий шартларин каноатлантирувчи $y = y(x)$ ва $z = z(x)$ чизиклар орасидан

$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z') dx$ интегралга экстремум киймат берадиган иккита $y(x)$ ва

$z(x)$ чизикларни топиш масаласи

- А) Шартсиз экстремум масаласи
- *В) Шартли экстремум масаласи
- С) Чегаравий шартли масаласи
- Д) чегаравий масала
- Е) Изопериметрик масала дейилади

4. $\int_{x_0}^{x_1} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$ функционал учун трансверсаллик шартини ёзинг

- *А) $\frac{A(x, y)(1 + \varphi' y')}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$
- В) $\frac{1 + \varphi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$
- С) $A(x, y) = 0$

- D) $1+y^{12}=0$
 E) тугри жавоб йук

5. Брахистохрона хакидаги масала кайси функционални урганишга келтирилади?

A) $J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{y}} dx$

B) $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{y^1}} dx$

C) $J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1-y^{12}}}{\sqrt{y^1}} dx$

*D) $J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$

E) $J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y^{12}} dx$

6. $I = \{1, \dots, n\}$ тўпламнинг кисм тўплами бўлсин.

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i, i = 1, \dots, b,$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, j = l + 1, \dots, m,$$

$$x_s \geq 0, \quad s \in I$$

шартлар бажарилганда $f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ функцияни минимизациялаш масаласи нима деб аталади.

- *A) Чизикли программлаштиришнинг умумий масаласи
 B) ЧП нинг асосий масаласи
 C) ЧП нинг бош масаласи
 D) ЧП нинг каноник масаласи
 E) ЧП нинг стандарт масаласи

7. а- берилган сон бўлсин. $J_1 = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = a$ тенгликни

каноатлантирадиган барча $y(x)$ чизиклар ичидан $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ интералга

экстремум киймат берадигонини ажратиб олиш масаласи

- A) Энг кичик сирт хакидаги масала
 B) брахистохрона масаласи дейилади
 C) геодезик чизиклар масаласи дейилади
 *D) изопериметрик масала дейилади
 E) геометрик оптика масаласи

8. $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ функционал учун иккинчи зарурий шарт - Лежандр

шартини ёзинг.

A) $F_{y'y'} \leq 0$

B) $F_{y'y'} > 0$

*C) $F_{y'y'} \geq 0$

D) $F_{y'y'} < 0$

E) $F_{y'y'} = 0$

9. Оптималлаштириш масаласида $F(x, \lambda^*) \leq F(x^*, \lambda^*) \leq F(x^*, \lambda)$ шартни каноатлантирувчи (x^*, λ^*) нукта нима деб аталади.

A) Максимум нукта

B) Минимум нукта

*C) Эгар нукта

D) Энг четки нукта

E) оптимал нукта.

10. $f_0(x) \rightarrow \text{extr}, f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0$

масала учун Лагранж функциясини тузинг.

A) $L = \lambda_0 + \sum_{k=0}^m \lambda_k f_k(x)$

*B) $L = \sum_{k=0}^m \lambda_k f_k(x)$

C) $L = \lambda_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(x)$

D) $L = \sum_{k=0}^m f_k(x)$

E) $L = \sum_{k=0}^m (-1)^k \lambda_k f_k(x)$

11. Кун-Таккер теоремаси қайси масалага қўлланилади.

A) нозикли программалаштириш масаласига .

B) Дидона масаласига

C) Аполлоний масаласига

*D) каварик программалаштириш масаласига

E) оптимал бошқариш масаласига

12. Вариацион ҳисобда Эйлер тенгламасининг ечими нима дейилади

A) Чизик

*B) Экстремал

C) Экстремум

D) Эйлериан

E) Якобиян

13. $x(t)$ ихтиерий узлуксиз дифференциалланувчи функция булиб $x(t_0) = x(t_1) = 0, t \in [t_0, t_1]$ бўлсин ва $a(t), t \in [t_0, t_1]$ узлуксиз функция булиб

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)x(t)dt = 0 \text{ бўлсин.}$$

У холда $a(t) = 0$ булади.

Мазкур тасдик кандай номланади.

- A) Ньютон тенгламаси
- B) Лагранж тенгламаси
- C) Коши леммаси
- *D) Вариацион хисобнинг асосий леммаси
- E) Ферма теоремаси.

13. $x(t)$ ихтиерий узлуксиз дифференциалланувчи функция булиб $x(t_0) = x(t_1) = 0, t \in [t_0, t_1]$ бўлсин ва $a(t), t \in [t_0, t_1]$ узлуксиз функция булиб

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)x(t)dt = 0 \text{ бўлсин.}$$

У холда $a(t) = 0$ булади.

Мазкур тасдик кандай номланади.

- A) Ньютон тенгламаси
- B) Лагранж тенгламаси
- C) Коши леммаси
- *D) Вариацион хисобнинг асосий леммаси
- E) Ферма теоремаси.

15. Динамик программалаштириш назарияси қачон ва қим томонидан ривожлантирилган .

- A) А.А.Самарский хх-аср 50-йиллари
- B) XX-аср бошларида В.И.Романовский
- *C) XX-аср 50-йилларида Р.Беллман
- D) XX- урталарида Кук ва Таккер томонидан
- E) Барча жавоблар тугри

16. Ресурсларни таксимлаш масаласининг математик моделини езинг.

- A) $\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \sum_{i=1}^n x_i < c,$
- B) $\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \sum_{i=1}^n x_i < c, x_i < 0, i = \overline{1, n}$
- *C) $\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \sum_{i=1}^n x_i = c, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$
- D) $\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \min, \sum_{i=1}^n x_i = c, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$
- E) $\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \min, \sum_{i=1}^n x_i = 0, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$

$$x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 0$$

17. Умумий масалани $-x_1 + 2x_2 \leq 4$ геометрик усуда ечинг.

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

A) (4;2)

B) (3;5/2)

*C) (2;3)

D) масала ечимга эга эмас

E) (8;0)

18. Ушбу масала учун Лагранж функциясини тузинг:

$$x_1x_2 + x_2x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_2 + x_3 = 2$$

A) $F = x_1x_2 + x_2x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2) + \lambda_2(x_2 + x_3)$

*B) $F = x_1x_2 + x_2x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(x_2 + x_3 - 2)$

C) $F = \lambda_1(x_1 + x_2) + \lambda_2(x_2 + x_3)$

D) $F = \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(x_2 + x_3 - 2)$

E) $F = x_1x_2 + x_2x_3$

19. $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада унимадал функция бўлсин. «Олтин кесим» усулида с ва d нукталар қайси формулалар билан аникланади?

*A) $c = \frac{1}{2}((\sqrt{5}-1)a + (3-\sqrt{5})b)$ $d = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b)$

B) $c = \frac{1}{2}((\sqrt{5}+1)a + (3-\sqrt{5})b)$ $d = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b)$

C) $C = \frac{1}{2}((\sqrt{5}-1)a + (3+\sqrt{5})b)$ $d = \frac{1}{2}((3+\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b)$

D) $C = \frac{1}{2}((\sqrt{5}-1)a - (3-\sqrt{5})b)$ $d = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a - (\sqrt{5}-1)b)$

E) $C = (\sqrt{5}-1)a + (3-\sqrt{5})b$ $d = (3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b$

20. $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада аникланган бўлсин ва $a \leq c < d \leq b$ бўлсин $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада каварик булиши учун қайси шарт бажарилиши лозим:

A) $f(\alpha c + (1-\alpha)d) < \alpha f(c) + (1-\alpha)f(d)$, $0 \leq \alpha \leq 1$

B) $f(\alpha c + (1-\alpha)d) \leq \alpha f(c) + (1-\alpha)f(d)$, $0 < \alpha \leq 1$

*C) $f(\alpha c + (1-\alpha)d) \leq \alpha f(c) + (1-\alpha)f(d)$, $0 \leq \alpha \leq 1$

D) $f(\alpha c + (1-\alpha)d) < \alpha f(c) + (1-\alpha)f(d)$, $0 < \alpha < 1$

E) $f(\alpha c + (1+\alpha)d) < \alpha f(c) + (1+\alpha)f(d)$, $0 \leq \alpha \leq 1$

21. $I = \{1, \dots, n\}$ тўпламининг қисм тўплами бўлсин.

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i, i = 1, \dots, l,$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, j = l+1, \dots, m,$$

$$x_s \geq 0, s \in I$$

Шартлар бажарилганда

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

функцияни

минимизациялаш масаласи деб аталади.

- *А) Чизикли программалаш тиришкин умумий масаласи
- В) ЧП нинг умумий масаласи
- С) ЧП нинг бош масаласи
- Д) ЧП нинг каноник масаласи
- Е) ЧП нинг стандарт масаласи

22. $f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$ мақсад функцияни минимизациялаш хакидаги Чизикли программалаш тириш масаласининг умумий ва бош масалалари бири-биридан нимаси билан фарк килади.

- *А) Умумий масалада $x_s \geq 0$ шартлар сони n тадан куп эмас, каноник масалада эса n тага тенг.
- В) Умумий ва бош масалалар аслида битта нарс
- С) Умумий масалада $\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \leq b_i$ шартлар l та ($l < m$), каноник масалада эса бундай шартлар катнашмайди
- Д) Умумий масалада $x_s \geq 0$ шартлар сони n тадан кам, каноник масалада эса факат $n-1$ та
- Е) Умумий ва каноник масалаларни таккослаб булмайди.

23. $f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$ мақсад функцияни минимизациялаш хакида каноник масалада $\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = b_i$ шартлар сони нечта?

- А) n тадан куп
- *В) n тадан кам
- С) n тадан куп эмас
- Д) n та
- Е) бундай шартлар катнашмайди

24. Клебшнинг зарурий шартини келтиринг, яъни агар $y(x)$ функция изопериметрик масалада $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ функционалга экстремум киймат берса, у

холда бу функциянинг иккинчи вариацияси $\delta^2 J$ кандай кимат кабул килади.

- А) $\delta^2 < 0$
- В) $\delta^2 J \leq 0$
- С) $\delta^2 \neq 0$
- Д) $\delta^2 > 0$
- *Е) $\delta^2 J \geq 0$

25. Ушбу $f(x) = -4x_1 - x_2 + x_3^2 \rightarrow \min$;

$$\varphi_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_3 - 1 \leq 0$$

$$\varphi_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \leq 0$$

$$\varphi_3(x) = x_1 + x_2 + x_3 \leq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \text{масалада} \quad x_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

ёрдамида эгар нуктани топинг.

- *А) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$
- В) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$
- С) $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- Д) $(0, 0, 0)$
- Е) $\emptyset$

26. $J(y) = \int_0^1 e^x \sqrt{1+y'^2} dx$ функционалнинг экстеремалларини топинг

*A) $y=c_2+\arccos(c_1e^{-x})$;

B) $y=\arccos(c_2+c_1e^{-x})$;

C) $y = \frac{c_1 e^{-x}}{\sqrt{1-c_2 e^{-2x}}}$,

D) $y=c_2+\arcsin(c_1e^{-x})$

E) $y=\arcsin(c_2+c_1e^{-x})$;

27. $J(y) = \int_a^b (16y^2 - y''^2 + e^x) dx$ функционални экстремалини топинг

A) экстремаллари йук

B) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\sin x+c_4\cos x$

C) $y=c_1e^{x/2}+c_2e^{-x/2}+c_3\sin x/2+c_4\cos x/2$

D) $y=c_1e^{-2x}+c_3e^{-2x}+c_4\sin 2x$

*E) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$

28. $\int_D F(x, y, z, z_x, Z_y) dx dy$ функционалга экстремум киймат берувчи

зкз(х,у) функция Остроградский тенгламаси $F_2 - \frac{d}{dx} \{F_p\} - \frac{d}{dy} \{F_2\} = 0$ нинг ечими

булади, бу ерда $P = \frac{dz}{dx}, q = \frac{dz}{dy}$ ва

*A) $\frac{d}{dx} \{F_p\} = F_{px} + F_{pz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dp}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dx}$

$\frac{d}{dy} \{F_q\} = F_{qx} + F_{qz} \frac{dz}{dx} + F_{qp} \frac{dp}{dy} + F_{qq} \frac{dq}{dy}$

B) $\frac{d}{dx} \{F_p\} = F_{px} + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dp}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dx}$

$\frac{d}{dy} \{F_q\} = F_{qx} + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{qp} \frac{dp}{dx} + P_{qq} \frac{dq}{dy}$

C) $\frac{d}{dx} \{F_p\} = F_p + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dp}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dx}$

$\frac{d}{dy} \{F_q\} = F_q + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dp}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dy}$

D) $\frac{d}{dx} \{F_q\} = F_x + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dz}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dx}$

$\frac{d}{dy} \{F_q\} = F_y + F_{zz} \frac{dz}{dz} + F_{qp} \frac{dp}{dy} + F_{qq} \frac{dq}{dy}$

29. Агар $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ га богликмас булса куйидаги тасдиқлардан қайси

бири уринли?

A) Эйлер тенгламаси $F_y(x, y)$ нуқуринишда булади ва ушбу вариацион масала чексиз куп ечимга эга

В) Эйлер тенгламаси $F_y(x,y) \neq 0$ курилишда булади ва ушбу вариацион масала ҳар дам ягона ечимга эга

*С) Эйлер тенгламаси $F_y(x,y) \neq 0$ курилишда булади ва ушбу вариацион масала умуман олганда ечимга эга эмас, баъзис истесно ҳолларда ечимга эга булиши мумкин.

Д) Эйлер тенгламани ечиб булмайди

Е) Эйлер тенгламани ечиб булади бироқ бу ечим вариацион масаланинг ечим булмайди.

30. $\int_{x_0}^{x_1} A(x,y)\sqrt{1+y'^2} dx$ функционал учун трансверсаллик шартини ёзинг

*А) $\frac{A(x,y)(1+\varphi' y')}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$

В) $\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$

С) $A(x,y) \neq 0$

Д) $1+y'^2 \neq 0$

Е) тугри жавоб йук

31. Ушбу $\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y') dx$ функционалда унг чегаравий (x_1,y_1) нукта бирор $Y_1=\varphi(x_1)$ чизик устида силжисин .Трансверсаллик шартини ёзинг

А) $[F_x + (\varphi' + y')F_{y'}]_{x=x_1} = 0$

В) $F + (\varphi' - y')F_{y'} \neq 0$

С) $[F - (\varphi' + y')F_{y'}]_{x=x_1} = 0$

Д) $[F_x + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1} = 0$

* Е) $[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1} = 0$

32. $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада аникланган булиб, $x^* \in [a,b]$ узининг минуминига эришсин.

Қуйидаги шартлардан қайси бири бажарилганда $f(x)$ функция унимодал функция дейилади?

А) $f(x)$ функция x^ дан унга усади, чапда камаяди

В) $f(x)$ функция x^* дан унга камаяди, чапда усади

С) $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада усувчи

Д) $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада камаяди

Е) $f(x)$ функция $[a,b]$ узгармас

33. $f(x)$ функция $[a,b]$ да унимодол функция бўлсин δ - етарлича кичик мусбат сон. Тенг иккига булиш усулида c ва d нукталар қандай формулалар билан аникланади?

А) $c = a + b - \frac{\delta}{2}$, $d = \frac{a+b+\delta}{2}$

В) $c = \frac{a-b-\delta}{2}$, $d = \frac{a-b-\delta}{2}$

С) $c = \frac{a+b-\delta}{3}$, $d = \frac{a+b+\delta}{2}$

Д) $c = \frac{a+b-\delta}{2}$, $d = \frac{a+b+\delta}{2}$

*Е) $c = a+b-\delta$, $d = a+b+\delta$

34. $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада функция бўлсин. «Олтин кесим» усулида c ва d нукталар қайси формулалар билан аникланади?

*A) $c = \frac{1}{2}((\sqrt{5}-1)a + (3-\sqrt{5})b)$ $d = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b)$

B) $c = \frac{1}{2}((\sqrt{5}+1)a + (3-\sqrt{5})b)$ $d = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b)$

C) $c = \frac{1}{2}((\sqrt{5}-1)a + (3+\sqrt{5})b)$

$d = \frac{1}{2}((3+\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b)$

D) $c = \frac{1}{2}((\sqrt{5}-1)a - (3-\sqrt{5})b)$

$d = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a - (\sqrt{5}-1)b)$

E) $c = (\sqrt{5}-1)a + (3-\sqrt{5})b$

$d = (3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b$

35. Оптимал сузи кандай манони билдирадию.

*A) Энг яхши мукаммал

B) Энг катта

C) Энг кичик

D) Энг содда

E) Энг кичик.

36. Максимум ва минимум топишга доир масалалар кандай масалалар дейилди.

*A) Экстремал масалалар

B) Иктисодий масалалар

C) Вариацион масалалар

D) Бошқариш масалалари

E) Максимум масалалари.

3-вариант.

1. Оптимал сузи кандай манони билдирадию.

- *А)Энг яхши мукаммал
- В) Энг катта
- С) Энг кичик
- Д) Энг содда
- Е) Энг кичик.

2. Максимум ва минимум топишга доир масалалар кандай масалалар дейилди.

- *А) Экстремал масалалар
- В) Иктисодий масалалар
- С) Вариацион масалалар
- Д) Бошқариш масалалари
- Е) Максимум масалалари.

3. Кайси масала вариацион хисобнинг классик изопериметрик масаласи дейилади.

- А) Ньтон масаласи
- *В) Дидона масаласи
- С) Фалсафа масаласи
- Д) Архимед масаласи
- Е) Оптика масаласи

4. Геометрик оптикадаги вариацион принцип кайси олим номи билан аталади.

- А) Гюйгенс
- В) Торричелли
- *С) Ферма
- Д)Декард
- Е)Ньютон

5. Брахистохрона хакидаги масала биринчи марта И.Бернулли томонидан куйилгани маълум .Шу масаланинг куйилиши яна кимнинг асарида учрайди .

- А) Якоби
- В) Гюйгенс
- С) Эйлер
- *Д) Галилей
- Е) Учрамайди

6. Юк ташишнинг оптимал режасини топиш хакидаги масала кандай аталади.

- А) Рацион масалалар
- В) Энг тез харакат масаласи
- С) Дидона масаласи
- Д)Брахистохрона масаласи
- *Е)Транспорт масаласи

7 . Бирлик шарга ички чизилган энг катта хажми цилиндрни топиш масаласи (Кеплер масаласи)кандай езилади (X-цилиндр баландлигининг ярми)

- *А) $2\pi(1-x^2) \rightarrow \sup, 0 \leq x \leq 1$

- B) $2\pi(1+x^2) \rightarrow \sup, 0 \leq x \leq 1$
 C) $2\pi(1-\frac{x^2}{4}) \rightarrow \sup, 0 \leq x \leq 1$
 D) $2\pi x^2 \rightarrow \sup, 0 \leq x \leq 1$
 E) Бундай масала ечимга эга эмас.

8. (ξ, η) нуктадан $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипсгача булган энг киска

масофа хакидаги Аполлоний масаласини езинг.

- *A) $x^2 + y^2 \rightarrow \inf, \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
 B) $(x - \zeta)^2 + (y - \iota)^2 \rightarrow \inf, \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$
 C) $(x - \zeta)^2 + (y - \iota)^2 \rightarrow \inf, \frac{(x - \zeta)^2}{a^2} + \frac{(y - \lambda)^2}{b^2} = 1$
 D) $(x - \zeta)^2 + (y - \iota)^2 \rightarrow \inf$ E) $\zeta^2 + \lambda^2 \rightarrow \inf \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

9. Экстремал масалаларнинг асосий синфларини курсатинг.

- а) чекланишлари тенглик ва тенгсизлик булган масалалар.
 Б) классик вариацион ҳисоб.
 С) каварик программалаштириш масаласи.
 Д) оптимал бошқариш масалалари .
 *Е) юқоридагиларни барчаси.

10. $f_0(x) \rightarrow \text{extr}, f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0$

масала учун Лагранж функциясини тузинг.

- A) $L = \lambda_0 + \sum_{k=0}^m \lambda_k f_k(x)$
 *B) $L = \sum_{k=0}^m \lambda_k f_k(x)$
 C) $L = \lambda_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(x)$
 D) $L = \sum_{k=0}^m f_k(x)$
 E) $L = \sum_{k=0}^m (-1)^k \lambda_k f_k(x)$

11. Кун-Таккер теоремаси қайси масалага қулланилади.

- *А) ночизикли программалаштириш масаласига .
 Б) Дидона масаласига
 С) Аполлоний масаласига
 Д) каварик программалаштириш масаласига
 Е) оптимал бошқариш масаласига

12. Вариацион ҳисобда Эйлер тенгламасининг ечими нима дейилади

- A) Чизик
- *B) Экстремал
- C) Экстремум
- D) Эйлериян
- E) Якобиан

13. $x(t)$ ихтиерий узлуксиз дифференциалланувчи функция булиб $x(t_0) = x(t_1) = 0, t \in [t_0, t_1]$ бўлсин ва $a(t), t \in [t_0, t_1]$ узлуксиз функция булиб

$\int_{t_0}^{t_1} a(t)x(t)dt = 0$ бўлсин. У холда $a(t) = 0$ булади. Мазкур тасдиқ кандай

номланади.

- A) Ньютон тенгламаси
- B) Лагранж тенгламаси
- C) Дюбуа-Рейман леммаси
- *D) Вариацион ҳисобнинг асосий леммаси
- E) Ферма теоремаси.

14. Оптимал бошқариш масалалари учун максимум принципи қачон ва қим томонидан барпо қилинган.

- *A) 1953 йилда Л.С.Понтрягин
- B) 1850 йилда Л.Эйлер
- C) 1980 йилда А.Болтянский
- D) 1696 йилда И.Бернулли
- E) 1961 йилда Е.Ф.Мищенко

15. Динамик программалаштириш назарияси қачон ва қим томонидан ривожлантирилган .

- A) А.А.Самарский хх-аср 50-йиллари
- B) XX-аср бошларида В.И.Романовский
- *C) XX-аср 50-йилларида Р.Беллман
- D) XX- урталарида Кук ва Таккер томонидан
- E) Барча жавоблар тугри

16. Ресурсларни тақсимлаш масаласининг математик моделини езинг.

- A) $\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \sum_{i=1}^n x_i < c,$
- B) $\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \sum_{i=1}^n x_i < c, x_i < 0, i = \overline{1, n}$
- *C) $\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \sum_{i=1}^n x_i = c, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$
- D) $\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \min, \sum_{i=1}^n x_i = c, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$
- E) $\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \min, \sum_{i=1}^n x_i = 0, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$

$$x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 0$$

17. Умумий масаласи $-x_1 + 2x_2 \leq 4$ **геометрик усуда ечинг.**

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

A) (4;2)

B) (3;5/2)

*C) (2;3)

D) масала ечимга эга эмас

E) (8;0)

$$x_1x_2 + x_2x_3 \rightarrow \max$$

18. масала учун Лагранж функциясини тузинг.

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_2 + x_3 = 2$$

A) $F = x_1x_2 + x_2x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2) + \lambda_2(x_2 + x_3)$

*B) $F = x_1x_2 + x_2x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(x_2 + x_3 - 2)$

C) $F = \lambda_1(x_1 + x_2) + \lambda_2(x_2 + x_3)$

D) $F = \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(x_2 + x_3 - 2)$

E) $F = x_1x_2 + x_2x_3$

19. Ушбу $f(x) \rightarrow \min, g(x) = 0$ масала учун Лагранж функцияси

$F(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \lambda g(x)$ **бўлсин. Агар X -'нисбий минимум нуктаси булса, $F(x, \lambda)$**

кандай шартни каноатлантиради.

A) $F(x, \lambda) = 0$

*B) $\frac{df}{dx} = 0$

C) $\frac{df}{dx} = 0, \frac{df}{d\lambda} = 0$

D) $\frac{df}{dx} + \frac{df}{d\lambda} = 0$

E) $F + \frac{df}{dx} = 0$

20. Оптималлаштириш масаласида $F(x, \lambda^*) \leq F(x^*, \lambda^*) \leq F(x^*, \lambda)$ шартни

каноатлантирувчи (x^*, λ^*) нукта нима деб аталади.

A) Максимум нукта

B) Минимум нукта

*C) Эгар нукта

D) Энг четки нукта

E) оптимал нукта.

21. Бирор α пераметрга боглиг $J(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x) + \alpha\eta(x), y^1(x) + \alpha\eta^1(x))dx$

функциянинг дифференциали булганээ $J'(0)\alpha$ купайтма α нинг кайси

кийматида $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y^1) dx$ функционалнинг берилган вариацион дейилади?

A) α нинг барча кайматларида

B) $\alpha \neq 0$,

C) $\alpha > 0$

D) $\alpha < 0$

* E) $\alpha = 0$

22. Кидирилаётган функциянинг юкори тартибли хосилаларини хам уз ичига

олган $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y^1, \dots, y^{(n)}) dx$ функционал учун Эйлер тенламасини топинг?

*A) $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$

B) $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n-1)}} = 0$

C) $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$

D) $F_y - \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$

E) $\frac{d}{dx} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y^{(n-1)}} \right) = 0$

23. брахистохрона хакидаги масала кайси функционални урганишга келтирилади?

A) $J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{y}} dx$

B) $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{y^1}} dx$

C) $J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1-y^{12}}}{\sqrt{y^1}} dx$

*D) $J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$

E) $J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y^{12}} dx$

24. XOY текисликдаги иккита нуктани тутуштирувчи чизиклар орасида OX ук отрофида айлантиришдан энг кичик сиртки эга булганини топиш масаласи кайси функционални урганишга келтиради?

*A) $J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y'^2} dx$

B) $J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y^{12}} dx$

$$C) J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y^{12}} dx$$

$$D) J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 - y^{12}} dx$$

$$E) J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y^{12}} dx$$

25. а- берилган сон бўлсин. $J_1 = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = a$ тенгликни

уринлатадигон барча $y(x)$ чизиклар ичидан $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ интералга

экстремум киймат берадигонини ажратиб олиш масаласи

A) Энг кичиксирт хакидаги масала

B) брахистохронф масаласи дейилади

C) геодезик чизиклар масаласи дейилади

*D) цопериметрик масаласи дейилади

E) геометрик оптика масаласи

26. Изопериметрик масала одатда, ушбу $\int_{x_0}^{x_1} H(x, y, y') dx$ интералнинг лади,

бу ерда

A) $H = F + G$

B) $H = G + \lambda F$

C) $H = F^2 - \lambda^2 G^2$

D) $H = F$

*E) $H = F + \lambda G$

27. Ушбу $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y^1, \dots, y_n, y_n^1) dx$ интеграл учун куйидаги тенгламадан

кайси бирлари голоном богламлар дейилади?

*A) $G_s(x, y_1, y_n) = 0 \quad S=1, 2, \dots, p$

B) $G_s(x, y_1, y_1^1, y_2, y_2^1, \dots, y_n, y_n^1) = 0 \quad S=1, 2, \dots, p$

C) $G_s(x, y_1', y_2'', \dots, y_n^{(n)}) = 0 \quad S=1, 2, \dots, p$

D) $G_s(x, y_1^1) = 0 \quad S=1, 2, \dots, p$

E) $y_i(x_0) = y_i^{(0)}, y_i(x_1) = y_i^{(1)}, i=1, 2, \dots, p$

28. $\iint_D F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy$ функционалга экстремум киймат берувчи

$z=z(x, y)$ функция Остроградский тенгламаси $F_p - \frac{d}{dx} \{F_p\} - \frac{d}{dy} \{F_p\} = 0$ нинг

ечими булади, бу ерда $P = \frac{dz}{dx}, q = \frac{dz}{dy}$ ва

*A) $\frac{d}{dx} \{F_p\} = F_{px} + F_{pz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dp}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dx}$
 $\frac{d}{dy} \{F_q\} = F_{qx} + F_{qz} \frac{dz}{dx} + F_{qp} \frac{dp}{dy} + F_{qq} \frac{dq}{dy}$

B) $\frac{d}{dx} \{F_p\} = F_{px} + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dp}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dx}$
 $\frac{d}{dy} \{F_q\} = F_{qx} + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{qp} \frac{dp}{dx} + F_{qq} \frac{dq}{dy}$

C) $\frac{d}{dx} \{F_p\} = F_p + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dp}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dx}$
 $\frac{d}{dy} \{F_q\} = F_q + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dp}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dy}$

D) $\frac{d}{dx} \{F_q\} = F_x + F_{zz} \frac{dz}{dx} + F_{pp} \frac{dz}{dx} + F_{pq} \frac{dq}{dx}$
 $\frac{d}{dy} \{F_q\} = F_y + F_{zz} \frac{dz}{dz} + F_{qp} \frac{dp}{dy} + F_{qq} \frac{dq}{dy}$

29. Агар $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ га боғлиқмас булса куйидаги тасдиқлардан кайси бири уринли?

- A) Эйлер тенгламаси $F_y(x, y) = 0$ курунишда булади ва ушбу вариацион масала чексиз куп ечимга эга
- B) Эйлер тенгламаси $F_y(x, y) = 0$ курунишда булади ва ушбу вариацион масала хар дам ягона ечимга эга
- *C) Эйлер тенгламаси $F_y(x, y) = 0$ курунишда булади ва ушбу вариацион масала умуман олганда ечимга эга эмас, баъзи истесно холларда ечимга эга булиши мумкин.
- D) Эйлер тенгламани ечиб булмайди
- E) Эйлер тенгламани ечиб булади бирок бу ечим вариацион масаланинг ечим булмайди.

30. $\int_{x_0}^{x_1} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$ функционал учун трансверсаллик шартини ёзинг

- *A) $\frac{A(x, y)(1 + \varphi' y')}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$
- B) $\frac{1 + \varphi^1 y^1}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$
- C) $A(x, y) = 0$
- D) $1 + y'^2 = 0$
- E) $\emptyset$

31. Ушбу $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ функционалда унг чегаравий (x_1, y_1) нукта бирор

- $Y_1 = \varphi(x_1)$ чизик устида силжисин. Трансверсаллик шартини ёзинг
- A) $[F_x + (\varphi' + y') F_{y'}]_{x=x_1} = 0$

- B) $F + (\varphi^1 - y^1)F_{y'} = 0$
 C) $\left[F - (\varphi' + y')F_{y'} \right]_{x=x_1} = 0$
 D) $\left[F_x + (\varphi' - y')F_{y'} \right]_{x=x_1} = 0$
 * E) $\left[F + (\varphi' - y')F_{y'} \right]_{x=x_1} = 0$

32. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аникланган булиб, $x^* \in [a, b]$ узининг минуминига эришсин.

Куйидаги шартлардан кайси бири бажарилганда $S(x)$ функция унимодел функция дейилади?

- *A) $f(x)$ функция x^* дан унга усади, чапда камаяди
 B) $f(x)$ функция x^* дан унга камаяди, чапда усади
 C) $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада усувчи
 D) $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада камаяди
 E) $f(x)$ функция $[a, b]$ узгармас

33. $f(x)$ функция $[a, b]$ да унимадол функция бўлсин δ - етарлича кичик мусбат сон. Тенг иккига булиш усулида c ва d нукталар кандай формулалар билан аникланади?

- A) $c = a + b - \frac{\delta}{2}$, $d = \frac{a+b+\delta}{2}$
 B) $c = \frac{a-b-\delta}{2}$, $d = \frac{a-b-\delta}{2}$
 C) $c = \frac{a+b-\delta}{3}$, $d = \frac{a+b+\delta}{2}$
 D) $c = \frac{a+b-\delta}{2}$, $d = \frac{a+b+\delta}{2}$
 *E) $c = a+b-\delta$, $d = a+b+\delta$

34. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада функция бўлсин. «Олтин кесим» усулида c ва d нукталар кайси формулалар билан аникланади?

- *A) $c = \frac{1}{2}((\sqrt{5}-1)a + (3-\sqrt{5})b)$ $d = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b)$
 B) $c = \frac{1}{2}((\sqrt{5}+1)a + (3-\sqrt{5})b)$ $d = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b)$
 C) $C = \frac{1}{2}((\sqrt{5}-1)a + (3+\sqrt{5})b)$
 $d = \frac{1}{2}((3+\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b)$
 D) $C = \frac{1}{2}((\sqrt{5}-1)a - (3-\sqrt{5})b)$
 $d = \frac{1}{2}((3-\sqrt{5})a - (\sqrt{5}-1)b)$
 E) $C = (\sqrt{5}-1)a + (3-\sqrt{5})b$
 $d = (3-\sqrt{5})a + (\sqrt{5}-1)b$

35. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аникланган бўлсин ва $a \leq c < d \leq b$ бўлсин $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада каварик булиши учун кайси шарт бажарилиши лозим:

- A) $f(\alpha c + (1-\alpha)d) < \alpha f(c) + (1-\alpha)f(d)$, $0 \leq \alpha \leq 1$
 B) $f(\alpha c + (1-\alpha)d) \leq \alpha f(c) + (1-\alpha)f(d)$, $0 < \alpha \leq 1$
 *C) $f(\alpha c + (1-\alpha)d) \leq \alpha f(c) + (1-\alpha)f(d)$, $0 \leq \alpha \leq 1$
 D) $f(\alpha c + (1-\alpha)d) < \alpha f(c) + (1-\alpha)f(d)$, $0 < \alpha < 1$

E) $f(\alpha c + (1+\alpha)d) < \alpha f(c) + (1+\alpha)f(d), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$

36. Ушбу $f(x) = -4x_1 - x_2 + x_3^2 \rightarrow \min;$
 $\varphi_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_3 - 1 \leq 0$
 $\varphi_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \leq 0$

$\varphi_3(x) = -x_1 + x_2 + x_3 \leq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$ масалада $x_0 = (\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$ ёрдамида эгар нуктани

топинг.

*A) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ B) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ C) $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ D) $(0, 0, 0)$ E) $\emptyset$

Асосий адабиётлар

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск. Изд. БГУ, 1981
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптималлаштириш усуллари (русчадан таржима) Тошкент, «Ўзбекистон», 1995
3. Болтянский В.Г Математические методы оптимального управления. Москва, Изд-во, «Наука», 1969.
4. Карманов В.Г. Математическое программирование. «Наука», М., 1996.

Кўшимча

1. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. «Наука» , Москва: 1962
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационного исчисления. Москва, «Наука», 1965
3. Насритдинов Г. Математическое программирование (учебное пособие) Тошкент, ЎзМУ, 2002.

Услубий кўрсатмалар рўйхати

1. Н.Ю.Сатимов, М.Тўхтасинов, Н.Мамадалиев Оптималлаштириш усуллари. ЎзМУ, 2006
2. А.З.Фозилов . Оптимал бошқарув назарияси(маърузалар матни), ЎзМУ,2002

Электрон дарсликлар ва Internet адабиётлар

1. <http://exponenta.ru>
2. www.mathhelp.spb.ru

М У Н Д А Р И Ж А

Маъруза 1. Вариацион ҳисобга кириш. Қадимги масалалар.....	3
Маъруза 2. Вариацион ҳисобнинг асосий тушунчалари. Эйлер тенгламаси.....	5
Маъруза 3. Эйлер тенгламасининг хусусий ҳоллари.....	7
Маъруза 4. Юқори тартибли ҳосилаларга боғлиқ функционаллар. Кўп функцияли ҳолда Эйлер тенгламаси.....	11
Маъруза 5. Кўп ўзгарувчили функцияга боғлиқ функционаллар. Остроградский тенгламаси.....	13
Маъруза 6. Ўзгарувчан чегарали масалалар. Больц масаласи.....	16
Маъруза 7. Шартли экстремум масалалари. Изопериметрик масалалар.....	21
Маъруза 8. Вариацион ҳисобнинг сонли усуллари.....	25
Маъруза 9. Оптимал бошқарув назарияси. Понтрягиннинг максимум принципи.....	31
Маъруза 10. Максимум принципнинг қўлланилиши.....	36
Маъруза 11. Динамик программалаштириш. Беллман функцияси ва тенгламаси. Беллман функциясини ҳисоблаш.....	41
Маъруза 12. Дискрет жараёнларини оптимал бошқаруви. Дискрет максимум принципи.....	45
Маъруза 13. Чизикли программалаштириш назарияси. Чизикли программалаштириш масаласига мисоллар.....	49
Маъруза 14. ЧП масалаларининг геометрик талқини ва асосий хоссалари.....	53
Маъруза 15. Чизикли дифференциал ўйинлар.....	57
Чизикли программалаштириш бўйича лаборатория машқлари.....	64
Назорат тестлари.....	69
Адабиётлар.....	93
Мундарижа.....	94