

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Алишера Навои**

МЕХАНИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ»

На правах рукописи

УДК 532.501.32

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

для получения академической степени магистра

по специальности

«5А480101 –Вычислительная математика»

МАННАБОВА ЖАВЛОНА ТОХИРОВИЧА

на тему:

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О ВЫТЕСНЕНИИ ОДНОЙ ЖИДКОСТИ ДРУГОЙ
В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ**

Работа рассмотрена и допущено к защите:

Декан факультета:

проф. Солеев А.

Заведующий кафедрой:

доц. Абдирашидов А.

Научный руководитель:

доц. Суяршаев М.М.

Самарканд – 2012

ANNOTATSIYA

Magistrlilik dissertatsiya ishimning mavzusi “Bir qovushoq suyuqlikning ikkinchisi orqali vertical silindrik quvurda siqib chiqarish masalasini yechish”. Ish kirish, ikki bob, olti paragraf, xulosa, ilova va foydalanilgan adabiyotlardan iborat. Kirish masalaning qo'yilishi mavzuning dolzarbligi, maqsadi, tadqiqot metodlari, ishning ilmiy va amaliy ahamiyati va anattatsiyalardan iborat. Birinchi bobda qovushoq suyuqliklar haqida tushunchalar va qovushoq suyuqliklarining harakati tenglamalari keltirilgan. Bu bobda bazi gidro mexanik modellar, qovushoq suyuqliklarining ketma – ket oqimi haqidagi tushinchalar keltirilgan. Bu yerda masalan neft, gaz, suvlarni yerdan qazib chiqarish anashu suyuqliklarni misol qilish mumkin. Ishning asosiy qismi ikkinchi bobda keltirilgan. Bir qovushoq suyuqlikni ikkinchisi orqali siqib chiqarish masalalari yechilgan. Bu masalalarda asosan suyuqlikni siqib chiqarishning to'laligi ko'rsatiladi. Suyuqliklar orasidagi chegarasining koordinatalarini topish uchun algoritmi tuzildi. Har bir vaqt momentida suyuqliklarning koordinatalari aniqlandi, hosil qilingan natijalar tajribadan ma'lum bo'lgan qiymatlari bilan berilgan aniqlik bilan ustma-ust tushdi.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ.	9
1.1. Некоторые гидромеханические модели.	9
1.2. Уравнения движения вязкой жидкости.	14
1.3. Последовательное течение вязких жидкостей.	16
ГЛАВА 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ.	20
2.1. Решение задачи о последовательном движении двух вязких жидкостей в цилиндрической трубе.	20
2.2. Решение задачи о последовательном движении трёх вязких жидкостей в цилиндрической трубе.	27
2.3. Решение задачи о последовательном движении жидкостей.	34
ЗАКЛЮЧЕНИЯ	52
ЛИТЕРАТУРА.	53

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Для построения исходной теории последовательного движения жидкостей в трубопроводах необходимо установить прежде всего их гидродинамические модели. Выбор соответствующей гидромеханической модели требуют проведения реологических работ исследований и построения характера течения этих сред. Обычно для этой цели служат вискозиметры капиллярные или ротационные. Существуют различные гидродинамические модели движения; ньютоновская, вязко пластичная, взаимопроницающая и т. д.

Цели и задачи работы. В перспективе предстоит значительное увеличение объема буровых работ и продуктов, перекачиваемых по трубопроводам. Естественно, что правильное научно техническое решение ряда вопросов нефтепромышленной механики, например. Улучшение качества цементирования скважин, определяемых полнотой вытеснения глинистых растворов цементами, уменьшение объема смеси при последовательной перекачке различных нефтепродуктов, замещение жидкостей при остановках и пусках нефтепровода перекачивающего высоковязких нефти и т. д. невозможно без детальных теоретических и экспериментальных исследований последовательного движения ньютоновских и неньютоновских жидкостей в трубопроводах.

Объект исследований. В народном хозяйстве широко используется метод последовательного движения жидкостей, что отчетливо видно на примере нефтедобычи. В перспективе предстоит значительное увеличение объема буровых работ и продуктов, перекачиваемых по трубопроводам, естественно, что правильное научно - техническое решение ряда вопросов нефтепромышленной механики, например улучшение качества цементирования скважин, определяемых, как известно, полнотой вытеснения глинистых растворов цементным; уменьшение объема смеси при последовательной перекачке различных нефтепродуктов; замещение жидкостей при остановках и

пусках нефтепровода, перекачивающего высоковязкие нефти, и т.д. невозможно без детальных теоретических и экспериментальных, исследований последовательного движения ньютоновских и неньютоновских жидкостей в трубопроводах.

Научная новизна . В случаи транспортировки различных нефтепродуктов по трубопроводом, при цементировки скважин и т. д. в трубу приходится закачивать последовательно несколько жидкостей. При этом происходит постепенное замещение одной жидкости другой и представляет интерес иметь данные о полноте вытеснения отношение объема вытеснения жидкости к полному объему трубы на заданном участке. Этому вопросу посвящены многочисленные теоретические и экспериментальные исследования т эти работы отличаются своеобразностью подхода к решению данной проблемы.

Предмет исследования. Общие уравнения движения., описывающие процесс несмешивающегося вытеснения жидкости, даны для случая последовательного движения нелинейно вязких сред. Из этих уравнений могут быть получены соответствующие уравнения для более частных случаев. Кроме того при ведены общие уравнения динамики смешивающегося вытеснения. В общем виде дифференциальные уравнения и граничные условия описывающие процесс вытеснения одной среды другой, весьма громоздки. Поэтому для их решения принимаются те или иные допущения также используются приближенные методы.

Степень разработанности проблемы. При необходимости вытеснения одной жидкости (вязкой или ньютоновской) находящейся в трубопроводе, приходится закачивать другую жидкость. В этом случае две несмешивающиеся жидкости, последовательно движутся в трубопроводе. До настоящего времени отсутствует систематизированные работы по гидродинамике последовательного движения жидкостей. Многие из задач данной области, представляющих практический интерес, с другой общей постановке не решены ввиду математических трудностей. Численные методы решения задач в настоящее время развиты недостаточно.

Научно практическое значение. Для решение задача последовательного движения вязких жидкостей в трубах используется метод Баклея - Леверетта, применяемый в подземной гидродинамике при исследовании движения многофазных жидкостей в трубопроводах дома в некоторых работах других авторов в которых движение каждой из жидкостей описывается уравнением Навье - Стокса для вязких жидкостей или соответствующих уравнений ньютоновских жидкостей.

Содержание работы. Работа состоит их введения, 2-х глав (3-х параграфов в каждой главе), заключения, литературы, которая состоит, из 22 наименований и приложения, объемам 72 страниц.

Аннотация. Сформулирована математическая модель задачи о последовательном движении жидкостей в цилиндрической трубе. Выведено уравнение для определения координат искомой границы раздела жидкостей. Результаты численных расчетов показывает на влияние зависимости границы раздела жидкостей от времени.

ГЛАВА 1.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Наиболее простая схема течения была предложена Г. М. Григорьяном и В. И. Черникиным, которые предполагали, что поверхность раздела между последовательно движущимися жидкостями остается всегда плоской, т. е. происходит поршневое вытеснение, при котором различие физико-механических характеристик жидкостей совершенно не учитывается. В связи с этим теория, приведенная в, имеет весьма ограниченное применение. Наиболее строгая математическая постановка задачи вытеснения несмешивающихся жидкостей в трубопроводах дана в работах, в которых движение каждой из жидкостей описывается уравнением Навье — Стокса для вязких жидкостей или соответствующими уравнениями для неньютоновских жидкостей. Решение этих уравнений в областях, занимаемых вытесняющей и вытесняемой жидкостями, должно удовлетворять некоторым начальным и краевым условиям. Краевые условия записываются для внутренней поверхности трубы и для границы поверхности раздела между жидкостями, положение и форма которой заранее неизвестны и должны находиться из решения задачи.

1.1. Некоторые гидромеханические модели

Под действием приложенных сил твердые тела и жидкие среды испытывают деформации. В жидкости при приложении внешнего напряжения деформация развивается неограниченно; силы внутреннего трения ограничивают скорость деформации, поэтому равновесие между внутренними и внешними напряжениями может устанавливаться так, что скорость деформации оказывается постоянной и зависит от свойств жидкости. По характеру зависимости скорости деформации от напряжения жидкости делят на две категории: ньютоновские и неньютоновские жидкости.

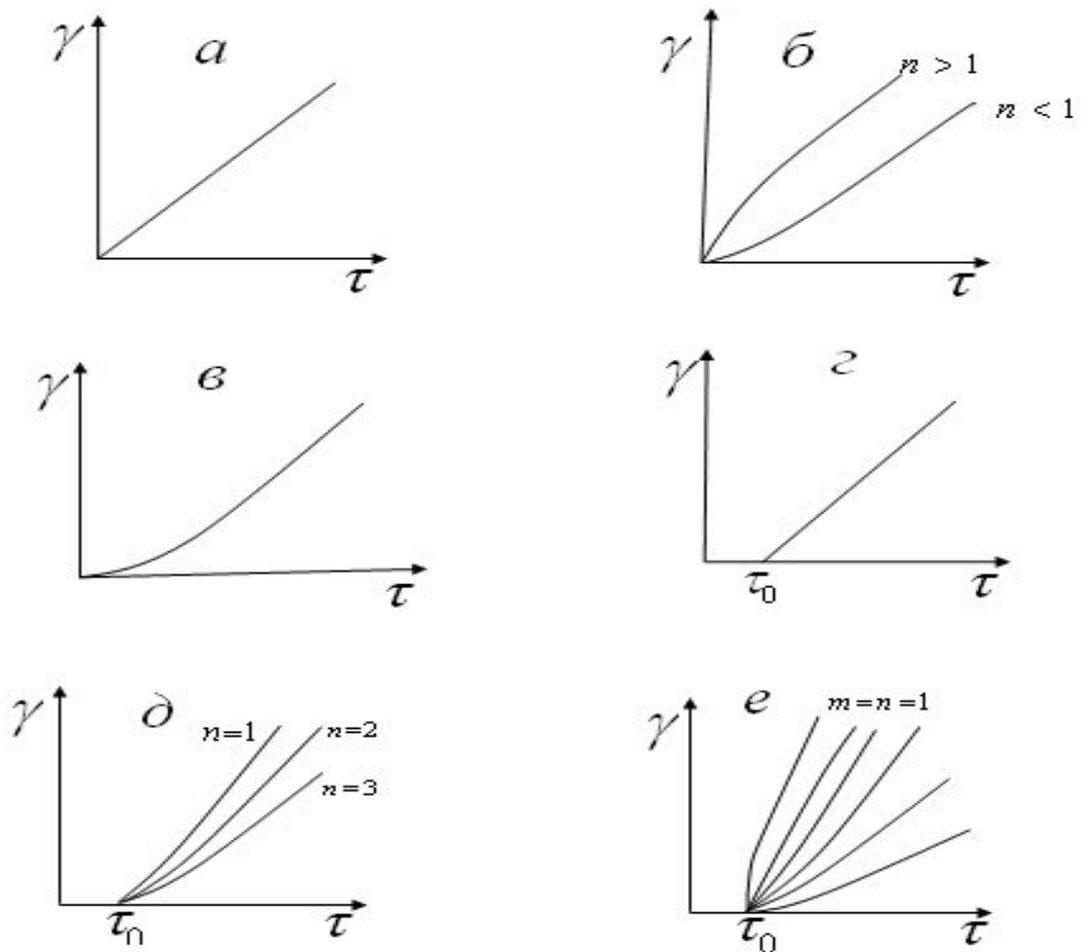
К этой категории относятся жидкости, для которых напряжение сдвига τ пропорционально градиенту скорости

$$\frac{du}{dn}, \quad \text{т. е.}$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dn} = \mu \gamma \quad (1.1.1)$$

где μ — динамический коэффициент вязкости.

На рис. 1а дан график зависимости напряжения τ от скорости сдвига γ (кривая течения), который представляет прямую линию с тангенсом угла наклона μ .



a - по Ньютону, *б* - по Оствальду де Валле, *в* - по Прандтлю-Эйрингу, *с* - по Шведову-Бингаму, *д* - по Кэссону, жидкость.

Рис. 1. Кривые течения для различных моделей реологически стационарных неньютоновских жидкостей:

Величина μ , зависящая только от температуры и давления, полностью характеризует свойства этих жидкостей. Все жидкости с небольшой молекулярной массой относятся к ньютоновским средам, например легкие нефти, вода, глицерин, растительное масло и т. п.

Вязкопластичная среда Шведова - Бингама. Многочисленные исследования движения зелей, гелей и грубодисперсных систем показали, что эти материалы начинают течь после того, как напряжение достигнет некоторой предельной величины τ_0 , т. е. обладают вязкопластичными свойствами. Шведов впервые открыл пластичность коллоидных растворов, а Бингам на основе изучения движения некоторых зелей и грубодисперсных систем предложил следующий закон течения вязкопластичных сред:

$$\tau = \tau_0 + \eta_{nl} \dot{\gamma} \quad (1.1.2)$$

где τ_0 - предельное напряжение сдвига,

η_{nl} - коэффициент пластичной вязкости.

График течения вязкопластичных сред представляет прямую линию, пересекающую ось напряжения сдвига на расстоянии τ_0 от ее начала (рис. 1г). Дальнейшие исследования показали, что эта модель может успешно применяться для описания течения нефтей с высоким содержанием парафинистых и асфальтено-смолистых веществ, буровых растворов, отдельных масляных красок и т. д.

Модель Оствальда де Балле. Если кривая течения (рис. 1 б) описывается степенным законом

$$\tau = K \cdot \dot{\gamma}^n \quad (1.1.3)$$

то такая гидромеханическая модель называется моделью Оствальда де Балле. Здесь K и n являются постоянными ($n < 1$) для данной жидкости: K - мера консистенции жидкости, величина которой возрастает с увеличением вязкости; n

характеризует степень неньютоновского поведения материала и чем больше отличается от единицы, тем отчетливее проявляются эти свойства. Такая зависимость была впервые предложена Освальдом Жидкости, подчиняющиеся данному закону, называются псевдо пластичными.

Кривые течения многих жидкостей подчиняются данному закону в относительно узких пределах изменения скорости деформации. В случае $n < 1$ из соотношения (1.1.3) для предельно малых значений скорости сдвига имеют место бесконечно большие значения вязкости. У реальных жидкостей этого не наблюдается, что является одним из недостатков степенного закона. Однако алгебраическая простота формулы (1.1.3) и малое число экспериментальных постоянных (K и n), содержащихся в ней, а также тот факт, что на практике часто встречаются случаи, когда γ имеет большие значения, нередко дают возможность описывать течение сред степенным законом. Например, данная модель широко используется в инженерных расчетах потоков водонефтяных эмульсий, буровых растворов, некоторых типов красок, дисперсных систем и т. д.

Необходимо отметить, что в случае $n > 1$ реологический закон (1.1.3) описывает течение дилатантных жидкостей. Такой тип течения был впервые обнаружен Рейнольдсом в суспензиях при большом содержании твердой фазы. Для данных жидкостей кажущаяся вязкость повышается с возрастанием скорости сдвига.

Жидкость Прандтля-Эйринга. Кривая течения (рис. 1 в) жидкости Прандтля-Эйринга описывается формулой

$$\tau = A \operatorname{arcsinh} \frac{\gamma}{C} \quad (1.1.4)$$

где A и C - экспериментально определяемые константы.

Эта модель позволяет описывать течение жидкости с помощью всего двух констант. Согласно формуле (1.1.4), низким скоростям сдвига соответствует ньютоновское поведение среды. Основной недостаток модели - слож-

ность формулы, что чрезмерно затрудняет рассмотрение даже относительно простых течений. Закону Прандтля - Эйринга подчиняются такие модельные вещества, как смола, полиэтилен, расплавленное стекло и т. д.

Модель Рейнера-Филиппова. Для жидкостей данной модели закон трения представляется в виде

$$\tau = \gamma \eta_{\infty} + \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{1 + \frac{\tau^2}{\tau_m^2}} \gamma \quad (1.1.5)$$

где η_{∞} -вязкость для бесконечно больших напряжений,

η_0 -начальная вязкость для $\tau \rightarrow 0$,

τ_m -напряжение трения при $\eta = \frac{\eta_0 + \eta_{\infty}}{2}$.

Формула (1.1.5) хорошо описывает течения жидкого каучука, гексана, метанола и некоторых других жидкостей для любых диапазонов скоростей сдвига. Однако ввиду сложности выражения (1.5) при решении даже простейших задач течения возникают значительные математические трудности.

Модель Эллиса. Модель Эллиса включает три параметра [60] и записывается математически в форме

$$\tau = \eta_0 \gamma + \frac{1}{1 + \left(\frac{\tau}{\tau_{\frac{1}{2}}} \right)^{\alpha-1}} \quad (1.1.6)$$

$\tau_{\frac{1}{2}}$ -напряжение сдвига, при котором величина эффективной вязкости

снижается до $\frac{1}{2} \eta_0$; α - константа.

При малых значениях напряжения сдвига модель предсказывает ньютоновское поведение жидкости с вязкостью η_0 , а при больших соответствует степенному закону.

1.2. Уравнения движения вязкой жидкости

Уравнение движения сплошной среды имеет вид:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} + \frac{d\bar{p}_x}{dx} + \frac{d\bar{p}_y}{dy} + \frac{d\bar{p}_z}{dz}$$

или

$$\bar{W} = \bar{F} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P \quad (1.2.1)$$

а в проекциях на координатных оси

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X + \frac{1}{\rho} [\operatorname{div} P]_x & \frac{dv_y}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho} [\operatorname{div} P]_y \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho} [\operatorname{div} P]_z \end{aligned}$$

отсюда

$$[\operatorname{div} P]_x = \frac{dP_{xx}}{dx} + \frac{dP_{yx}}{dy} + \frac{dP_{zx}}{dz} \quad (1.2.2)$$

Используя связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций выражается следующим образом

$$P_{xx} = -P + \lambda \operatorname{div} \bar{v} + 2\mu \varepsilon_1 \quad \varepsilon_1 = \frac{dv_x}{dx} \quad \lambda = -\frac{2}{3} \mu$$

$$P_{xy} = P_{yx} = \mu \theta_3 = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (1.2.3)$$

P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} , нормальное напряжение

P_{xy}, P_{xz}, P_{yz} , касательной напряжение

$$\begin{aligned}
 [divP]_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho + \lambda div \bar{v} + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial div \bar{v}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \\
 &+ \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \quad (1.2.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2} \mu \frac{\partial div}{\partial x} + \\
 &+ p \Delta v_x + \mu \frac{\partial div \bar{v}}{\partial x}
 \end{aligned}$$

$$W_x = \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad W_y = \frac{\partial v_y}{\partial t}, \quad W_z = \frac{\partial v_z}{\partial t},$$

$$[divP]_x = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial div \bar{v}}{\partial x} + \mu \Delta v_x$$

$$[divP]_y = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial div \bar{v}}{\partial y} + \mu \Delta v_y \quad (1.2.5)$$

$$[divP]_z = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial div \bar{v}}{\partial z} + \mu \Delta v_z$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\gamma}{3} \frac{\partial div \bar{v}}{\partial x} + \gamma \Delta v_x, \\
 \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\gamma}{3} \frac{\partial div \bar{v}}{\partial y} + \gamma \Delta v_y, \\
 \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\gamma}{3} \frac{\partial div \bar{v}}{\partial z} + \gamma \Delta v_z,
 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.6)$$

Уравнения называются Навье –Стокса. Эти уравнения имеют очень сложный вид, поэтому их точное интегрирование удаётся лишь в редких случаях.

1.3. Последовательное течение вязких жидкостей

В случае транспортировки различных нефтепродуктов по трубопроводам, при цементировании скважин и т. д. в трубу приходится закачивать последовательно несколько жидкостей. При этом происходит постепенное замещение одной жидкости другой и представляет интерес иметь данные о полноте вытеснения (отношение объема вытесняемой жидкости к полному объему трубы на заданном участке). Этому вопросу посвящены многочисленные теоретические и экспериментальные исследования А. Х. Мирзаджанзаде[15], А. А. Аббасова[12,14], В. И. Харламенко, В. С. Яблонского, В. И. Марона и др. Все эти работы отличаются своеобразностью подхода к решению данной проблемы.

Выпишем уравнения последовательного движения двух жидкостей, описываемых нелинейно-вязкопластичной моделью, которая является наиболее общей среди рассматриваемых здесь моделей.

Общие уравнения движения в цилиндрических координатах будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dv_{ri}}{dt} + v_{ri} \frac{dv_{ri}}{dr} + \frac{v_{\phi i}}{r} \frac{dv_{ri}}{d\phi} + v_{zi} \frac{dv_{ri}}{dz} - \frac{v_{\phi i}^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_i}{dr} + F_{ri} + \\ + \frac{1}{\rho} \left[\frac{d\tau_{rri}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\tau_{r\phi i}}{d\phi} + \frac{d\tau_{rzi}}{dz} + \frac{\tau_{rri} - \tau_{\phi\phi i}}{r} \right] \quad (1.3.1) \\ \frac{dv_{\phi i}}{dt} + v_{ri} \frac{dv_{\phi i}}{dr} + \frac{v_{\phi i}}{r} \frac{dv_{\phi i}}{d\phi} + v_{zi} \frac{dv_{\phi i}}{dz} + \frac{v_{ri} v_{\phi i}}{r} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\rho\tau} \frac{dP_i}{d\varphi} + F_{\varphi i} +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{d\tau_{\varphi ri}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\tau_{\varphi\varphi i}}{d\varphi} + \frac{d\tau_{\varphi zi}}{dz} + \frac{2\tau_{r\varphi i}}{r} \right] \quad (1.3.2)$$

$$\frac{dv_{zi}}{dt} + v_{ri} \frac{dv_{ri}}{dr} + \frac{v_{\varphi i}}{r} \frac{dv_{zi}}{d\varphi} + v_{zi} \frac{dv_{zi}}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_i}{dz} + F_{zi} +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{d\tau_{zzi}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\tau_{z\varphi i}}{d\varphi} + \frac{d\tau_{zzi}}{dz} + \frac{d\tau_{rzi}}{r} \right] \quad (1.3.3)$$

Уравнение неразрывности будет

$$\frac{dv_{ri}}{dt} + \frac{1}{r} \frac{dv_{\varphi i}}{d\varphi} + \frac{dv_{zi}}{dz} + \frac{d_{ri}}{r} = 0 \quad (1.3.4)$$

Здесь и в дальнейшем $i=1, 2$, причем индекс 1 будет относиться к величинам, определяющим движение вытесняющей жидкости, а индекс 2-вытесняемой; $v_{ri}, v_{\varphi i}, v_{zi}$ компоненты скорости i -й жидкости соответственно по осям координат r, φ, z ; P - давление; $F_{ri}, F_{\varphi i}, F_{zi}$ - компоненты массовой силы; ρ - плотность жидкости.

Компоненты напряжений определяются таким образом:

$$\tau_{rri} = 2B \frac{dv_{ri}}{dr}, \tau_{r\varphi i} = B \left(\frac{1}{r} \frac{dv_{ri}}{d\varphi} + \frac{dv_{\varphi i}}{dr} - \frac{v_{\varphi i}}{r} \right)$$

$$\tau_{\varphi\varphi i} = 2B \left(\frac{1}{r} \frac{dv_{\varphi i}}{d\varphi} + \frac{v_{ri}}{r} \right), \tau_{\varphi zi} = B \left(\frac{dv_{\varphi i}}{dz} + \frac{1}{r} \frac{dv_{zi}}{d\varphi} \right)$$

$$\tau_{zzi} = 2B \frac{dv_{zi}}{dz}, \tau_{zri} = B \left(\frac{dv_{zi}}{dr} + \frac{dv_{ri}}{dz} \right) \quad (1.3.5)$$

здесь

$$B = \left[\frac{1}{\tau_0^m} + \mu^m \frac{1}{A^m} \right]^n A^{\frac{n}{m}-1} \quad (1.3.6)$$

A — интенсивность скоростей деформаций:

$$A = \left[2 \left(\frac{dv_{ri}}{dr} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{dv_{\phi i}}{d\phi} + \frac{v_{ri}}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{dv_{zi}}{dz} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{dv_{ri}}{d\phi} + \frac{dv_{\phi i}}{dr} - \frac{v_{\phi i}}{r} \right)^2 + \left(\frac{dv_{\phi i}}{dz} + \frac{1}{r} \frac{dv_{zi}}{d\phi} \right)^2 + \left(\frac{dv_{zi}}{dr} + \frac{dv_{ri}}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.7)$$

При решении конкретных задач делается ряд упрощающих предположений. Так, полагая движение осесимметричным и что продольная скорость v_z по направлению вдоль радиуса изменяется значительно быстрее, чем в направлении оси трубы, можно пренебречь членом $\frac{d^2 v_z}{dz^2}$.

Если движение ламинарное и вязкие жидкости не смешивающиеся, то предыдущие уравнения принимают вид

$$\frac{dv_{ri}}{dt} + v_{ri} \frac{dv_{ri}}{dr} + v_{zi} \frac{dv_{ri}}{dz} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{dP_i}{dr} + \nu_1 \left(\frac{d^2 v_{ri}}{dr^2} + \frac{d^2 v_{ri}}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_{ri}}{dr} - \frac{v_{ri}}{r^2} \right) \quad (1.3.8)$$

$$\frac{dv_{zi}}{dt} + v_{ri} \frac{dv_{zi}}{dr} + v_{zi} \frac{dv_{zi}}{dz} = F_z - \frac{1}{\rho_i} \frac{dP_i}{dz} + \nu_i \left(\frac{d^2 v_{zi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_{zi}}{dr} \right) \quad (1.3.9)$$

$$\frac{dv_{ri}}{dr} + \frac{dv_{zi}}{dz} + \frac{v_{ri}}{r} = 0 \quad (1.3.10)$$

В случае установившегося движения в этих уравнениях пренебрегают производными по t . Так как $v_{ri} \ll v_{zi}$, то из (1.3.8) можно получить $\frac{dP_i}{dr} = 0$, т. е. в (1.2.9) $P_i = P_i(z)$. Интегрируя уравнение (1.3.10)

по r и используя граничное условие $v_{ri} = 0$, при $r = R$ имеем

$$r v_{ri} = \int_R^r \frac{dv_{zi}}{dz} r dr \quad (1.3.11)$$

Подставляя это выражение в (1.2.9), получаем

$$v_{zi} \frac{dv_{ri}}{dz} - \frac{1}{r} \frac{dv_{zi}}{dr} \int_R^r dv_{zi} r dr = F_{zi} - \frac{1}{\rho_i} \frac{dP_i}{dz} + v_i \left(\frac{d^2 v_{zi}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_{zi}}{dr} \right) \quad (1.3.12)$$

Дифференцируя уравнение (1.3.12) по r , можно получить дифференциальные уравнения для определения v_{zi} . Обычно задача вытеснения жидкостей решается при следующих граничных условиях:

$$v_{zi}(r, 0) = \text{const}, \quad (1.3.13)$$

$$v_{zi}(r_1, z) = v_{zr}(r_1, z_1), \quad (1.3.14)$$

$$\tau_{rzi}(r_1, z_1) = \tau_{rz_1}(r_1, z_1), \quad (1.3.15)$$

$$v_{zi}(r, z) \neq \infty, \quad (1.3.16)$$

$$\tau_{rzi} = \eta_i \frac{dv_{zi}}{dr} \quad (1.3.17)$$

где r, z - текущие координаты;

r_1, z_1 - координаты точек на поверхности раздела.

Определив v_{ri} , по (1.3.11) можно найти v_{zi} , а из (1.3.12) - закон изменения давления вдоль трубы. Для определения r_1 и z_1 используются уравнения

$$\frac{dr_1}{dt} = v_{ri}(r_1, z_1) \quad (1.3.18)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = v_{zi}(r_1, z_1) \quad (1.3.19)$$

В дальнейшем будут даны некоторые решения для частных случаев последовательного движения жидкостей в трубах при предположении $v_{ri} = 0$.

ГЛАВА 2.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

При необходимости вытеснения одной жидкости (вязкой или неньютоновской), находящейся в трубопроводе, приходится закачивать другую жидкость. При этом возможен случай, когда две несмешивающиеся жидкости последовательно движутся в трубопроводе. При движении вытесняющей и вытесняемой жидкостей из-за различия их физико-механических свойств в области контакта образуется «язык» (поверхность раздела жидкостей) вытесняющей жидкости. По мере продвижения жидкостей в трубопроводах «язык» также движется с некоторой скоростью, зависящей от отношения вязкостей, плотностей и средней скорости потока. По истечении некоторого промежутка времени «головка» вытесняющей жидкости появляется в конце трубопровода. Закономерности движения поверхности раздела позволяют оценить время и объем жидкости, необходимые для полного вытеснения, а также полноту вытеснения в данный момент времени.

2.1. Решение задачи о последовательном движении двух вязких жидкостей в цилиндрической трубе

При гидравлическом разрыве пластов происходит последовательное движение жидкостей. После остановки перекачки жидкости оставшийся в трубопроводе застывающий нефтепродукт стараются вытеснить маловязкой незастывающей жидкостью. Инженерное решение этих вопросов сводится к рассмотрению последовательного движения вязких жидкостей в круглых цилиндрических трубах.

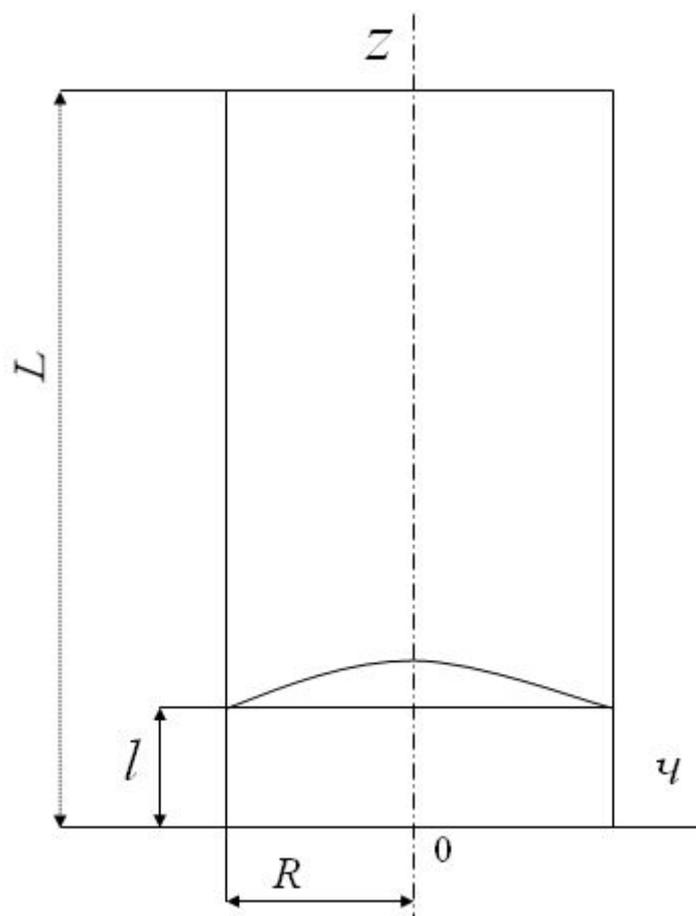


Рис. 2. Схема вытеснения вязких жидкостей в вертикальных трубах.

Авторы при решении задачи вытеснения одной вязкой жидкостью другой в вертикальной круглой цилиндрической трубе в случае ламинарного режима использовали метод послойного движения, применяемый в подземной гидродинамике при исследовании перемещения границы раздела двух жидкостей. При этом давление на концах трубы предполагалось постоянным и эпюра распределения скоростей была таковой же, как и для движения однородной жидкости при тех же граничных условиях. Тогда скорость движения граничной точки в вертикальной цилиндрической трубе определится из выражения (рис.2)

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{P_1 - P \pm \gamma_1 z}{4\eta_1 z} (R^2 - r^2) = \frac{P_2 - P \pm \gamma_2 (L - z)}{4\eta_2 (L - z)} (R^2 - r^2) \quad (2.1.1)$$

где P - давление в точке раздела; η_1, η_2 и γ_1, γ_2 -вязкости и удельные веса вытесняющей и вытесняемой жидкостей соответственно; R -радиус

трубы; z -расстояние точки от оси трубы; L -длина трубы; P_1 и P_2 -давления в сечениях $z=0$ и $z=L$ соответственно.

Знак «+» относится к случаю движения жидкости сверху вниз, а знак «-» снизу вверх.

Если ввести безразмерные переменные

$$x = \frac{z}{L}, \quad y = \frac{r}{R}, \quad \varphi = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

$$\beta = \frac{\eta_2}{\eta_1}, \quad i = \frac{P_1 - P_2}{\gamma_1 L}, \quad \tau = \frac{R^2 \gamma_1}{4\eta_1 L} t$$

то из (1) можно получить дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{i \pm \varphi \pm (-\varphi + 1)x(1 - y^2)}{\beta(1 - \beta)x} \quad (2.1.2)$$

здесь безразмерное время τ идентично параметру Фурье.

Принимая уравнение первоначальной границы раздела виде $z=l$ и интегрируя (2.1.2) получаем уравнение границы раздела

$$y = 1 - \frac{1}{\tau} \left[\Phi_1(x) + \Phi_2 \ln \frac{\pm(-\varphi + 1)x + i \pm \varphi}{\pm(-\varphi - 1)\alpha + i \pm \varphi} \right] \quad (2.1.3)$$

$$\Phi_1(x) = \frac{(1 - \beta)(x - \alpha)}{\pm(-\varphi + 1)}$$

$$\Phi_2(x) = \frac{\beta(1 - \beta) - (x - \beta)(1 - \varphi)}{(\varphi - 1)^2}$$

$$\alpha = \frac{l}{L}$$

Безразмерное время τ от начала процесса до момента прорыва вытесняющей жидкости к концу трубы определится из выражения (2.1.3) при

$$y = 0, \quad x = 1:$$

$$\tau_1 = \Phi_1(1) + \Phi_2 \ln \Phi_3, \quad \Phi_3 = \frac{i \pm 1}{\pm(-\varphi + 1)\alpha + i \pm \varphi} \quad (2.1.4)$$

Для случая движения снизу вверх отношение оставшегося объема вытесняемой жидкости в момент прорыва к первоначальному ее объему W определится из выражения

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\Phi_1 + \frac{2\Phi_2}{(1-\alpha)(\varphi-1)} [(i-1)\ln(\varphi-1)(1-\alpha)]}{2\Phi_1(1) + 2\Phi_2 \ln \Phi_3} \quad (2.1.5)$$

При $\alpha = 0$, $\varphi = 1$ формула (2.1.4) примет вид

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{2\beta + 1}{3(\beta + 1)} \quad (2.1.6)$$

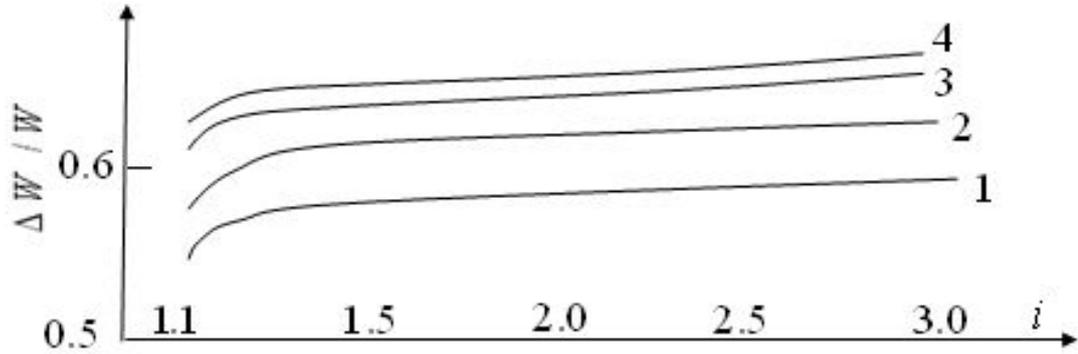
а в случае $\alpha = 0$, $\varphi = 1$ и $\beta = 1$ это отношение равно 0,5.

На рис. 5 представлены результаты численных расчетов по формуле (2.1.5) при $\alpha = 0$ для различных нефтей в случае вытеснения их водой. Следует отметить, что при заданном i с увеличением β отношение $\frac{\Delta W}{W}$ возрастает; если же $\beta = 1$, то изменяется в пределах 0,333—0,667.

Из рис.3 видно также, что при заданных β и φ с увеличением i отношение $\frac{\Delta W}{W}$ возрастает до определенного предела, а затем практически не изменяется.

Как известно, вытеснение одной жидкости другой происходит в две фазы:

1) вытеснение от начала процесса до момента прорыва вытесняющей жидкости в каждом сечении трубы 2) вымывание от начального момента прорыва вытесняющей жидкости дипольного удаления вытесняемой жидкости со всего участка трубы.



$$1-\beta=4.08, \quad \varphi=0.8398 \quad 2-\beta=7.73, \quad \varphi=0.8448$$

$$3-\beta=14.02, \quad \varphi=0.8630 \quad 4-\beta=19.14, \quad \varphi=0.8810$$

Рис.3. Зависимость $\Delta W/W$ от i

В работе в такой же постановке рассмотрены обе фазы вытеснения.

Для определения времени при исследовании фазы вымывания достаточно в (2.1.3) положить $x=1$ и $y=y_i$ (y_i —объемная концентрация вытесняющей жидкости в сечении $x=1$):

$$\tau_j = \frac{1}{1-y_j^2} \left[\frac{a_3}{a_2} (1-\alpha) + \frac{1}{a_2} \left(a_4 - \frac{a_3 a_1}{a_2} \right) \ln \frac{a_1 + a_2}{a_1 + \alpha a_2} \right] \quad (2.1.7)$$

здесь приняты следующие обозначения

$$a_1 = i \pm \varphi, \quad a_2 = \pm(1-\varphi), \quad a_3 = 1 \pm \beta, \quad a_4 = \beta.$$

Уравнение Коэффициент вытеснения, объем закачанной жидкости и расходную концентрацию для вытесняющей жидкости можно определить по формулам. Границы раздела жидкостей в любой момент времени $\tau_j > \tau_1$ можно получить из (2.1.5) и (2.1.7):

$$y^2 = 1 - (1-y_j^2) \frac{a_2 a_3 (x-\alpha) + (a_2 a_4 - a_1 a_2) \ln \frac{a_1 + a_2 x}{a_1 + \alpha a_2}}{a_2 a_3 (x-\alpha) + (a_2 a_4 - a_1 a_3) \ln \frac{a_1 + a_2}{a_1 + \alpha a_2}} \quad (2.1.8)$$

Коэффициент вытеснения, объем закачанной жидкости и расходную концентрацию для вытесняющей жидкости можно определить по формулам.

$$K_j = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 y^2 dx \quad (2.1.9)$$

$$\bar{V}_j = 2 \int_{\tau_1}^{\tau_j} q d\tau + K_j \Big|_{\tau=\tau_1} \quad (2.1.10)$$

$$\rho_j = \frac{q_1}{q_2} \quad (2.1.11)$$

Окончательно выражения (2.1.9), (2.1.10) и (2.1.11) будут иметь вид

$$K_j = 1 - (1 - y_j^2) \times \frac{0,5a_2a_3(1-\alpha) + (a_2a_4 - a_1a_3) \left[-1 + \frac{a_1 + a_2}{(1-\alpha)a_2} \ln \frac{a_1 + a_2}{a_1 + \alpha a_2} \right]}{a_2a_3(1-\alpha) + (a_2a_4 - a_1a_3) \ln \frac{a_1 + a_2}{a_1 + \alpha a_2}} \quad (2.1.12)$$

$$\bar{V}_j = K_j(0) + \frac{(i-1)}{2(1-\alpha)} (\tau_j - \tau_0) \quad (2.1.13)$$

$$\rho_j = \frac{y_j^2(2 - y_j^2)}{(1 - y_j^2)^2} \quad (2.1.14)$$

Представляет интерес определение коэффициента вытеснения на заданном участке трубы l_1 по формуле

$$\bar{K}_j = \frac{\int_0^{l_1} \pi r^2 dz}{\pi R^2 l_1} = \frac{1}{l} \int_0^1 y^2 dx, \quad l = \frac{l_1}{L} \quad (2.1.15)$$

Окончательно величина K_j будет равна

$$\bar{E}_j = 1 - (1 - y_j^2).$$

$$\frac{\left[a_2 a_3 \frac{l - 2\alpha}{2} + (a_2 a_4 - a_1 a_3) \left(\frac{a_1}{a_2 l} \ln \frac{a_1 + a_2 l}{a_1} + \ln \frac{a_1 + a_2 l}{a_1 + a_2 \alpha} - 1 \right) \right]}{a_2 a_3 (1 - \alpha) + (a_2 a_4 - a_1 a_3) \ln \frac{a_1 + a_2}{a_1 + \alpha a_2}}$$

На рис.4 приведены зависимости \bar{K}_j ; от \bar{V}_j для различных значений β , φ и τ . Видно, что с увеличением \bar{V}_j коэффициент вытеснения растет и при некотором значении \bar{V}_j темп увеличения \bar{K}_j уменьшается. Отсюда следует также, что с увеличением τ при вытеснении снизу вверх ($\varphi < 1$) величина \bar{K}_j уменьшается, а при вытеснении сверху вниз ($\varphi > 1$) — увеличивается.

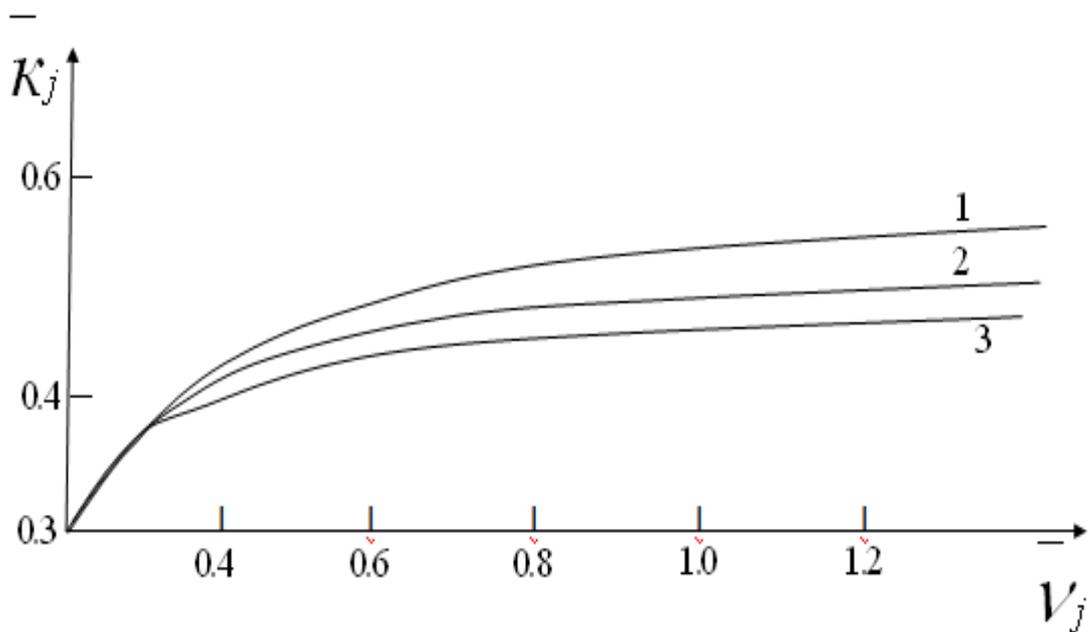


Рис.4. Кривые зависимости \bar{K}_j от \bar{V}_j при $\beta=4,08$, $\varphi=0,8398$ и различных значениях τ : 1—3; 2—1,3; 3—1.

2.2. Последовательное движение трех вязких жидкостей в вертикальной трубе

В вертикальной колонне круглых труб последовательно движутся вытесняемая (III), промежуточная (II) и толкающая (I) жидкости. При достижении толкающей жидкости необходимой глубины часть объема вытесняемой и промежуточной жидкостей остается не вытесненной (см. рис.1)

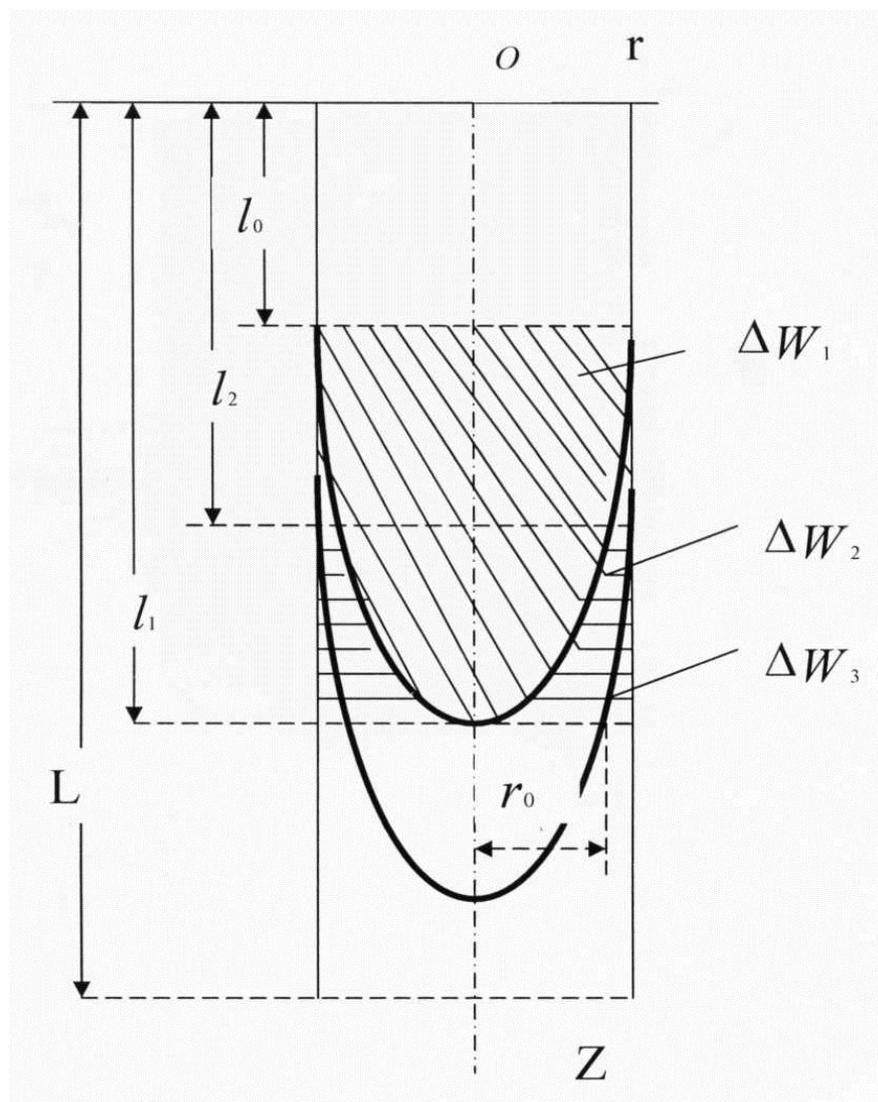


Рис5.

В данном случае учитывается различие в физических свойствах (удельных весах и вязкостях) жидкостей. При решении задачи предполагается, что эпюра распределения скоростей остается такая же, как и при движении однородной жидкости при тех же граничных условиях. Кроме того, влиянием

начального участка пренебрегают, давление в концах колонны труб принимается постоянным.

Ниже нами приняты следующие новые обозначения.

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ - соответственно удельный вес толкающей, промежуточной и вытесняемой жидкостей;

η_1, η_2, η_3 - соответственно вязкость толкающей, промежуточной и вытесняемой жидкостей;

z_1, z_2 - расстояние точки, лежащей на линии контакта, от начала трубопровода, соответственно между I-II и I и III жидкостями, при $t = 0, z_1 = l_0, z_2 = l_2, ;$

l_0 - расстояние точки на оси трубы от начала трубопровода до линии контакта между I и II жидкостями движения;

P', P'' - соответственно давление в контактных линиях;

U - скорость точки живого сечения;

W - объем трубопровода, соответствующий длине $l_1 - l_0$;

$\Delta W_1, \Delta W_2, \Delta W_3$ - соответственно объем I, II и III жидкостей в объеме W .

Кроме того, введены следующие безразмерные обозначения:

$$\frac{z_1}{L} = \bar{z}_1; \quad \frac{z_2}{L} = \bar{z}_2; \quad \frac{r}{R} = \bar{r}; \quad \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \varphi_2;$$

$$\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \varphi_2; \quad \frac{\eta_2}{\eta_1} = \beta_2; \quad \frac{\eta_2}{\eta_1} = \beta_3; \quad \frac{\gamma_2 R^2}{4\eta_1 L} t = \bar{t};$$

$$\frac{4\eta_1}{R^2 \gamma_1} u = \bar{u}$$

При последовательном движении в вертикальной трубе следует различать два случая: направленное сверху вниз и снизу вверх.

Случай, когда движение направлено сверху вниз. В этом случае выражение скорости любой точки живого сечения для каждой жидкости в отдельности при ламинарном режиме движения имеет следующий вид:

$$u_1 = \frac{P_1 - P' + \gamma_1 z_1}{4\eta_1 z_1} (R^2 - r^2) \quad (2.2.1)$$

$$u_2 = \frac{P' - P'' + \gamma_2 (z_2 - z_1)}{4\eta_2 (z_2 - z_1)} (R^2 - r^2) \quad (2.2.2)$$

$$u_3 = \frac{P'' - P_2 + \gamma_3 (L - z_2)}{4\eta_3 (L - z_2)} (R^2 - r^2) \quad (2.2.3)$$

Приравнявая (2.2.1), (2.2.2) и (2.2.3), определяем давления на линиях контактов, затем, подставив значения P' и P'' в (2.2.1), (2.2.2) или (2.2.3), в безразмерных величинах, получим:

$$\bar{u} = \frac{d\bar{z}_1}{dt} = \frac{i + \bar{z}_1 + \varphi_2 (\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \varphi_3 (1 - \bar{z}_2)}{z_1 + \beta_2 (z_2 - z_1) + \beta_3 (1 - z_2)} (1 - \bar{r}^2)$$

Заметим, что $\frac{d\bar{z}_1}{dt} = \frac{d\bar{z}_2}{dt}$ на основании чего имеет:

$$\bar{z}_2 = \bar{z}_1 + \bar{l}_2 - \bar{l}_0 \quad (2.2.4)$$

тогда

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt} = \frac{\Phi(\bar{z}_1) (1 - \bar{r}^2)}{\beta_2 (\bar{l}_2 - \bar{l}_0) + \beta_3 (1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_0) + (1 - \beta_3) \bar{z}_1} \quad (2.2.5)$$

где

$$\Phi(\bar{z}_1) = i + \varphi_2 (\bar{l}_2 - \bar{l}_0) + \varphi_3 (1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_0) + (1 - \varphi_3) \bar{z}_1$$

Таким образом, имеет задачу Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

Интегрируя (2.2.5) с учетом начального условия $\bar{z}_1(0) = \bar{l}_0$, получим:

$$\begin{aligned} \bar{t} = & \frac{(1-\beta_3)(\bar{z}_1 - \bar{l}_0)}{(1-\varphi_3)(1-r^2)} + \\ & + \frac{[\beta_2(\bar{l}_2 - \bar{l}_0) + \beta_3(1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_0)](1-\varphi_3) - \hat{O}(0)(1-\beta_3)}{(1-\varphi_3)^2(1-r^2)} \times \\ & \times \ln \frac{\Phi(\bar{z}_1)}{\Phi(\bar{l}_0)} \quad \bar{l}_0 \leq \bar{z}_1 \leq \bar{l}_1 \leq 1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_0 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Очевидно, что время прекращения движения, когда осевая точка лежащая на линии контакта между I и II жидкостями, находится от начала трубопровода на расстоянии

$$\begin{aligned} \bar{t} = & \frac{(1-\beta_3)(\bar{z}_1 - \bar{l}_0)}{(1-\varphi_3)(1-r^2)} + \\ & + \frac{[\beta_2(\bar{l}_2 - \bar{l}_0) + \beta_3(1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_0)](1-\varphi_3) - \hat{O}(0)(1-\beta_3)}{(1-\varphi_3)^2} \times \\ & \times \ln \frac{\Phi(\bar{l}_1)}{\Phi(\bar{l}_0)} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Из уравнения (2.2.6) нетрудно получить уравнение линии контакта между I и II жидкостями в любое время в явном виде. Что касается уравнения линии контакта между II и III жидкостями, то, используя (2.2.6), легко получить его из уравнения (2.2.4).

Представляет интерес изучение полноты вытеснения, т. е. определение отношений $\frac{\Delta W_2}{W}$, $\frac{\Delta W_3}{W}$, а также $\frac{\Delta W}{W}$ в момент прекращения движения $\bar{t} = \bar{t}_0$. Для этого имеет:

$$W = \pi R^2 L (\bar{l}_1 - \bar{l}_0) \quad (2.2.8)$$

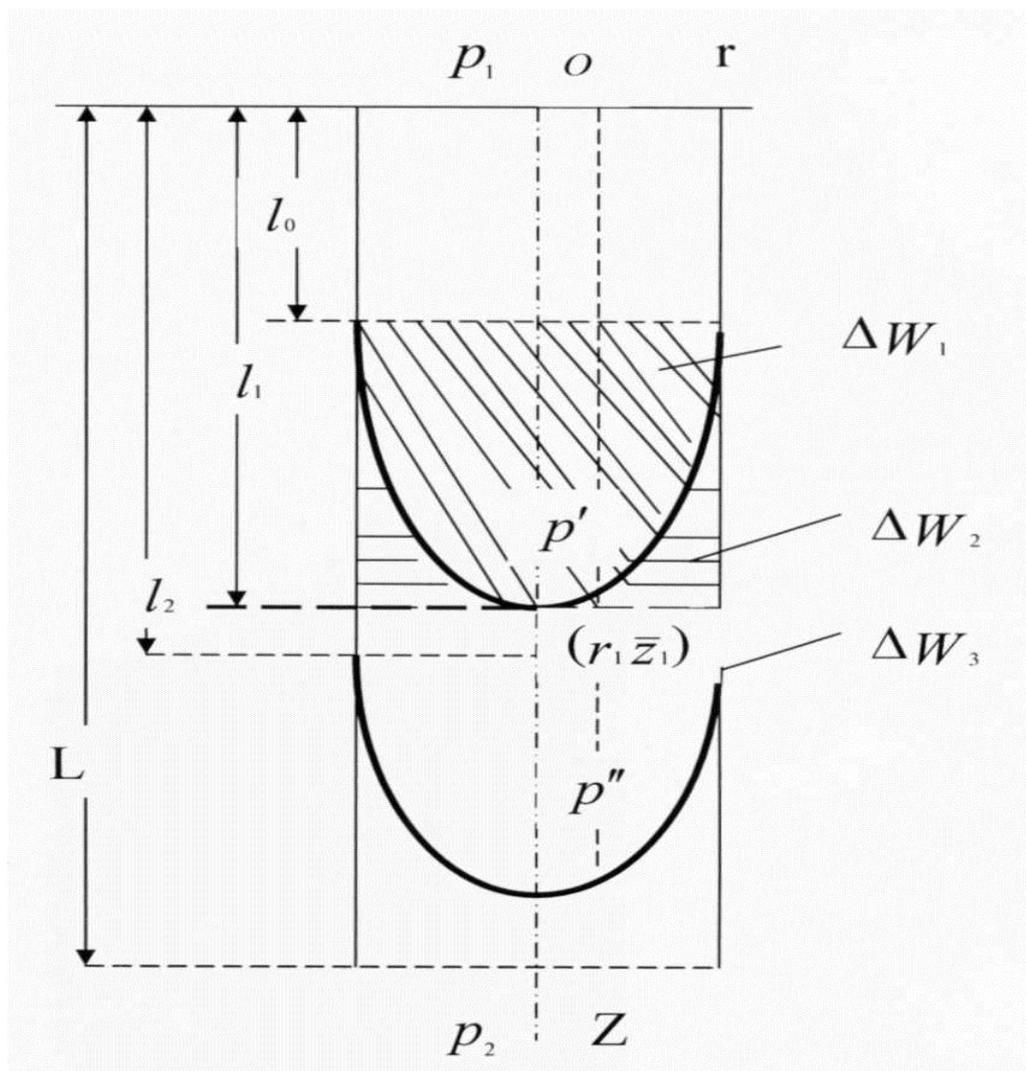
$$\Delta W = \pi R^2 L \int_{l_0}^{\bar{l}_1} r^2 dz_1 \quad (2.2.9)$$

$$W = \pi R^2 L (\bar{l}_1 - \bar{l}_0) \quad (2.2.10)$$

Заметим, что при определении ΔW_2 и ΔW_3 возможны два случая:

а) $\bar{l}_1 > \bar{l}_2$ (рис. 6).

б) $\bar{l}_1 \leq \bar{l}_2$ (рис.2). $\Delta W = W - \Delta W_1$ (2.2.10)



В случае "а" остаточный объем состоит из промежуточной (ΔW_2) и вытесняемой (ΔW_3) жидкостей.

Как видно из рис. 5:

$$\Delta W_2 = W - \Delta W_1 - \Delta W_3, \quad (2.2.11)$$

$$\Delta W_3 = \pi R^2 L \left[(l_1 - l_0) \left(1 - \bar{r}_0^{-2}\right) \int_{\bar{l}_0}^{\bar{l}_1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_0} \bar{r}^{-2} d\bar{z}_1 \right] \quad (2.2.12)$$

Здесь \bar{r}_0 определяется из условия $\bar{z}_2(t_0) = \bar{l}_1$ т. е.

$$\begin{aligned} \bar{r}_0^{-2} = 1 - \frac{(1 - \beta_3)(\bar{l}_1 - \bar{l}_0)}{(1 - \varphi_3)t_0} - \\ - \frac{[\beta_2(\bar{l}_1 - \bar{l}_0) + \beta_3(1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_0)](1 - \varphi_3) - \Phi(0)(1 - \beta_3)}{(1 - \varphi_3)^2 t_0} \times \\ \times \operatorname{In} \frac{\hat{O}(\bar{l}_1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_0)}{\hat{O}(\bar{l}_0)} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Подставляя значения \bar{r}_1^{-2} из (2.2.6) в (2.2.9), (2.2.12) после интегрирования и с учетом (2.2.8) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W}{W} = \frac{(1 - \beta_3)(\bar{l}_1 - \bar{l}_0)}{(1 - \varphi_3)t_0} + \\ + \frac{[\beta_2(\bar{l}_2 - \bar{l}_0) + \beta_3(1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_0)](1 - \varphi_3) - \Phi(0)(1 - \beta_3)}{(1 - \varphi_3)^3 (\bar{l}_1 - \bar{l}_0)t_0} \times \\ \times \left\{ \Phi(\bar{l}_0) - \Phi(\bar{l}_1) \left[\operatorname{In} \frac{\Phi(\bar{l}_1)}{\Phi(\bar{l}_0)} - 1 \right] \right\} \cdot \frac{\Delta W_3}{W} = \frac{(1 - \beta_3)(\bar{l}_1 - \bar{l}_2)^2}{2(1 - \beta_3)(\bar{l}_1 - \bar{l}_0)t_0} + \\ + \frac{[\beta_2(\bar{l}_2 - \bar{l}_1) + \beta_3(1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_0)](1 - \varphi_3) - \Phi(0)(1 - \beta_3)}{(1 - \varphi_3)^3 (\bar{l}_1 - \bar{l}_0)t_0} \times \\ \times \left\{ \Phi(\bar{l}_0) - \Phi(\bar{l}_1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_0) \left[\operatorname{In} \frac{\Phi(\bar{l}_1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_0)}{\Phi(\bar{l}_0)} - 1 \right] \right\} - \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

$$- \frac{(\bar{l}_1 - \bar{l}_2) r_0^{-2}}{\bar{l}_1 - \bar{l}_2}.$$

$$\frac{\Delta W_2}{W} = \frac{\Delta W - \Delta W_3}{W} \quad (2.2.16)$$

В случае же, “б” $\Delta W_2 = \Delta W$, а $\Delta W_3 = 0$ т. е. остаточный объем состоит из одной жидкости, а именно из промежуточной.

Таким образом, в этом случае $\frac{\Delta W_2}{W}$ определится по (2.2.14).

При решении конкретных примеров, кроме $l_2, \varphi_2, \varphi_3, \beta_2, \beta_3$, и других, необходимо задаваться также и величиной i .

Проследим за изменением отношения $\frac{\Delta W}{W}$ при следующих свойствах жидкостей:

- вытесняемая $\gamma_3 = 1,1 \text{ s/cm}^3, \eta_3 = 5, 10, 40 \text{ сн}$.

- промежуточная $\gamma_2 = 1,0 \text{ s/cm}^3, \eta_2 = 10 \text{ сн}$.

- толкающая $\gamma_1 = 1,2; 1,4; 1,6 \text{ s/cm}^3, \eta_1 = 10 \text{ сн}$.

Результаты расчета по определению значения $\frac{\Delta W}{W}$ при различных i и \bar{l}_2 по (2.3.14) представлены в табл. 1 ($L = 2000 \text{ м}; \bar{l}_0 = 0; \bar{l}_1 = L - \bar{l}_2$). Как видно из табл. 1, при прочих равных условиях с увеличением удельного веса толкающей жидкости $\frac{\Delta W}{W}$ увеличивается, т. е. ухудшается полнота вытеснения; такое же явление происходит при увеличении вязкости вытесняемой жидкости.

Увеличение же i приводит к уменьшению $\frac{\Delta W}{W}$ что касается влияния высоты столба промежуточной жидкости, то изменение ее в данном

примере практически не влияет на значение $\frac{\Delta W}{W}$.

Аналогично решается задача, когда движение направлено снизу вверх. Таким образом, при последовательном движении трех вязких жидкостей, независимо от длины водяной пробки (разделитель жидкости), имеет место смешение, причем в таком же порядке, как в случае последовательного движения двух жидкостей, что свидетельствует о необходимости применения разделителя.

i	z/cm	$\bar{l}_2 = 0$			$\bar{l}_2 = 0.05$			$\bar{l}_2 = 0.1$		
		$\beta_3 = 0,5$	$\beta_3 = 1$	$\beta_3 = 40$	$\beta_3 = 0,5$	$\beta_3 = 1$	$\beta_3 = 40$	$\beta_3 = 0,5$	$\beta_3 = 1$	$\beta_3 = 40$
-0.65	1.2	0.4663	0.5226	0.6744	0.4661	0.5219	0.6739	0.4657	0.5212	0.6733
	1.4	0.5210	0.5778	0.7139	0.5193	0.5766	0.7130	0.5185	0.5753	0.7120
	1.6	0.6142	0.6723	0.7828	0.6168	0.6744	0.7851	0.6197	0.6768	0.7861
-0.5	1.2	0.4593	0.5151	0.6692	0.4590	0.5146	0.6686	0.4588	0.5140	0.6683
	1.4	0.4894	0.5463	0.6910	0.4885	0.5451	0.6903	0.4875	0.5436	0.6893
	1.6	0.5227	0.5804	0.7158	0.5214	0.5788	0.7145	0.5210	0.5769	0.7132
-0.35	1.2	0.4555	0.5114	0.6665	0.4554	0.5110	0.6661	0.4548	0.5109	0.6657
	1.4	0.4766	0.5332	0.6819	0.4759	0.5321	0.6811	0.4752	0.5309	0.6802
	1.6	0.4969	0.5554	0.7009	0.4958	0.5526	0.6957	0.4946	0.5509	0.6944

2.3. Решение задачи о последовательном движении жидкостей

Для решения данной задачи вводятся безразмерные величины и применяется метод малого параметра (за малый параметр принимается отношения радиуса трубы т.е $\varepsilon = \frac{r}{l}$,). Устанавливается картина движения границы раздела жидкости.

Тогда уравнения движения и неразрывности для несжимаемой вязкой жидкости при изотермическом процессе, когда течение направлено сверху вниз в безразмерных нелинейных, примут следующий вид:

$$Ga_i \left(\varepsilon^2 U_{xi} \frac{\partial U_{xi}}{\partial x} + \varepsilon^2 U_{yi} \frac{\partial U_{xi}}{\partial y} \right) = -\alpha_i \frac{\partial P_i}{x} + \varepsilon \frac{\partial U_{xi}}{\partial x^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 U_{xi}}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{1}{x} \frac{\partial U_{xi}}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial U_{xi}}{x^2} \quad (2.3.1)$$

$$Ga_i \left(\varepsilon U_{xi} \frac{\partial U_{yi}}{\partial x} + \varepsilon U_{yi} \frac{\partial U_{yi}}{\partial y} \right) = 1 - \beta \frac{\partial P_i}{y} + \varepsilon \frac{\partial U_{yi}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial U_{yi}}{\partial x} \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial U_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial U_{yi}}{\partial y} + \frac{U_{xi}}{x} = 0 \quad (i=1,2) \quad (2.3.3)$$

Система уравнений (2.3.1-2.3.3) решается при следующих граничных условиях:

$$U_{yi}(x, y) \text{ -ограниченная функция при } P_{i0} = \varphi_{i0}(y) \text{ при } x = 0 \quad (2.3.4)$$

$$\frac{\partial U_{xi}}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (2.3.5)$$

$$U_{xi} = U_{yi} = 0 \quad \text{при } x = 1 \quad (2.3.6)$$

$$U_{xi} = U_{yi} = 0 \quad \text{при } x = x_r, y = y_r \quad (2.3.7)$$

$$U_{y1} = U_{y2} \cdot k \quad \text{при } x = x_r, y = y_r \quad (2.3.8)$$

$$\frac{\partial U_{yi}}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial U_{xi}}{\partial y} = k_1 \left(\frac{\partial U_{y2}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial U_{x2}}{\partial y} \right) \quad \text{при } x = x_r, y = y_r \quad (2.3.9)$$

$$P_1 = P_h \quad \text{при } y = 0 \quad (2.3.10)$$

$$P_2 = P_k \quad \text{при } y = 1 \quad (2.3.11)$$

$$P_1 = P_2 \quad \text{при } x = x_r, y = y_r \quad (2.3.12)$$

где

$$r = xR; \quad z = yl; \quad r_r = x_r R; \quad z_r = y_r l; \quad v_r = \varepsilon U_{xi} \frac{\gamma_i R^2}{r_i} = 0$$

$$v_{zi} = \varepsilon U_{zi} \frac{\gamma_i R^2}{\eta_i}; \quad P_i = P_i \Delta p; \quad P_h = P_h \Delta p; \quad P_k = P_k \Delta p;$$

$$\Delta p = P_h - P_k; \quad Ga_i = \frac{\gamma_i^2 R^3}{g \eta_i^2};$$

параметр Галилея;

Уравнение неразрывности (2.3.3) перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} (x U_{xi}) + \frac{\partial}{\partial y} (x U_{yi}) = 0$$

и введем функцию тока

$$x U_{xi} = \frac{\partial \psi_i}{\partial y}; \quad x U_{yi} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \quad (2.3.3')$$

Уравнения движения (2.3.1), (2.3.2) и граничные условия (2.3.4-2.3.12) с учетом (2.3.3')

$$\begin{aligned} Ga_i = & \left[\varepsilon^2 \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) - \varepsilon^2 \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \right] = \\ & - \alpha_i \frac{\partial P_i}{x} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \varepsilon \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) - \varepsilon \frac{1}{x^3} \frac{\partial \psi_i}{\partial y}; \end{aligned} \quad (2.3.1')$$

$$\begin{aligned} Ga_i = & \left[\varepsilon \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \right] = \\ & = 1 - \beta_i \frac{\partial P_i}{y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (2.3.2')$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \text{-ограниченная функция при } x = 0 \quad (2.3.4')$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (2.3.5')$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (2.3.6')$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = k \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = x_r, y = y_r \quad (2.3.7')$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = k \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \quad \text{при } x = x_r, y = y_r \quad (2.3.8')$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) = \\ & = k_1 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.3.9')$$

$$P_1 = P_h \quad \text{при } y = 0 \quad (2.3.10')$$

$$P_2 = P_k \quad \text{при } y = 1 \quad (2.3.11')$$

$$P_1 = P_2 \quad \text{при } x = x_r, y = y_r \quad (2.3.12')$$

Будем искать решение системы уравнений в виде рядов по степени ε

$$\left. \begin{aligned} \psi_i(x, y) &= \psi_{i0} + \varepsilon \psi_{i1} + \varepsilon^2 \psi_{i2} \dots \\ P_i(x, y) &= P_{i0} + \varepsilon P_{i1} + \varepsilon^2 P_{i2} + \dots \\ U_{xi}(x, y) &= Ux_{i0} + \varepsilon Ux_{i1} + \varepsilon^2 Ux_{i2} \dots \\ U_{yi}(x, y) &= Uy_{i0} + \varepsilon Uy_{i1} + \varepsilon^2 Uy_{i2} \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.3.13)$$

Поставляя (2.3.13) в систему уравнений и граничные условия (2.3.1' – 2.3.12') приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем следующую систему уравнений и граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i \frac{\partial P_{i0}}{\partial x} = 0; \quad \beta_i \frac{\partial P_{i0}}{\partial y} = 1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial x} \right) - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial x} \right) \\ Ux_{i0} = \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial y}; \quad Uy_{i0} = \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial x}; \end{aligned} \right\} \quad (2.3.14)$$

$$\left. \begin{aligned}
\alpha_i \frac{\partial P_{i1}}{\partial x} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial y} \right) + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial y} \right) - \frac{1}{x^3} \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial y}; \\
Ga_i &= \left[\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial x} \right) + \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial y} \right) \right] = \\
-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \times \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial x} \right) - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i1}}{\partial x} \right); & \quad Ux_{i1} = \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i1}}{\partial x}; \\
Uy_{i1} &= \frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i1}}{\partial x};
\end{aligned} \right\} \quad (2.3.15)$$

Граничные условия остаются в такой же форму кроме (2.3.9)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial x} \right) = k_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x} \right) \right] \quad \text{при } x = x_r, y = y_r \quad (2.3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i1}}{\partial x} \right) = k_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x} \right) \right] \quad \text{при } P_{i0} = \varphi_{i0}(y) \quad x = x_r, y = y_r \quad (2.3.17)$$

При решении задачи ограничимся членами первого порядка относительно

1. Нулевое приближение.

Рассмотрим систему уравнений (2.3.14), удовлетворяющих граничным условиям (2.3.4'-2.3.8', 2.16, 2.3.10'-2.3.12'). Из первого уравнения системы (2.3.14) найдем $P_{i0} = \varphi_{i0}(y)$ подставим во второе уравнение, умножим на x и перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi_{i0}}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial x} \right) = \left[1 - \beta_i \frac{d\varphi_{i1}(y)}{dy} \right] x \quad (2.3.18)$$

Интегрируя (2.3.18) и учитывая условия (2.3.4'), находим:

$$\varphi_{i0} = \left[1 - \beta_i \frac{d\varphi_{i1}(y)}{dy} \right] \frac{x^2}{16} + \varphi_{i2}(y) \frac{x^2}{2} + \varphi_{i3}(y) \quad (2.3.19)$$

Из граничных условий (2.3.5', 2.3.6') следует, что

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{i1}(y) &= \frac{ba_{i1}}{\beta_i} y^2 + a_{i2}y + a_{i3} \\ \varphi_{i2}(y) &= 4a_{i2}y + \frac{ba_{i1} - 1}{4} \\ \varphi_{i3}(y) &= a_{i1}y + a_{i2} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.20)$$

Подставляя (2.3.20) в (2.3.19) будем иметь для нулевого приближения:

$$\begin{aligned} \varphi_{i0}(y) &= a_{i1}(x^4 - 2x^2 - 2)y - \left(\frac{\beta_i}{16} x^2 - \frac{\beta_i}{8} x^2 - 1 \right) + \left(\frac{x^2}{16} - \frac{x^2}{8} \right) \\ Ux_{i0}(y) &= a_{i1} \left(x^3 - 2x + \frac{1}{x} \right) \\ Uy_{i0}(y) &= -4a_{i1}(x^2 - 1)y + \frac{a_{i1}\beta_i(x^2 - 1)}{4} - \frac{x^2 - 1}{4} \\ P_{i0} &= \frac{8a_{i1}}{\beta_i} y^2 + a_{i2}y + a_{i3} \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Причем к (2.3.21) граничные условия (2.3.7', 2.3.8', 2.3.16, 2.3.10'-2.3.12') получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11} &= ka_{21} \\ 4a_{11}y_r - \frac{a_{12}\beta_1 - 1}{4} &= k \left[4a_{11}y_r - \frac{a_{22}\beta_2 - 1}{4} \right] \\ 8a_{11}y_r - \frac{a_{12}\beta_2 - 1}{2} &= k_1 \left[8a_{21}y_r - \frac{a_{22}\beta_2 - 1}{2} \right] \\ P_{11} = a_{13}; \quad P_k &= -\frac{8a_{21}}{\beta_1} + a_{22} + a_{23} \\ \frac{8a_{21}}{\beta_1} y_r^2 + a_{12}y_r + a_{13} &= \frac{8a_{21}}{\beta_2} y_r^2 + a_{22}y_r + a_{23} \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Решая систему (2.3.22) относительно a_{ij} ($i=1,2; j=1,2,3$),

находим:

$$\left. \begin{aligned}
a_{21} &= \frac{a_{11}}{k}; a_{13} = P_H; a_{22} = \frac{a_{12}\beta_1 + k - 1}{\beta_2 k} \\
a_{23} &= P_k - \frac{8a_{11}}{\beta_2 k} - \frac{a_{12}\beta_1 + k + 1}{\beta_2 k} \\
a_{11} &= \frac{a_{12}\beta_1(\beta_1 y_r - \beta_2 k y_r - \beta_1) + \beta_1(k y_r - \beta_2 k - y_r - k + 1)}{\beta_2 y_r^2 - \beta_2 k y_r^2 - \beta_1} \\
a_{12} &= \frac{(\beta_1 - 2k\beta_1 - k\beta_2)y_r^2 + 2(k\beta_1 + k\beta_1 + k\beta_1\beta_2 - \beta_1)y_r - \beta_1}{(\beta_1^2 + k\beta_1\beta_2)y_r^2 - 2\beta_1^2 y_r - \beta_1^2}
\end{aligned} \right\} (2.3.23)$$

2. Первое приближение

Рассмотрим систему уравнений (2.3.15) удовлетворяющих условия (2.3.7', 2.3.8', 2.3.17, 2.3.10'-2.3.12').

Из первого уравнения (2.3.15) найдем

$$P_{i1} = \frac{4a_{i1}}{\alpha_i} x^2 + \Phi_{i1}(y)$$

И подставим во второе уравнение. Интегрируя это уравнение и учитывая условия (2.3.4-2.3.6') находим:

$$\begin{aligned}
\varphi_{i0}(y) &= b_{i1}(x^4 - 2x^2 + 1)y - b_{i2}\left(\frac{\beta_i}{16}x^4 - \frac{\beta_i}{8}x^2 - 1\right) - \\
Ga_i &\left[a_{i1}^2 \left(\frac{x^8}{36} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{9} \right) y - a_{i1}a_{i2} \left(\frac{\beta_i}{576}x^8 - \frac{\beta_i}{96}x^6 - \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{\beta_i}{32}x^4 - \frac{25}{288}x^2 \right) + a_{i1} \left(\frac{x^8}{576} - \frac{x^6}{96} - \frac{x^4}{32} - \frac{x^2}{288} \right) \right] \\
Ux_{i1}(y) &= b_{i1} \left(x^3 - 2x + \frac{1}{x} \right) - 6a_i a_{i1}^2 \left(\frac{x^8}{36} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{x}{9} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Uy_{i1}(y) = & -4b_{i1}(x^2 - 1)y + \frac{b_{i1}\beta_i(x^2 - 1)}{4} + Ga_i[a_{i1}^2\left(\frac{2}{9}x^6 - \right. \\
& \left. - x^4 + x^2 + \frac{2}{9}\right)y - a_{i1}a_{i2}\left(\frac{\beta_i}{72}x^6 - \frac{\beta_i}{16}x^4 - \frac{\beta_i}{8}x^2 - \frac{25}{144}\right) + \\
& \left. + a_{i1}\left(\frac{x^6}{72} - \frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{8} - \frac{25}{144}\right)\right) \quad (2.3.24) \\
P_{i1} = & \frac{4a_{i1}}{\alpha_i}x^2 - \left(\frac{2\alpha_i \cdot a_{i1}^2}{\beta_i}\right)y^2 + b_{i2}y + b_{i3}
\end{aligned}$$

где a_{ij} определяются из (2.3.23) в коэффициенте b_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$), находим исходя из граничных условий (2.3.7', 2.3.8', 2.3.17, 2.3.10'-2.3.12')

$$\begin{aligned}
b_{13} = & \frac{2a_{11}}{\alpha_1}; \quad b_{21} = \frac{b_{11}\beta_i(x^2 - 1)^2 + A_2k - A_1}{k(x_r^2 - 1)^2} \\
b_{22} = & \frac{b_{12}\beta_i x_r(x^2 - 1)^2 + 16A_2kx_r y_r - 4A_3(x_r^2 - 1) - 4A_4k(x_r^2 - 1)}{kb_2(x_r^2 - 1)^2} \\
b_{23} = & -A_8 + \frac{8b_{11}(x^2 - 1)^2 + A_2k - A_1}{k(x_r^2 - 1)^2} - b_{22} \\
b_{11} = & \frac{b_{12}\beta_1 x_r(x_r - 1)^2(k\beta_2 y_r - \beta y_r + \beta_2) + A_{11}}{8x_r(x_r^2 - 1)^2(k\beta_2 y_r^2 - \beta y_r^2 + \beta_2)} \\
b_{12} = & \frac{-2A_{11}(k - k_1)y_r + 2(k\beta_2 y_r + \beta y_r - \beta_1)[-2A_3k_1(x^2 - 1) + \beta_1(k - k_1)(x_r^2 - 1)^2[2(k\beta_2 y_r - \beta y_r + \beta_2)y_r - \\ & + 2A_4kk_1(x_r^2 - 1)^2 + A_5k(x_r^2 - 1)^2 - A_6kk_1(x_r^2 - 1)^2] - (k\beta_2 y_r - \beta y_r + \beta_2)]}{\beta_1(k - k_1)(x_r^2 - 1)^2[2(k\beta_2 y_r - \beta y_r + \beta_2)y_r - \\ & + 2A_4kk_1(x_r^2 - 1)^2 + A_5k(x_r^2 - 1)^2 - A_6kk_1(x_r^2 - 1)^2] - (k\beta_2 y_r - \beta y_r + \beta_2)} \quad (2.3.25)
\end{aligned}$$

где

$$A_1 = Ga_1 a_{11}^2 \left(\frac{x_r^8}{36} - \frac{x_r^6}{6} + \frac{x_r^4}{4} + \frac{x_r^2}{9} \right);$$

$$A_2 = Ga_2 a_{21}^2 \left(\frac{x_r^8}{36} - \frac{x_r^6}{6} + \frac{x_r^4}{4} + \frac{x_r^2}{9} \right);$$

$$A_3 = Ga_1 \left[a_{11}^2 \left(\frac{2}{9} x_r^7 - x_r^5 + x_r^3 + \frac{2}{9} x_r \right) y_r - a_{11} a_{12} \left(\frac{\beta_1}{72} x_r^7 - \frac{\beta_1}{16} x_r^5 - \frac{\beta_1}{8} x_r^3 - \frac{25}{144} x_r \right) + a_{11} \left(\frac{x_r^7}{72} - \frac{x_r^5}{16} + \frac{x_r^3}{8} + \frac{25}{144} x_r \right) \right]$$

$$A_4 = Ga_1 \left[a_{21}^2 \left(\frac{2}{9} x_r^7 - x_r^5 + x_r^3 + \frac{2}{9} x_r \right) y_r - a_{11} a_{12} \left(\frac{\beta_1}{72} x_r^7 - \frac{\beta_1}{16} x_r^5 - \frac{\beta_1}{8} x_r^3 - \frac{25}{144} x_r \right) + a_{11} \left(\frac{x_r^7}{72} - \frac{x_r^5}{16} + \frac{x_r^3}{8} + \frac{25}{144} x_r \right) \right]$$

$$A_5 = Ga_1 \left[a_{21}^2 \left(\frac{4}{3} x_r^5 - 4x_r^3 + 2x_r \right) y_r - a_{11} a_{12} \beta_1 \left(\frac{x_r^5}{12} - \frac{x_r^3}{4} - \frac{x_r}{4} \right) + a_{11} \left(\frac{x_r^5}{12} - \frac{x_r^3}{14} + \frac{x_r}{4} \right) \right]$$

$$A_6 = Ga_2 \left[a_{21} \left(\frac{4}{3} x_r^5 - 4x_r^3 + 2x_r \right) y_r - a_{11} a_{12} \beta_1 \left(\frac{x_r^5}{12} - \frac{x_r^3}{4} - \frac{x_r}{4} \right) + a_{11} \left(\frac{x_r^5}{12} - \frac{x_r^3}{14} + \frac{x_r}{4} \right) \right]$$

$$A_7 = b_{13}; \quad A_8 = \frac{a_{21}}{\alpha_2} - \frac{2\sigma a_2 a_{21}^2}{\beta_2};$$

$$A_9 = \frac{4a_{11}}{\alpha_1} x_r^2 - \frac{25a_2 a_{11}^2}{\beta_1} y_r^2; \quad A_{10} = \frac{4a_{21}}{\alpha_1} x_r^2 - \frac{2Ga_2 a_{21}^2}{\beta_2} y_r^2;$$

$$A_{11} = 8A_1 \beta_1 x_r (y_r^2 - 2y_r + 1) - 8A_2 k \beta_1 x_r (y_r^2 - 2y_r + 1) - 4A_3 \beta_1 (x_r^2 - 1)(y_r - 1) + 4A_4 k \beta_1 x_r (x_r^2 - 1)(y_r - 1) + [A_7 + A_9 + A_{10}] k \beta_1 \beta_2 x_r (x_r^2 - 1)^2$$

Для определения x_r и y_r имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_r}{d\tau} &= Ux_{10}(x_r, y_r) + \varepsilon Ux_{11}(x_r, y_r) \\ \frac{dy_r}{d\tau} &= Uy_{10}(x_r, y_r) + \varepsilon Uy_{11}(x_r, y_r) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\tau = 0, \quad y_r = y_0 = const \\ &\text{при } x_r = x_0, \\ &0 < x_0 \leq 1 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dx_r}{d\tau} &= a_{11} \left(x_r^3 - 2x_r + \frac{1}{x_r} \right) + \varepsilon \left[b_{11} \left(x_r^3 - 2x_r + \frac{1}{x_r} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sigma a_1 a_{11} \left(\frac{x_r^7}{36} - \frac{x_r^5}{6} + \frac{x_r^3}{4} + \frac{x_r}{9} \right) \right] \\ \frac{dy_r}{d\tau} &= a_{11} (x_r^2 - 1) y_r + \frac{a_{12} \alpha_1 (x_r^2 - 1)}{4} - \frac{(x_r^2 - 1)}{4} + \\ &\quad - \varepsilon \left[-4b_{11} - (x_r^2 - 1) y_r + \frac{b_{12} \beta_1 (x_r^2 - 1)}{4} + \sigma a_1 \left(\frac{2}{9} x_r^6 - x_r^4 + x_r^2 + \frac{2}{9} \right) y_r - \right. \\ &\quad \left. - a_{11} a_{12} \left(\frac{\beta_1}{72} x_r^6 - \frac{\beta_1}{16} x_r^4 - \frac{\beta_1}{8} x_r^2 - \frac{25}{144} \right) + \left(\frac{x_r^6}{72} - \frac{x_r^4}{16} + \frac{x_r^2}{8} + \frac{25}{144} \right) \right] \quad (2.3.26) \end{aligned}$$

где

$$x_0 = \frac{r}{R}; \quad y_0 = \frac{l_0}{l};$$

l_0 - расстояние от начала координат до первоначального положения поверхности раздела;

r_0 - радиус точек, расположенных на первоначальной границе раздела жидкостей.

С целью иллюстрации примененного метода проведены расчеты на ЭВМ по системе уравнений (2.3.26) для нулевого приближения и результаты приведены в таблице при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1,6 \text{ г/см}^3; & \gamma_2 &= 1,2 \text{ г/см}^3; & \rho_1 &= 1,6 \text{ гп/см}^3; \\ \rho_2 &= 1,2 \text{ гп/см}^3; & \eta_1 &= 100 \text{ сП}; & \eta_2 &= 50 \text{ сП}; & R &= 0,005 \text{ м}; \\ l &= 4000 \text{ м}; & l_0 &= 10 \text{ м}; & \Delta p &= -480 \text{ кг/см}_2 \end{aligned}$$

При системе (2.3.26) заменяется одним уравнением, которое имеет вид:

$$\frac{dy_r}{d\tau} = \frac{[k(k_1\beta_2 + y_r) + kk_r(1 - y_r)](1 - x^2)}{y[ky_r + k_1(1 - x_0^2)]} \quad (2.3.27)$$

Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$\begin{aligned} x_0^2 &= 1 - \frac{4}{\tau} \left[\frac{k - k_1}{k(1 - k_1)} (y_r - y_0) + \frac{kk_1(1 - k_1) - (k - k_1)kk_1(\beta_2 + 1)}{[k(1 - k_1)]^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \ln + \frac{k(1 - k_1)y_r - kk_1(\beta_2 + 1)}{k(1 - k_1)y_0 + kk_1(\beta_2 + 1)} \right] \quad (2.3.28) \end{aligned}$$

Сравнение проведенных расчетов по (2.3.26) и (2.3.28) показывает, что влияние v_2 зависимость границы раздела жидкостей от времени очень велико.

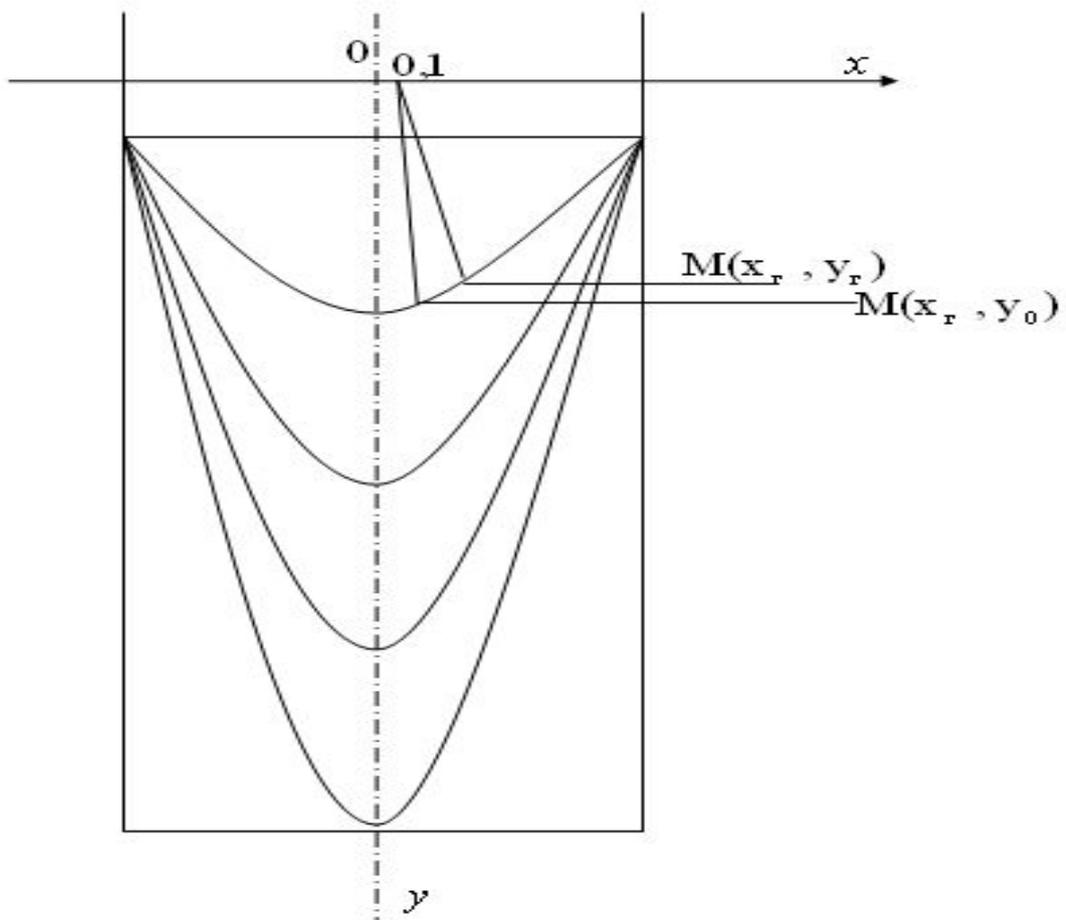


Рис7.

Программа реализации расчетов

```
program RungeKut;
uses crt;
CONST eps=0.0001;
      gml = 1.6; gm2=1.2;
      nul=100; nu2=50;
      R=50; L=400000; p=-480; L0=100;
Var a11, a12, a21,a22, b11, b12, Gal,Ga2, A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8,
A9, A10:Real;
btl, bt2, alf1, alf2, k, k1, x, y, t, h: Real;
fp:Text;

FUNCTION F(I:Byte;x,y:real):Real;
Var Dx,Dy:Real;
BEGIN
Dx:=a11*(x*x*x-2*x+1/x)+eps*(b11*(x*x*x-2*x+1/x)-Gal*a11*a11*
(x*x*x*x*x*x*x/36-x*x*x*x*x*x/6+x*x*x*x/4+x/9));
Dy :=-4*a11*(x*x-1)*y+a12*bt1*(x*x-1)/4-(x*x-1)/4+eps*
(-4*b11*(x*x-1)*y+b12*bt1*(x*x-1)/4+Gal*(2*x*x*x*x*x*x*x/9-
x*x*x*x*x*x+x*x+2/9)*y-a11*a12*(bt1*x*x*x*x*x*x*x/72-btl*x*x*x*x*x/16-
btl*x*x*x/8-25/144)+all*(x*x*x*x*x*x*x/72-x*x*x*x*x/16+x*x/8+25/144));
Case I of
1:F:=Dx;
2:F:=Dy;
END;
END;
```

{Метод Рунге-Кутты}

```
PROCEDURE Metod_Runge_Kutta (h: Real; VAR x,y:Real);
VAR Ij: Byte;
K: array [1..2, 1..4] of Real;
BEGIN
  For j:=1 to 4 do
  Case j of
  1: begin
  For i:=1 to 2 do
  k[Ij]:=F(I,x,y);
  END;
  2, 3: begin
  For i:=1 to 2 do
  k[I,j]:=F(I,x+(h/2)*K[I,j-1],y+(h/2)*k[2j-1.]);
  end;
  4: begin
  For i:=T to 2 do
  k[i, j]:=F( 1 ,x+h*K[ 1, j-1 ], y+h*k[2,j-1 ]);
  end;
  END;
  x:=Abs(x+(h/6)*k[1,1]+(h/3)*(k[1,2]+k[1,3])+(h/6)*k[1,4]);
  y:=Abs(y+(h/6)*k[2,1]+(h/3)*(k[2,2]+k[2,3])+(h/6)*k[2,4]);
  END;
```

{ОСНОВНОЙ БЛОК}

BEGIN

ClrScr;

Assign(fp, ' 1 -01 gai.otv');

Rewrite(fp);

Alf1 :=P/(R*gml);

Alf2:=P/(R*gm2);

Btl:=P/(l*gml);

Bt2:=P/(l*gm2);

K:=gm2*nu1 /(gm 1 *nu2);

K1:=gm2 /gml;

Gal:=gml*gml*R*R/(9.8*nu1*nu1);

Ga2:=gm2 * gm2 * R *R/(9.8*nu2*nu2);

x:=0.5;

y:=0.00025;

t:=0;

h:=0.1;

writeln(fp, '+', '-----', '+', '-----', '+', '-----', '+');

writeln(fp, '|', ':3, 't', ':2, '|', ':6, 'x', ':5, '|', ':5, 'y', ':6, '|');

writeln(fp, '+', '-----', '+', '-----', '+', '-----', '+');

While (t<=2.0) do

begin

if keypressed then if Readkey=#27 then Exit;

WriteLn(fp, '|', t:4:2, '|', x:10:6, '|', y:10:6, '|');

WriteLn(fp, '+', '-----', '+', '-----', '+', '-----', '+');

WriteLn(' |', t:4:2, '|', x:10:6, '|', y:10:6, '|');

WriteLn(' +', '-----', '+', '-----', '+', '-----', '+');

al2:=((bt1-2*k*bt1+k*bt2)*y*y+2*(k*bt1+k*bt2+k*bt1*bt2-bt1)*Y-bt1)/

((bt 1 *bt1 -k*bt1 *bt2)*y*y-2*bt1 *bt1 *y+bt1 *b't 1);

```

A11:=(a12*bt1*(bt1*y-bt2*k*y-bt1)+bt1*(k*y-bt2*k-y-k+1))/(bt1/2*y*y-
bt2*k*y*y-bt1);
a21:=a11/k;
a22:=(a12*bt1+k-1)/(bt2*k);
A1 :=Gal*a11*a11*(x*x*x*x*x*x*x*x/36-x*x*x*x*x*x/6+x*x*x*x*x/4-x*x/9);
A2:=Ga2*a21*a21*(x*x*x*x*x*x*x*x/36-x*x*x*x*x*x/6+x*x*x*x*x/4-x*x/9);
A3:= Gal*(a11*a11*(2*x*x*x*x*x*x*x*x/9-x*x*x*x*x*x*x*x+2*x/9)*y-
all*a12*(bt1*x*x*x*x*x*x*x*x/72-bt1*x*x*x*x*x*x*x*x/16-bt1*x*x*x*x*x/8+25*x/
144+a11*x*x*x*x*x*x*x*x/72-x*x*x*x*x*x*x*x/16-x*x*x*x*x/8+25*x/144));
A4:= Ga2*(a21*a21*(2*x*x*x*x*x*x*x*x/9-x*x*x*x*x*x*x*x+2*x/9)*y-
-a21*a22*(bt2*x*x*x*x*x*x*x*x/72-bt2*x*x*x*x*x*x*x*x/16-bt2*x*x*x*x*x/8+25*x/144+
+a21*x*x*x*x*x*x*x*x/72-x*x*x*x*x*x*x*x/16+x*x*x*x*x/8+25*x/144));
A5:= Gal*(all*a11*(4*x*x*x*x*x*x*x*x/3-4*x*x*x*x*x+2*x)*y-
all*a12*bt1*(x*x*x*x*x*x*x*x/12-x*x*x*x*x/4-x/4)+all*(x*x*x*x*x*x*x*x/12-x*x*x*x*x/4+x/4));
A6:=Ga2*(a21*a21*(4*x*x*x*x*x*x*x*x/3-4*x*x*x*x*x+2*x)*y-
a21*a22*bt2*(x*x*x*x*x*x*x*x/12-x*x*x*x*x/4-x/4)+a21*(x*x*x*x*x*x*x*x/12-x*x*x*x*x/4+x/4));
A7:=-2*a11/alf1;
A8:=2*a21/alf2-2*Ga2*a21*a21/bt2;
A9:=4*a11*x*x/alf1-2*Ga2*a11*a11*y*y/bt1;
A10:=4*a21*x*x/alf2-2*Ga2*a21*a21*y*y/bt2;
A0:=8*A1*bt1*x*(y*y-2*y+1)-8*k*bt1*x*(y*y-2*y+1)-4*A3*bt1*(x^4)*(y-1)+4*
A4*k*k*bt1*(x*x-1)*(y-1)+(A7+A8+A9+A10)*k*bt1*bt2*x*Sqr(x*x-1);
bt2:=(-2*A0*(k-k1)*y+2*(k*bt2*y*y+bt1*y*y-bt1)*(-2*A3*k1*(x*x-1)+
+2*A4*k*k1*(x*x-1)+A5*k*Sqr(x*x-1)-A6*k*k1*Sqr(x*x-1)))/(bt1*(k-
kl)*Sqr(x*x-1)*(2*(k*bt2*y+bt1)*y-(k*bt2*y*y+bt1*y*y-bt1))); b11 :=(bt2*bt1
*x*Sqr(x*x-1)*(k*bt2*y*y-bt1*y+bt2)+A0)/(8*x*Sqr(x*x-
1)*(k*bt2*y*y+bt1*y*y-bt1)); Metod_Runge_Kutta(h,x,y); End;
Flush(fp); Close(fp);
end.

```

τ	$10^{-4}x_r$	y_r	x_r	y_r	x_r	y_r	x_r	y_r	x_r	y_r
0	0,1	0,0025	0,1	0,0025	0,2	0,0025	0,3	0,0025	0,4	0,0025
0,1	0,104	0,03880	0,10459	0,03843	0,20849	0,03753	0,31157	0,03550	0,41369	0,03265
0,2	0,110	0,07268	0,10984	0,07197	0,21812	0,06984	0,32452	0,06630	0,42673	0,06137
0,3	0,116	0,10376	0,11587	0,10273	0,22904	0,09968	0,33896	0,09461	0,44520	0,08754
0,4	0,12	0,13166	0,12280	0,13037	0,24142	0,12655	0,35504	0,12021	0,46316	0,11133
0,5	0,13	0,15612	0,13074	0,15464	0,25540	0,15025	0,37288	0,14293	0,48265	0,13262
0,6	0,0,14	0,17701	0,13984	0,17541	0,27114	0,17065	0,39254	0,16269	0,50364	0,15136
0,7	0,15	0,19434	0,15020	0,19269	0,28374	0,18780	0,41405	0,17954	0,52508	0,16761
0,8	0,16	0,20829	0,16195	0,20668	0,30828	0,20185	0,43738	0,19360	0,54985	0,18148
0,9	0,18	0,21921	0,17516	0,21768	0,32976	0,21308	0,46242	0,20514	0,57470	0,19313
1	0,20	0,22752	0,18990	0,22612	0,35316	0,22188	0,48900	0,21436	0,60046	0,20279
1,1	0,22	0,23372	0,20521	0,23246	0,37836	0,22863	0,51686	0,22170	0,62680	0,21072
1,2	0,24	0,23824	0,22412	0,23714	0,40521	0,23374	0,54571	0,22745	0,65342	0,21716
1,3	0,26	0,24150	0,24364	0,24054	0,43352	0,23757	0,57523	0,23191	0,67999	0,22236
1,4	0,29	0,24381	0,26475	0,24299	0,46306	0,24041	0,60506	0,23536	0,70619	0,22655
1,5	0,32	0,24544	0,28745	0,24475	0,49358	0,24252	0,63486	0,23802	0,73172	0,22991
2	0,54	0,24859	0,42263	0,24830	0,65044	0,24722	0,77252	0,24461	0,84194	0,23908
3	1,52	0,24918	0,73237	0,24911	0,88475	0,24871	0,93528	0,24732	0,95743	0,24368
4	4,22	0,24919	0,92134	0,24916	0,97180	0,24889	0,98489	0,24773	0,99006	0,24450
5	11,74	0,24922	0,98156	0,24917	0,99373	0,24942	0,99666	0,24781	0,99776	0,24467

X _r	Y _r								
0,5	0,0025	0,6	0,0025	0,7	0,0025	0,8	0,0025	0,9	0,0025
0,51470	0,02967	0,61451	0,02567	0,71302	0,02096	0,82024	0,01852	0,90582	0,00937
0,53053	0,05704	0,63977	0,04732	0,72635	0,03620	0,83022	0,02769	0,91142	0,01579
0,54749	0,07847	0,64573	0,06736	0,73993	0,05422	0,84008	0,03901	0,91682	0,02178
0,56557	0,09987	0,66232	0,08578	0,75569	0,06901	0,84576	0,04934	0,92201	0,02736
0,58471	0,11920	0,67946	0,10257	0,76754	0,08261	0,85922	0,05927	0,92697	0,03255
0,60484	0,13645	0,69704	0,11774	0,78140	0,09504	0,86841	0,06825	0,93171	0,03738
0,62584	0,15167	0,71492	0,13134	0,79518	0,10634	0,87734	0,07652	0,93622	0,04186
0,64752	0,16494	0,73298	0,14344	0,80879	0,11657	0,88588	0,08841	0,94051	0,04602
0,66971	0,17639	0,75106	0,15414	0,82219	0,12580	0,89410	0,09105	0,94458	0,04987
0,69222	0,18618	0,76898	0,16353	0,83915	0,13408	0,90154	0,09739	0,94842	0,05343
0,71466	0,19448	0,78661	0,17173	0,84774	0,14149	0,90941	0,10318	0,95205	0,05673
0,73695	0,20147	0,80338	0,17886	0,85984	0,14320	0,91647	0,10845	0,95546	0,05977
0,75805	0,20732	0,82036	0,18504	0,87039	0,15390	0,92314	0,11324	0,95868	0,06259
0,77989	0,21222	0,83624	0,19037	0,88337	0,15921	0,92941	0,11798	0,96169	0,06518
0,88016	0,21629	0,85131	0,19496	0,89372	0,16394	0,93483	0,12152	0,96452	0,06758
0,88741	0,22847	0,91291	0,20988	0,93485	0,18005	0,94661	0,13624	0,97606	0,07700
0,96959	0,23570	0,97475	0,22028	0,97804	0,19331	0,95390	0,15025	0,98951	0,08727
0,99257	0,23718	0,99333	0,22275	0,99363	0,19709	0,99496	0,15514	0,99553	0,09164
0,99620	0,23751	0,99828	0,22337	0,99454	0,19818	0,99698	0,15663	0,99812	0,09348

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для правильного решения целого ряда технологических процессов при бурении и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений необходимы исследования соответствующих гидродинамических задач бурное развитие гидродинамики вязких жидкостей в последние годы тесно связаны с развитием нефтегазодобывающей промышленности. В случае транспортировки различных нефтепродуктов по трубопроводам, при цементировании скважин и т. в трубу приходится закачивать последовательно несколько жидкостей. При этом происходит постепенное замещение одной жидкости другой и представляем интерес иметь данные о полноте вытеснения.

Сформулирована постановка и математическая модель задачи о последовательном движении двух вязких жидкостей в цилиндрической трубе.

При решении задачи введена функция тока. Показана применимость метода малого параметра.

Система уравнений в частных производных сведена к системе обыкновенных уравнений.

Применён метод решения задачи такого типа.

Введена система уравнений для определения координат искомой границы раздела жидкостей.

Результаты численных расчетов показывают, что радиальная составляющая скорости влияет на зависимость границы раздела жидкостей от времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каримов И. А. Жахон молявий инқирози, Ўзбекистон шароитида уни бартараф этишнинг йўллари ва чоралари. Тошкент, - 2009 йил март.
2. Каримов И. А. Юксак ма'навият енгилмас куч. Тошкент: «Ма'навият» 2008 йил. -220 б.
3. Ўзбекистон Республикаси «Та'лим тўғрисидаги» Қонуни. Тошкент, 1992.
4. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2002.06.06 даги 200-сонли қарори -Тошкент, 1992.
5. Бахвалов Н.С. , Жидков Н. П. , Кобельков Г. М. Численные методы. - М. Изд-во Бином. Лаборатория знаний, 2011. 640 с.
6. Жидков В. Н. Вычислительная математика. –М.: Академия. 2010. -240 с.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. - С.Пб.: Изд-во БХВ-Петербург, 2011. - 592 с.
8. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. - М.: Изд-во Лань.2010. - 608с.
9. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. – М.: Изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2008. 286 с.
10. Турчак Л.И. , Плотников П. В. Основные численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. –304 С.
11. Аббасов А.А., Ибрагимов Ф.М., Касимов А.Ф., Меликбеков А.С. Сб. Научно-техн. информации. Вопросы добычи нефти газа, вып. 2 (специальный), 1962.
12. Аббасов А.А. О вытеснении глинистого раствора цементным обсадной колонне скважин. "Азерб. нефт. хоз" №6, 1958.
13. Касимов А.Ф. О вытеснении одной вязко-пластичной жидкости другой. "Изв. высш. учебн. завед", "Нефть и газ", № 6 1958
14. Аббасов А.А., Мурачковская Н.К.О распределении скоростей при последовательном движении двух вязко-пластичных жидкостей в вертикаль-

- ной круглой трубе при структурном режиме движения. Науч. зап. УкрНИИ проекта, вып. 4, 1961.
15. Мирзажанзаде А.Х. Вопросы гидродинамики вязко - пластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. Изд-во Азернефтгнеспр, 1959.
 16. Аббасов А.А., Суяршаев М.М. "Решение задачи о последовательном движении жидкости. Вопросы вычислительной и прикладной математики выпуск № 2. Ташкент 1970.
 17. Файзуллаев Д.Ф., Мукук К.В. Последовательные движения жидкостей. Ташкент 1976. № 2.
 18. Суяршаев М.М., Решение задачи о последовательном движении жидкостей. Сборник научных статей. INNOVFTION-2011. Ташкент, 2011.
 19. Суяршаев М.М., Маннабов Ж.Т. Решение задачи о вытеснении одной жидкости другой.,Республиканская научная конференция 2 бет Карши, 2011.
 20. www.ziyonet.uz
 21. www.edu.uz
 22. www.edu.ru
 23. www.samdu.uz