

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕСПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**САМАРКАНДКАНДКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.НАВОИ**

На правах рукописи

УДК 532.546

РАХМОНОВ БАХТИЁР

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ПО
ВОССТАНОВЛЕНИЮ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ
УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

Специальность: 5А 480101 «Вычислительная математика»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание академической степени магистра по специальности

«Вычислительная математика»

**Работа обсуждение и
представлена к защита.
Заведующий кафедрой**

**Научный руководитель:
проф. ХУЖАЁРОВ Б.Х. _____**

**«Вычислительные методы»
_____ доц. АБДИРАШИДОВ А.**

_____ « _____ » _____ 2012 г.

Самарканд - 2012

Оглавление

Введение.....	
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ	
§ 1. Классификация обратных задач математической физики	
§ 2. Понятие о корректно и некорректно поставленных задач	
§ 3. Обратные задачи для уравнения теплопроводности	
ГЛАВА 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ	
§ 1. Методы решения граничных обратных задач для уравнения параболического типа.....	
§ 2. Решение граничных обратных задач для уравнения параболического типа прямыми численными методами.....	
§ 3. Метод квазиобращения	
ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА	
§ 1. Обратная граничная задача для линейно упругого режима фильтрации	
§ 2. Обратная граничная задача для нелинейно упругого режима фильтрации	
§ 3. Обратная граничная задача для линейно упруго-пластического режима фильтрации	
Основные результаты и выводы.....	
Литературы.....	

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к обратным задачам в последнее время значительно вырос. Это объясняется двумя причинами. Во-первых, такие задачи имеют большое практическое значение. Области использования обратных и некорректных задач настолько широки и разнообразны, что одно только перечисление названий отраслей займет много мест. Отметим некоторые из них: 1) математические дисциплины: вычислительная математика, алгебра, интегральная геометрия, интегральные и операторные уравнения, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, теория оптимального управления и др., 2) геофизика, 3) квантовая механика, 4) акустика, 5) электродинамика, 6) химия, 7) тепло- и массоперенос, 8) нефтяное и газовое дело, 9) гидрология и гидрогеология, 10) медицина, 11) экономика, 12) экология и др. Во-вторых обратные задачи являются как правило некорректными, что создает ряд проблем в процессе их решения. В связи с созданием эффективных методов решения, развитием численных методов становится возможным решение достаточно сложных обратных задач, исследование свойств решения, что в свою очередь требует более глубокого анализа теоретических проблем, включая вопросы существования и единственности решений, регуляризации задачи, сходимости регуляризованных решений и др. Такое обилие задач, достигнутые результаты за последнее время, практическая важность решения обратных и некорректных задач показывает актуальность проблемы.

Объем работы. Диссертация состоит из введения, трех параграфов, основных результатов и выводов, списка использованной литературы. Общий объем работы включает ____ страниц текста, 44 рисунков, 36 наименований использованной литературы.

Цель и задачи работы. В работе поставлена цель – решение обратных граничных задач уравнений параболического типа. Исходя из этой цели, в первой главе рассмотрены общие сведения обратных задач математической физики. Во второй главе представлены методы решения

граничных обратных задач уравнений параболического типа. Далее, в третьей главе, с использованием данных методов численно решены обратные граничные задачи упругом режиме фильтрации. При этом, рассмотрены как линейные, так и нелинейные уравнения фильтрации.

Научная новизна. В диссертации решены граничные обратные задачи фильтрации жидкости при линейном и нелинейном упругом режимах. Исследованы устойчивости решения к погрешностям исходных данных.

Достоверность полученных результатов. Задачи фильтрации решены численно с применением метода конечных разностей. При проведении численных расчетов на ЭВМ проверена устойчивость метода решения. Специальные численные эксперименты показывают также их устойчивость по отношению к возмущениям исходных данных.

Практическая ценность работы. Работа посвящена теоретическому анализу граничных обратных задач для параболического уравнения. Однако полученные результаты могут быть использованы при анализе процессов тепло и массообмена, процессов диффузии, фильтрационных процессах нефти и газа и др.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующее:

- решения граничных обратных задач уравнения параболического типа;
- решения граничных обратных задач фильтрации жидкости при линейном упругом режиме;
- решения граничных обратных задач фильтрации жидкости при нелинейном упругом режиме.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, показана научная новизна и практическая значимость результатов работы. Кратко дано основное содержание диссертации.

В первой главе приведены сведения об обратных и некорректно поставленных задач математической физики. Даны сведения классификация обратных задач математической физики.

В второй главе рассмотрены методы решения граничных обратных задач для уравнения параболического типа.

Во третьей главе решены граничные обратные задачи фильтрации жидкости при линейном и нелинейном упругом режимах, а также для линейно упруго-пластического режима фильтрации. Восстановлены граничные условия из решения обратных задач фильтрации. Для получения устойчивых решения использован метод шаговой регуляризации и сглаживание исходных данных.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ

§ 1. Классификация обратных задач математической физики

Краевая задача для уравнения с частными производными характеризуется заданием определяющего уравнения, расчетной области, граничных и начальных условий. Поэтому среди обратных задач можно выделить коэффициентные, геометрические, граничные и эволюционные обратные задачи.

Прямые и обратные задачи.

При обработке данных натуральных экспериментов по дополнительным косвенным измерениям делается вывод о внутренних связях явления или процесса. В условиях, когда структура математической модели исследуемого процесса известна, можно ставить проблему идентификации математической модели, например, определение коэффициентов дифференциального уравнения. Такие задачи мы относим к классу обратных задач математической физики.

Задачи математической физики можно классифицировать по различным признакам. Например, можно выделить стационарные задачи, которые описывают установившиеся, неизменные во времени процессы и явления. Нестационарные задачи описывают динамические процессы, в которых решение меняется во времени. Не столь очевидно разделение задач математической физики на прямые и обратные.

С общей методологической точки зрения прямыми задачами мы можем назвать задачи, для которых заданы причины, а искомыми величинами являются следствия. При таких предпосылках обратными будут задачи, в которых известны следствия, а неизвестными выступают причины. Однако такое общее разделение не всегда легко провести на практике. Для уравнений с частными производными в стандартных курсах математической физики формулируются корректные краевые задачи, которые мы и относим к классу

прямых задач. Для эллиптических уравнений второго порядка дополнительные условия на решение (первого, второго или третьего рода) задаются на границе области. С точки зрения причинно-следственных отношений граничные условия являются причинами, а следствием — решение краевой задачи. Для параболических уравнений задается начальное условие, а для гиперболических уравнений второго порядка начальное состояние определяется заданием решения и производной по времени.

Для того чтобы не загромождать свое рассмотрение терминологическими тонкостями, к прямым задачам мы отнесем именно эти классические задачи математической физики. Они характеризуются необходимостью нахождения решения из уравнения с заданными коэффициентами и правой частью и дополнительных граничных и начальных условий.

Под обратными задачами математической физики мы будем понимать задачи, которые мы не можем отнести к прямым. Они связаны часто с необходимостью определения не только решения, но и некоторых недостающих коэффициентов и (или) условий. Одним из признаков обратной задачи может служить именно необходимость определения не только решения, но и некоторых компонент математической модели.

С рассматриваемой точки зрения обратные задачи характеризуются, прежде всего, тем, чего недостает, чтобы можно было бы отнести поставленную задачу к классу прямых задач математической физики. С другой стороны, мы должны компенсировать недостающую информацию. Поэтому в обратных задачах необходимо выделить дополнительную информацию, которая позволяет рассчитывать на возможность однозначного определения решения.

По этим отмеченным признакам можно классифицировать обратные задачи математической физики. Естественно ориентироваться, прежде всего, на те основные характеристики, которые выделяют обратную задачу. Для прямых задач математической физики решение определяется уравнением (коэффициентами и правой частью), граничными и, в нестационарных

задачах, начальными условиями. Классификацию обратных задач удобно провести по признакам, что какие-то из отмеченных условий не заданы.

Коэффициентные обратные задачи.

Мы выделим коэффициентные обратные задачи, которые характеризуется тем, что коэффициенты уравнения или (и) правая часть неизвестны. В качестве характерного примера будем рассматривать параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T. \quad (1)$$

Простейшая прямая задача состоит в нахождении функции $u(x, t)$, удовлетворяющей уравнению (1) и условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

В прикладных проблемах часто свойства среды неизвестны и их нужно определять. В нашем случае можно поставить задачу идентификации коэффициента $k(x)$. В простейшем случае однородной среды неизвестным является коэффициент $k(x) = \text{const}$, для кусочно-однородной среды – несколько констант. При зависимости свойств среды интерес может представлять коэффициентная обратная задача по восстановлению $k = k(u)$.

Список возможных постановок коэффициентных обратных задач не исчерпывается выше отмеченными и легко может быть продолжен. Характерной является задача для уравнения (1), по нахождению пары неизвестных функций $\{u(x, t), k(x)\}$. Основная особенность рассматриваемой обратной задачи состоит в нелинейности коэффициентной обратной задачи.

Можно выделить как самостоятельную задачу определения неизвестной правой части $f(x, t)$ параболического уравнения (1). Более частные постановки связаны, например, с выбором зависимости

$$f(x, t) = \eta(t)\psi(x). \quad (4)$$

Интерес может представлять неизвестная зависимость источника (правой части) от времени при известном распределении по пространству – в представлений (4) функция $\eta(t)$ неизвестна, а функция $\psi(x)$ задана.

Если коэффициенты и (или) правая часть уравнения (1) неизвестны, то помимо условий (2), (3) необходимо использовать некоторые дополнительные условия. Этих условий не должно быть мало, чтобы иметь возможность для однозначного определения решения обратной задачи. Если ищется коэффициент в классе одномерных функций (функций одной переменной), то и дополнительные данные должны задаваться в этом же классе.

Пусть, например, рассматривается обратная задача (1)-(4) по нахождению пары функций $\{u(x,t), \eta(t)\}$. Помимо решения краевой задачи (1)-(3) нужно найти зависимость от времени правой части. В этом случае дополнительная информация может иметь вид

$$u(x^*, t) = \varphi(t) = 0, \quad 0 < x^* < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (6)$$

т. е. известно решение на каждый момент времени не только на границе, но и в некоторой внутренней точке x^* расчетной области Ω .

При рассмотрении обратных задач типа (1)-(6) особое внимание должно уделяться проблемам единственности решения обратной задачи. Особенно это важно при рассмотрении нелинейных задач (пример — задача нахождения пары функций $\{u(x,t), k(x)\}$).

Граничные обратные задачи

В условиях, когда прямые измерения на границе невозможны, мы имеем дело с граничными обратными задачами. В этом случае недостающие граничные условия идентифицируются, например, по измерениям внутри области. Приведем пример подобной обратной задачи для параболического уравнения (1).

Будем считать, что измерения недоступны на правом конце отрезка $[0, l]$, но зато известно решение во внутренней точке x^* , т. е. вместо (2) заданы условия

$$u(0, t) = 0, \quad u(x^*, t) = \varphi(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (7)$$

Типичная постановка граничной обратной задачи состоит в идентификации потока на части границы, недоступной измерению (в рассматриваемом примере – при $x = l$). Это соответствует нахождению из условий (1), (3), (7) функций $\left\{ u(x, t), k(l) \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) \right\}$.

Эволюционные обратные задачи.

Прямая задача для нестационарных задач математической физики характеризуется заданием начальных условий (см., например, (3)). К эволюционным обратным задачам мы будем относить обратные задачи, в которых идентифицируются начальные условия (их недостает для формулировки задачи как прямой).

Применительно к рассматриваемой прямой задаче (1)-(3) простейшая эволюционная обратная задача формулируется следующим образом. Нам не заданы начальные условия (3), но известно решение на конечный момент времени $t = T$:

$$u(x, T) = u_T(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (8)$$

Необходимо найти решение уравнения (1) в предшествующие моменты времени (ретроспективная обратная задача).

Можно ставить обратную задачу по идентификации начального состояния при использовании дополнительной информации о решении во внутренних точках (дополнительное условие типа (5)).

§ 2. Понятие о корректно и некорректно поставленных задачах.

Приведем основные понятия теории так называемых некорректных (или некорректно поставленных) задач и численные методы их решения при

наличии различной априорной информации. Для простоты рассмотрим сначала только линейные уравнения в нормированных пространствах, хотя, разумеется, все аналогичные определения могут быть введены и для нелинейных задач в более общих метрических (и даже топологических) пространствах.

В качестве основного объекта рассматривается операторное уравнение:

$$Az = u,$$

где A – линейный оператор, действующий из гильбертова пространства Z в гильбертово пространство U . Требуется найти решение операторного уравнения z , соответствующее заданной неоднородности (или правой части уравнения) u .

Такое уравнение является типичной математической моделью для многих физических, так называемых обратных, задач, если предполагать, что искомые физические характеристики z не могут быть непосредственно измерены, а в результате эксперимента могут быть получены только данные u , связанные с z с помощью оператора A .

Французским математиком Ж. Адамаром были сформулированы следующие условия корректности постановки математических задач, которые мы рассмотрим на примере записанного операторного уравнения. Задача решения операторного уравнения называется *корректно поставленной* (по Адамару), если выполнены следующие три условия:

- 1) решение существует $\forall u \in U$;
- 2) решение единственно;
- 3) если $u_m \rightarrow u$, $Az_m = u_m$, $Az = u$, то $z_m \rightarrow z$.

Второе условие обеспечивается тогда и только тогда, когда оператор A является взаимно однозначным (инъективным). Первый и второй условия означают, что существует обратный оператор A^{-1} , причем его область определения $D(A^{-1})$ (или множество значений оператора A , $R(A)$) совпадает с U . Третье условие означает, что обратный оператор A^{-1} является

непрерывным, т.е. "малым" изменениям правой части u и соответствуют "малые" изменения решения z . Более того, Ж. Адамар считал, что только корректные задачи должны рассматриваться при решении практических задач. Однако хорошо известны примеры некорректно поставленных задач, к изучению и численному решению которых приходится прибегать при рассмотрении многочисленных прикладных задач. Нужно отметить, что устойчивость и неустойчивость решения связаны с тем, как определяется пространство решений Z . Выбор пространства решений (в том числе и нормы в нем) обычно определяется требованиями прикладной задачи. Задачи могут быть некорректно поставленными при одном выборе нормы и корректно поставленными при другом.

Многочисленные обратные (в том числе и некорректные) задачи можно найти в различных областях физики. Так, астрофизик не может активно воздействовать на процессы, происходящие на далеких звездах и галактиках, ему приходится делать заключения о физических характеристиках весьма удаленных объектов по их косвенным проявлениям, доступным измерениям на Земле или вблизи Земли (на космических станциях). Прекрасные примеры некорректных задач можно найти в медицине, прежде всего, нужно отметить вычислительную (или компьютерную) томографию. Хорошо известны приложения некорректных задач в геофизике (на самом деле, легче и дешевле судить о том, что делается под поверхностью Земли, решая обратные задачи, чем заниматься бурением глубоких скважин), радиоастрономии, спектроскопии, ядерной физике и т. д., и т.п.

§ 3. Обратные задачи для уравнения теплопроводности.

В этом параграфе будут рассмотрены обратные задачи для уравнения теплопроводности, представляющие собой задачи определения либо начального условия, либо граничного условия, либо функции, характеризующей действие источников тепла по дополнительной информации о решении краевой задачи для уравнения теплопроводности [5].

Обратные задачи такого типа возникают при исследовании теплофизических и ряда других процессов [5].

Задача с обратным направлением времени.

Одной из наиболее известных обратных задач для уравнения теплопроводности является задача с обратным направлением времени. Рассмотрим ее постановку в случае первой краевой задачи.

Первая краевая задача для уравнения теплопроводности с нулевыми краевыми условиями состоит в определении функции $u(x, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t_0 < t \leq T, \quad (13)$$

краевым условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (14)$$

начальному условию

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (15)$$

Эту задачу можно интерпретировать следующим образом. Известно распределение температуры в тонком стержне длиной l в начальный момент времени $t = t_0$ $u(x, t_0) = \varphi(x)$. Требуется найти распределение температуры в стержне в последующие моменты времени $t_0 < t \leq T$.

Задача с обратным направлением времени может быть сформулирована так. Известно распределение температуры в стержне в момент времени $t = T$. Требуется определить распределение температуры в предыдущие моменты времени $t_0 \leq t < T$. Для определенности поставим задачу более конкретно. Известно распределение температуры $u(x, t)$ в момент времени $t = T$

$$u(x, T) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (16)$$

требуется определить распределение $\varphi(x) = u(x, t_0)$ в начальный момент времени $t = t_0$.

Приступим к исследованию поставленной обратной задачи. Как известно, при определенных предположениях относительно функции $\varphi(x)$ решение задачи (13)-(15) может быть получено с помощью метода разделения переменных и имеет следующий вид [3]:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 (t - t_0)\right\} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Положив $t = T$ учитывая (16), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 (T - t_0)\right\} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (17)$$

Таким образом, обратная задача свелась к уравнению (17) относительно неизвестной функции $\varphi(x)$.

Покажем, что уравнение (5) имеет единственное решение в пространстве $L_2[0, l]$. Так как это уравнение является линейным, то для

доказательства единственности его решения достаточно показать, что оно имеет только нулевое решение при $g(x)=0$.

Итак, пусть в (17) $g(x)=0$ при $x \in [0, l]$. Так как система функций $\left\{ \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right\}$, $n=1,2,\dots$, является ортогональной в пространстве $L_2[0, l]$, а $\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2(T-t_0)\right\} \neq 0$ для $n=1,2,\dots$, то, умножив (17) на $\sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$ и проинтегрировав от 0 до l , получим, что

$$\int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi k}{l} \xi\right) d\xi = 0, \quad k=1,2,\dots \quad (18)$$

Так как система функций $\left\{ \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \right\}$, $k=1,2,\dots$, полна в $L_2[0, l]$, то из (18) следует, что $\varphi(x)=0$ и уравнение (17) имеет единственное решение.

Рассмотрим вопрос о существовании решения уравнения (17). Обозначим через (h, p) скалярное произведение функций $h(x)$ и $p(x)$ в пространстве $L_2[0, l]$. Система функций $\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$, $k=1,2,\dots$, является полной ортонормированной системой в $L_2[0, l]$. Пусть уравнение (17) с правой частью $g(x) \in L_2[0, l]$ имеет решение $\varphi(x) \in L_2[0, l]$. Обозначим через φ_k и g_k коэффициенты Фурье (φ, ψ_k) и (g, ψ_k) функций $\varphi(x)$ и $g(x)$ соответственно. Тогда из (17) получим, что при $k=1,2,\dots$,

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi_k) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi k}{l} \xi\right) d\xi = \\ &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l g(\xi) \sin\left(\frac{\pi k}{l} \xi\right) d\xi \exp\left\{\left[\frac{\pi k}{l}\right]^2 a^2(T-t_0)\right\} = \\ &= (g, \psi_k) \exp\left\{\left[\frac{\pi k}{l}\right]^2 a^2(T-t_0)\right\} \end{aligned}$$

Записывая для функции $\varphi(x)$ равенство Парсеваля, имеем

$$\|\varphi\|_{L_2[0, l]}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (g, \psi_k)^2 \exp\left\{2\left[\frac{\pi k}{l}\right]^2 a^2(T-t_0)\right\} \quad (19)$$

Таким образом, для существования решения уравнения (17) в пространстве $L_2[0, l]$ необходимо, чтобы функция $g(x) \in L_2[0, l]$ была такова, что ряд, стоящий в правой части равенства (19), сходиллся. Так как члены этого ряда содержат быстро возрастающий множитель $\exp\left\{2\left[\frac{\pi k}{l}\right]^2 a^2(T-t_0)\right\}$, то

требование сходимости ряда налагает сильное условие на характер убывания коэффициентов Фурье (g, ψ_k) функции $g(x)$. Очевидно, что эти условия выполнены не для всех $g(x) \in L_2[0, l]$. В качестве примера рассмотрим бесконечно дифференцируемую на отрезке $[0, l]$ функцию

$$\bar{g}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-k) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right).$$

Ряд, стоящий в правой части равенства (19), для этой функции расходится, так как

$$\begin{aligned} & (\bar{g}, \psi_k)^2 \exp\left\{2\left[\frac{\pi k}{l}\right]^2 a^2 (T - t_0)\right\} = \\ & \exp\left\{2\left[\frac{\pi k}{l}\right]^2 a^2 (T - t_0) - 2k\right\} \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (17) для $g(x) = \bar{g}(x)$ решения не имеет.

Задача решения уравнения (17) является неустойчивой при $g(x) \in L_2[0, l]$ и $\varphi(x) \in L_2[0, l]$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно взять последовательность функций $\varphi_k(x) = k \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$ являющихся решениями уравнения (17) при

$$g_k(x) = k \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 (T - t_0)\right\} \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right).$$

Тогда $\|g_k\|_{L_2[0, l]} \rightarrow 0$, а $\|\varphi_k\|_{L_2[0, l]} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, что и доказывает неустойчивость задачи.

Рассматриваемая обратная задача может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода. Действительно, поменяв местами порядок суммирования и интегрирования в левой части уравнения (17), получим уравнение Фредгольма 1-го рода:

$$K\varphi \equiv \int_0^l K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = g(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (20)$$

с ядром

$$K(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 (T - t_0)\right\}.$$

Так как каждый член этого ряда содержит быстро убывающий при $n \rightarrow \infty$ множитель, то $K(x, \xi)$ является непрерывной в квадрате $0 \leq x, \xi \leq l$ функцией. Следовательно, интегральный оператор K , определяемый ядром $K(x, \xi)$, является вполне непрерывным, если его рассматривать действующим из $L_2[0, l]$ в $L_2[0, l]$. А значит, задача решения уравнения (20) в этой паре пространств некорректна.

Так как ядро $K(x, \xi)$ имеет непрерывные частные производные любого порядка непрерывные в квадрате $0 \leq x, \xi \leq l$, то интегральный оператор K можно рассматривать действующим из $C[0, l]$ в $C^p[0, l]$, где p – произвольное фиксированное натуральное число. В этом случае задача решения уравнения (20) также будет неустойчивой. Для доказательства неустойчивости достаточно взять последовательность

$$\bar{\varphi}_k(x) = k \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

тогда

$$\|\bar{\varphi}_k\|_{C[0, l]} \rightarrow \infty, \quad \text{а} \quad \|K\bar{\varphi}_k\|_{C^p[0, l]} \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

что и доказывает некорректность задачи решения уравнения (20) в рассматриваемой паре пространств.

Получим оценку устойчивости решения задачи теплопроводности с обратным течением времени в случае, когда имеется дополнительная информация о решении задачи.

Будем для упрощения записи считать далее, что $a^2 = 1$. Предположим, что функция $u(x, t)$ непрерывна, имеет непрерывные производные $u_t(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ и удовлетворяет уравнению (13) при $0 \leq x \leq l$, $t_0 - \varepsilon \leq t \leq T$, где ε – произвольное фиксированное положительное число. Предположим также, что $u(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям (14) при $t_0 - \varepsilon \leq t \leq T$ и не равна тождественно нулю.

Рассмотрим при $t \in [t_0 - \varepsilon, T]$ функцию

$$g(t) = \int_0^l u^2(x, t) dx.$$

Дифференцируя, имеем

$$g'(t) = 2 \int_0^l u(x, t) u_t(x, t) dx,$$

$$g''(t) = 2 \int_0^l u(x, t) u_{tt}(x, t) dx + \int_0^l (u_t(x, t))^2 dx.$$

Так как

$$(u_t(x, t))_t = (u_{xx}(x, t))_t = (u_t(x, t))_{xx} = u_{xxxx}(x, t),$$

то

$$g''(t) = 2 \int_0^l u(x, t) u_{xxxx}(x, t) dx + \int_0^l (u_t(x, t))^2 dx.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям и учитывая краевые условия (14), получим

$$\int_0^l u(x, t) u_{xxxx}(x, t) dx = u(x, t) u_{xxxx}(x, t) \Big|_0^l - \int_0^l u_x(x, t) u_{xxxx}(x, t) dx =$$

$$= -u_x(x, t)u_{xx}(x, t)\Big|_0^l + \int_0^l (u_{xx}(x, t))^2 dx = \int_0^l (u_t(x, t))^2 dx.$$

Следовательно,

$$g''(t) = 4 \int_0^l (u_t(x, t))^2 dx.$$

Рассмотрим функцию $h(t) = \ln(g(t))$. Покажем, что $h''(t) \geq 0$ при $t \in [t_0 - \varepsilon, T]$. Действительно,

$$\begin{aligned} h''(t) &= \frac{d}{dt} \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{1}{g^2(t)} [g''(t)g(t) - (g'(t))^2] = \\ &= \frac{1}{g^2(t)} \left[4 \int_0^l (u_t(x, t))^2 dx \int_0^l (u(x, t))^2 dx - 4 \left(\int_0^l u_t(x, t)u(x, t) dx \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, используя неравенство Коши-Буняковского, получим, что $h''(t) \geq 0$ для $t \in [t_0 - \varepsilon, T]$. Из неотрицательности $h''(t)$ на отрезке $[t_0 - \varepsilon, T]$ следует, что при $t \in [t_0 - \varepsilon, T]$

$$h(t) \leq h(t_0 - \varepsilon) \frac{T-t}{T-(t_0 - \varepsilon)} + h(T) \frac{t-(t_0 - \varepsilon)}{T-(t_0 - \varepsilon)} \ln(g(t)),$$

Из этого неравенства имеем

$$\ln(g(t)) \leq \frac{T-t}{T-(t_0 - \varepsilon)} \ln(g(t_0 - \varepsilon)) + \frac{t-(t_0 - \varepsilon)}{T-(t_0 - \varepsilon)} \ln(g(T)),$$

следовательно,

$$g(t) \leq [g(t_0 - \varepsilon)]^{\frac{T-t}{T-(t_0 - \varepsilon)}} [g(T)]^{\frac{t-(t_0 - \varepsilon)}{T-(t_0 - \varepsilon)}} \quad (21)$$

при $t \in [t_0 - \varepsilon, T]$.

Рассмотрим функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, удовлетворяющие тем же условиям, что $u(x, t)$, и такие, что

$$\left[\int_0^l (u_i(x, t_0 - \varepsilon))^2 dx \right]^{1/2} \leq C, \quad i = 1, 2, \quad (22)$$

где C – положительная постоянная. Обозначив $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, из неравенства (9) с учетом определения функции $g(t)$ получим

$$\begin{aligned} &\int_0^l (u_1(x, t) - u_2(x, t))^2 dx \leq \\ &\leq \left[\int_0^l (u_1(x, t_0 - \varepsilon) - u_2(x, t_0 - \varepsilon))^2 dx \right]^{\frac{T-t}{T-(t_0 - \varepsilon)}} \times \\ &\times \left[\int_0^l (u_1(x, T) - u_2(x, T))^2 dx \right]^{\frac{t-(t_0 - \varepsilon)}{T-(t_0 - \varepsilon)}}. \end{aligned}$$

Положив $t = t_0$, используя обозначение нормы в пространстве $L_2[0, l]$ и неравенство (22), имеем

$$\|u_1(x, t_0) - u_2(x, t_0)\| \leq (2C)^{\frac{T-t_0}{T-(t_0-\varepsilon)}} \|u_1(x, T) - u_2(x, T)\|_{L_2[0, l]}^{\frac{\varepsilon}{T-(t_0-\varepsilon)}}. \quad (23)$$

Это неравенство представляет собой оценку условной устойчивости решения задачи теплопроводности с обратным направлением времени. Она получена в предположении, что функции $u_i(x, t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют неравенству (22), т.е. их нормы в пространстве $L_2[0, l]$ при $t = t_0 - \varepsilon$ ограничены заданной постоянной. Эта оценка может показаться несколько странной, поскольку она получена для решения некорректной задачи только в предположении (22) об ограниченности решения, которое не обеспечивает компактность множества в $L_2[0, l]$. Рассмотрим этот вопрос более детально.

В оценке (23) разность решений в момент времени t_0 оценивается через разность решений в момент времени T . Ограниченность же этих решений – неравенство (22) – предполагается не при $t = t_0$, а при $t = t_0 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Обозначим через $U_{t_0-\varepsilon}$ множество

$$U_{t_0-\varepsilon} = \{u(x, t_0 - \varepsilon), \|u(x, t_0 - \varepsilon)\|_{L_2[0, l]} \leq C\}$$

Переход от решения $u(x, t_0 - \varepsilon)$ при $t = t_0 - \varepsilon$ к решению $u(x, t_0)$ при $t = t_0$ можно рассматривать как результат действия интегрального оператора K_1

$$\int_0^l K_1(x, \xi) u(\xi, t_0 - \varepsilon) d\xi = u(x, t_0)$$

с ядром

$$K_1(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 \varepsilon\right\}.$$

Так как ядро $K_1(x, \xi)$ непрерывно при $0 \leq x, \xi \leq l$, то оператор K_1 , рассматриваемый действующим из $L_2[0, l]$ в $L_2[0, l]$, является вполне непрерывным. Следовательно, ограниченное множество $U_{t_0-\varepsilon}$ в результате действия оператора K_1 перейдет в множество $U_{t_0} = K_1 U_{t_0-\varepsilon}$, компактное в пространстве $L_2[0, l]$. Таким образом, неравенство (23) представляет собой оценку устойчивости задачи теплопроводности с обратным направлением времени на компактном в $L_2[0, l]$ множестве U_{t_0} .

Приведенная оценка устойчивости задачи теплопроводности с обратным направлением времени является частным случаем оценки решения задачи Коши для эволюционного операторного уравнения первого порядка [6,7].

Задача определения начального распределения температуры по измерению температуры в точке

Рассмотрим постановку этой обратной задачи на примере второй краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t_0 < t \leq T, \quad (24)$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (25)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (26)$$

Обратная задача ставится так. При $t \in [t_0, t_1]$, $t_0 > 0$ задана функция $g(t) = u(x_0, t)$, где x_0 – некоторая фиксированная точка отрезка $[0, l]$, а $u(x, t)$ – решение задачи (24)–(26). Требуется определить $\varphi(x)$ на отрезке $[0, l]$. Физическая интерпретация этой обратной задачи такова. В течение некоторого интервала времени в фиксированной точке стержня измеряется температура, и по этим измерениям требуется определить начальное распределение температуры.

Решение задачи (24)–(26) может быть получено методом разделения переменных и имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \cos\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi * \\ * \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t\right\} \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Положив в этом равенстве $x = x_0$, получим уравнение для функции $\varphi(x)$

$$\frac{1}{l} \int_0^l \varphi(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \cos\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi * \\ * \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t\right\} \cos\left(\frac{\pi n}{l} x_0\right) = g(t), \quad (27)$$

где $t \in [t_0, t_1]$.

Исследуем вопрос о единственности, решения уравнения (27) в случае, когда точка измерения x_0 находится на конце отрезка.

Т е о р е м а 1. Если $x_0 = 0$, то решение уравнения (27) единственно в пространстве $L_2[0, l]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из линейности уравнения (27) следует, что для доказательства единственности решения в $L_2[0, l]$ достаточно показать, что оно имеет только нулевое решение при $g(t) = 0$. Положив в (27) $g(t) = 0$ и $x_0 = 0$, получим, что при $t \in [t_0, t_1]$

$$\int_0^l \varphi(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^l \varphi(\xi) \cos\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t\right\} = 0 \quad (28)$$

Рассмотрим в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq \alpha$, где постоянная $\alpha \in (0, t_0)$, функцию комплексной переменной

$$\Phi(z) = \int_0^l \varphi(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^l \varphi(\xi) \cos\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 z\right\}. \quad (29)$$

Так как при $\operatorname{Re} z \geq \alpha$

$$\left| \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 z\right\} \right| \leq \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 \alpha\right\},$$

то в этой полуплоскости ряд, стоящий в правой части (29), сходится равномерно. Учитывая то, что каждый член этого ряда является аналитической функцией при $\operatorname{Re} z \geq \alpha$, и применяя теорему Вейерштрасса [8], получаем, что функция $\Phi(z)$ является аналитической при $\operatorname{Re} z \geq \alpha$. Так как из (28) следует, что $\Phi(z) = 0$ на отрезке действительной оси $[t_0, t]$, лежащем в области аналитичности $\Phi(z)$, то из теоремы единственности для аналитических функций следует, что $\Phi(z) = 0$ для всех z , таких, что $\operatorname{Re} z \geq \alpha$. Таким образом, равенство (28) выполнено для всех действительных $t \geq t_0$. Переходя в этом равенстве к пределу при $t \rightarrow +\infty$, получим последовательно, что

$$\int_0^l \varphi(\xi) \cos\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

Так как система функций $\cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, является полной в пространстве $L_2[0, l]$, то из равенств (30) следует, что $\varphi(x) = 0$. Теорема 1 доказана.

Покажем, что при измерении температуры внутри стержня ($x_0 \in (0, l)$), единственность решения обратной задачи зависит от выбора точки наблюдения x_0 . Действительно, пусть $x_0 = l/2$. Возьмем $\varphi(x) = \cos\left(\frac{\pi}{l} x\right)$.

Решение задачи (24)-(26) имеет вид

$$u(x, t) = \cos\left(\frac{\pi}{l} x\right) \exp\left\{-\left[\frac{\pi}{l}\right]^2 a^2 t\right\}.$$

Следовательно, $g(t) = u(x_0, t) = u(l/2, t) = 0$ при $t \geq 0$ и решение обратной задачи неединственно. Пусть теперь $x_0 = l/\pi$. В этом случае

$$\cos\left(\frac{\pi n}{l} x_0\right) = \cos(n) \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда, проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, получим, что решение уравнения (27) единственно.

Рассматриваемая обратная задача может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода. Действительно, поменяв местами порядок интегрирования и суммирования в левой части уравнения (27), получим уравнение Фредгольма 1-го рода

$$G\varphi \equiv \int_0^l G(t, \xi) \varphi(\xi) d\xi = g(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (31)$$

с ядром

$$G(t, \xi) = \frac{1}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \cos\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t\right\} \cos\left(\frac{\pi n}{l} x_0\right),$$

непрерывным в прямоугольнике $t_0 \leq t \leq t_1$, $0 \leq \xi \leq l$. Следовательно, интегральный оператор G , рассматриваемый действующим из $L_2[0, l]$ в $L_2[t_0, t_1]$, вполне непрерывен. Таким образом, задача решения уравнения (31) в этой паре пространств некорректна.

Задача определения краевого условия

Рассмотрим обратную задачу, состоящую в определении зависящей от времени функции, входящей в краевое условие, по дополнительной информации о решении краевой задачи для уравнения теплопроводности, представляющей собой функцию, зависящую от времени. Пусть функция $u(x, t)$ является решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (32)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (33)$$

$$u_x(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (34)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (35)$$

Предположим, что функция $\nu(t)$ задана, а функция $\mu(t)$ неизвестна, и требуется определить $\mu(t)$, если известна дополнительная информация о решении задачи (32)-(35)

$$u(l, t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (36)$$

где $g(t)$ – заданная функция.

Рассмотрим вопрос о единственности поставленной обратной задачи. Единственность решения этой задачи исследовалась в более общей постановке целым рядом авторов. Приведем один из результатов, полученных в этом направлении [9], сформулировав его для случая уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами (32). Обозначим

$$Q_{IT} = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}.$$

Теорема 2. Пусть функция $\bar{u}(x, t) \in C^{2,1}(Q_{IT})$ и удовлетворяет в Q_{IT} уравнению (32). Тогда если $\bar{u}(l, t) = \bar{u}_x(l, t) = 0$ для $0 \leq t \leq T$, то $\bar{u}(x, t) = 0$ в Q_{IT} .

Из этой теоремы следует единственность задачи определения функции $\mu(t)$ из (32)-(36) при заданных функциях $\nu(t)$ и $g(t)$. Действительно, пусть $u_1(x, t), u_2(x, t) \in C^{2,1}(Q_{IT})$ удовлетворяют в Q_{IT} уравнению (32) и таковы, что $u_1(0, t) = \mu_1(t), u_2(0, t) = \mu_2(t), 0 \leq t \leq T$,

$$u_1(l,t) = u_2(l,t) = g(t), \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}(l,t) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(l,t) = v(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Рассмотрим функцию $\bar{u}(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 2. Следовательно, $\bar{u}(x,t) = 0$ в Q_{IT} , а значит, $\mu_1(t) = \mu_2(t)$ при $t \in [0, T]$.

Отметим, что в теореме 2 начальное условие для функции $\bar{u}(x,t)$ не задается.

Рассмотрим другую постановку обратной задачи для краевой задачи (20)-(23). Предположим, что функция $v(t)$ задана, а $\mu(t)$ неизвестна и требуется определить $\mu(t)$, если известна дополнительная информация о решении задачи (32)-(35) следующего вида:

$$u(x_0, t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (37)$$

где $g(t)$ – заданная функция, а $x_0 \in (0, l)$. Исследование единственности решения этой обратной задачи также можно провести, используя теорему 2.

Теорема 3. Если функции $u_1(x,t), u_2(x,t) \in C^{2,1}(Q_{IT})$, удовлетворяют в Q_{IT} уравнению (32), условиям (34), (35), (37) и таковы, что $u_i(0,t) = \mu_i(t)$, $i = 1, 2$, при $t \in [0, T]$, то $\mu_1(t) = \mu_2(t)$ при $t \in [0, T]$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\bar{u}(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, являющуюся решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \bar{u}_t &= a^2 \bar{u}_{xx}, \quad x_0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ \bar{u}(x_0, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \bar{u}_x(l, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \bar{u}(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Покажем, что $\bar{u}(x,t) = 0$ для $x \in [x_0, l]$, $t \in [0, T]$. Умножив уравнение на $\bar{u}(x,t)$ и проинтегрировав, получим

$$\int_{x_0}^l \int_0^t \bar{u}_t(\xi, \tau) \bar{u}(\xi, \tau) d\tau d\xi = a^2 \int_0^t \int_{x_0}^l \bar{u}_{xx}(\xi, \tau) \bar{u}(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Вычисляя интегралы и используя краевые и начальные условия, имеем для $t \in [0, T]$

$$\frac{1}{2} \int_{x_0}^l (\bar{u}(\xi, \tau))^2 d\xi + a^2 \int_0^t \int_{x_0}^l (\bar{u}_x(\xi, \tau))^2 d\xi d\tau.$$

Следовательно, $\bar{u}(\xi, \tau) = 0$ при $x \in [x_0, l]$, $t \in [0, T]$, тогда $\bar{u}_x(x_0, t) = 0$ для $t \in [0, T]$. Таким образом, функция $\bar{u}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (32) при $x \in [x_0, l]$, $t \in [0, T]$, и $\bar{u}(x_0, t) = \bar{u}_x(x_0, t) = 0$ для $t \in [0, T]$. Применяя теорему 2 для прямоугольника $0 \leq x \leq x_0$, $0 \leq t \leq T$, получим, что $u_1(0,t) = u_2(0,t)$ при $t \in [0, T]$, т.е. $\mu_1(t) = \mu_2(t)$. Теорема 3 доказана.

Приведем пример сведения задачи определения граничного условия к задаче решения интегрального уравнения 1-го рода. Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности на полупрямой

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t \leq T, \quad (38)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (39)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (40)$$

Требуется определить функцию $\mu(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (38)-(40)

$$u(x_0, t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x_0 > 0. \quad (41)$$

Решение задачи (38)-(40) имеет вид [3]

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right\} \mu(\tau) d\tau.$$

Следовательно, в данном случае обратная задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^t K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = g(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

с ядром

$$K(t, \tau) = \frac{x_0}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x_0^2}{4(t-\tau)}\right\}.$$

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Методы решения граничных обратных задач для уравнения параболического типа

Среды обратных задач математической физики особенно важное прикладное значение имеет граничная обратная задача [4]. Она связана с проблемами диагностики, когда по дополнительным измерениям внутри расчетной области необходимо восстановить граничный режим там, где прямые измерения невозможны. Такая задача принадлежит к классу условно корректных и для ее приближенного решения разрабатываются специальные методы регуляризации.

При формулировке общих постановок и выделении основных классов обратных задач предполагаются известными постановки прямых задач [2]. Каждая прямая задача в рамках принятой математической модели может быть сопоставлена некоторым множеством обратных задач. Все обратные задачи, вне зависимости от рассматриваемого физического процесса или технической системы, можно разделить на три класса [20]: 1) обратные задачи, возникающие при диагностике и идентификации физических процессов; 2) обратные задачи, возникающие при проектировании технических объектов; 3) обратные задачи, возникающие при управлении процессами и объектами. Математические модели различных процессов обычно описываются дифференциальными уравнениями с частными производными. Для этих моделей в общем случае вводится четыре вида обратных задач – граничные, коэффициентные, ретроспективные и геометрические [2]. Граничные задачи заключаются в нахождении функций и параметров, входящих в граничные условия; коэффициентные – функций и параметров, входящих в коэффициенты уравнений; ретроспективные, т.е. обращенные назад по времени – в нахождении начальных условий; геометрические – в реконструировании геометрических характеристик

области или каких-либо характерных точек, линий, поверхностей внутри ее (например, в определении координат границы фазового перехода или контакта сред с различными физическими свойствами). Теоретические и практические проблемы решения обратных задач математической физики исследованы в [2-5, 21-24].

Методы решения граничных обратных задач хорошо исследованы в [1-5]. В работе [1, 4] для решения граничных обратных задач использованы методы квазиобращения. В работе [2,3,5] граничные обратные задачи решены прямыми численными методами и в экстремальной постановке.

Решение граничных обратных задач для уравнения параболического типа прямыми численными методами

Рассмотрим нелинейную граничную обратную задачу теплопроводности [2]. Считаем, что тело имеет границы $[0, b]$ и на одной из них ($x = b$) известен тепловой поток $q^*(t)$. Заданы температурные измерения $f(t)$ в некоторой точке $0 < d \leq b$ и начальное распределение $\varphi(x)$. Требуется определить температурное поле в теле и условия на границе $x = 0$ из условий

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x \in (0, b), \quad t \in (0, t_m] \quad (1)$$

$$T(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, b], \quad (2)$$

$$T(d, t) = f(t) = 0, \quad t \in [0, t_m] \quad (3)$$

$$-\lambda(T(b, t)) \frac{\partial T(b, t)}{\partial x} = q^*(t), \quad t \in [0, t_m] \quad (4)$$

где $C(T)$, $\lambda(T)$, $\varphi(x)$, $f(t)$, $q^*(t)$ – заданные функции.

При использовании прямых методов решения данной задачи результаты чувствительны к погрешностям в задании теплофизических характеристики (ТФХ), причем гладкость результатов зависит от гладкости функций $\lambda(T)$ и $a(T) = \frac{\lambda(T)}{C(T)}$. Табличная форма представления

коэффициентов в этом отношении не совсем удачна, поскольку приводит к дополнительным ошибкам вследствие операции интерполирования между узловыми точками. Кроме того, значения функций в узлах температурной сетки далеко не всегда задаются с учетом условий необходимой гладкости. Поэтому при решении нелинейной обратной задачи теплопроводности (ОЗТ) желательно представлять теплофизические свойства материала в виде некоторых аппроксимирующих зависимостей $\lambda(T)$, $a(T)$, удовлетворяющих условию непрерывной дифференцируемости.

В этом случае удобно перейти от уравнения (1) к другой, тождественной форме [2]

$$\frac{1}{a(T)} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\lambda'(T)}{\lambda(T)} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2, \quad x \in (0, b), \quad t \in (0, t_m] \quad (5)$$

где $\lambda' \neq \frac{d\lambda}{dT}$.

Введением равномерной прямоугольной сетки $\{x_i = hi, i = \overline{0, L}, t_j = \tau j, j = \overline{0, m}\}$ можно записать разностный аналог (5) используя неявную шеститочечную схему при аппроксимации производной $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ на верхнем слое [2]

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{ij} = \frac{T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}}{h^2} + O(h^2),$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{ij} = \frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2h} + O(h^2),$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{ij} = \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} + O(\tau),$$

где $T_i^j = T(hi, \tau j)$.

Откуда, полагая, что ТФХ оцениваются по температуре предыдущего временного слоя, получено [2]

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_i^j \tau}{h^2} T_{i-1}^{j+1} + \left[1 + \frac{2a_i^j \tau}{h^2} \right] T_i^{j+1} - \frac{a_i^j \tau}{h^2} T_{i+1}^{j+1} = \\
& = T_i^j + \frac{a_i^j \tau}{h^2} \frac{\lambda'_{ij}}{4\lambda_{ij}} (T_{i+1}^j - T_{i-1}^j)^2,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $a_i^j = a(T_i^j)$, $\lambda_{ij} = \lambda(T_i^j)$, $\lambda'_{ij} = \lambda'(T_i^j)$.

Для дискретного представления плотности тепловых потоков $q(t)$ и $q^*(t)$ записаны разностные соотношения второго порядка точности, учитывающие накопление теплоты в выделенном элементе, толщиной h [6]

$$\begin{aligned}
q_{j+1} &= \lambda_{0j} \frac{T_0^{j+1} - T_1^{j+1}}{h} + C_{0j} \frac{h}{2} \frac{T_0^{j+1} - T_0^j}{\tau}, \\
q_{j+1}^* &= \lambda_{Lj} \frac{T_L^{j+1} - T_{L-1}^{j+1}}{h} + C_{Lj} \frac{h}{2} \frac{T_L^{j+1} - T_L^j}{\tau},
\end{aligned} \tag{7}$$

где $C_{ij} = C(T_i^j)$.

Дискретная функция начального распределения температуры имеет вид

$$T_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, L}. \tag{8}$$

Соотношения (6)-(8) позволяют получить систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестного теплового потока q_{j+1} , и неизвестных температур T_i^{j+1} ($i = 0, \dots, k-1, k+1, \dots, L$, T^k – известная температура в точке $i = k$ внутри тела) [2]

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{y} = [z_L; T_0^{j+1}; T_1^{j+1}; \dots; T_{k-2}^{j+1}; T_{k-1}^{j+1}; T_{k+1}^{j+1}; T_{k+2}^{j+1}; \dots; T_L^{j+1}]^T$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \beta_{k+1}^j & \gamma_{k+1}^j & & 0 \\ \alpha_{k+2}^j & \beta_{k+2}^j & \gamma_{k+2}^j & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \alpha_L^j & \beta_L^j \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение (10), по существу, представляет собой алгебраическую форму неявного конечно-разностного решения прямой задачи теплопроводности в области $[d, b]$. Вследствие этого система (10) хорошо обусловлена и эффективно (быстро и точно) решается методом прогонки.

Зная вектор \mathbf{y}_2 , можно представить разностное решение обратной задачи в области $[0, d]$ в виде алгебраической системы с верхней треугольной матрицей, имеющей только три ненулевые диагонали [2]

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{y}_1 = \mathbf{b}_1, \quad (11)$$

$$\mathbf{y}_1 = [z_L; T_0^{j+1}; T_1^{j+1}; \dots; T_{k-1}^{j+1}]^T,$$

$$\mathbf{b}_1 = [0; b_1^j; b_2^j; \dots; b_{k-1}^j; \tilde{b}_k^j]^T,$$

$$\tilde{b}_k^j = b_k^j - \beta_k^j T_{k+1}^{j+1}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -1 & \beta_0^j & \gamma_0^j & & & \\ & \alpha_1^j & \beta_1^j & \gamma_1^j & & 0 \\ & & \alpha_2^j & \beta_2^j & \gamma_2^j & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \alpha_{k-2}^j & \beta_{k-2}^j & \gamma_{k-2}^j \\ 0 & & & & \alpha_{k-1}^j & \beta_{k-1}^j \\ & & & & & \alpha_k^j \end{bmatrix}.$$

Система (11) решается явно – компоненты вектора \mathbf{y}_1 вычисляются рекуррентным способом, начиная с T_{k-1}^{j+1} . При этом большое количество нулевых коэффициентов приводит к значительному сокращению объема вычислений [2].

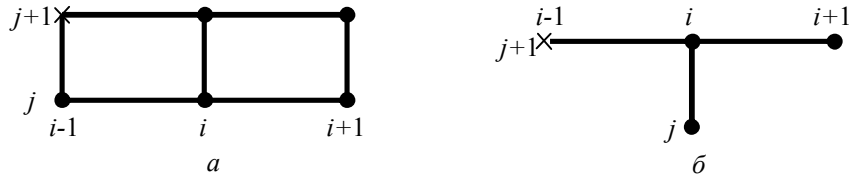


Рис.1. Разностные схемы: ● – узлы сетки с неизвестными значениями температуры; × – узел с искомым значениям

Замечая, что в случае постоянных ТФХ ($a = const, \lambda' \equiv 0$), шеститочечная разностная схема (рис. 1, а) вырождается в Т-образную четырехточечную схему (рис. 1, б). Т-образной схемой можно было воспользоваться и для случая переменных свойств тела, аппроксимируя правую часть уравнения (1) следующим образом [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_i^{j+1} &\cong \left[\lambda_{i+1/2}^j \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{h} - \lambda_{i-1/2}^j \frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{h} \right] \frac{1}{h} = \\ &= \frac{\lambda_{i+1/2}^j}{h^2} T_{i+1}^{j+1} - \left(\frac{\lambda_{i+1/2}^j + \lambda_{i-1/2}^j}{h^2} \right) T_i^{j+1} + \frac{\lambda_{i-1/2}^j}{h^2} T_{i-1}^{j+1}, \end{aligned}$$

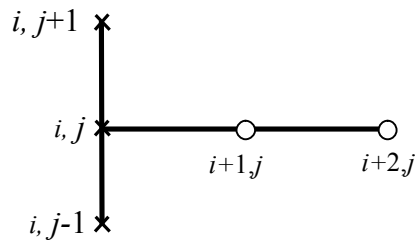
где

$$\lambda_{i\pm 1/2}^j = \frac{1}{2} (\lambda_i^j + \lambda_{i\pm 1}^j), \quad \lambda_i^j = \lambda(T_i^j).$$

Желание повысить вязкостные свойства вычислительных алгоритмов и тем самым расширить область применимости прямых численных методов приводит к неявной схеме аппроксимации уравнения теплопроводности в задаче продолжения температурного поля по данным Коши [2]. В этом случае значения температуры T_i^j , $j = \overline{1, m}$ на некотором пространственном слое i находятся одновременно из решения алгебраической системы с входными данными в виде двух временных рядов температур T_{i-1}^j и T_{i-2}^j , $j = \overline{1, m}$.

Рассмотрим неявную сеточную аппроксимацию задачи Коши для уравнения (5) с условиями (2)-(4), считая $d = b$ [2]. Выбрав прямоугольную сетку, положим, как и ранее, $x_i = ih, i = \overline{0, L}$, $t_j = j\tau$, $j = \overline{0, m}$, где h и τ – шаги по координате и времени соответственно.

Временной и пространственные дифференциальные операторы заменены разностными соотношениями (рис. 2) [2]



$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_i^{j+1} \cong \frac{T_i^{j+1} - T_i^{j-1}}{2\tau}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_i^{j+1} \cong \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{h},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_i^{j+1} \cong \frac{T_{i+2}^j - 2T_{i+1}^j + T_i^j}{h^2}.$$

Рис. 2. Неявная разностная схема

Чтобы получить возможность расчета сеточной функции температуры во всех узлах прямоугольной области, необходимо задать дополнительное условие на ее верхней границе при $t = t_m$. Как показали вычислительные эксперименты, можно принять одно из следующих априорных условий [2]

$$\frac{\partial T(x, t_m)}{\partial t} \cong \frac{T_i^m - T_i^{m-1}}{\tau} = C_1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 T(x, t_m)}{\partial t^2} \cong \frac{T_i^{m+1} - 2T_i^m + T_i^{m-1}}{\tau^2} = C_2, \quad i = L-1, L-2, \dots, 0, \quad (13)$$

где

$$C_1 = \frac{df(t_m)}{dt} = \text{const}, \quad C_2 = \frac{d^2 f(t_m)}{dt^2} = \text{const}.$$

Уклонение решения от искомого, обусловленное введением ограничений на производные (12) и (13), наблюдается в некоторой сравнительно небольшой области $\bar{t} < t < t_m$, причем условие (13) дает меньшее искажение результатов [2]. Можно избежать указанного ухудшения решения в окрестности $t = t_m$, если значения температуры $f(t)$ известны не только на интервале времени $[0, t_m]$, но и при $t > t_m$.

Другая возможность состоит в аппроксимации уравнения теплопроводности в граничных узлах сетки ($j = m$) по явной схеме. Для этого можно воспользоваться следующим соотношением [2]

$$\frac{\partial T(x, t_m)}{\partial t} \cong \frac{T_i^m - T_i^{m-1}}{\tau}. \quad (14)$$

Конечно-разностный аналог задачи (5), (2) - (4) для i -го пространственного слоя соответствует системе нелинейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей ($i = L - 2, L - 3, \dots, 0$) [2]

$$T_i^0 = \varphi_i, \quad (15)$$

$$A_i^j T_i^{j+1} + B_i^j T_i^j + D_i^j T_i^{j-1} = F_i^j, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad (16)$$

$$\alpha_i^j T_i^j + \gamma_i^j T_i^{j-1} = \beta_i^j, \quad (17)$$

где

$$A_i^j = \frac{1}{2\tau}, \quad B_i^j = -\frac{\alpha_i^j}{h^2}, \quad D_i^j = -\frac{1}{2\tau}, \quad F_i^j = a_i^j \frac{T_{i+2}^j - 2T_{i+1}^j}{h^2} + \frac{\lambda'_{ij} a_i^j}{\lambda_{ij}} \left(\frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{h} \right)^2.$$

Величины α_i^j , γ_i^j и β_i^j определяются видом априорного условия в конце временного интервала. При задании первой производной в виде соотношения (12) имеем $\alpha_i^m = -\gamma_i^m = 1$, $\beta_i^m = C_1 \tau$. Для двух других условий соответствующие выражения получаются с учетом основного разностного уравнения (16).

$$\text{Условие (13): } \alpha_i^m = 1 - \frac{\alpha_i^m \tau}{h^2}, \quad \gamma_i^m = -1, \quad \beta_i^m = F_i^m \tau - \frac{\tau^2}{2} C_2.$$

$$\text{Условие (14): } \alpha_i^m = 1 - \frac{\alpha_i^m \tau}{h^2}, \quad \gamma_i^m = -1, \quad \beta_i^m = F_i^m \tau.$$

Коэффициенты и правые части системы (15)-(17) являются функциями неизвестных температур. Поэтому для каждого шага по координате x необходимо повторять процесс итерационного приближения до тех пор, пока в двух последовательных итерационных циклах не исчезнет заметная разница между сеточными функциями T_i [2]

$$\max_j \left| T_i^{j(p)} - T_i^{j(p-1)} \right| \leq \varepsilon,$$

где p – номер итерации, $\varepsilon > 0$ – некоторая малая величина.

После выполнения условий сходимости осуществляется переход к следующему пространственному слою. В том случае, когда функция $\lambda(T)$ задана таблично, предпочтительнее пользоваться несколько измененным алгоритмом, в котором производная $\lambda'_{ij} = \frac{d\lambda}{dT}\Big|_{ij}$ аппроксимирована разностным соотношением [2]

$$\lambda'_{ij} = \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{ij}}{T_{i+1}^j - T_i^j}.$$

Тогда в системе (15)-(17) коэффициенты B_i^j и правые части F_i^j запишутся следующим образом [2]

$$B_i^j = \frac{a_i^j}{h^2} \left(\frac{\lambda_{i+1,j}}{\lambda_{ij}} - 2 \right), \quad F_i^j = \frac{a_i^j}{h^2} \left[T_{i+2}^j + T_{i+1}^j \left(\frac{\lambda_{i+1,j}}{\lambda_{ij}} - 3 \right) \right].$$

Для начала счета необходимо знать температуры T_L^j и T_{L-1}^j . Первый временной ряд $\{T_L^j\}$ получается соответствующей дискретизацией входной функции $f(t)$. Температуры $\{T_{L-1}^j\}$ на фиктивном $L-1$ слое рассчитываются с помощью выражения для разностной аппроксимации граничного условия, например, типа (7). Заметим, что если $b > d$, значения T_{L-1}^j находятся из решения прямой задачи теплопроводности.

Описанная схема аппроксимации (15) - (17) имеет второй порядок по времени и первый по пространству. Можно получить разностные уравнения, имеющие второй порядок также и по пространственной переменной [7].

Рассмотренный алгоритм, несмотря на неявную аппроксимацию уравнения теплопроводности, может обладать только слабой устойчивостью на конечном числе шагов по координате x (подробнее см. [8]).

Метод квазиобращения [1, 4]

Рассматривается граничная обратная задача для одномерного параболического уравнения второго порядка (уравнения теплопроводности),

которая состоит в восстановлении граничного режима по данным измерений внутри расчетной области [4]. Такая задача принадлежит к классу условно корректных и для ее устойчивого решения привлекаются методы регуляризации. Как один из известных методов решения таких задач рассмотрим метод квазиобращения, когда задача рассматривается как эволюционная по пространственной переменной. Использование метода квазиобращения ведет, в частности, к известной гиперболической регуляризации граничной обратной задачи [4]. Он основан на некотором возмущении исходного уравнения, причем для возмущенного уравнения задача уже корректна. Здесь параметр возмущения выступает в качестве параметра регуляризации.

При рассмотрении граничной обратной задачи для одномерного параболического уравнения второго порядка метод квазиобращения может быть основан на рассмотрении исходной задачи как задачи для эволюционного уравнения первого порядка. Вторая возможность связана с рассмотрением исследуемой граничной обратной задачи как задачи с начальными данными для эволюционного уравнения второго порядка. В качестве эволюционной переменной выступает пространственная переменная. Поэтому мы и говорим в этом случае о продолжении по пространственной переменной в граничной обратной задаче.

Рассмотрим граничную обратную задачу для параболического уравнения при продолжении решения по пространственной переменной, которая выступает в качестве временной переменной [4]. Задача ставится следующим образом. Решение $v(x, t)$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (18)$$

дополненного начальными условиями по переменным x и t следующего вида

$$v(0, t) = \varphi(t), \quad 0 < t < T, \quad (19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (20)$$

$$v(x,0)=0, \quad 0 < x < l. \quad (21)$$

В граничной обратной задаче (18) - (21) делаем замену переменных: x заменяется на t , t — на x ($l \rightarrow T$, $T \rightarrow l$), искомое решение обозначим $u(x,t)$ ($=v(x,t)$) [4]. Для нахождения $v(x,t)$ получим задачу [4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (22)$$

$$u(0,t)=0, \quad 0 < t < T, \quad (23)$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, \quad 0 < x < l, \quad (25)$$

где в новых обозначениях функции $\varphi(t)$ соответствует $u_0(x)$.

Задача (22)-(25) записывается в виде операторного уравнения [4]

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - Au = 0 \quad (26)$$

с начальными условиями (24), (25). Оператор A определяется выражением [4]

$$Au = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (27)$$

с областью определения [4]

$$D(A) = \{u \mid u = u(x,t), \quad x \in [0, l], \quad u(0,t) = 0\}.$$

Введенный оператор A не является самосопряженным и не знакоопределен в $H = L_2(0, l)$.

Для приближенного решения обратной задачи (24)-(26) применено метод квазиобращения [1, 4]. Использован один из вариантов в метода квазиобращения и приближенное решение $u_\alpha(x,t)$ определено из возмущенного уравнения [4]

$$\frac{d^2 u_\alpha}{dt^2} - Au_\alpha + \alpha A^* Au_\alpha = 0, \quad (28)$$

дополненного начальными условиями

$$u_\alpha(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (29)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}(x,0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (30)$$

Сопряженный в $H = L_2(0,l)$ к A оператор на основании (27) определяется выражением [4]

$$A^* u = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (31)$$

причем

$$D(A^*) = \{u \mid u = u(x,t), \quad x \in [0,l], \quad u(l,t) = 0\}.$$

Вариант метода квазиобращения (28)-(30) с учетом (27), (31) соответствует решению следующей задачи [4]

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (32)$$

$$u_\alpha(0,t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (33)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}(l,t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (34)$$

$$u_\alpha(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (35)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (36)$$

Тем самым, метод квазиобращения приводит к известному в вычислительной практике гиперболическому возмущению (уравнение (32)) исходного параболического уравнения (22) [4].

Теорема 1. Для решения краевой задачи (32)-(36) справедлива априорная оценка [4]

$$\left\| \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(x,t) \right\|^2 + \alpha \left\| \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}(x,t) \right\|^2 \leq \alpha \exp\{t/\sqrt{\alpha}\} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x}(x) \right\|^2. \quad (37)$$

Можно использовать и некоторые другие варианты метода квазиобращения. Например, приближенное решение определяется из уравнения [4]

$$\frac{d^2 u_\alpha}{dt^2} - A u_\alpha + \alpha A A^* \frac{du_\alpha}{dt} = 0, \quad (38)$$

дополненного условиями (29), (30).

Поэтому приближенное решение $u_\alpha(x, t)$ в соответствии с (27), (31) определяется из уравнения [4]

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^2 \partial t} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (39)$$

и условий (33)-(36). Аналогично теореме 1 формулируется следующее утверждение.

Теорема 2. Для решения краевой задачи (33)-(36), (39) справедлива априорная оценка [4]

$$\|u_\alpha(x, t)\|^2 + \left\| \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(x, t) \right\|^2 \leq \exp\left\{ \frac{1+2\alpha}{2\alpha} t \right\} \|u_0(x)\|^2. \quad (40)$$

Рассмотрим теперь предложенные варианты метода квазиобращения на сеточном уровне. Для простоты ограничимся одномерной граничной задачей [4]. Для перехода к разностной задаче вводится равномерная сетка $\bar{\omega} = \{x \mid x = x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = l\}$, где ω – множество внутренних узлов, а $\partial\omega$ – множество граничных узлов [4]. Операторы A , A^* вводятся обычным образом. Пусть в безиндексных, обозначениях [4]

$$Ay = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ y_{\bar{x}}, & i = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

с областью определения

$$D(A) = \{y \mid y(x), x \in \bar{\omega}, y_0 = 0\}.$$

Скалярное произведение и норма в сеточном гильбертовом пространстве $H = L_2(\omega)$ задано в виде [4]

$$(z, y) = \sum_{x \in \bar{\omega}} z(x)y(x)h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Для сопряженного оператора A^* получено [4]

$$A^*y = \begin{cases} -y_{\bar{x}}, & i = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & i = N, \end{cases}$$

причем

$$D^*(A) = \{y \mid y(x), x \in \bar{\omega}, y_N = 0\}$$

Для оператора A^*A имеем [4]

$$A^*Ay = \begin{cases} -\frac{1}{h}y_{\bar{x}}, & i = 0, \\ -y_{\bar{x}x}, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ 0, & i = N. \end{cases}$$

Разностное решение задачи (28)-(30) определено из уравнения [4]

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - Ay + \alpha AA^* y = 0, \quad (41)$$

для $y(x, t) \in H$, дополненного начальными условиями

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}, \quad (42)$$

$$\frac{dy}{dt}(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}. \quad (43)$$

При приближенном решении задачи (41)-(43) используется равномерная сетка по времени с шагом τ . Рассматривается разностная схема [4]

$$\begin{aligned} & \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - \frac{1}{2}A(y_n + y_{n-1}) + \\ & + \frac{\alpha}{4}A^*A(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (44)$$

Для исследования схемы (44) на устойчивость вводятся обозначения [4]

$$v_n = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}), \quad w_n = \frac{1}{\tau}(y_n - y_{n-1}) \quad (45)$$

Тогда разностная схема (45) записывается в виде

$$\frac{w_{n+1} - w_n}{\tau} - Av_n + \frac{\alpha}{2}A^*A(v_{n+1} + v_n) = 0. \quad (46)$$

Умножая разностное уравнение (46) скалярно на

$$2(v_{n+1} - v_n) = y_{n+1} - y_n = \tau(w_{n+1} + w_n)$$

получено [4]

$$\|w_{n+1}\|^2 - \|w_n\|^2 + \alpha \|Av_{n+1}\|^2 - \alpha \|Av_n\|^2 = \tau(Av_n, w_{n+1} + w_n). \quad (47)$$

Правая часть (47) оценивается следующим образом [4]:

$$\begin{aligned} \tau(Av_n, w_{n+1} + w_n) &\leq \beta \|Av_n\|^2 + \frac{1}{4\beta} \|w_{n+1} + w_n\|^2 \leq \\ &\leq \beta \|Av_n\|^2 + \frac{1+\varepsilon}{4\beta} \|w_{n+1}\|^2 + \frac{1+\varepsilon}{4\beta\varepsilon} \|w_n\|^2. \end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon = 1/2$ и с учетом последнего это неравенства из (47) получаем [4]

$$\left(1 - \frac{3\tau}{8\beta}\right) \|w_{n+1}\|^2 + \alpha \|Av_{n+1}\|^2 \leq \left(1 - \frac{3\tau}{4\beta}\right) \|w_n\|^2 + \alpha \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \|Av_n\|^2. \quad (48)$$

Используя при $\tau \leq 4\beta/3$ оценку

$$\left(1 - \frac{3\tau}{8\beta}\right)^{-1} \leq \exp\left\{\frac{3\tau}{4\beta}\right\}$$

и выбирая $\beta = (3\alpha/2)^{1/2}$ из (48) получена априорная оценка [4]

$$\left(1 - \frac{3\tau}{8\beta}\right) \|w_{n+1}\|^2 + \alpha \|Av_{n+1}\|^2 \leq \rho^2 \left(\left(1 - \frac{3\tau}{8\beta}\right) \|w_n\|^2 + \alpha \|Av_n\|^2 \right), \quad (49)$$

где

$$\rho = \exp\left\{\tau \sqrt{\frac{3}{2\alpha}}\right\}. \quad (50)$$

Тем самым доказано следующее утверждение [4].

Теорема 3. Для разностной схемы (44) при $\tau \leq 2(2\alpha/3)^{1/2}$ справедлива оценка (45), (48).

Вариант метода квазиобращения (38) соответствует решению уравнения [4]

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - Ay + \alpha AA^* \frac{dy}{dt} = 0$$

с начальными условиями (42), (43). При численной реализации используется схема [4]

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - Ay_n + \alpha AA^* \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (51)$$

Теорема 4. Разностная схема (51) ρ - устойчива с [4]

$$\rho = \exp\left\{\frac{1 + 4\alpha}{4\alpha} \tau\right\}$$

для нее справедлива априорная оценка [4]

$$\|y_n\|^2 + \left\|\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}\right\|^2 \leq \rho^2 \left(\|y_{n-1}\|^2 + \left\|\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau}\right\|^2 \right). \quad (52)$$

Приведенные выше результаты использованы при решении конкретных обратных задач в последующих частях работы.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Обратная граничная задача для линейно упругого режима фильтрации

Рассмотрим граничную обратную задачу при упругом режиме фильтрации жидкости в однородной пористой среде [9-11]. Теория упругого режима фильтрации жидкости сформулирована в работах [12, 13]. Для решения задачи используем численные методы [2]. Пористая среда считается однородным объектом $[0, L]$ и на $x = L$ граничные условия известны (Рис.3). В точке $x = d$, $d \in (0, L)$, заданы значения давления жидкости, т.е.

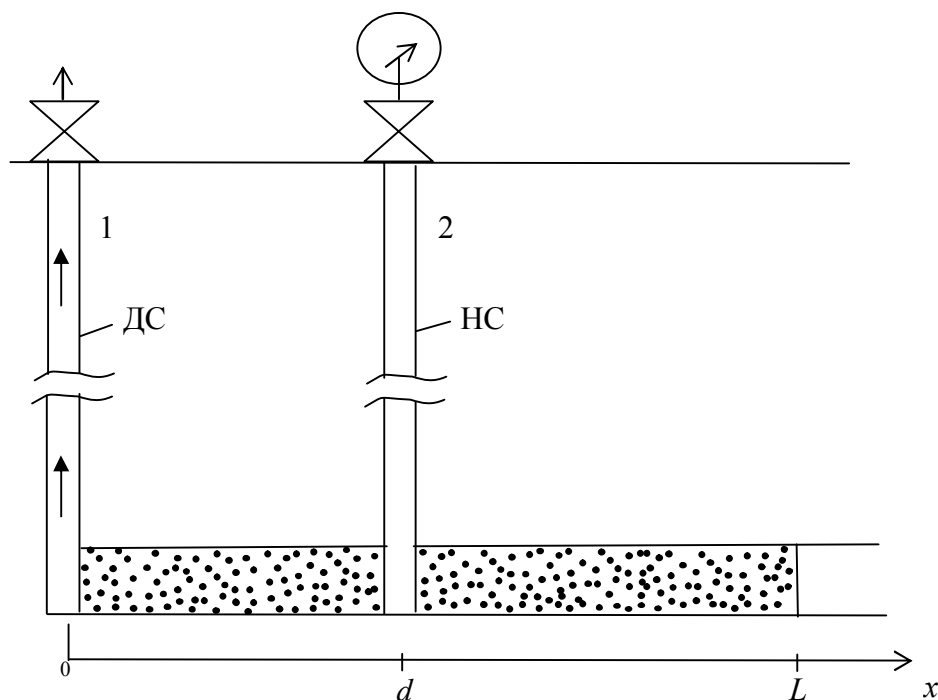


Рис. 1.3. Схема расположения добывающей (1) и наблюдательной (2) скважин (ДС, НС).

«исходные данные» – $f(t)$ и начальное распределение давления $p(0, x) = p_0$. Требуется определить давление в точке $x = 0$.

Данная постановка может быть интерпретирована как определение характерных параметров в нефтедобывающей скважине. Задача при этом сводится к определению давления в добывающей скважине ($x = 0$) на основе

измерений давления в наблюдательной скважине ($x = d$) и режима изменения давления на границе пласта.

Таким образом, обратная задача для теории упругого режима фильтрации ставится так:

- уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad x \in (x, L), \quad t \in (0, t_m], \quad (53)$$

- дополнительные условия

$$p(x, 0) = p_0, \quad x \in [0, L], \quad (54)$$

$$p(L, t) = p_0, \quad t \in [0, t_m], \quad (55)$$

$$p(d, t) = f(t), \quad t \in [0, t_m], \quad (56)$$

где χ – пьезопроводность пласта, p_0 – начальное пластовое давление.

Требуется найти давление в добывающей скважине, т.е. $p(0, t)$.

Для того, чтобы подготовить исходные данные для решения обратной задачи, т.е. $f(t)$ в (56), сначала решим прямую задачу для (53). При этом граничные условия имеют вид

$$w(0, t) = w_0 = - \left. \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad w_0 = const, \quad (57)$$

$$p(L, t) = p_0, \quad t \in [0, t_m], \quad (58)$$

где w – скорость фильтрации, k – проницаемость пласта, μ – вязкость жидкости.

Для решения задачи (53), (54), (57), (58) применяем метод конечных разностей. В области $D\{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ вводим сетку

$$\omega_{h\tau} = \left\{ (x_i, t_j), \quad i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, I; \quad j = 0, 1, \dots, J; \quad x_i = ih, \quad t_j = j\tau, \quad h = \frac{L}{I}, \quad \tau = \frac{T}{J} \right\}.$$

Уравнение (53) на сетке $\omega_{h\tau}$ аппроксимируем неявной конечно-разностной схемой с точностью $O(\tau + h^2)$

$$\frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} = \chi \frac{p_{i+1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1}}{h^2}$$

или

$$Ap_{i-1}^{j+1} - Cp_i^{j+1} + Bp_{i+1}^{j+1} = -p_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, I-1, \quad (59)$$

где $A = \frac{\chi\tau}{h^2}$, $B = \frac{\chi\tau}{h^2}$, $C = 1 + 2\frac{\chi\tau}{h^2}$.

Аппроксимируем начальные и граничные условия (54), (55), (58)

$$p_i^0 = p_0, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (60)$$

$$w_0 = -\frac{k}{\mu} \frac{p_1^{j+1} - p_0^{j+1}}{h}, \quad (61)$$

$$p_0^{j+1} = p_c, \quad p_I^{j+1} = p_0. \quad (62)$$

Для решения (59) с (60)-(62) используем метод прогонки [6]. Решение задачи ищется в виде

$$p_i^{j+1} = \alpha_{i+1} p_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, I-1, \quad (63)$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B}{C - \alpha_i A}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A\beta_i + p_i^j}{C - \alpha_i A}, \quad i = 1, 2, \dots, I-1. \quad (64)$$

Так как, при $i = 0$ из (63) имеем

$$p_0^{j+1} = \alpha_1 p_1^{j+1} + \beta_1,$$

с другой стороны из (62)

$$p_0^{j+1} = p_c.$$

Поэтому

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = p_c. \quad (65)$$

Начального условия (60) получается

$$p_i^0 = p_0, \quad i = 1, 2, \dots, I.$$

После того, как из (64) и (65) найдены можно α_i и β_i для всех $i = 1, 2, \dots, I$, зная, что $p_I^{j+1} = p_0$ из (63) можно найти p_i^{j+1} , $i = I-1, I-2, \dots, 1$.

В качестве исходных данных (дополнительных условия) для обратной задачи принимаются значения давления в точке d , $f(t_j) = p(d, t_j)$, t_j – дискретные значения времени.

Погрешность в задании исходных данных (56) моделировалась следующим образом

$$f_1^\delta(t) = f(t) + 2\delta \left(\sigma_1(t) - \frac{1}{2} \right),$$

$$f_2^\delta(t) = f(t) + \frac{1}{3} \delta \sigma_2(t), \quad t = t_j, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad (66)$$

где $f_1^\delta(t)$, $f_2^\delta(t)$ – возмущенные величины $f(t)$, δ – погрешность, $\sigma_1(t)$ – равномерно распределенная на $(0, 1)$ случайная величина, $\sigma_2(t)$ – нормально распределенная случайная величина.

Теперь уравнение (59) решим в области $[d, L]$, с граничным условием

$$p_n^{j+1} = f_l^\delta(t_{j+1}), \quad p_l^{j+1} = p_0, \quad i = n, \quad x_n = nh = d, \quad l = 1, 2.. \quad (67)$$

Зная p_i^{j+1} в области $[d, L]$, можно продолжить решения в область $[0, d]$.

Для этого можно использовать Т-образный четырехточечный шаблон (Рис. 1 а). Тогда p_{i-1}^{j+1} можно определить, используя уравнение

$$p_{i-1}^{j+1} = \left(2 + \frac{h^2}{\chi \tau_1} \right) p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^{j+1} - \frac{h^2}{\chi \tau_1} p_i^j, \quad i = n, n-1, \dots, 1, \quad \tau_1 \geq \tau. \quad (68)$$

Значения p_0^{j+1} дает нам искомое граничное условие. Из p_0^{j+1} и p_1^{j+1} можно определить w .

В расчетах использованы следующие исходные данные: $k = 1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$, $\chi = 0,1 \text{ м}^2/\text{с}$, $w_0 = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$, $m_0 = 0,15$, $p_0 = 25 \text{ МПа}$, $\mu = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$.

Результаты расчетов при различном уровне погрешностей в исходных данных показаны на рис. 4-18. Для получения устойчивых результатов применяется метод пошаговой регуляризации по времени и сглаживание «исходных данных» [2, 3]. При $\delta = 0$ полученные кривые имеют устойчивый характер (рис. 4-6). С увеличением расстояния $x = d$, возникает неустойчивый характер решения обратной граничной задачи (рис. 7). К тому же, случайные возмущения исходных данных приводят к существенной неустойчивости процесса вычисления (рис. 8). Из рис. 9 и 10 видно, что с использованием метода пошаговой регуляризации по времени получено условно устойчивое решение. При одновременном использовании метода пошаговой регуляризации и сглаживания исходных данных улучшается устойчивость решения (рис. 11-18), чем при использовании только пошаговой регуляризации. Для сглаживания исходных данных использованы сглаживающие сплайн функции пакета `spaps` (Spline Toolbox) в среде Matlab 7.6.0 (R2008a).

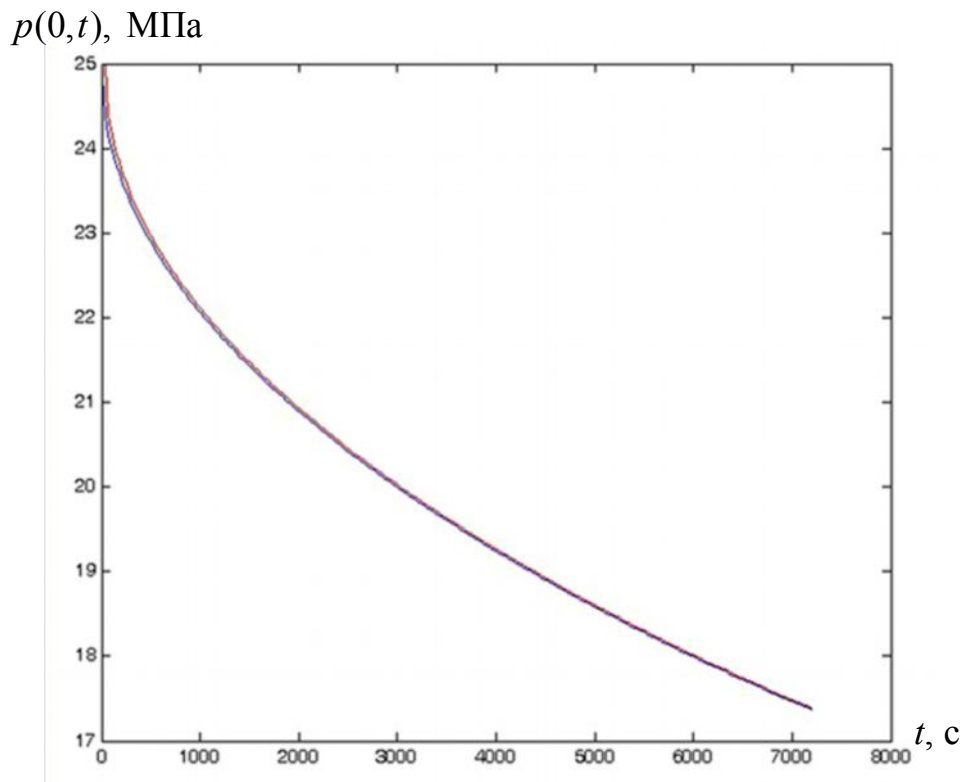


Рис.4. Результаты решения обратной задачи для точных значений входных данных при $\delta = 0$, $d = 20$ м, $\tau_1 = \tau$, (— давление, определенное по решению прямой задачи)

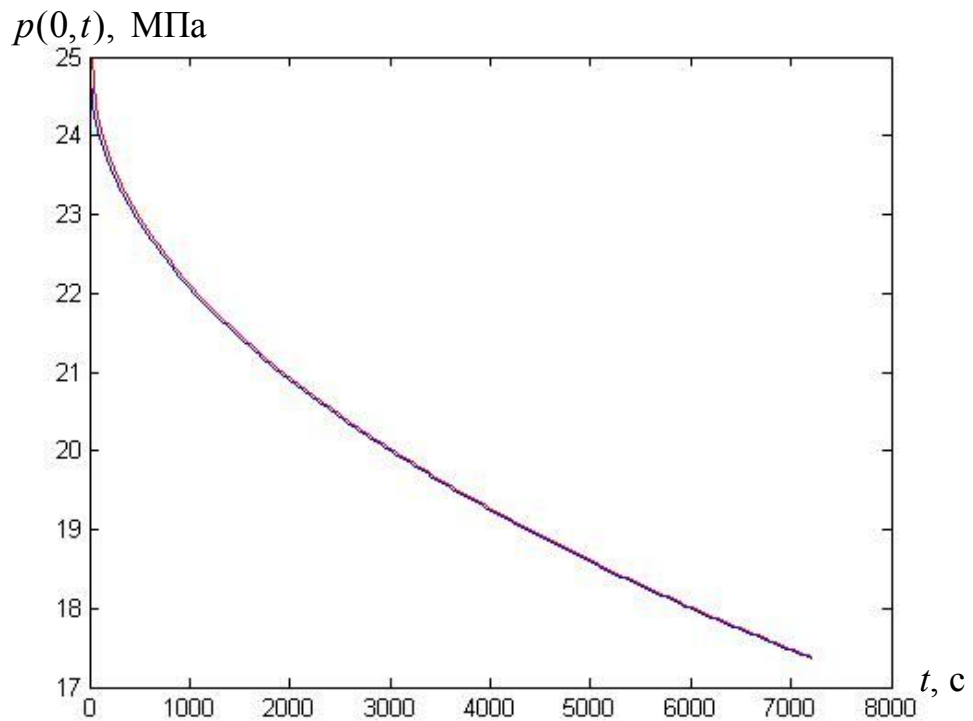


Рис.5. Результаты решения обратной задачи для точных значений входных данных при $\delta = 0$, $d = 30$ м, $\tau_1 = \tau$ (— как на Рис.4)

$p(0,t)$, МПа

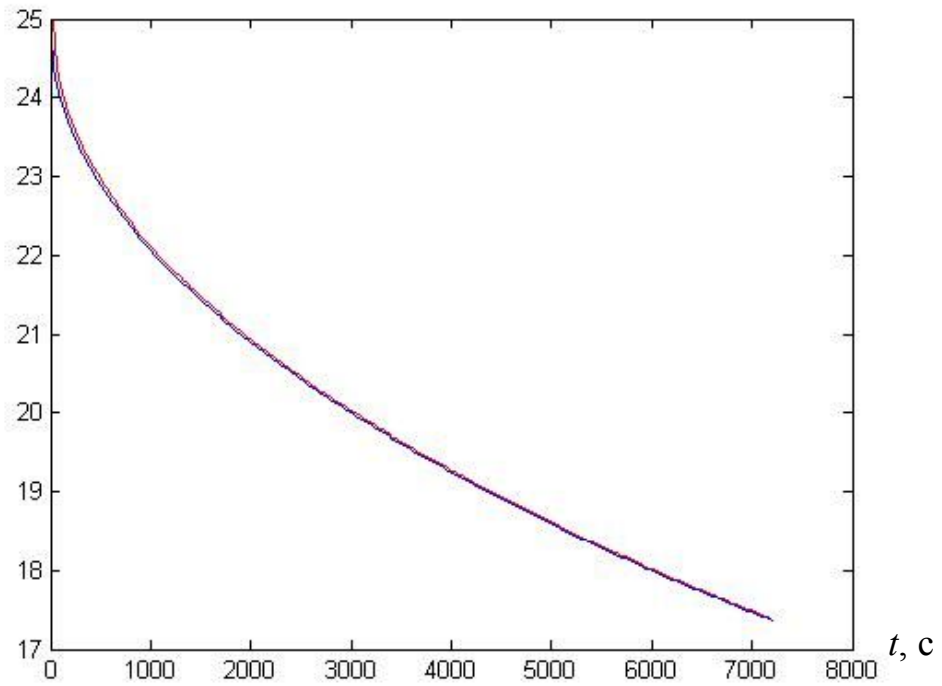


Рис.6. Результаты решения обратной задачи для точных значений входных данных при $\delta = 0$, $d = 40$ м, $\tau_1 = \tau$ (— как на Рис.4)

$p(0,t)$, МПа

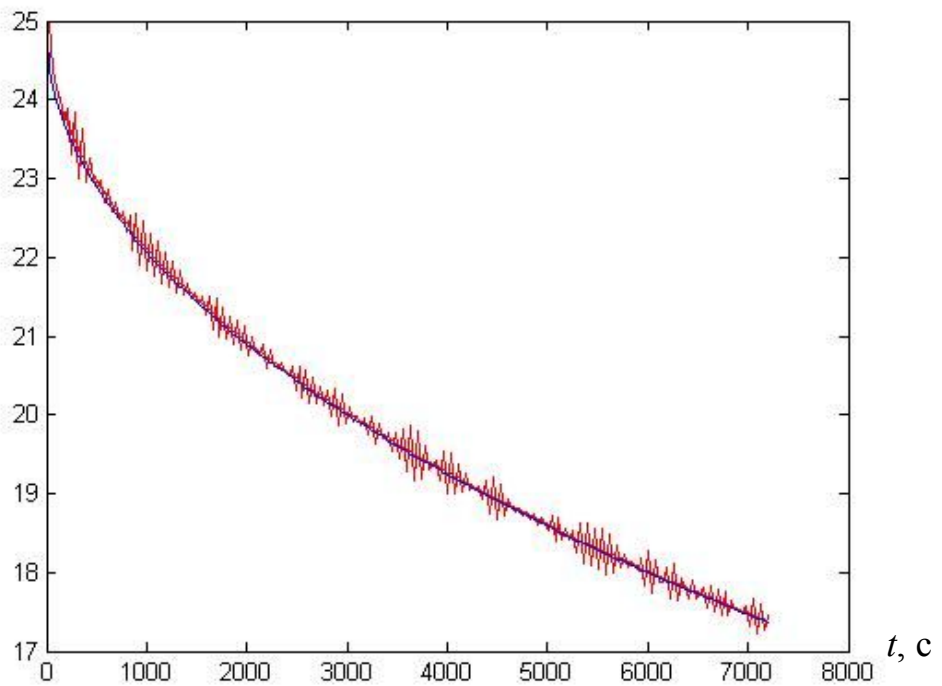


Рис.7. Результаты решения обратной задачи для точных значений входных данных при $\delta = 0$, $d = 45$ м, $\tau_1 = \tau$ (— как на Рис.4)

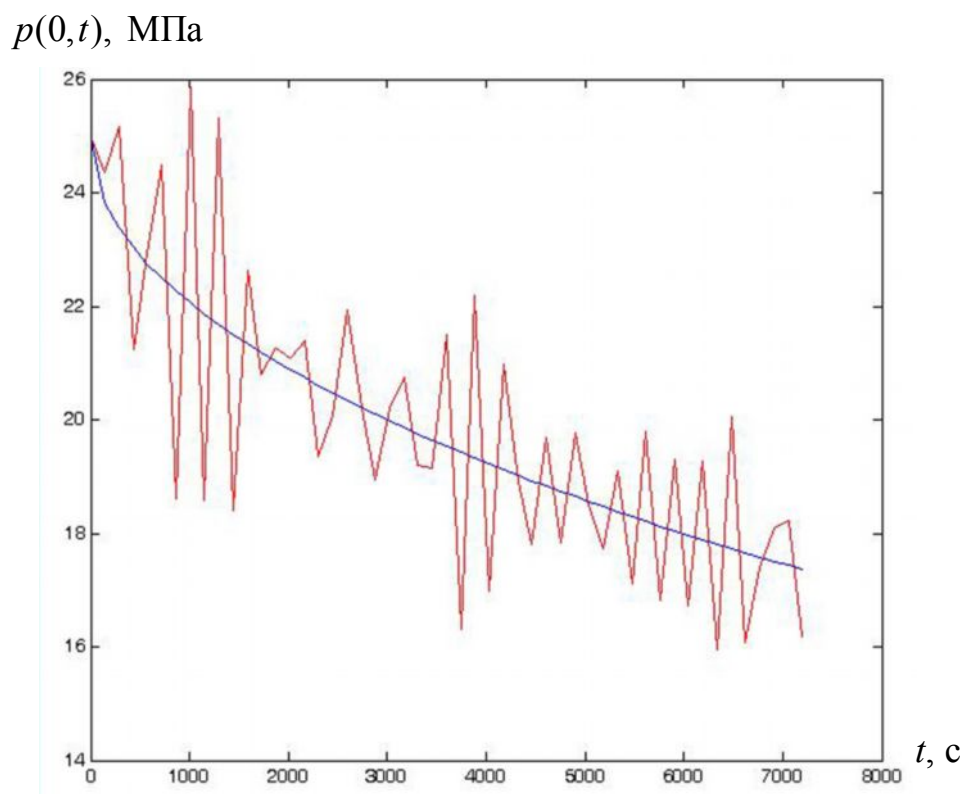


Рис.8. Результаты решения обратной задачи для возмущенных значений входных данных при $\delta = 0,003$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 4\tau$ (— как на Рис.4)

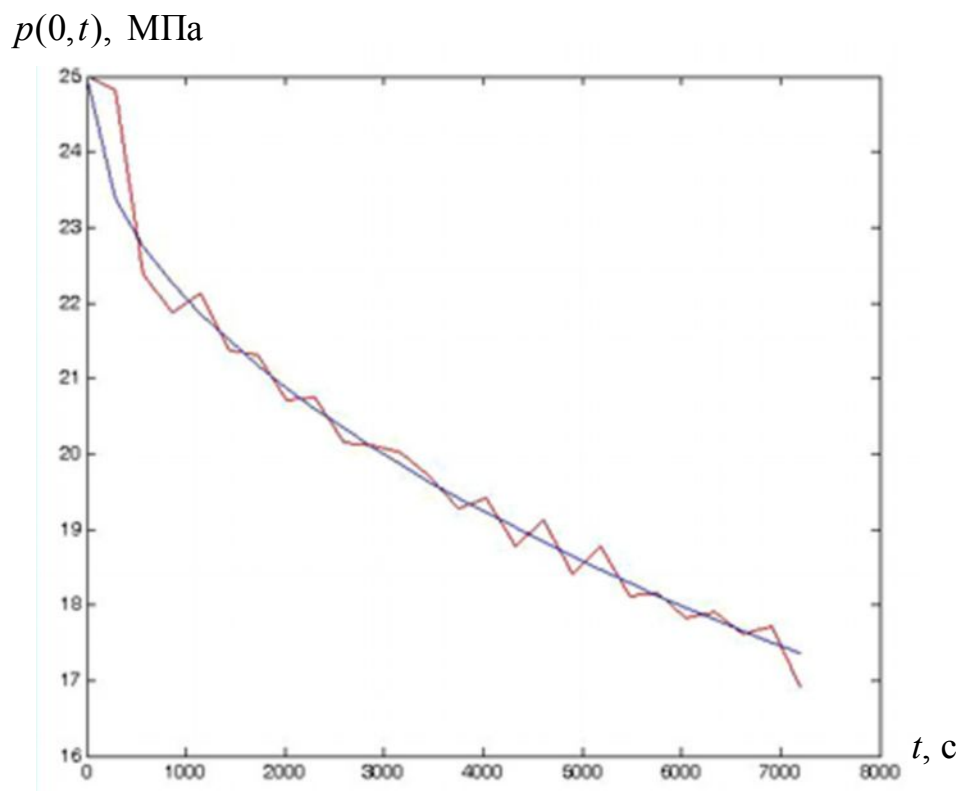


Рис.9. Результаты решения обратной задачи для возмущенных значений входных данных при $\delta = 0,003$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 8\tau$ (— как на Рис.4)

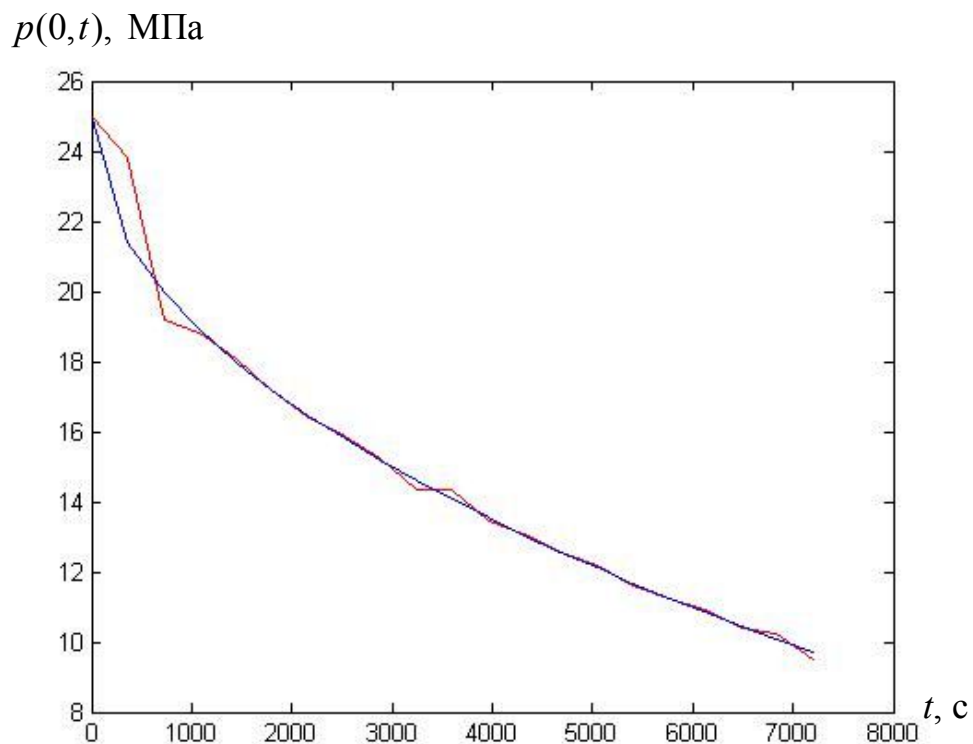


Рис.10. Результаты решения обратной задачи для возмущенных значений входных данных при $\delta = 0,003$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 10\tau$ (— как на Рис.4)

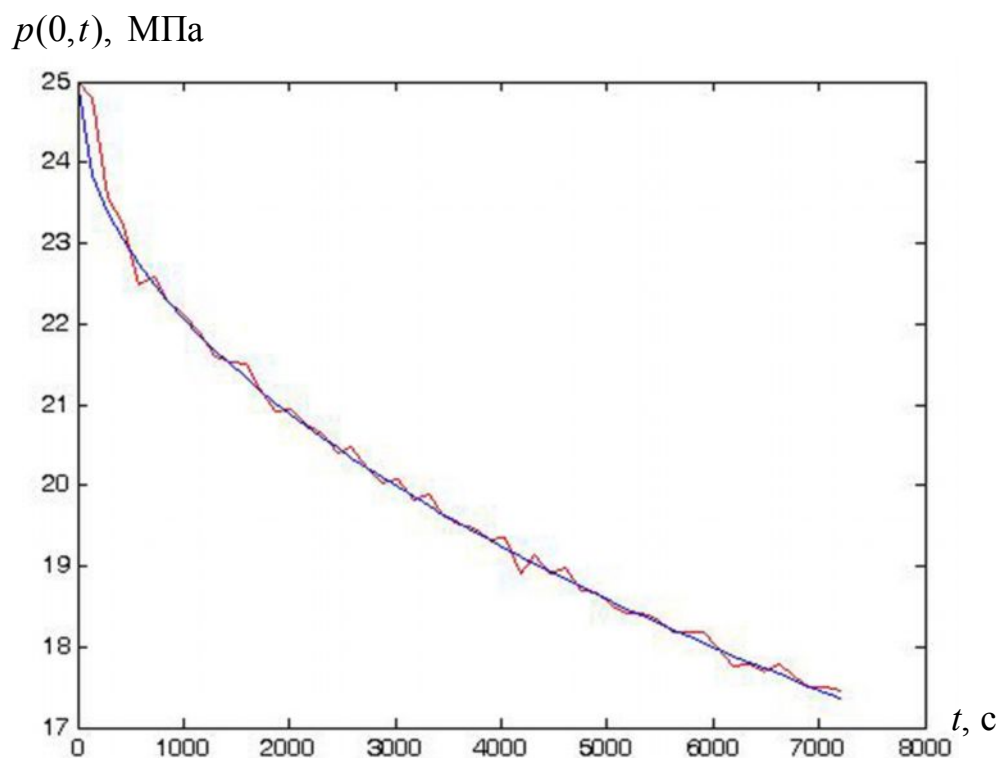


Рис.11. Результаты решения обратной задачи для сглаженных значений давления (исходные данные содержали ошибки, распределенные по равномерному закону) при $\delta = 0,003$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 4\tau$ (— как на Рис.4)

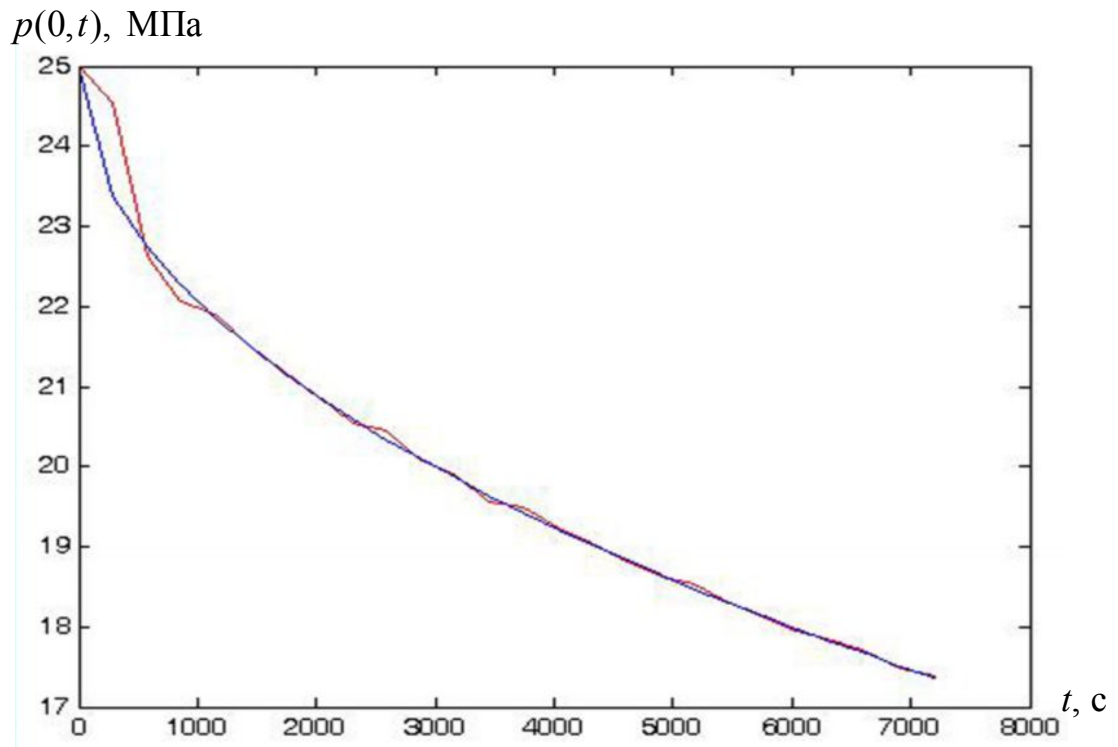


Рис.12. Результаты решения обратной задачи для сглаженных значений давления (исходные данные содержали ошибки, распределенные по равномерному закону) при $\delta = 0,003$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 8\tau$ (— как на Рис.4)

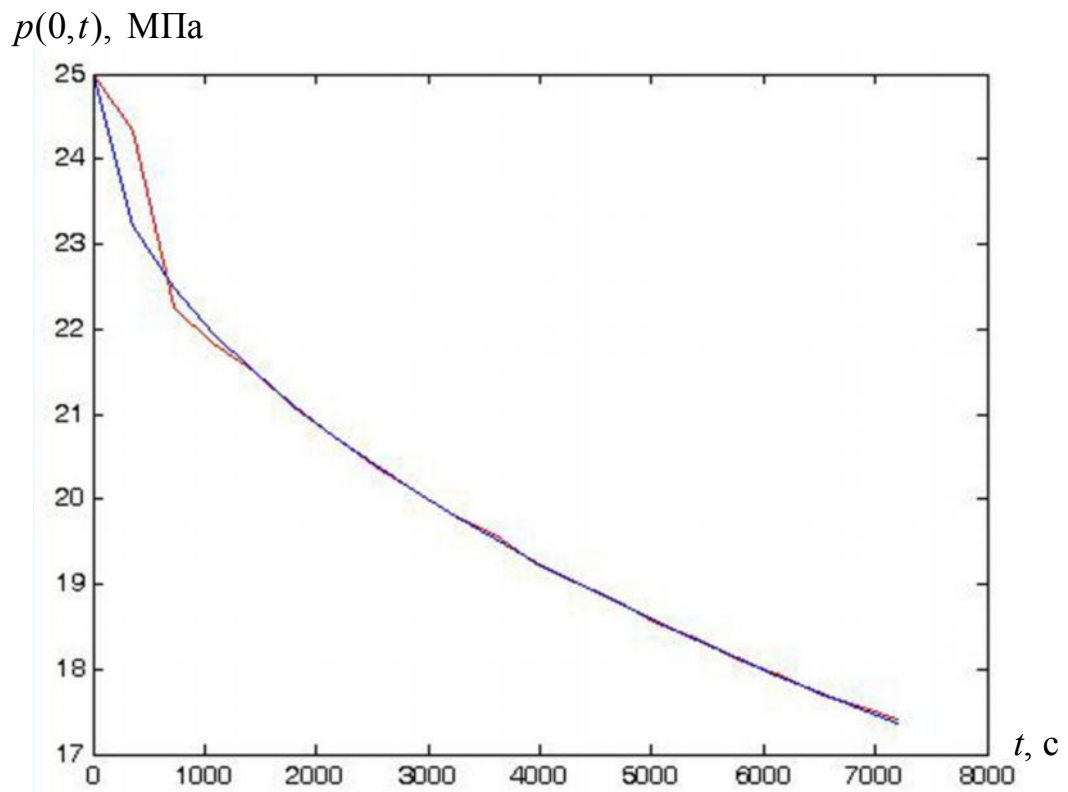


Рис.13. Результаты решения обратной задачи для сглаженных значений давления (исходные данные содержали ошибки, распределенные по равномерному закону) при $\delta = 0,003$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 10\tau$ (— как на Рис.4)

$p(0,t)$, МПа

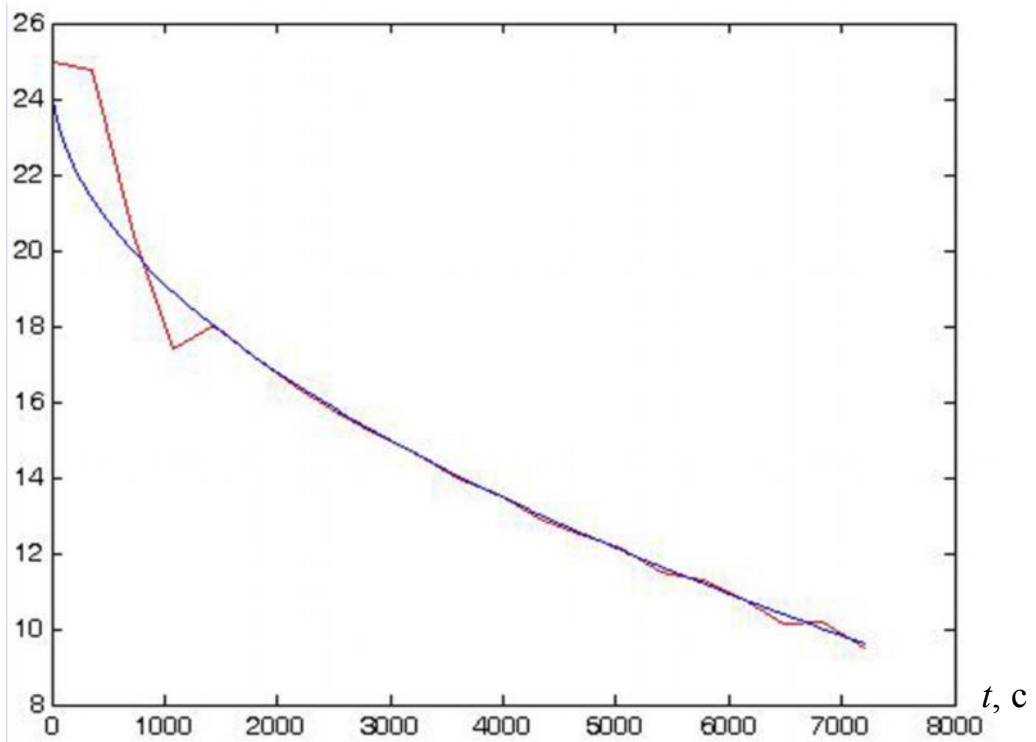


Рис.14. Результаты решения обратной задачи для сглаженных значений давления (исходные данные содержали ошибки, распределенные по равномерному закону) при $\delta = 0,002$, $d = 30$ м, $\tau_1 = 20\tau$ (— как на Рис.4)

$p(0,t)$, МПа

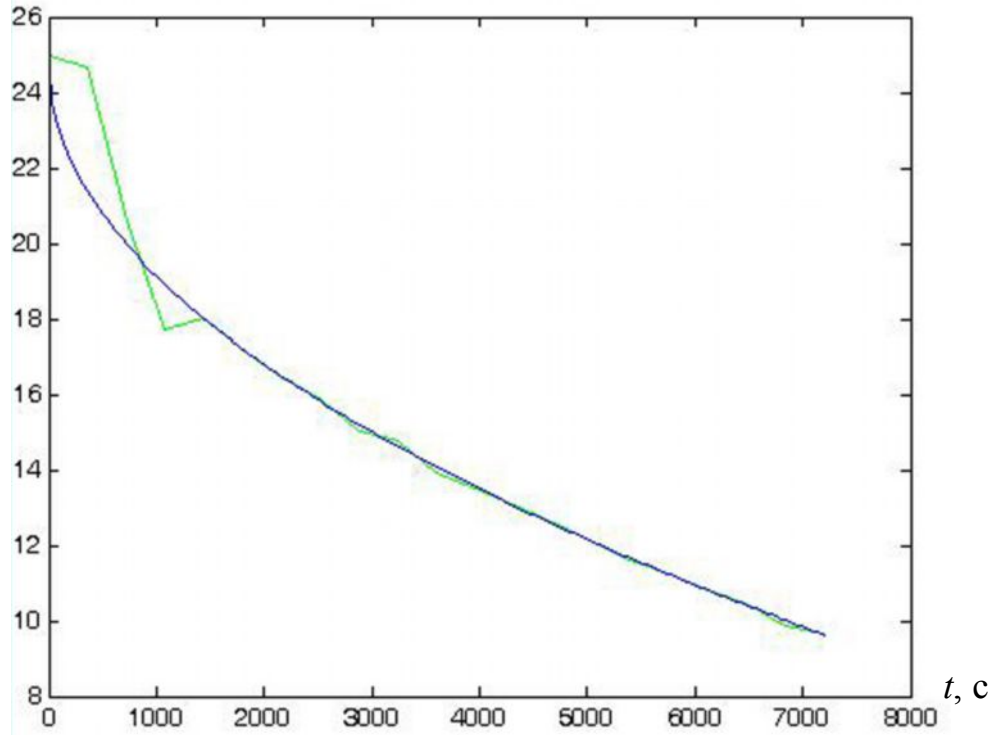


Рис.15. Результаты решения обратной задачи для сглаженных значений давления (исходные данные содержали ошибки, распределенные по нормальному закону) при $\delta = 0,003$, $d = 30$ м, $\tau_1 = 10\tau$ (— как на Рис.4)

$p(0,t)$, МПа

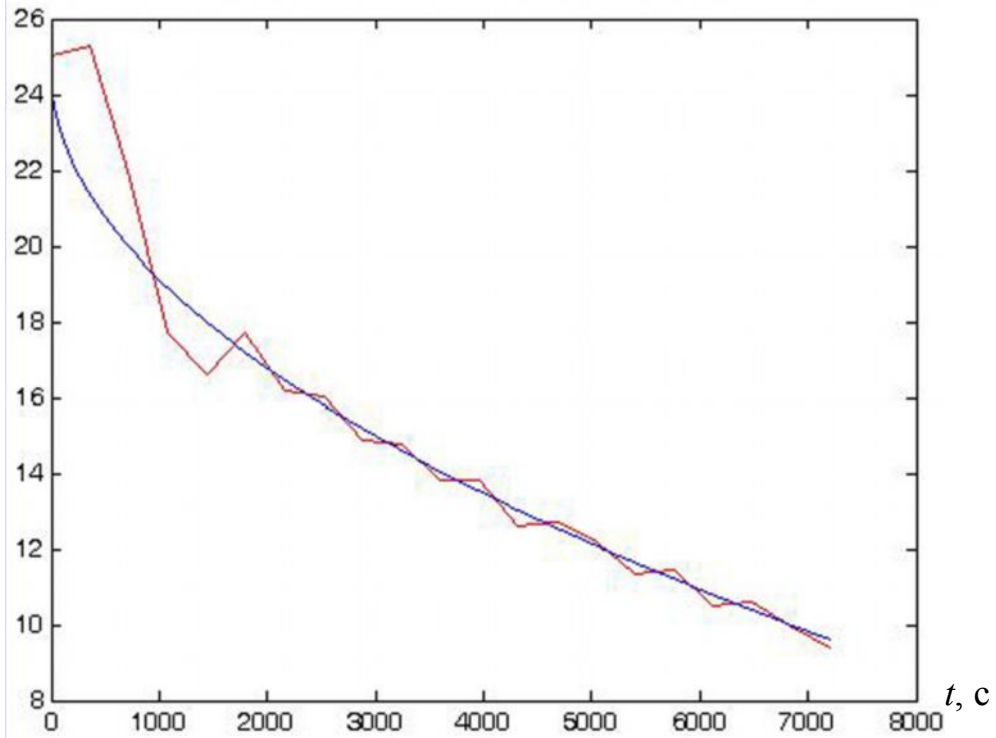


Рис.16. Результаты решения обратной задачи для сглаженных значений давления (исходные данные содержали ошибки, распределенные по равномерному закону) при $\delta = 0,001$, $d = 40$ м, $\tau_1 = 10\tau$ (— как на Рис.4)

$p(0,t)$, МПа

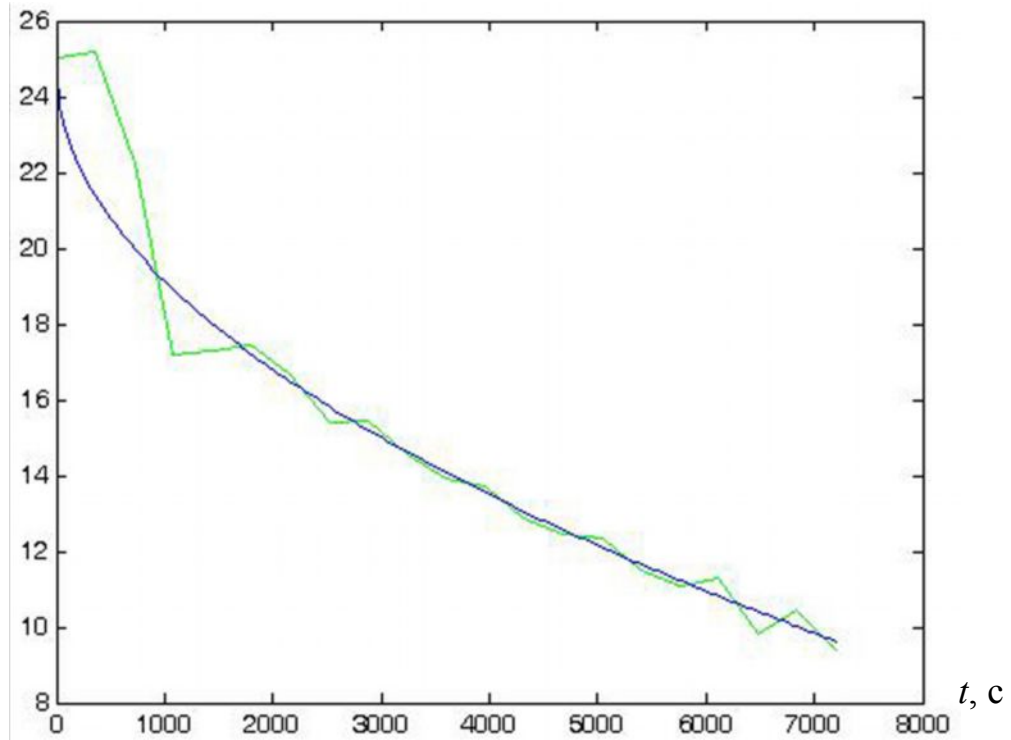


Рис.17. Результаты решения обратной задачи для сглаженных значений давления (исходные данные содержали ошибки, распределенные по нормальному закону) при $\delta = 0,001$, $d = 40$ м, $\tau_1 = 10\tau$ (— как на Рис.4)

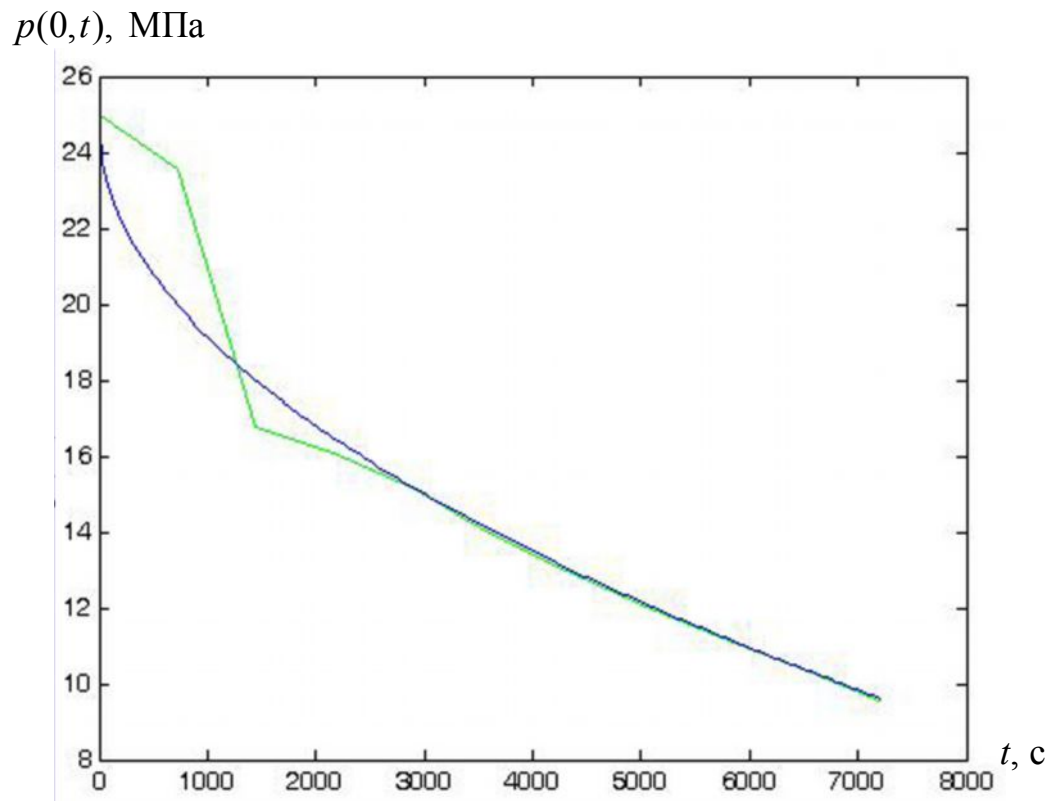


Рис.18. Результаты решения обратной задачи для сглаженных значений давления (исходные данные содержали ошибки, распределенные по нормальному закону) при $\delta = 0,001$, $d = 30$ м, $\tau_1 = 20\tau$ (— как на Рис.4)

§ 2. Обратная граничная задача для нелинейно упругого режима фильтрации

Рассмотрим граничную обратную задачу при нелинейно-упругого режиме фильтрации жидкости [14]. В наиболее обобщенном виде теория нелинейно-упругого режима фильтрации жидкости сформулирована в работах [15, 16], в которых проницаемость и пористость пласта, плотность и вязкость жидкости считаются экспоненциально зависящими от давления. В этих работах при нелинейно-упругом режиме фильтрации жидкости получено уравнение относительно давления в виде [15, 16]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D^2 \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^2}, \quad (69)$$

где $\varphi = \exp[-\beta(p_0 - p)]$, $D^2 = \frac{k_0}{\mu_0 m_0 \alpha}$, $\alpha = a_k + \beta_f - a_\mu$, $\beta = \beta_m + \beta_f$, $\gamma = \alpha/\beta$,

k_0 , m_0 , μ_0 – первоначальное (при давлении $p = p_0 = \text{const}$) значения проницаемости (м^2), пористости и вязкости ($\text{МПа}\cdot\text{с}$) соответственно; t – время, с; x – линейная координата, м; p – текущее давление, МПа; β_f – коэффициент сверхсжимаемости жидкости, МПа^{-1} ; a_k , β_m , a_μ – коэффициенты изменения проницаемости, пористости и вязкости соответственно, МПа^{-1} .

Пористая среда считается однородным объектом $[0, \infty)$ и на $x = \infty$ граничные условия известны. В точке $x = d$, $d \in (0, \infty)$, заданы значения давления жидкости, т.е. «исходные данные» – $f(t)$ и начальное распределение давления $p(x, 0) = p_0$. Требуется определить давление в точке $x = 0$. Данная постановка как и в линейном случае (§ 1) может быть интерпретирована как определение характерных параметров в нефтедобывающей скважине (Рис.3). Задача при этом сводится к определению поля давления в области $[0, d)$ и скорости фильтрации в добывающей скважине ($x = 0$) на основе измерений давления в

наблюдательной скважине ($x = d$) и режима изменения давления на границе пласта.

Таким образом, граничная обратная задача для нелинейно-упругого режима фильтрации ставится так:

- уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \chi \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi^{\gamma-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad \chi = \frac{k_0}{\mu_0 m_0 \beta}, \quad x \in (0, \infty), \quad t \in (0, t_m] \quad (70)$$

- дополнительные условия

$$p(x, 0) = p_0, \quad x \in [0, \infty), \quad (71)$$

$$p(d, t) = f(t), \quad t \in [0, t_m], \quad (72)$$

$$p(\infty, t) = p_0, \quad t \in [0, t_m]. \quad (73)$$

Условия (71)-(73) относительно φ запишем как

$$\varphi(x, 0) = 1, \quad x \in [0, \infty), \quad (74)$$

$$\varphi(d, t) = g(t), \quad t \in [0, t_m], \quad (75)$$

$$\varphi(\infty, t) = 1, \quad t \in [0, t_m]. \quad (76)$$

где $g(t) = \exp[-\beta(p_0 - f(t))]$.

Требуется найти давление и скорость фильтрации в добывающей скважине ($x = 0$).

Для того, чтобы подготовить исходные данные для решения обратной задачи, т.е. $g(t)$ в (75), сначала решим прямую задачу для (70). При этом граничное условие имеет вид

$$w(0, t) = w_0 = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad w_0 = \text{const}, \quad t \in [0, t_m], \quad (77)$$

или в обозначениях относительно φ :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \lambda \varphi^{(\beta-\alpha)/\beta} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (78)$$

где $\lambda = \frac{\beta q_0 \mu_0}{k_0 \rho_0}$, q_0 – массовый расход на единицу площади поперечного сечения пласта (т. е. ρw_0).

Для решения прямой задачи (70), (73), (76), (78) применим метод конечных разностей. В области $D\{0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq t_m\}$ вводим сетку $\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j), i = \overline{0, I}, j = \overline{0, J}, x_i = ih, t_j = j\tau, h = L/I, \tau = t_m/J\}$, где L – некоторая характерная длина пласта, которая принимается так, чтобы граница возмущенной зоны не доходила до $x = L$. Сеточное решение, соответствующее точке (x_i, t_j) , обозначим через φ_i^j .

Нелинейное уравнение (70) на сетке $\omega_{h\tau}$ аппроксимируем неявной конечно-разностной схемой с точностью $O(\tau + h^2)$ [6]:

$$\frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\tau} = \frac{\chi}{h} \left[u_{i+1}(\varphi_i^j) \frac{\varphi_{i+1}^{j+1} - \varphi_i^{j+1}}{h} - u_i(\varphi_i^j) \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_{i-1}^{j+1}}{h} \right]$$

или

$$A_i \varphi_{i-1}^{j+1} - C_i \varphi_i^{j+1} + B_i \varphi_{i+1}^{j+1} = -\varphi_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, I-1, \quad (79)$$

где $A_i = \frac{\chi\tau}{h^2} u_i(\varphi_i^j)$, $B_i = \frac{\chi\tau}{h^2} u_{i+1}(\varphi_i^j)$, $C_i = 1 + \frac{\chi\tau}{h^2} [u_i(\varphi_i^j) + u_{i+1}(\varphi_i^j)]$, $u_i(\varphi_i^j) = \frac{1}{2} [(\varphi_i^j)^{\gamma-1} + (\varphi_{i-1}^j)^{\gamma-1}]$.

Аппроксимируем начальные и граничные условия (74), (76), (78)

$$\varphi_i^0 = 1, \quad i = 0, 2, \dots, I, \quad (80)$$

$$\varphi_I^{j+1} = 1, \quad (81)$$

$$\varphi_0^{j+1} = \varphi_1^{j+1} - \lambda h (\varphi_0^j)^{(\beta-\alpha)/\beta}. \quad (82)$$

Для решения (79) с (80)-(82) используем метод прогонки [6]. Решение задачи ищется в виде:

$$\varphi_i^{j+1} = \alpha_{i+1} \varphi_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, I-1,$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + \varphi_i^j}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, I-1.$$

Сеточное решение p_i^j определяется через φ_i^j следующим образом

$$p_i^j = \frac{1}{\beta} \ln \varphi_i^j + p_0.$$

В качестве исходных данных для обратной задачи принимаются значения давления в точке d , т.е. $f(t_j) = p(d, t_j)$, t_j – дискретные значения времени.

Погрешность в задании исходных данных (72) задается в виде (66).

Теперь в области $[d, \infty)$ решим прямую задачу (72), (74), (75), (76). Для решения (70), (74)-(76) аналогично применим метод конечных разностей. Зная φ_i^{j+1} в области $[d, \infty)$, можно продолжить решение в область $[0, d]$. Для этого можно использовать Т-образный четырех-точечный шаблон (Рис.1 а) [2]. Тогда φ_{i-1}^{j+1} можно определить, используя уравнение

$$\varphi_{i-1}^{j+1} = \left(\frac{h^2}{\chi\tau_1} + u_i(\varphi_i^j) + u_{i+1}(\varphi_i^j) \right) \frac{\varphi_i^{j+1}}{u_i(\varphi_i^j)} - \frac{u_{i+1}(\varphi_i^j)}{u_i(\varphi_i^j)} \varphi_{i+1}^{j+1} - \frac{h^2}{\chi\tau_1} \frac{\varphi_i^j}{u_i(\varphi_i^j)}, \quad (83)$$

$$i = I, I-1, \dots, 1, \quad \tau_1 = n\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

Значения p_0^{j+1} дает нам искомое граничное условие. Из p_0^{j+1} и p_1^{j+1} можно определить w .

В расчетах использованы следующие исходные данные: $k = 1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$, $\chi = 0,1 \text{ м}^2/\text{с}$, $w_0 = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$, $m_0 = 0,15$, $p_0 = 50 \text{ МПа}$, $\mu = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\rho_0 = 900 \text{ кг/м}^3$.

Результаты расчетов при различном уровне погрешностей в исходных данных показаны на Рис.19-1.32. При $\delta = 0$ полученные кривые имеют более устойчивый характер (Рис.19, 1.20). С увеличением расстояние $x = d$, возникает неустойчивость решения (Рис.21). Для устранения неустойчивости применяем метод пошаговой регуляризации, что дает условно устойчивое решение (Рис.22). Однако случайные возмущения исходных данных приводят к существенной неустойчивости процесса вычисления (Рис.23, 1.24). На Рис.25-1.28 представлены решения с использованием метода пошаговой регуляризации. Для получения более устойчивых результатов одновременно применены методы пошаговой регуляризации и сглаживания исходных данных. Эти результаты показаны на Рис 29-32.

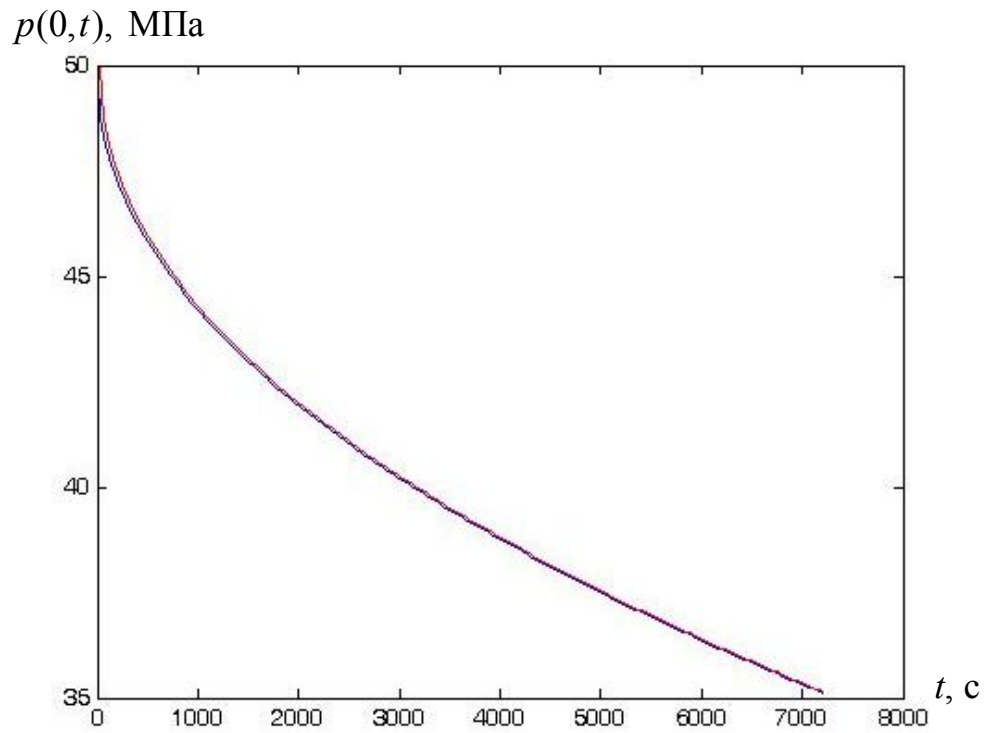


Рис.19. Результаты решения обратной задачи для точных значений давления при $\delta = 0$, $d = 20$ м, $\tau_1 = \tau$ (— как на Рис.4)

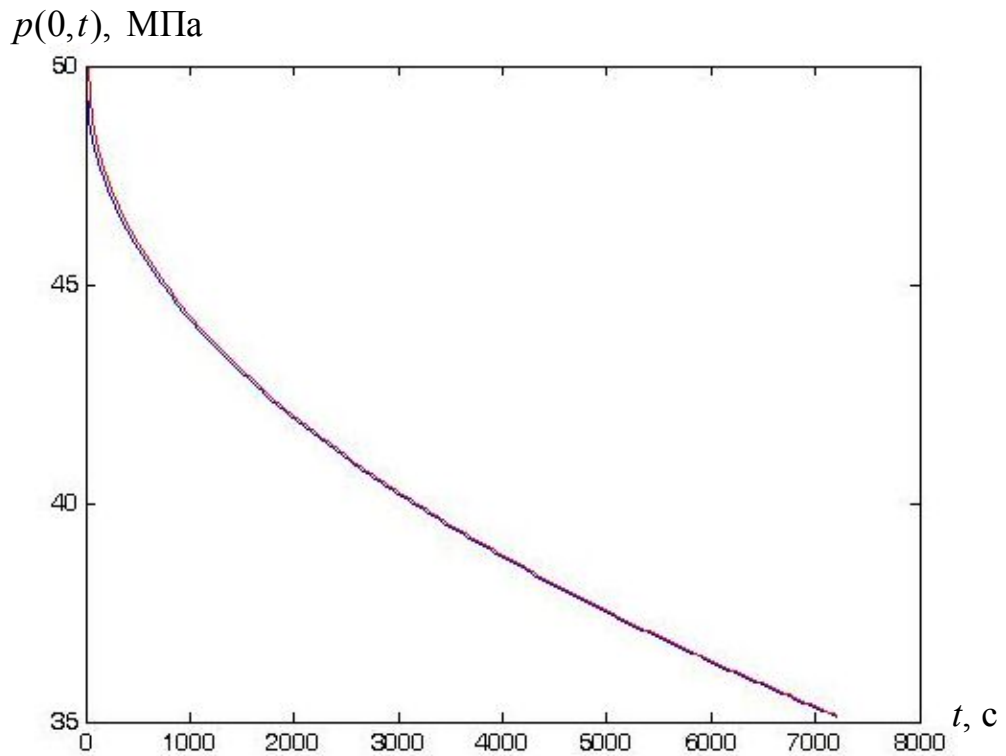


Рис.20. Результаты решения обратной задачи для точных значений давления при $\delta = 0$, $d = 30$ м, $\tau_1 = \tau$ (— как на Рис.4)

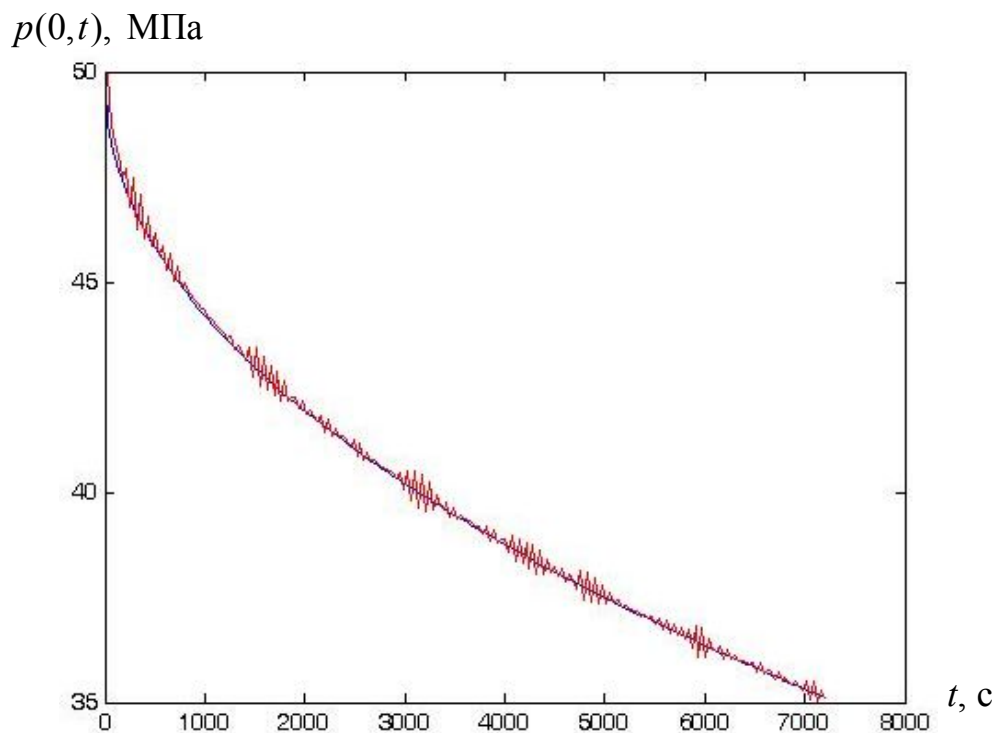


Рис.21. Результаты решения обратной задачи для точных значений давления при $\delta = 0$, $d = 40$ м, $\tau_1 = \tau$ (— как на Рис.4)

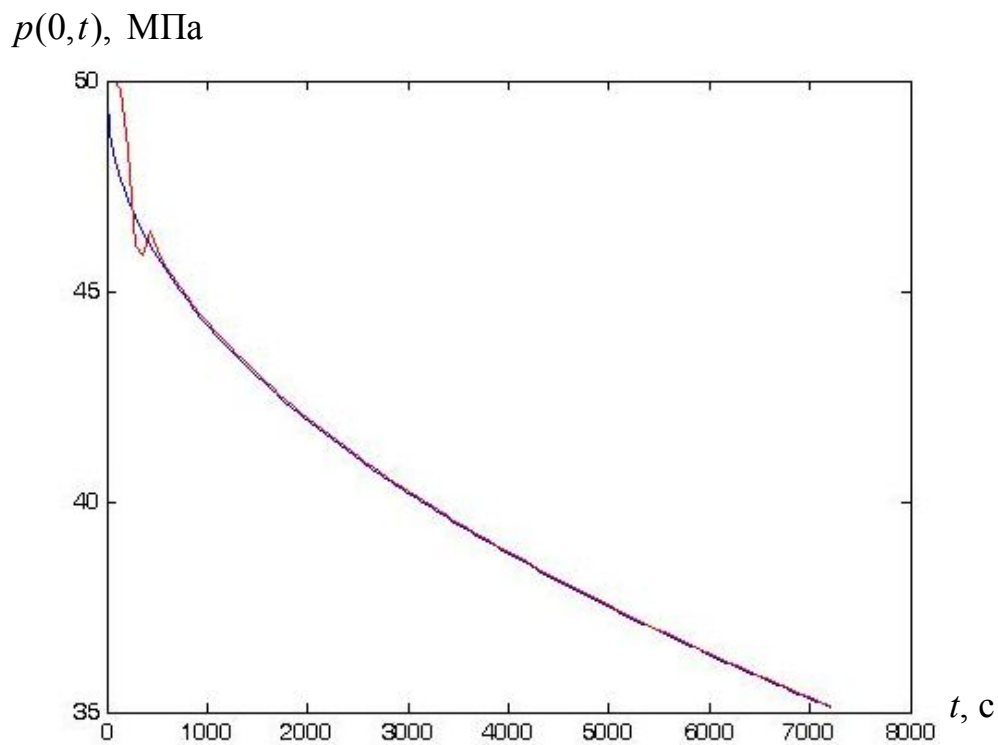


Рис.22. Результаты решения обратной задачи для точных значений давления при $\delta = 0$, $d = 40$ м, $\tau_1 = 2\tau$ (— как на Рис.4)

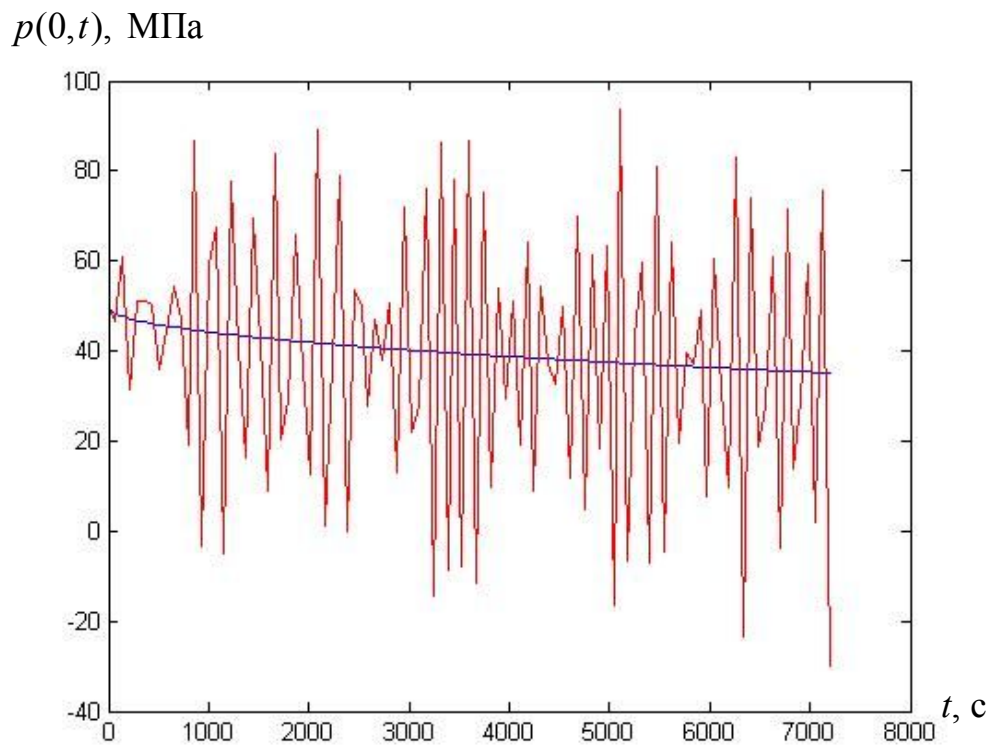


Рис.23. Результаты решения обратной задачи для давления при $\delta = 0,003$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 2\tau$ (— как на Рис.4)

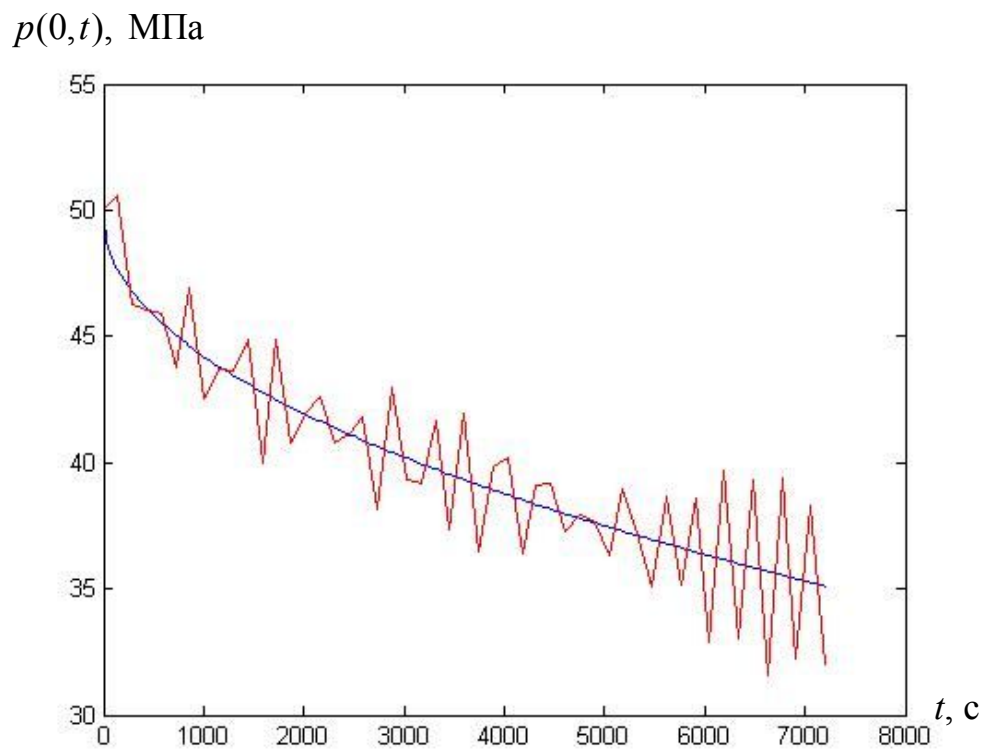


Рис.24. Результаты решения обратной задачи для давления при $\delta = 0,003$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 4\tau$ (— как на Рис.4)

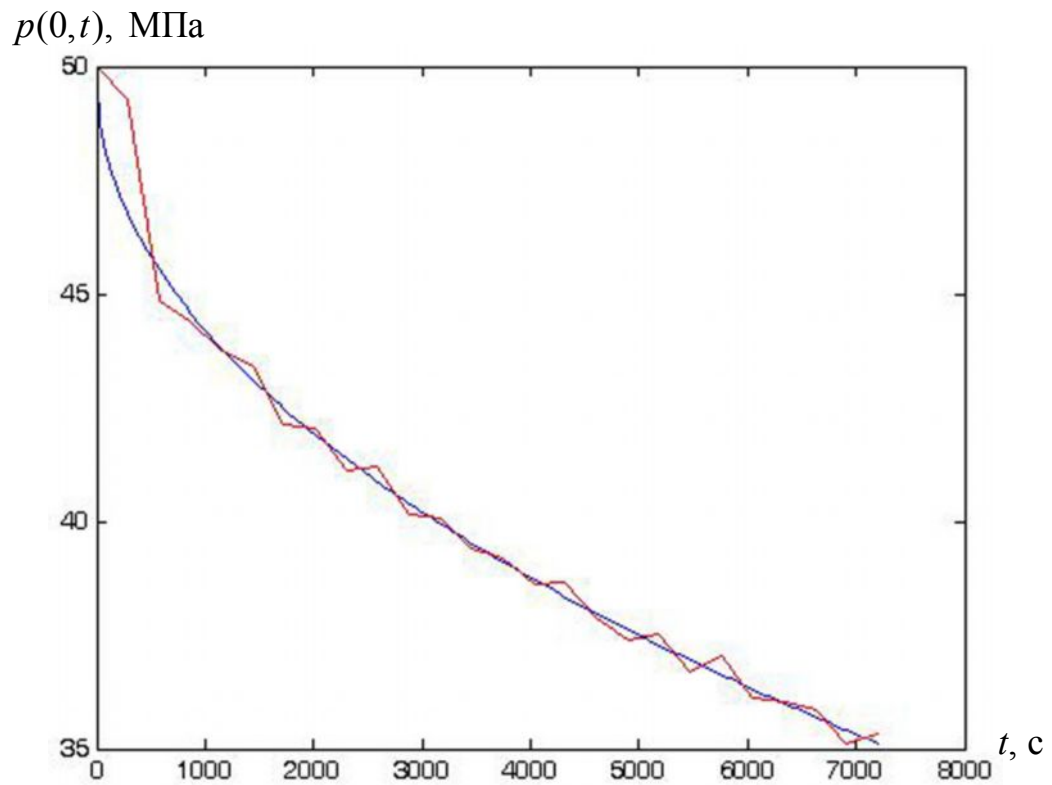


Рис.25. Результаты решения обратной задачи для входных данных при $\delta = 0,003$, $d = 40$ м, $\tau_1 = 8\tau$ (— как на Рис.4)

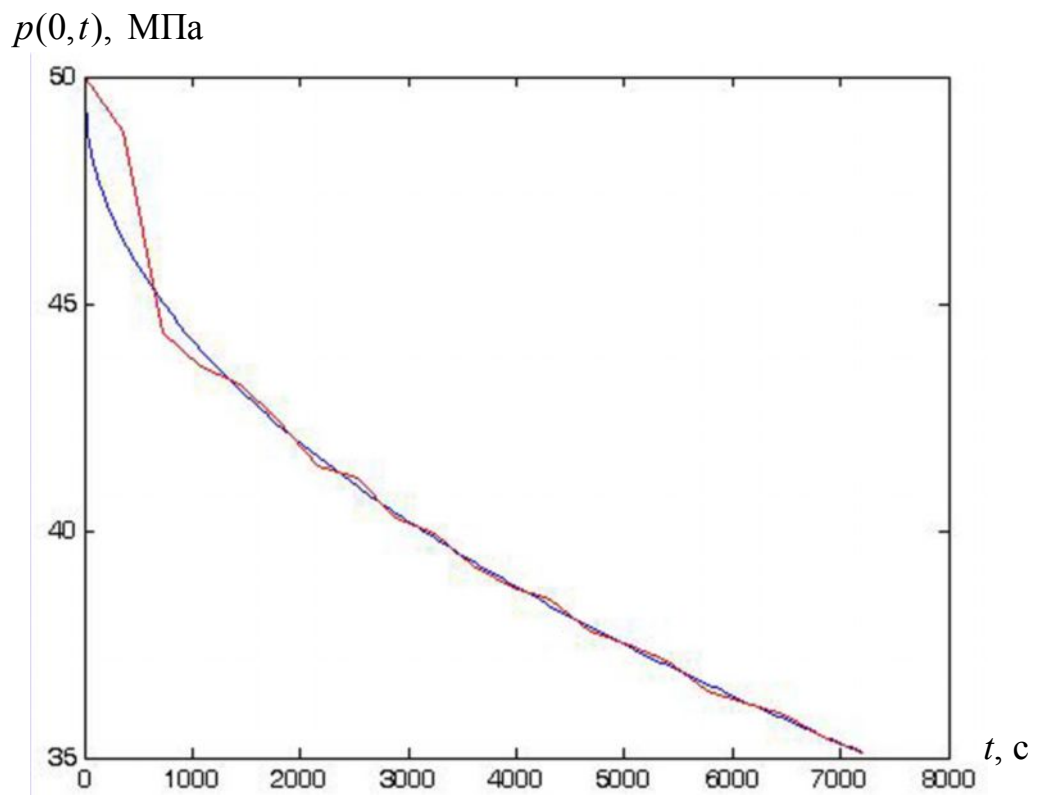


Рис.26. Результаты решения обратной задачи для входных данных при $\delta = 0,003$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 10\tau$ (— как на Рис.4)

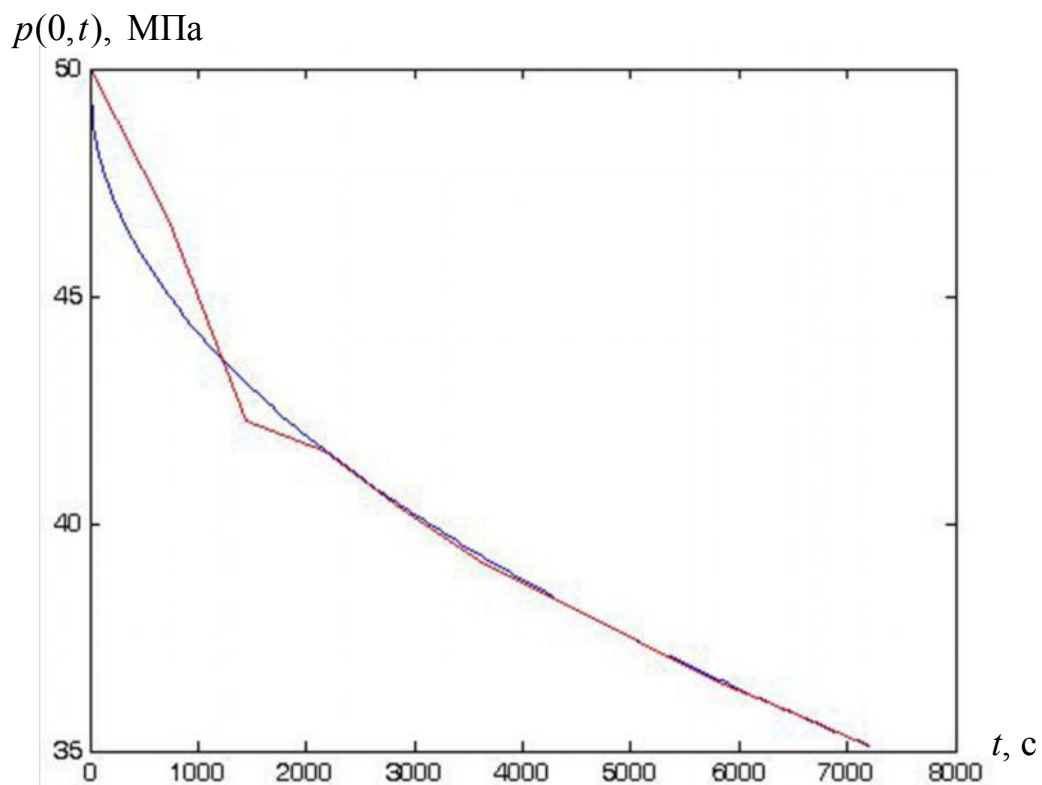


Рис.27. Результаты решения обратной задачи для входных данных при $\delta = 0,003$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 20\tau$ (— как на Рис.4)

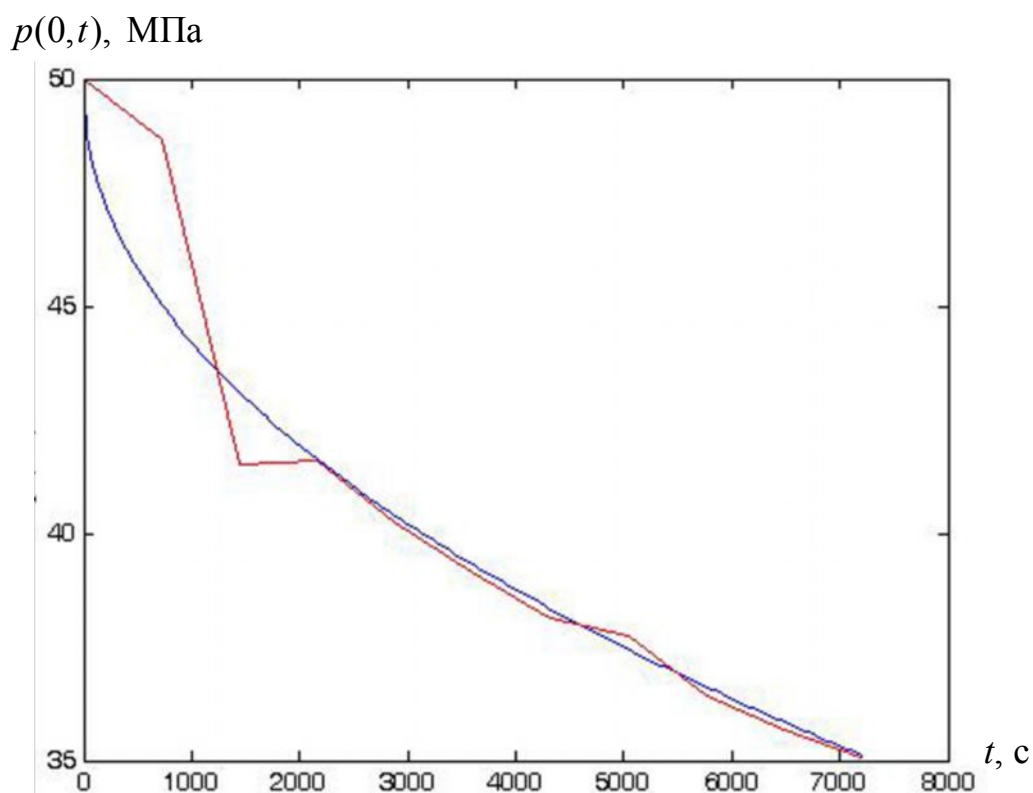


Рис.28. Результаты решения обратной задачи для входных данных при $\delta = 0,003$, $d = 30$ м, $\tau_1 = 20\tau$ (— как на Рис.4)

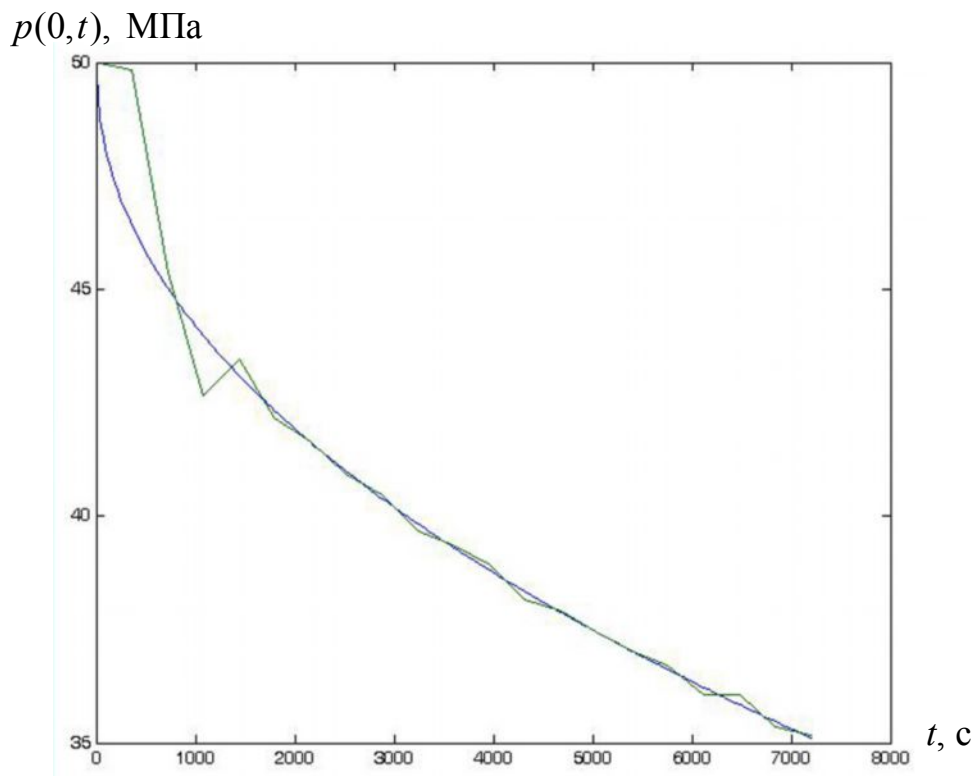


Рис.29. Результаты решения обратной задачи для сглаженных значений давления (исходные данные содержали ошибки, распределенные по равномерному закону) при $\delta = 0,003$, $d = 30$ м, $\tau_1 = 10\tau$ (— как на Рис.4)

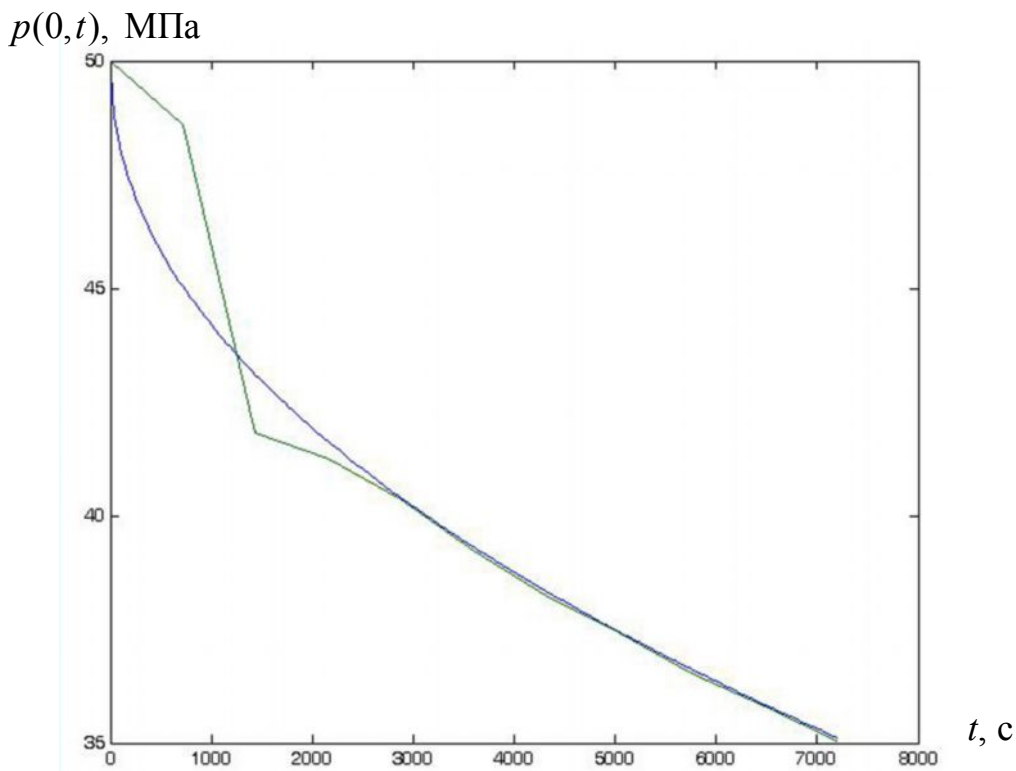


Рис.30. Результаты решения обратной задачи для сглаженных значений давления (исходные данные содержали ошибки, распределенные по равномерному закону) при $\delta = 0,001$, $d = 30$ м, $\tau_1 = 20\tau$ (— как на Рис.4)

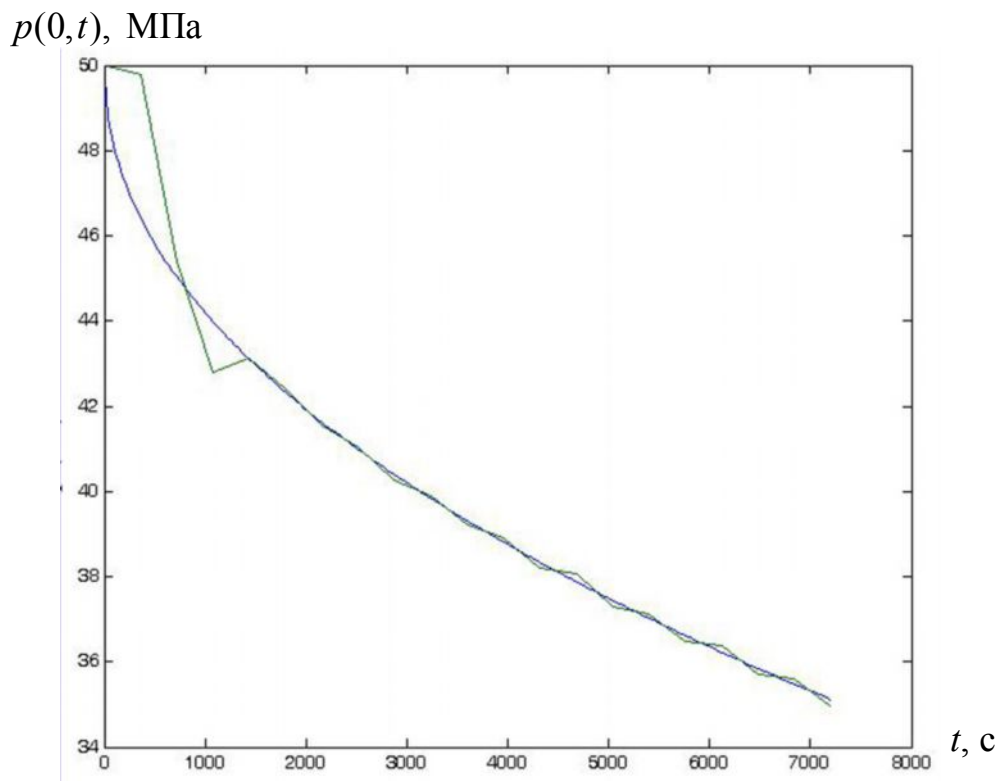


Рис.31. Результаты решения обратной задачи для сглаженных значений давления (исходные данные содержали ошибки, распределенные по равномерному закону) при $\delta = 0,001$, $d = 30$ м, $\tau_1 = 10\tau$ (— как на Рис.4)

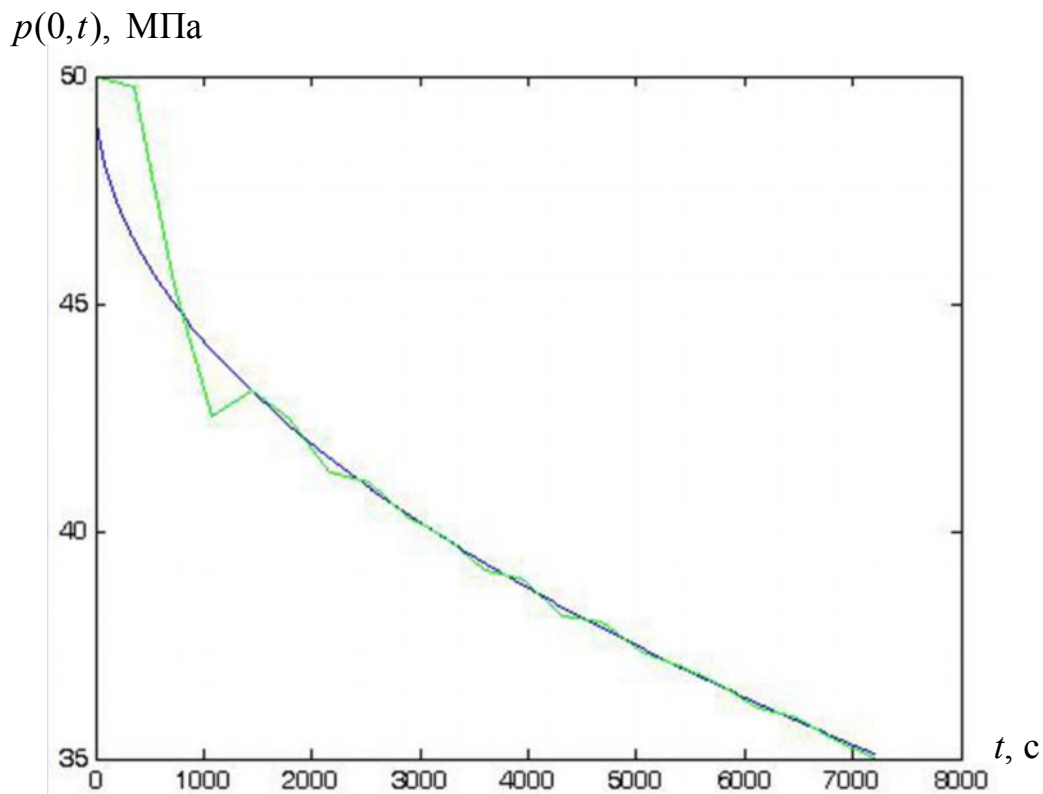


Рис.32. Результаты решения обратной задачи для сглаженных значений давления (исходные данные содержали ошибки, распределенные по равномерному закону) при $\delta = 0,002$, $d = 30$ м, $\tau_1 = 20\tau$ (— как на Рис.4)

§ 3. Обратная граничная задача для линейно упруго-пластического режима фильтрации

Рассмотрим граничную обратную задачу при линейно упруго-пластическом режиме фильтрации жидкости в однородной пористой среде. Теория упруго-пластического режима фильтрации жидкости сформулирована в работах [17-19].

Уравнения упруго-пластической фильтрации жидкости в одномерном случае [17, 18] имеют вид

$$\downarrow \frac{\partial p}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (84)$$

$$\uparrow \frac{\partial p}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad a_1, a_2 > 0, \quad (85)$$

где \downarrow, \uparrow – соответствуют процессам понижения и восстановления давления, a_1, a_2 – коэффициенты пьезопроводности ($a_1, a_2 = const$), $a_2 \geq a_1$.

В режиме понижения давления обратная граничная задача для уравнения (84) будет аналогичной для уравнения (53), рассмотренная в параграфе 1.2. Поэтому, представляет интерес обратная граничная задача для уравнения (85) в режиме восстановления давления.

Пористая среда считается однородным объектом $[0, \infty)$ и на $x = \infty$ граничные условия известны. В точке $x = d$, $d \in (0, \infty)$, заданы значения давления жидкости, т.е. «исходные данные» – $f(t)$ и начальное распределение давления $p(0, x) = p_0$. Требуется определить давление в точке $x = 0$.

Таким образом, обратная задача для теории линейно упругопластического режима фильтрации ставится так:

- уравнение пьезопроводности

$$\uparrow \frac{\partial p}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad x \in (x, \infty), t \in (0, t_m], \quad (86)$$

- дополнительные условия

$$\uparrow p(x,0) = p_1(x), \quad (87)$$

$$\uparrow p(\infty,t) = p_0, \quad (88)$$

$$\uparrow p(d,t) = f(t), \quad (89)$$

где $p_1(x)$ – решение уравнения (84) в последний момент $t = t_m$ понижения давления.

Требуется найти кривые восстановления давления в добывающей скважине, т.е. $\uparrow p(0,t)$.

Для того, чтобы подготовить исходные данные для решения обратной задачи, т.е. $f(t)$ в (89), сначала решим прямую задачу для (86). При этом граничные условия имеют вид

$$\uparrow Q(0,t) = Q_0 f_1(t) = - \left. \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \uparrow p(\infty,t) = p_0, \quad Q_0 = const, \quad (90)$$

где $f_1(t) = \begin{cases} \frac{\exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha t_0)}{1 - \exp(-\alpha t_0)}, & \text{при } t \leq t_0, \\ 0, & \text{при } t > t_0 \end{cases}$ – монотонно убывающая

функция времени, α – некоторая постоянная, Q – дебит скважины.

Выбор $\uparrow Q(0,t)$ в виде убывающей функции объясняется тем, что после закрытия скважины происходит остаточный приток жидкости, в результате чего динамический уровень жидкости в скважине поднимается до статического. Остаточный приток жидкости, как известно из практики нефтедобычи, представляет собой монотонно убывающую функцию по времени.

Для решения задачи (86), (87), (90) применяем метод конечных разностей. В области $D\{0 \leq x \leq \infty, 0 \leq t \leq T\}$ вводим сетку

$$\omega_{ht} = \left\{ (x_i, t_j); i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, I; j = 0, 1, \dots, J; x_i = ih, t_j = j\tau, h = \frac{L}{I}, \tau = \frac{T}{J} \right\},$$

где L – характерная длина пористой среды.

Уравнение (87) на сетке $\omega_{h\tau}$ аппроксимируем неявной конечно-разностной схемой с точностью $O(\tau + h^2)$:

$$Ap_{i-1}^{j+1} - Cp_i^{j+1} + Bp_{i+1}^{j+1} = -p_i^j, \quad i=1,2,\dots,I-1, \quad (91)$$

где $A = \frac{a_1\tau}{h^2}$, $B = \frac{a_2\tau}{h^2}$, $C = 1 + 2\frac{a_2\tau}{h^2}$.

Аппроксимируем начальные и граничные условия (86), (87), (90)

$$p_i^0 = p_0, \quad i=1,2,\dots,I, \quad (92)$$

$$Q_0 f_1(t) = -\frac{k}{\mu} \frac{p_1^{j+1} - p_0^{j+1}}{h}, \quad p_I^{j+1} = p_0. \quad (93)$$

Для решения (91) с (92), (93) используем метод прогонки [6]. Решение задачи ищется в виде:

$$p_i^{j+1} = \alpha_{i+1} p_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad i=1,2,\dots,I-1, \quad (94)$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B}{C - \alpha_i A}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A\beta_i + p_i^j}{C - \alpha_i A}, \quad i=1,2,\dots,I-1. \quad (95)$$

Так как, при $i=0$ из (94) имеем

$$p_0^{j+1} = \alpha_1 p_1^{j+1} + \beta_1$$

и с другой стороны из (93)

$$p_0^{j+1} = p_1^{j+1} - \frac{Q_0 f_1(t) h \mu}{k},$$

поэтому

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = -\frac{Q_0 f_1(t) h \mu}{k}. \quad (96)$$

После того, как из (95) и (96) найдены α_i и β_i для всех $i=1,2,\dots,I$, зная, что $p_I^{j+1} = p_0$ из (94) можно найти p_i^{j+1} , $i=I-1, I-2, \dots, 1$.

В качестве исходных данных (дополнительных условий) для обратной задачи принимаются значения давления в точке d , $f(t_j) = p(d, t_j)$, t_j – дискретные значения времени.

Теперь уравнение (86) решим в области $[d, \infty)$, с граничным условием

$$p_n^{j+1} = f_{1l}^\delta(t_{j+1}), p_l^{j+1} = p_0, i = n, x_n = nh = d, l = 1, 2, \dots \quad (97)$$

Зная p_i^{j+1} в области $[d, \infty)$, можно продолжить решение в область $[0, d)$. Для этого можно использовать T-образный четырехточечный шаблон (Рис.1 а). Тогда p_{i-1}^{j+1} можно определить, используя уравнение

$$p_{i-1}^{j+1} = \left(2 + \frac{h^2}{a_2 \tau_1} \right) p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^{j+1} - \frac{h^2}{a_2 \tau_1} p_i^j, \quad i = n, n-1, \dots, 1, \quad \tau_1 \geq \tau. \quad (98)$$

Значения p_0^{j+1} дает нам искомое граничное условие.

В расчетах использованы следующие исходные данные: $k = 1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$, $w_0 = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$, $m_0 = 0,15$, $p_0 = 50 \text{ МПа}$, $\mu = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\alpha = 20$.

Результаты расчетов восстановления давления на границе $x = 0$ при различном уровне погрешностей в исходных данных показаны на Рис33-44. Для получения устойчивых результатов применялся метод пошаговой регуляризации по времени [2, 3]. Это приводит к тому, что при $\delta = 0$ полученное решение имеет устойчивый характер (Рис 33-36). Из рис 33, 35 видно, что при малых временах возникает неустойчивый характер решения (Рис 33, 35). Из рисунков 34, 36 видно, что с увеличением шага по времени τ_1 неустойчивость решения при малых временах ослабевает. Однако случайные возмущения исходных данных приводят к существенной неустойчивости решения (Рис 37-39). Из рисунков 40-44 видно, что с использованием метода пошаговой регуляризации по времени получено относительно устойчивое решение.

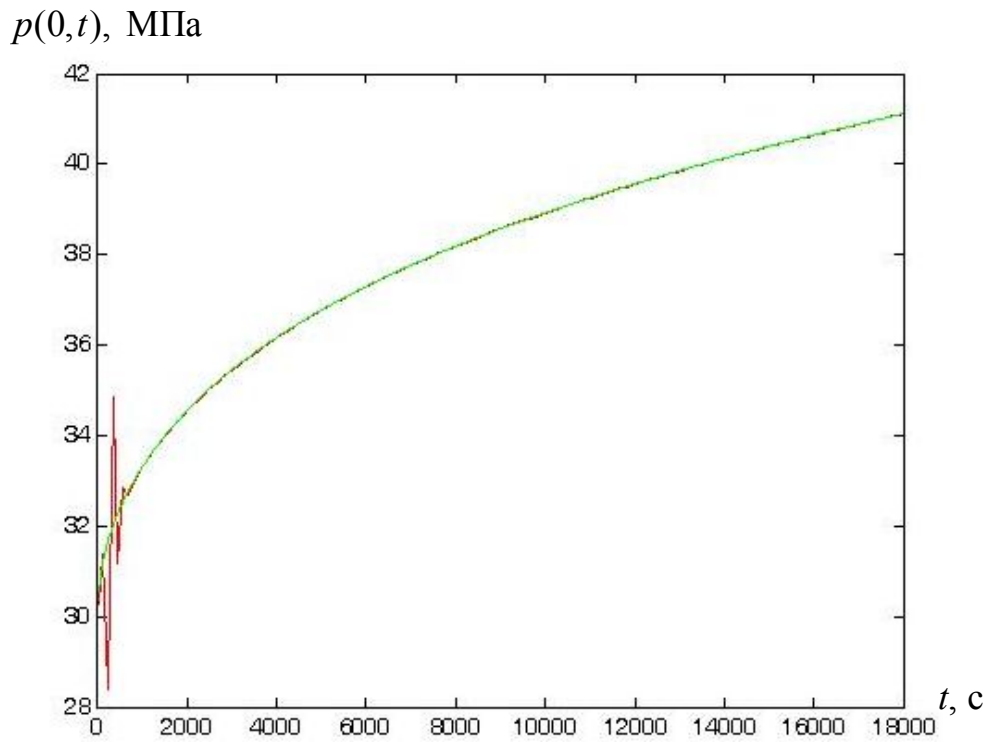


Рис.33. Результаты решения обратной задачи для точных исходных данных при $\delta = 0$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 5\tau$, $a_1 = 0,083$ м²/с, $a_2 = 0,097$ м²/с (— как на Рис.4)

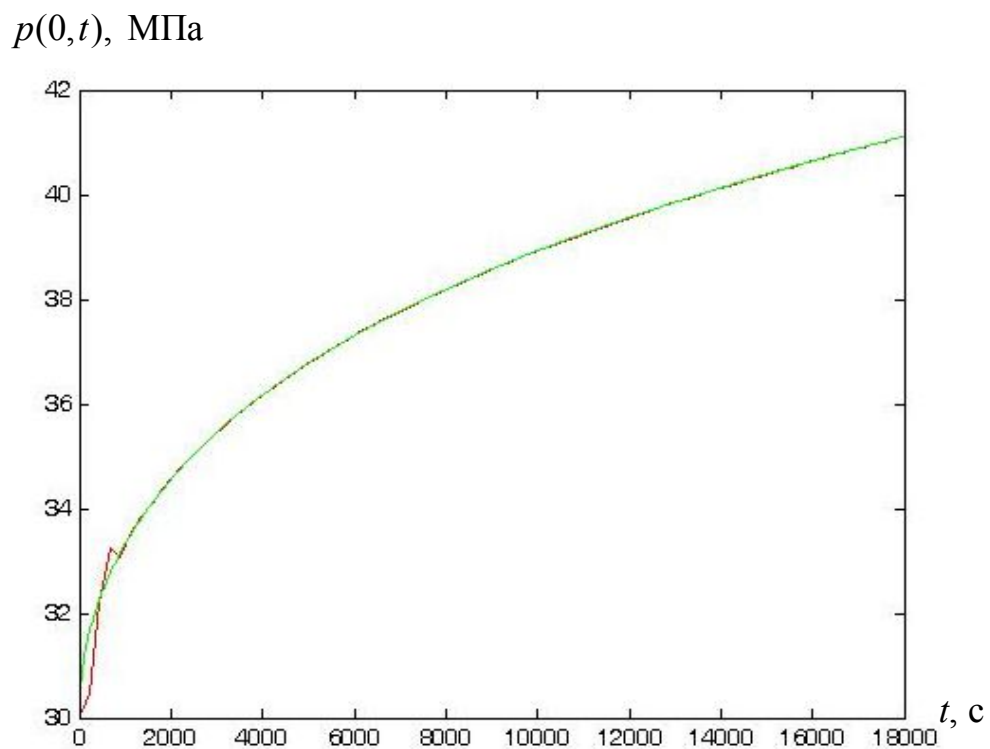


Рис.34. Результаты решения обратной задачи для точных исходных данных при $\delta = 0$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 10\tau$, $a_1 = 0,083$ м²/с, $a_2 = 0,097$ м²/с (— как на Рис.4)

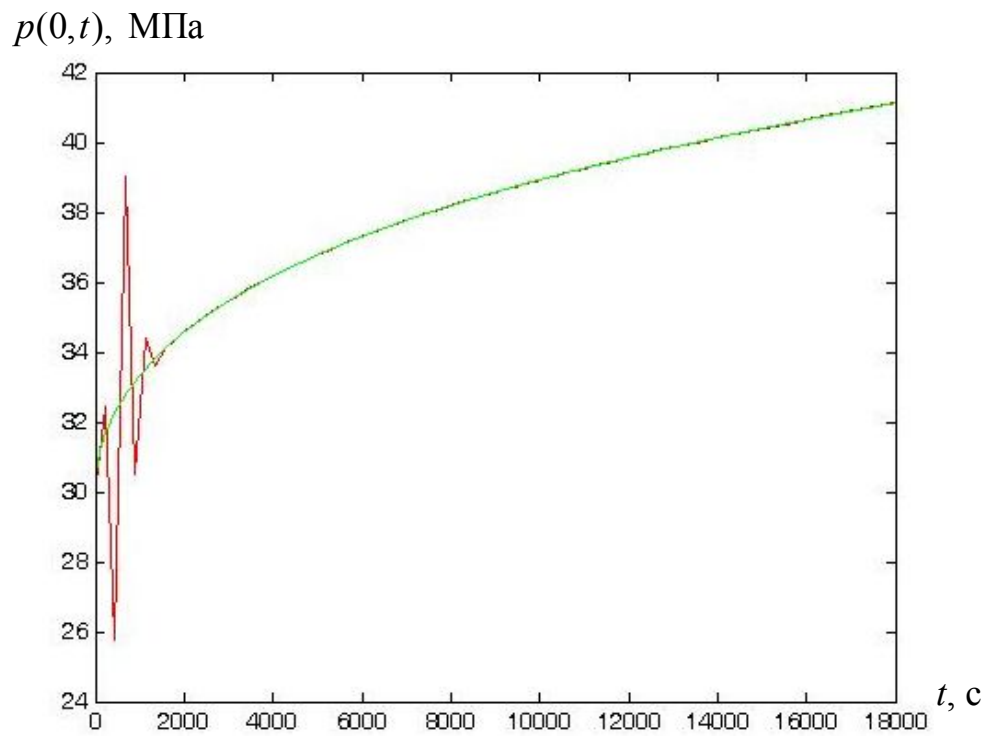


Рис.35. Результаты решения обратной задачи для точных исходных данных при $\delta = 0$, $d = 30$ м, $\tau_1 = 10\tau$, $a_1 = 0,083$ м²/с, $a_2 = 0,097$ м²/с (— как на Рис.4)

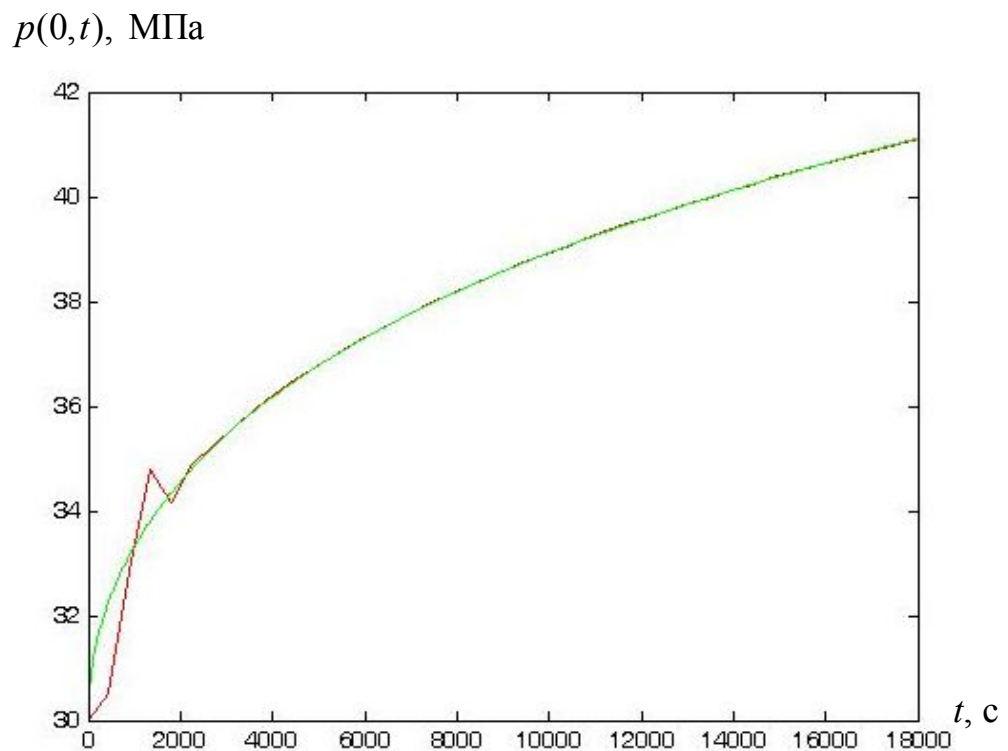


Рис.36. Результаты решения обратной задачи для точных исходных данных давления при $\delta = 0$, $d = 30$ м, $\tau_1 = 20\tau$, $a_1 = 0,083$ м²/с, $a_2 = 0,097$ м²/с (— как на Рис.4)

$p(0,t)$, МПа

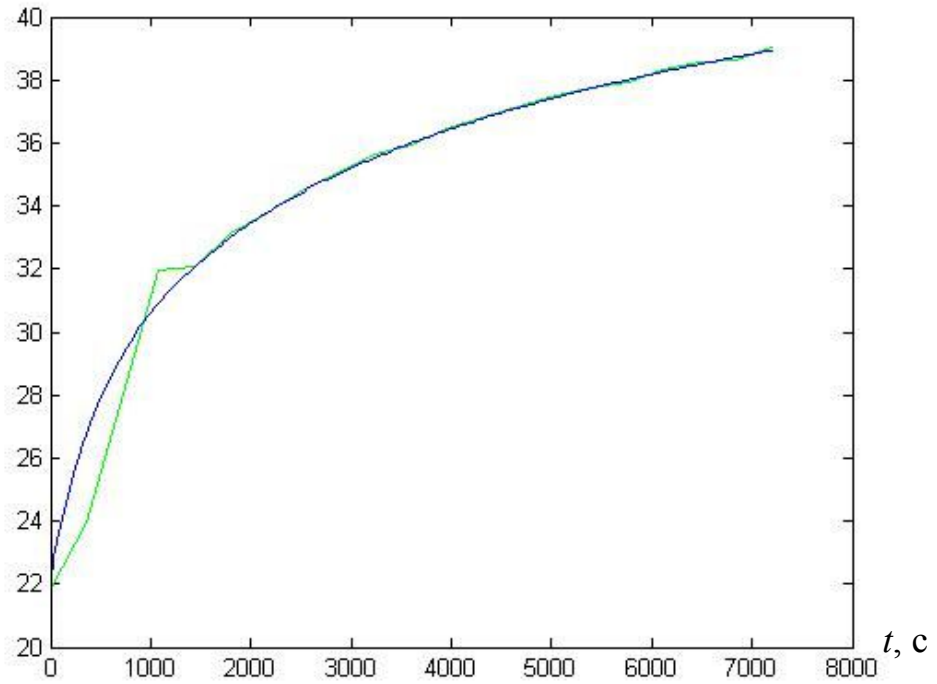


Рис.37. Результаты решения обратной задачи для точных исходных данных при $\delta = 0,001$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 10\tau$, $a_1 = 0,083$ м²/с, $a_2 = 0,097$ м²/с (— как на Рис.4)

$p(0,t)$, МПа

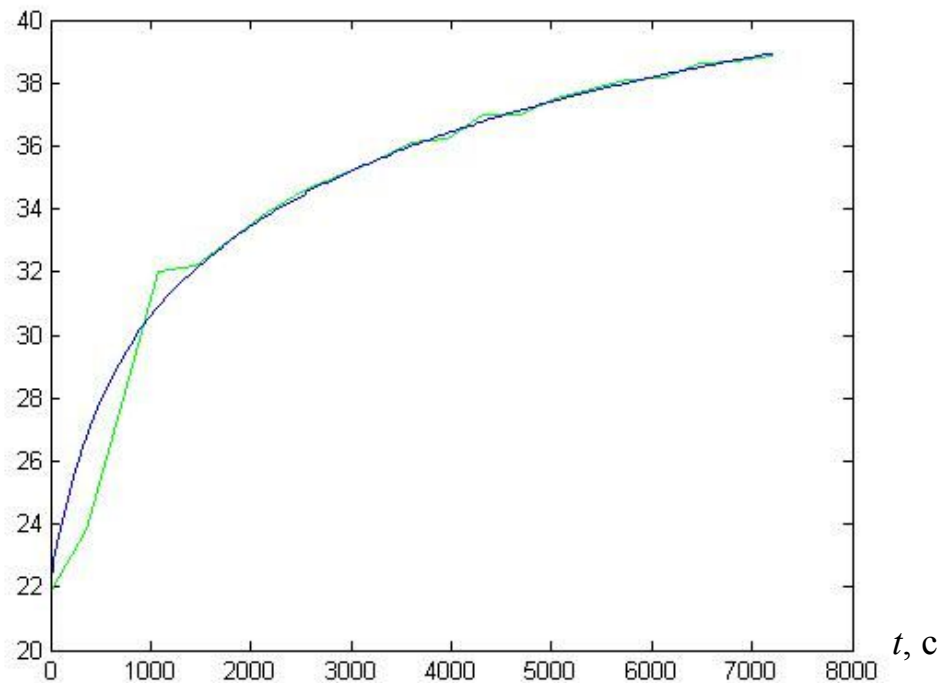


Рис.38. Результаты решения обратной задачи для точных исходных данных при $\delta = 0,002$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 10\tau$, $a_1 = 0,083$ м²/с, $a_2 = 0,097$ м²/с (— как на Рис.4)

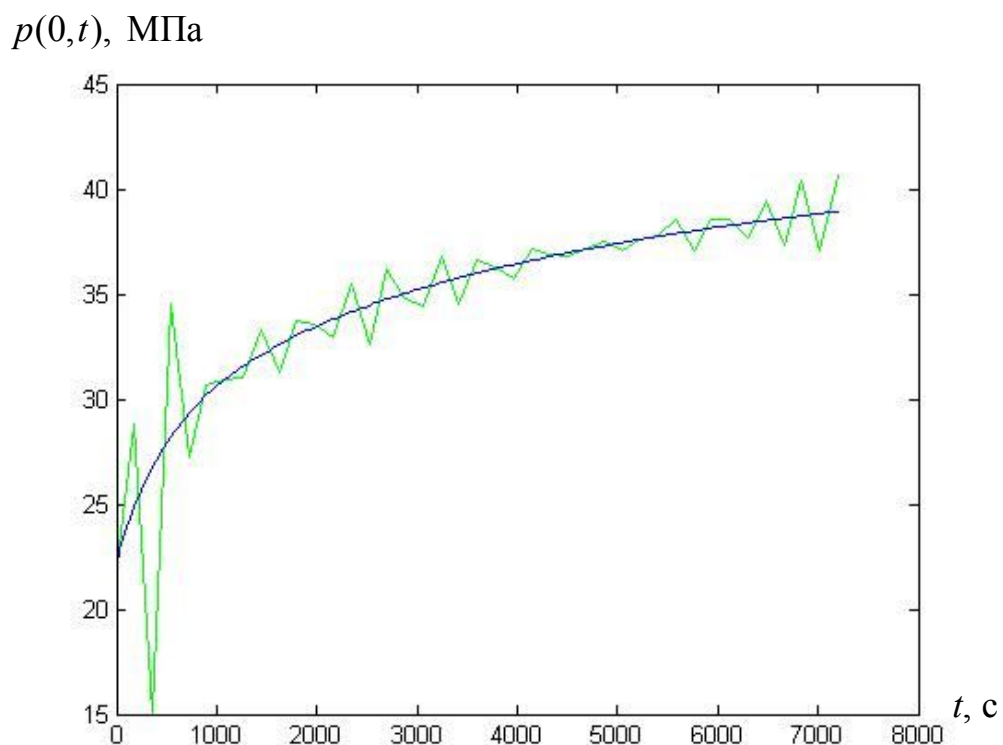


Рис.39. Результаты решения обратной задачи для точных исходных данных при $\delta = 0,003$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 5\tau$, $a_1 = 0,083$ м²/с, $a_2 = 0,097$ м²/с (— как на Рис.4)

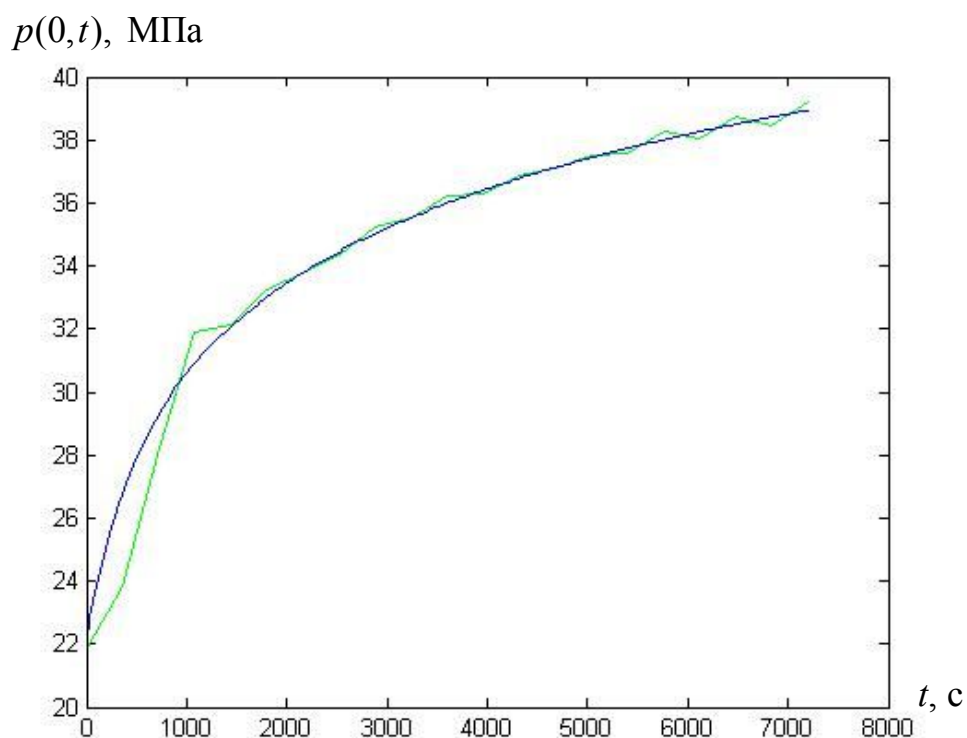


Рис.40. Результаты решения обратной задачи для точных исходных данных при $\delta = 0,003$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 10\tau$, $a_1 = 0,083$ м²/с, $a_2 = 0,097$ м²/с (— как на Рис.4)

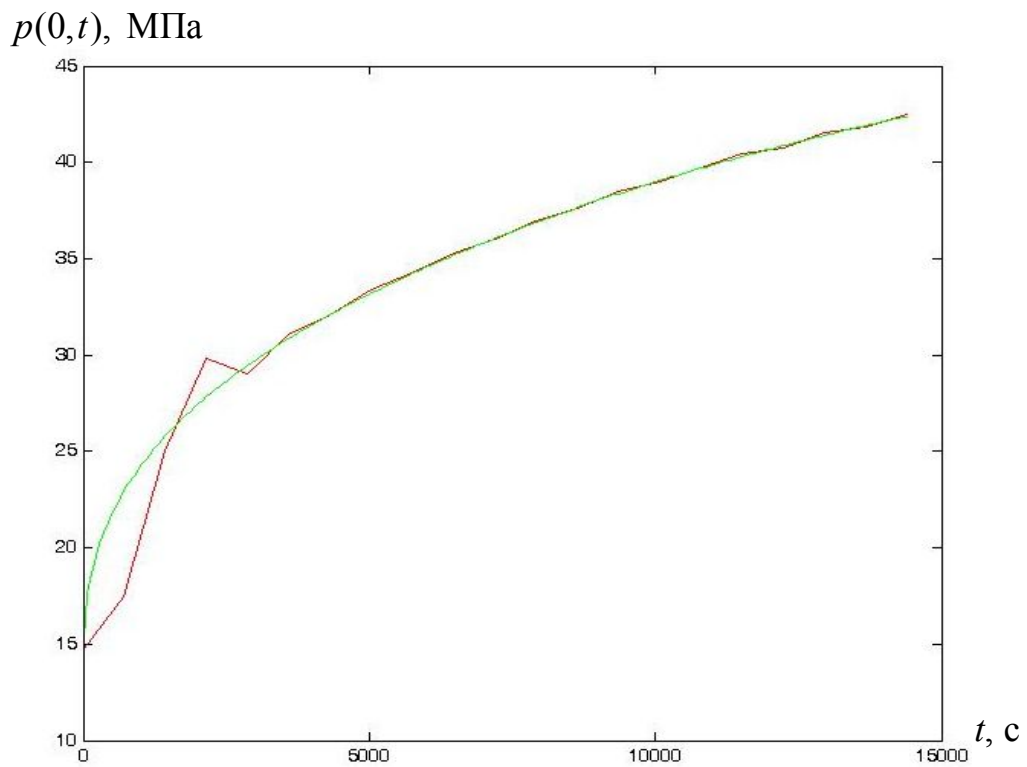


Рис.41. Результаты решения обратной задачи для точных исходных данных при $\delta = 0,003$, $d = 30$ м, $\tau_1 = 10\tau$, $a_1 = 0,069$ м²/с, $a_2 = 0,083$ м²/с (— давление, определенное по решению прямой задачи)

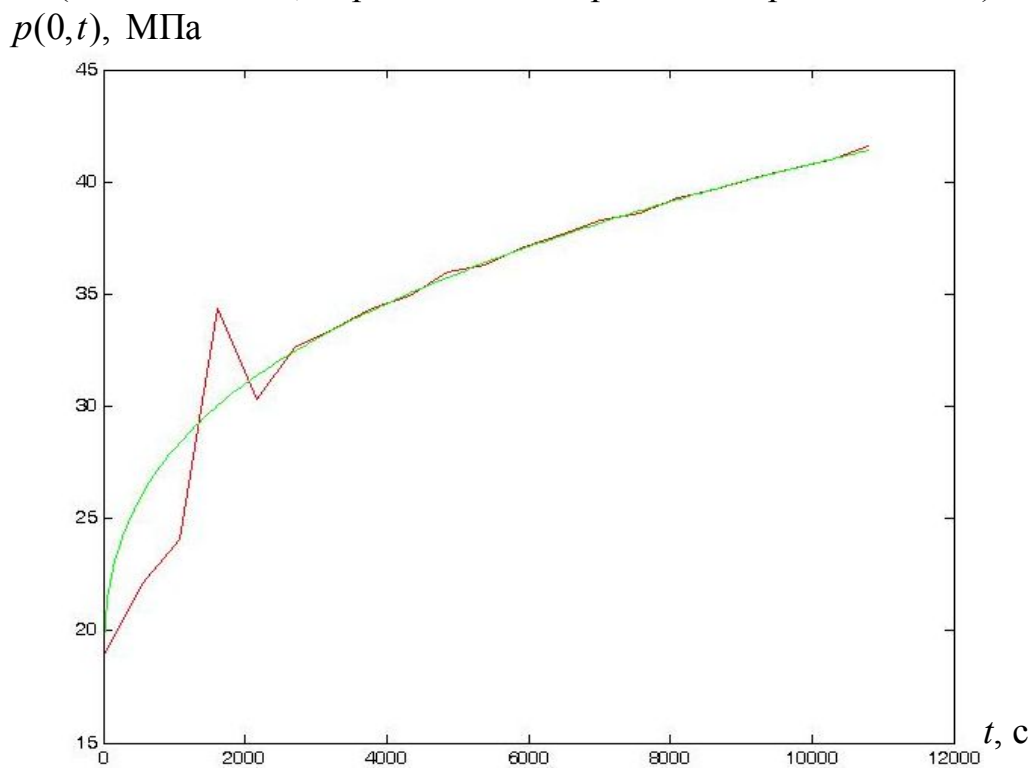


Рис.42. Результаты решения обратной задачи для точных исходных данных при $\delta = 0,003$, $d = 30$ м, $\tau_1 = 10\tau$, $a_1 = 0,083$ м²/с, $a_2 = 0,097$ м²/с (— как на Рис.41)

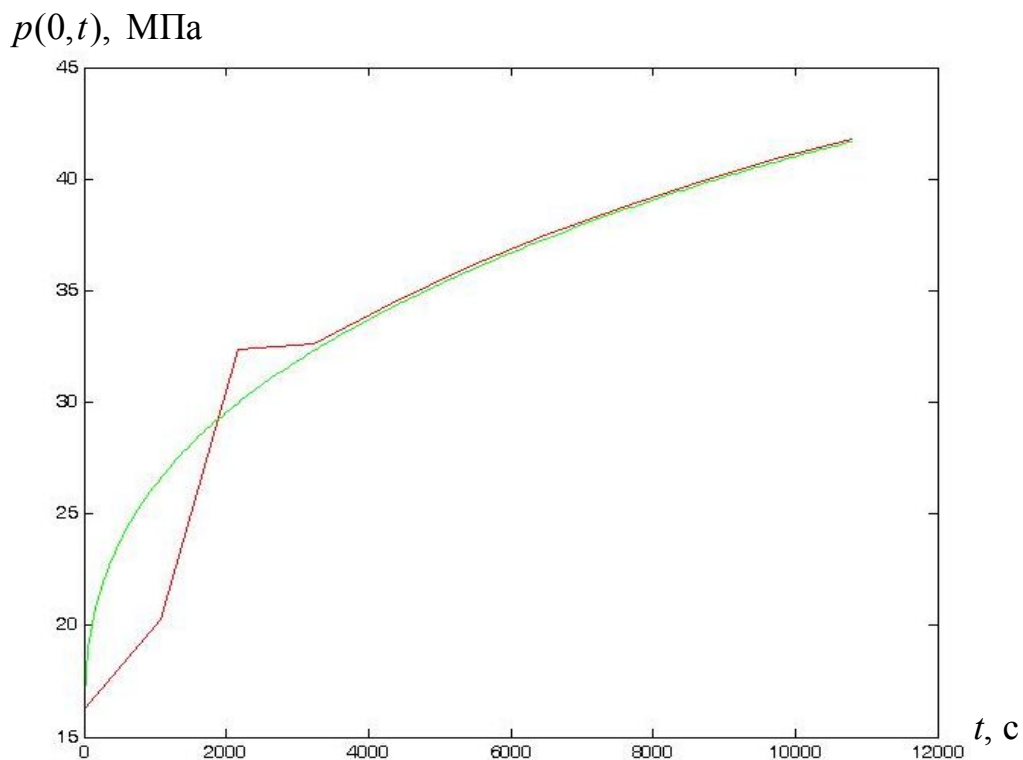


Рис.43. Результаты решения обратной задачи для точных исходных данных при $\delta = 0,003$, $d = 30$ м, $\tau_1 = 20\tau$, $a_1 = 0,083$ м²/с, $a_2 = 0,097$ м²/с (— как на Рис.41)

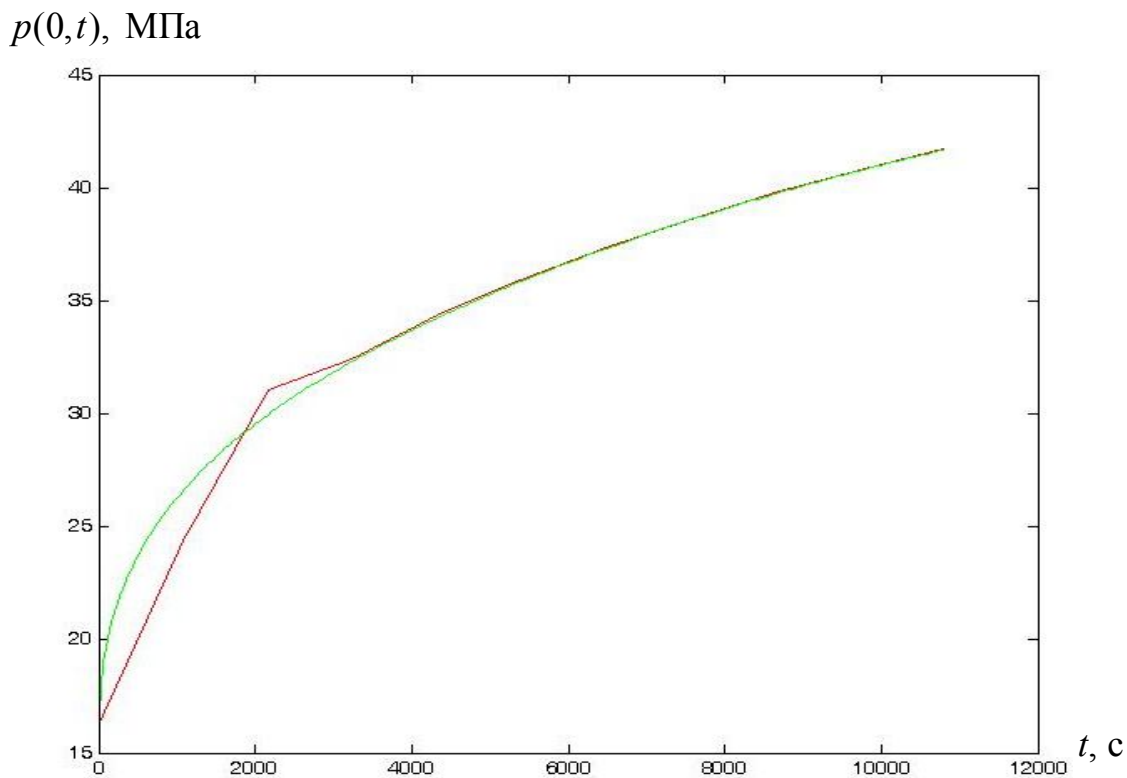


Рис.44. Результаты решения обратной задачи для точных исходных данных при $\delta = 0,003$, $d = 20$ м, $\tau_1 = 20\tau$, $a_1 = 0,083$ м²/с, $a_2 = 0,097$ м²/с (— как на Рис.41)

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Решены обратные задачи по восстановлению граничного режима при линейном и нелинейном режимах фильтрации жидкости в пористой среде. Для получения устойчивых решений применен метод пошаговой регуляризации. Для проверки чувствительности решения на ошибки исходных данных проводились вычислительные эксперименты с зашумленными исходными параметрами. Показано, что с увеличением расстояния между точками замера исходных данных и границы области, где определяется решение обратной задачи, устойчивость решения ухудшается. К ухудшению устойчивости также приводит зашумление исходных данных. Для получения условно устойчивых решений исходные данные сглажены. Установлено, что одновременное применение методов пошаговой регуляризации и сглаживания исходных данных приводит к улучшению устойчивости решения, чем применение только метода пошаговой регуляризации. Для сглаживания исходных данных использована сглаживающая сплайн функция `saps` среды Matlab.

Решена обратная граничная задача для упруго-пластического режима фильтрации жидкости в пористой среде. Физическая постановка задачи соответствует определению кривой восстановления давления в нефтедобывающей скважине по данным изменения давления в контрольной скважине. В режиме восстановления давления (второй этап упруго-пластической фильтрации) определена динамика давления на границе области. Получена осцилляция решения при малых временах, что значительно уменьшается при применении пошаговой регуляризации. Как и при упругом режиме, увеличение расстояния между точками «замера» исходных данных и определения решения, а также зашумленность исходных данных приводит к ухудшению устойчивости решения. Условно устойчивое решение получено при одновременном применении методов пошаговой регуляризации и сглаживания исходных данных.

Литература

1. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. – 336 с.
2. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
3. Beck J.V., Blackwell B., St. Clair C.R., Jr. Inverse Heat Conduction. Ill-posed Problems. A Wiley-Interscience Publication, New York, 1985, 308 p.
4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач. – М.: ЛКИ, 2007. – 480 с.
5. Hao D. Methods for inverse heat conduction problems. – Peter Lang pub. Inc. 1998. – 249 p.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
7. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Панкратов Б.М. Решение нелинейной обратной задачи теплопроводности. // Теплообмен-V. Минск: ИТМО АН БССР. 1976. Т. 9. С. 94-103.
8. Алифанов О.М. Идентификации процессов теплообмена летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1979. – 216 с.
9. Холияров Э.Ч., Эломов Ф.З. Об одной обратной граничной задаче при упругом режиме фильтрации // Международная научно-техническая конференция «Современные проблемы механики» (23-24 сентябрь). – Ташкент, 2009. С. 201-203.
10. Хужаёров Б.Х., Холияров Э.Ч., Эломов Ф.З. Граничная обратная задача при упругом режиме фильтрации однородной жидкости в пористой среде // Сборник материалов IV-международной конференции «Проблемы развития инженерных коммуникаций» 17-21.05.2010. г. Самарканд. С. 48-50.
11. Хужаёров Б.Х., Холияров Э.Ч., Эломов Ф.З., Нурматов Г. Обратная задача по восстановлению граничных условий при фильтрации жидкости в пористой среде // Сборник материалов Республиканской научной

- конференции «Проблемы современной математики» 22-23.04.2011. г. Карши. С. 547-550.
12. Щелкачев В.Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде // Докл. АН СССР. Т. 52. № 2. 1946. С. 103-106.
 13. Щелкачев В.Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. – М.: Гостоптехиздат, 1959.
 14. Хужаёров Б.Х., Холияров Э.Ч., Эломов Ф.З. Решение обратных граничных задач для нелинейно-упругого режима фильтрации жидкости // Сборник материалов Республиканской научно-технической конференции «Современное состояние и перспективы развития информационных технологий» 5-6.09.2011. г. Ташкент. С. 280-285.
 15. Николаевский В.Н. К построению нелинейной теории упругого режима фильтрации жидкости и газа // ПМТФ. 1961. № 4. С. 67-76.
 16. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. – 339 с.
 17. Баренблатт Г.И., Крылов А.П. Об упругопластическом режиме фильтрации // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 2. С. 5 – 13.
 18. Баренблатт Г.И. О некоторых задачах восстановления давления и распространения волн разгрузки при упруго-пластическом режиме фильтрации // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 2. С. 14 – 26.
 19. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Theory of fluid flows through natural rocks. Kluwer Academic Publishers. 1990. – 395 p.
 20. Мишин В. П., Алифанов О. М. Повышение качества обработки теплонагруженных конструкций и обратные задачи теплообмена. Ч. II. Практические приложения // Машиноведение. 1986. №6. С. 11-21.
 21. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. -288 с.
 22. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. –М., Наука, 1980. – 288 с.

23. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984.
24. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
25. Хужаёров Б. Х., Холияров Э. Ч. Обратные задачи упругопластической фильтрации жидкости в пористой среде // ИФЖ. 2007. Т. 80. № 3. С. 86 – 93.
26. Желтов Ю.П. Разработка нефтяных месторождений. М.: Недра, 1986. – 332 с.
27. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978, – 512 с.
28. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. –368 с.
29. Бабе Г. Д., Бондарев Э. А., Воеводин А. Ф., Каниболотский М. А. Идентификация моделей гидравлики. Новосибирск: Наука, 1980.
30. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. – М.: Мир, 1973.
31. Мэтьюз Джон Г., Финк Куртис Д. Численные методы. Использование MATLAB. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2001. – 720 с.
32. Дьяконов В. П., Круглов В. В. Математические пакеты расширения MATLAB: Специальный справочник. – СПб.: ПИТЕР, 2001. – 480 с.
33. Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М. MATLAB 7: программирование, численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
34. Дьяконов В. П. MATLAB 7.*/R2006/R2007: Самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 768 с.
35. Горбунов А.Т. Разработка аномальных нефтяных месторождений. М.: Недра, 1981.
36. Горбунов А.Т. Упруго-пластический режим фильтрации жидкости в пористых средах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 5. С. 84-90.