

ГЛАВА 4.

ТЕОРИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СЛОЁВ С УЧЁТОМ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ И АНИЗОТРОПИИ МАТЕРИАЛА

В данной главе монографии изложена уточненная теория осесимметричных колебаний предварительно-напряженных вязкоупругих круговых цилиндрических слоёв. В первом и третьем параграфах разработаны теория продольно-радиальных и крутильных колебаний круговых цилиндрических слоёв из изотропного материала с учётом предварительной напряженности и вязких свойств материала. Во втором и четвёртом параграфах результаты предыдущих двух параграфов обобщены на случай круговых цилиндрических слоёв, материал которых трансверсально-изотропен и предварительно-напряжён (однородное напряженное состояние), с учётом вязких свойств материала слоя.

4.1. Уравнения продольно-радиальных колебаний предварительно-напряженных изотропных круговых цилиндрических слоёв

Предварительно-напряженное состояние в деформируемых телах возникает в результате физико-химических процессов и технологических операций, а также оно может быть создано целенаправленно, исходя из определенных конструктивных соображений. В связи с этим возникает необходимость учёта предварительно-напряженного состояния элементов при их расчёте на воздействия динамических нагрузок.

В создании основ современной линеаризованной динамической теории в предварительно-напряженных телах существенный вклад внесли А.Н. Гузь [42, 43], И.Г. Филиппов [106, 112] и ряд других учёных. Результаты исследований по указанной проблеме нашли отражение в большом числе публикаций [3, 33, 34], где при описании движения упругих тел принимались двумерные прикладные теории, построенные с привлечением гипотез Кирхгофа-Лява, Тимошенко и т.д.

4.1.1. Вывод общих уравнений колебания кругового
цилиндрического вязкоупругого слоя,
с учётом начальных напряжений

Ниже разрабатываются уравнения продольно-радиальных колебаний изотропного кругового цилиндрического слоя, находящегося под действием внешних нестационарных нагрузок, с учетом начальных напряжений.

Отнесем слой к цилиндрической системе координат (r, θ, z) , направив ось z по оси симметрии цилиндра, а полярную ось r - произвольно, в плоскости поперечного сечения.

Продольно-радиальные колебания цилиндрического слоя возбуждаются напряжениями на его поверхностях $r = r_i$ ($i = 1, 2$)

$$\sigma_{rr} = f_{rr}^{(i)}(z, t), \quad \sigma_{rz} = f_{rz}^{(i)}(z, t) \quad (4.1)$$

Движение слоя описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Предположим материал слоя вязкоупругий, изотропный, однородный и предварительно-напряжен таким образом, что выполняются зависимости (1.37) (то есть частный случай 1^0_a). Рассматриваемая задача является осесимметричной и поэтому напряжения и деформации от координаты θ не зависят. В этом случае отличны от нуля перемещения $U_r = U_r(z, r)$ и $U_z = U_z(z, r)$, ненулевые напряжения выражаются через ненулевые перемещения посредством формул (1.38), подстановка которых в уравнения движения (4.1) приводит к следующим уравнениям движения точек слоя

$$\begin{aligned} (1+c_2) \left\{ [L+2M] \left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_r \right) + M \left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right) \right\} + \\ + (1+a_0) [L+M] \left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$(1+c_2)\left[L+M\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial U_r}{\partial z}+(1+a_0)\right]\left\{M\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial r}\right)+\right. \\ \left.+[L+2M]\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}\right)\right\}=\rho\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}. \quad (4.3)$$

Представив перемещения как [83]

$$U_r = \int_0^\infty \frac{\sin kz}{-\cos kz} dk \int_{(l)} \bar{U}_r e^{pt} dp, \quad U_z = \int_0^\infty \frac{\cos kz}{\sin kz} dk \int_{(l)} \bar{U}_z e^{pt} dp \quad (4.4)$$

и подставив в уравнения движения (4.3), для преобразованных перемещений получим уравнения

$$(1+c_2)\left\{[\bar{L}+2\bar{M}]\left(\frac{\partial^2 \bar{U}_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{U}_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\bar{U}_r\right)+\bar{M}\left(\frac{\partial^2 \bar{U}_r}{\partial z^2}\right)\right\}+ \\ +(1+a_0)[\bar{L}+\bar{M}]\left(\frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial r \partial z}\right)=\rho p^2 \bar{U}_r, \\ (1+a_0)\left\{\bar{M}\left(\frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{U}_z}{\partial r}\right)+[\bar{L}+2\bar{M}]\left(\frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial z^2}\right)\right\}+ \\ +(1+c_2)[\bar{L}+\bar{M}]\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z}=\rho p^2 \bar{U}_z. \quad (4.5)$$

Продифференцировав один раз по r второе уравнение системы (4.5) получим

$$\Delta_0 \bar{U}_r - \left[\bar{G}_3 k^2 + \frac{1}{1+c_2} [L+2M]^{-1} \rho p^2 \right] \bar{U}_r - \frac{1+a_0}{1+c_2} k \bar{G}_1 \frac{d\bar{U}_z}{dr} = 0, \\ \Delta_0 \frac{d\bar{U}_z}{dr} - \left[\bar{G}_4 k^2 + \frac{1}{1+a_0} \bar{A}_{44}^{-1} \rho p^2 \right] \frac{d\bar{U}_z}{dr} + k \frac{1+c_2}{1+a_0} \bar{G}_2 \Delta_0 \bar{U}_r = 0, \quad (4.6)$$

где

$$\bar{G}_1 = (\bar{L} + \bar{M})(\bar{L} + 2\bar{M})^{-1}; \quad \bar{G}_2 = (\bar{L} + \bar{M})(\bar{M})^{-1}; \quad \bar{G}_3 = (\bar{M})(\bar{L} + 2\bar{M})^{-1}; \\ \bar{G}_4 = (\bar{L} + 2\bar{M})(\bar{M})^{-1}; \quad \Delta_0 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}.$$

Из первого уравнения системы (4.6) имеем

$$\frac{d\bar{U}_z}{dr} = \frac{1+c_2}{1+a_0} \bar{G}_1^{-1} k^{-1} \left[\Delta_0 - \bar{G}_3 k^2 - \frac{1}{1+c_2} [L+2M]^{-1} \rho p^2 \right] \bar{U}_r,$$

подставив которое во второе уравнение системы (4.6), получим

$$\Delta_0 \bar{U}_r - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \Delta_0 \bar{U}_r + \alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2 \bar{U}_r = 0, \quad (4.7)$$

$$\alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2 = k^4 + k^2 p^2 \rho \left[\frac{1}{1+c_2} \bar{M}^{-1} + \frac{1}{1+a_0} [\bar{L} + 2\bar{M}]^{-1} \right] +$$

$$+ \frac{p^4 \rho^2}{(1+a_0)(1+c_2)} [\bar{L} + 2\bar{M}]^{-1} \bar{M}^{-1};$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = p^2 \rho_1 \left[\frac{1}{1+a_0} \bar{M}^{-1} + \frac{1}{1+a_0} [\bar{L} + 2\bar{M}]^{-1} \right] +$$

$$+ k^2 \left[[\bar{L} + 2\bar{M}] \bar{M}^{-1} + \bar{M} [\bar{L} + 2\bar{M}]^{-1} - [\bar{M} + \bar{L}]^2 \bar{M}^{-1} [\bar{L} + 2\bar{M}]^{-1} \right].$$

Уравнение (4.7) можно записать в следующем виде

$$(\Delta_0 - \alpha_1^2)(\Delta_0 - \alpha_2^2) \bar{U}_r = 0. \quad (4.8)$$

На основании теоремы Т. Voggio[78] общее решение уравнения (4.6) равно сумме общих решений уравнений

$$\frac{d^2 \bar{U}_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\bar{U}_i}{dr} - \left(\alpha_i^2 + \frac{1}{r^2} \right) \bar{U}_i = 0, \quad (i=1,2)$$

т.е. $\bar{U}_r = \bar{U}_1 + \bar{U}_2$.

Отсюда следует, что общее решение уравнения (4.8) равно

$$\bar{U}_r = C_1 I_1(\alpha_1 r) + D_1 K_1(\alpha_1 r) + C_2 I_1(\alpha_2 r) + D_2 K_1(\alpha_2 r); \quad (4.9)$$

Подстановка решения (4.9) в первое уравнение системы (4.6) даёт

$$\frac{1+a_0}{1+c_2} \bar{G}_1 k \frac{d\bar{U}_z}{dr} = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) [C_1 I_1(\alpha_1 r) + D_1 K_1(\alpha_1 r)] +$$

$$+ (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) [C_2 I_1(\alpha_2 r) + D_2 K_1(\alpha_2 r)],$$

где $\alpha^2 = [\bar{L} + 2\bar{M}]^{-1} \{ p^2 \rho / (1+c_2) + \bar{M} k^2 \}$

Отсюда с точностью до постоянного интегрирования находим, что

$$\bar{U}_z = \frac{1+c_2}{1+a_0} \bar{G}_1^{-1} \left\{ \frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{k\alpha_1} [C_1 I_0(\alpha_1 r) - D_1 K_0(\alpha_1 r)] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2^2 - \alpha^2}{k\alpha_2} [C_2 I_0(\alpha_2 r) - D_2 K_0(\alpha_2 r)] \right\}. \quad (4.10)$$

Разложим в степенные ряды, по степеням радиальной координаты r , выражения для перемещений (4.9) и (4.10) получим

$$\bar{U}_z = \frac{1+c_2}{1+a_0} \bar{G}_1 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{k\alpha_1} \alpha_1^{2n} C_{10} + \frac{\alpha_2^2 - \alpha^2}{k\alpha_2} \alpha_2^{2n} C_{20} \right] \frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2} + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{6,n}(r) \left[\frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{k\alpha_1} \alpha_1^{2n} D_1 + \frac{\alpha_2^2 - \alpha^2}{k\alpha_2} \alpha_2^{2n} D_2 \right] \frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2} \right\}; \quad (4.11)$$

$$\bar{U}_r = \frac{1}{r} \left(\frac{D_1}{\alpha_1} + \frac{D_2}{\alpha_2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_1^{2n+1} C_{10} + \alpha_2^{2n+1} C_{20} \right] \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{7,n} \left[\alpha_1^{2n+1} D_1 + \alpha_2^{2n+1} D_2 \right] \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!},$$

где $[C_{10}, C_{20}] = [C_1, C_2] + [D_1, D_2] \cdot \left[\ln \frac{(\alpha_1, \alpha_2)\xi}{2} - \psi(1) \right]$;

$$\eta_{6,n}(r) = \ell n \frac{r}{\xi} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}; \quad \eta_{7,n}(r) = \eta_{6,n}(r) - \frac{1}{2(n+1)}.$$

Рассмотрим главные части преобразованных перемещений (4.11) при $r = \xi$, которые равны первым слагаемым в рядах, при этом радиус промежуточной поверхности ξ определяется по формулам [119]

$$\xi = \frac{r_1}{2} \left(\chi - \frac{r_1}{r_2} \right), \quad (4.12)$$

где постоянное χ удовлетворяет неравенству $2 + \frac{r_1}{r_2} \leq \chi \leq 2 + \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2}$. Введём вспомогательные функции $\bar{U}_{r,0}$, $\bar{U}_{r,1}$, $\bar{U}_{z,0}$, $\bar{U}_{z,1}$ по формулам

$$\begin{aligned}\bar{U}_{r,0} &= \alpha_1 C_{10} + \alpha_2 C_{20}, & \bar{U}_{r,1} &= \xi^{-1}(\alpha_1^{-1} D_1 + \alpha_2^{-1} D_2), \\ \bar{U}_{z,0} &= \frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{k\alpha_1 \bar{G}_1} C_{10} + \frac{\alpha_2^2 - \alpha^2}{k\alpha_2 \bar{B}_1} C_{20}, \\ \xi \bar{U}_{z,1} &= \frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{k\alpha_1 \bar{G}_1} D_1 + \frac{\alpha_2^2 - \alpha^2}{k\alpha_2 \bar{G}_1} D_2.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Для определения четырёх неизвестных постоянных интегрирования C_j , D_j ($j=1,2$) имеются четыре граничных условия (4.1), которые после применения преобразований с учётом формул (3.10) запишутся как

$$\bar{\sigma}_{rz} = (1 + a_0)M \left(\frac{\partial \bar{U}_z}{\partial r} \right) + k(1 + c_2)M \bar{U}_z = \bar{f}_{rz}^{(i)}(k, p), \quad (4.14)$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = (1 + c_2)(L + 2M) \left(\frac{\partial \bar{U}_r}{\partial r} \right) - k(1 + a_0)L(\bar{U}_z) + \frac{1}{r}(1 + c_2)L(\bar{U}_r) = \bar{f}_r^{(i)}(k, p)$$

или

$$\begin{aligned}& (\alpha_1^2 - \alpha^2 + k^2 \bar{G}_1) [C_1 I_1(\alpha_1 r_i) + D_1 K_1(\alpha_1 r_i)] + (\alpha_2^2 - \alpha^2 + k^2 \bar{G}_1) \times \\ & \times [C_2 I_1(\alpha_2 r_i) + D_2 K_1(\alpha_2 r_i)] = \frac{1}{1 + c_2} \bar{G}_1 \bar{M}^{-1} \bar{f}_{rz}^{(i)}(k, p),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \left(\alpha_1 \bar{G}_1 (\bar{L} + 2\bar{M}) - \frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{\alpha_1} \bar{L} \right) [C_1 I_0(\alpha_1 r_i) - D_1 K_0(\alpha_1 r_i)] + \\ & + \left(\alpha_2 \bar{G}_1 (\bar{L} + 2\bar{M}) - \frac{\alpha_2^2 - \alpha^2}{\alpha_2} \bar{L} \right) [C_2 I_0(\alpha_2 r_i) - D_2 K_0(\alpha_2 r_i)] + \\ & - \frac{1}{r} 2\bar{M} \bar{G}_1 [C_1 I_1(\alpha_1 r_i) + D_1 K_1(\alpha_1 r_i) + C_2 I_1(\alpha_2 r_i) + \\ & + D_2 K_1(\alpha_2 r_i)] = \frac{1}{1 + c_2} \bar{G}_1 [\bar{f}_r^{(i)}(k, p)].\end{aligned}$$

Решив эту систему находим постоянные интегрирования

$$C_{10} = \frac{1}{\alpha^2 \Delta} \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha^2}{k\alpha_2 \bar{G}_1} \bar{U}_{r,0} - \alpha_2 \bar{U}_{z,0} \right); \quad C_{20} = \frac{1}{\alpha^2 \Delta} \left(\alpha_1 \bar{U}_{z,0} - \frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{k\alpha_1 \bar{G}_1} \bar{U}_{r,0} \right);$$

$$D_1 = \frac{\xi}{\Delta} \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha^2}{k\alpha_2 \bar{G}_1} \bar{U}_{r,1} - \frac{1}{\alpha_2} \bar{U}_{z,1} \right); \quad D_2 = \frac{\xi}{\Delta} \left(\frac{1}{\alpha_1} \bar{U}_{z,1} - \frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{k\alpha_1 \bar{G}_1} \bar{U}_{r,1} \right), \quad (4.15)$$

где $\Delta = \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{k\alpha_1 \alpha_2^2 \bar{G}_1}$.

Выразим преобразованные перемещения \bar{U}_r , \bar{U}_z через введенные главные части $\bar{U}_{r,0}$, $\bar{U}_{r,1}$, $\bar{U}_{z,0}$, $\bar{U}_{z,1}$. Выражения для перемещений (4.11) после подстановки в них последних значений постоянных (4.15) примут вид

$$\begin{aligned} \bar{U}_z &= \frac{1+c_2}{1+a_0} \left\{ \frac{1}{\alpha^2 k \bar{G}_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ k \bar{G}_1 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \left(\bar{P}_n - \alpha^2 \bar{P}_{n-1} \right) \bar{U}_{z,0} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\alpha_1^2 - \alpha^2) (\alpha_2^2 - \alpha^2) \bar{P}_n \bar{U}_{r,0} \right\} \frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2} + \frac{\xi}{k \bar{G}_1} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{6,n}(r) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[k \bar{G}_1 \left(\bar{P}_{n+1} - \alpha^2 \bar{P}_n \right) \bar{U}_{z,1} - (\alpha_1^2 - \alpha^2) (\alpha_2^2 - \alpha^2) \bar{P}_n \bar{U}_{r,1} \right] \frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}, \right. \\ \bar{U}_r &= \frac{1}{\alpha^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\alpha^2 \bar{P}_{n+1} - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \bar{P}_n \right) \bar{U}_{r,0} + k \bar{G}_1 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \bar{U}_{z,0} \right] \times \\ &\quad \times \frac{(r/2)^{2n}}{(n!)(n+1)!} + \xi \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{7,n}(r) \left[\left(\alpha^2 \bar{P}_{n+1} - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \bar{P}_n \right) \bar{U}_{r,1} + \right. \\ &\quad \left. + k \bar{G}_1 \bar{P}_{n+1} \bar{U}_{z,1} \right] \frac{(r/2)^{2n}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r} \bar{U}_{r,1}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Здесь

$$\bar{P}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_2^{2(n-i)} \alpha_1^{2i}; \quad \bar{P}_0 \equiv 0; \quad \bar{P}_1 \equiv 1; \quad \bar{P}_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2; \quad \alpha_1^2 \alpha_2^2 \bar{P}_{-1} = -1.$$

Подставив общие решения (4.16) в преобразованные по Лапласу и Фурье граничные условия (4.14) и разложив в ряды по степеням r_i модифицированные функции Бесселя в последних формулах и подставив их в полученные разложения значения постоянных по формулам (4.16) получены четыре алгебраических уравнения. Обратив эти уравнения по Фурье и Лапласу получаем

четыре интегро-дифференциальных уравнения продольно-радиальных колебаний слоя относительно главных частей перемещений U_z и U_r промежуточной поверхности кругового цилиндрического слоя

$$\begin{aligned} a_{1i}U_{z,0} + a_{2i}U_{r,0} + \xi(a_{3i}U_{z,1} + a_{4i}U_{r,1}) &= \\ &= \frac{1}{1+c_2} G_1 M^{-1} \lambda_1 \left[\frac{\partial f_r^{(i)}(z,t)}{\partial z} \right], \quad (i=1,2) \\ b_{1i}U_{z,0} + b_{2i}U_{r,0} + \xi(b_{3i}U_{z,1} + b_{4i}U_{r,1}) &= \\ &= \frac{1}{1+c_2} G_1 M^{-1} \lambda_1 \left[\frac{\partial f_r^{(i)}(z,t)}{\partial z} \right], \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (4.17)$$

где операторы

$$\begin{aligned} a_{1i} &= \sum_{n=0}^{\infty} G_1 \lambda_2^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[P_{n+1} - \left(\lambda_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1 \right) P_n \right] \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}; \\ a_{2i} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\lambda_1 P_{n+2} - \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1 \right) P_{n+1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\lambda_1 + G_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_n \lambda_2^2 \right] \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}; \\ a_{3i} &= \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{7,n}(r_i) G_1 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z} \left[P_{n+2} - \left(\lambda_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1 \right) P_{n+1} \right] \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \\ &\quad + \frac{1}{r_i} G_1 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z}; \\ a_{4i} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \xi \eta_{7,n}(r_i) \lambda_1 \left[\lambda_1 P_{n+2} - \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1 \right) P_{n+1} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\lambda_1 + G_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_n \lambda_2^2 \right] \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r_i} G_1 \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]; \end{aligned}$$

$$b_{1i} = -\sum_{n=0}^{\infty} G_1 \lambda_2^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[G_1 P_n - \left(\lambda_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1 \right) P_n \right] \frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2};$$

$$b_{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_1 [L + 2M] (\lambda_1 P_{n+1} - P_n \lambda_2^2) + L (\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) P_n - \right. \\ \left. - \left[\frac{G_1 M}{n+1} (\lambda_1 P_{n+1} - \lambda_2^2 P_n) \right] \frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2} \right];$$

$$b_{3i} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1 \left\{ \eta_{6,n}(r_i) \frac{\partial}{\partial z} [G_1 (L + 2M) - G_1 L (P_{n+1} - \lambda_1 P_n)] + \right. \\ \left. + G_1 \eta_{7,n}(r_i) \frac{\partial}{\partial z} \frac{M}{n+1} P_{n+1} \right\} \frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2};$$

$$b_{4i} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \eta_{6,n}(r_i) [G_1 (L + 2M) (\lambda_1 P_{n+1} - \lambda_2^2 P_n) + L (\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) P_n] + \right. \\ \left. + G_1 \eta_{7,n}(r_i) \frac{M}{n+1} (\lambda_1 P_{n+1} - \lambda_2^2 P_n) \right\} \lambda_1 \frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2} - \xi \frac{2M}{r_i^2} \lambda_1 G_1.$$

При этом операторы λ_1^n , λ_2^{2n} , λ_3^n , P_n имеют вид

$$\lambda_1^n = [L + 2M]^{-n} \left\{ \frac{\rho}{1+c_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - M \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}^n,$$

$$\lambda_2^{2n} = \left\{ \frac{\partial^4}{\partial z^4} + N_1 \rho^2 \frac{\partial^4}{\partial t^4} - N_2 \rho \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial t^2} \right\}^n,$$

$$\lambda_3^n = \left\{ N_3 \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - N_4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}^n, \quad N_1 = [L + 2M]^{-1} M^{-1} \frac{1}{(1+a_0)(1+c_2)},$$

$$N_2 = \frac{1}{1+c_2} M^{-1} + \frac{1}{1+a_0} (L + 2M)^{-1}, \quad N_3 = \frac{1}{1+a_0} M^{-1} + \frac{1}{1+c_2} (L + 2M)^{-1},$$

$$N_4 = M^{-1} (L + 2M) + M (L + 2M)^{-1} - (M + L)^2 M^{-1} (L + 2M)^{-1},$$

$$\lambda_2^2 P_{-1} = -1; \quad P_0 \equiv 0; \quad P_1 = 1; \quad P_2 = \lambda_3; \quad P_3 = \lambda_3^2 - \lambda_2^2;$$

$$P_4 = \lambda_3 (\lambda_3^2 - 2\lambda_2^2); \quad P_5 = \lambda_3^4 - 3\lambda_3^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^4.$$

Система уравнений (4.17) являются общими уравнениями продольно-радиальных колебаний предварительно-напряженного вязкоупруго цилиндрического слоя, выведенные для произвольных ядер вязкоупругих операторов (на ядра никакие ограничения не налагаются, кроме их интегрируемости). В соответствии с выражениями операторов λ_i^n , a_{ij} , b_{ij} в переменных (z, t) система (4.17) содержит производные любого порядка по координате z и времени t от главных частей перемещения точек промежуточной поверхности слоя. Следовательно, для их применения при решении прикладных задач следует ограничиться нулевым, первым и т.д. приближениями в выражениях для операторов a_{ij} , b_{ij} . Выбор порядка приближения здесь также зависит от отношения длины распространяющихся волн к внешнему диаметру слоя. Кроме того, общие уравнения (4.17) по своей структуре неотличаются от аналогических уравнений для цилиндрического слоя, без учёта предварительной напряженности [119]. На самом деле их различие является существенным благодаря виду операторов λ_i^n .

4.1.2. Формулы для определения перемещений и напряжений в сечениях слоя с учётом начальных напряжений при его продольно-радиальных колебаниях

Обратив выражения (4.16) по z и k выведены формулы для перемещений U_z , U_r , имеющие следующий вид

$$\begin{aligned}
 U_z = & \frac{1+c_2}{1+a_0} \cdot \left\{ (G_1 \cdot \lambda_1)^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda_4 \cdot G_1 \cdot (P_n - \lambda_1 \cdot P_{n-1}) U_{z,0} + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{-1} \cdot [\lambda_4 - \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_1^2] Q_n U_{r,0} \right] \frac{(r \setminus 2)^{2n}}{(n!)} + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(P_{n+1} - \lambda_1 \cdot P_n) U_{z,1} + G_1^{-1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{-1} \times \right. \\
 & \left. \times [\lambda_4 - \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_1^2] P_n U_{rf,1} \right] \frac{(r \setminus 2)^{2n}}{(n!)^2} \left. \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_r = & \lambda_1^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\lambda_1 (P_{n+1} - \lambda_4 \cdot P_n) \cdot U_{r,0} - G_1 \cdot \lambda_4 \cdot \left(\frac{\partial u_{z,0}}{\partial z} \right) \right] \times \\
 & \times \frac{(r \setminus 2)^{2n}}{n!(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{z,n}(r) \cdot \left[(\lambda_1 P_{n+1} - \lambda_4 P_n) U_{r,1} - P_{n+1} \left(\frac{\partial u_{z,1}}{\partial z} \right) \right] \times \\
 & \times \frac{(r \setminus 2)^{2n}}{n!(n+1)!} + \frac{1}{r} \cdot U_{r,1}. \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

Ограничиваясь нулевым приближением из (4.18) получим

$$U_z = \frac{1+c_2}{1+a_0} [U_{z,0} + \ln r U_{z,1}];$$

$$U_r = \frac{1}{r} U_{r,1} + \frac{r}{2} \left[U_{r,0} - G_1 \lambda_4 \lambda_1^{-1} \frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} \right] + \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \left[\lambda_1 U_{r,1} - \frac{\partial}{\partial z} G_1 U_{z,1} \right] \frac{r}{2};$$

Аналогичные формулы имеют место для компонент напряжений

$$\sigma_{rr} = \lambda_1^{-1} B_1^{-1} [b_1 U_{z,0} + b_2 U_{r,0} + \xi (b_3 U_{z,1} + b_4 U_{r,1})],$$

$$\sigma_{rz} = B_1^{-1} \lambda^{-1} [a_1 U_{z,0} + a_2 U_{r,0} + \xi (a_3 U_{z,1} + a_4 U_{r,1})],$$

$$\text{где } a_i = a_{ij} \Big|_{r_i=r}, \quad b_i = b_{ij} \Big|_{r_i=r}, \quad B_1 = G_1 M^{-1} \frac{\partial}{\partial z}.$$

4.1.3. Предельные и частные виды уравнений продольно-радиальных колебаний предварительно-напряжённого слоя

Полученные уравнения колебания (4.17) и формулы для напряжений и перемещений допускают следующие предельные и частные случаи:

1. Если материал слоя упругий, т.е. $M = \mu$, $L = \lambda$, то уравнения (4.17) переходят в соответствующие уравнения для упругого слоя;

2. Если $r_1 = 0$, тогда $\xi = 0$ и из (4.17) следует уравнение продольного колебания предварительно-напряженного круглого цилиндра:

$$\begin{aligned}
 a_1 U_{z,0} + a_2 U_{r,0} &= \frac{1}{1+c_2} G_1 M^{-1} \lambda_1 \left[\frac{\partial f_{rz}^{(2)}(z,t)}{\partial z} \right], \\
 b_1 U_{z,0} + b_2 U_{r,0} &= \frac{1}{1+c_2} G_1 M^{-1} \lambda_1 \left[\frac{\partial f_r^{(2)}(z,t)}{\partial z} \right], \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

где $a_i = a_{ij} \Big|_{r_i=r}$, $b_i = b_{ij} \Big|_{r_i=r}$.

3. Если $r_2 = r_1(1 + \varepsilon)$ и $\varepsilon > 0$ малая величина, то из (4.17) следуют уравнения для предварительно-напряженной цилиндрической оболочки, при нулевом приближении и постоянстве коэффициента Пуассона эти уравнения в безразмерных переменных (r, z, t) примут вид

$$\begin{aligned}
 \tilde{M}^{-1} \left(\frac{\partial^3 U_{z,0}}{\partial t^2 \partial z} \right) - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^3 U_{z,0}}{\partial z^3} - q_1 \frac{\partial^2 U_{r,0}}{\partial z^2} + \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} - \\
 - \frac{1}{2} \left(\tilde{M}^{-1} \left(\frac{\partial^3 U_{z,1}}{\partial z \partial t^2} \right) - \frac{\partial^3 U_{z,1}}{\partial z^3} \right) + q_1 d_2 \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \times \\
 \times \left(\tilde{M}^{-1} \left(\frac{\partial^4 U_{r,1}}{\partial t^2 \partial z^2} \right) - \frac{\partial^4 U_{r,1}}{\partial z^4} \right) + \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial z^2} = 0; \quad (i=1,2) \quad (4.20) \\
 \frac{2\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} + \frac{1}{1-2\nu} \cdot U_{r,0} - \frac{1}{2} \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} - \frac{2U_{r,1}}{r_i^2} + \\
 + \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \left(d_2 \tilde{M}^{-1} \left(\frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial z^2} \right) = 0; \quad (i=1,2)
 \end{aligned}$$

где ν - коэффициент Пуассона,

$$q_1 = \frac{1-2\nu}{2\nu} - \frac{4(1-\nu)^2}{1-2\nu}; \quad d_1 = \frac{1}{(1+c_2)^2(1+a_0)^2}; \quad d_2 = \frac{1}{(1+c_2)^3(1+a_0)};$$

безразмерные переменные введены по формулам

$$z = z^* \xi; \quad bt = t^* \xi; \quad r_1 = r_2^* \xi; \quad r_2 = r_2^* \xi;$$

$$U_{r,1} = U_{r,1}^* \xi; \quad U_{z,0} = U_{z,0}^* \xi; \quad U_{z,1} = U_{z,1}^*; \quad U_{r,0} = U_{r,0}^*,$$

b - скорость распространения поперечных волн в материале слоя.

4. Если $a_0 = 0$ и $c_2 = 0$, то уравнения (4.17) совпадают с уточненными уравнениями цилиндрического слоя без учёта предварительной напряженности [119].

4.2. Уравнения продольно-радиальных колебаний трансверсально-изотропных круговых цилиндрических слоев, с учётом начальных напряжений

В данном параграфе результаты предыдущих параграфов этой главы обобщены на случай круговых цилиндрических слоев, материал которых трансверсально-изотропен, вязко-упругий и предварительно-напряжён. Предположим, что плоскости изотропии, проходящие через каждую точку тела, нормальны к оси цилиндра, а распределение усилий обладает симметрией относительно той же оси.

Допустим материал слоя предварительно-напряжен таким образом, что выполняются зависимости (1.33). В этом случае зависимости $\varepsilon \div u$ имеют вид (1.35), зависимости $\sigma \div \varepsilon$ принимают вид (1.43). В случае когда толщина рассматриваемого цилиндрического слоя постоянна, начальные перемещения определяются по формулам (1.30). На поверхностях слоя $r = r_i$ ($i = 1, 2$) граничные условия имеют вид (4.1).

Поставив значения выражений (1.43) в уравнения движения (4.2), получим уравнение движения материала слоя в перемещениях

$$\begin{aligned}
 & (1+c_2) \left\{ A_{11} \left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_r \right) + A_{44} \left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right) \right\} + \\
 & + (1+a_0) (A_{13} + A_{44}) \left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2}, \\
 & (1+c_2) (A_{13} + A_{44}) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial U_r}{\partial z} + (1+a_0) \times \\
 & \times \left\{ A_{44} \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + A_{33} \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) \right\} = \rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}. \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Представив перемещения в виде (4.4) и подставив их в уравнения движения (4.1), после некоторых несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \Delta_0 \bar{U}_r - \left[\bar{A}_{44} \bar{A}_{11}^{-1} k^2 + \frac{1}{1+c_2} \bar{A}_{11}^{-1} \rho p^2 \right] \bar{U}_r - \frac{1+a_0}{1+c_2} k \bar{G}_1 \frac{d\bar{U}_z}{dr} = 0, \\ \Delta_0 \frac{d\bar{U}_z}{dr} - \left[\bar{A}_{44}^{-1} \bar{A}_{33} k^2 + \frac{1}{1+a_0} \bar{A}_{44}^{-1} \rho p^2 \right] \frac{d\bar{U}_z}{dr} + \\ + k \frac{1+c_2}{1+a_0} \bar{A}_{44}^{-1} (\bar{A}_{13} + \bar{A}_{44}) \Delta_0 \bar{U}_r = 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где $\bar{G}_1 = \bar{A}_{11}^{-1} (\bar{A}_{13} + \bar{A}_{44})$; $\Delta_0 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}$.

Из первого уравнения системы (4.22) имеем

$$\frac{d\bar{U}_z}{dr} = \frac{1+c_2}{1+a_0} \bar{G}_1^{-1} k^{-1} \left[\Delta_0 - \bar{A}_{44} \bar{A}_{11}^{-1} k^2 - \frac{\rho}{1+c_2} \bar{A}_{11}^{-1} \right] \bar{U}_r,$$

подставив которое во второе уравнение системы (4.22) получим уравнение вида

$$(\Delta_0 - \alpha_1^2)(\Delta_0 - \alpha_2^2) \bar{U}_r = 0, \quad (4.23)$$

где α_1, α_2 - корни алгебраического уравнения

$$\Delta_0^2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \Delta_0 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 = 0,$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \left[\frac{\rho}{1+a_0} \bar{A}_{44}^{-1} + \frac{\rho}{1+c_2} \bar{A}_{11}^{-1} \right] p^2 - \bar{N}_3 k^2,$$

$$\bar{N}_3 = -\bar{A}_{44} \bar{A}_{11}^{-1} - \bar{A}_{33} \bar{A}_{44}^{-1} + \bar{A}_{44}^{-1} \bar{A}_{11}^{-1} (\bar{A}_{13} + \bar{A}_{44})^2,$$

$$\alpha_1^2 \alpha_2^2 = \frac{\rho^2}{(1+a_0)(1+c_2)} \bar{A}_{11}^{-1} \bar{A}_{44}^{-1} p^4 +$$

$$+ \left[\frac{\rho}{1+c_2} \bar{A}_{44}^{-1} \bar{A}_{33} + \frac{\rho}{1+a_0} \right] \bar{A}_{11}^{-1} p^2 k^2 + \bar{A}_{33} \bar{A}_{11}^{-1} k^4.$$

Общее решение уравнения (4.23) на основании теоремы Boggio равно

$$\bar{U}_r = C_1 I_1(\alpha_1 r) + D_1 K_1(\alpha_1 r) + C_2 I_1(\alpha_2 r) + D_2 K_1(\alpha_2 r). \quad (4.24)$$

Подставив последнее решение в первое уравнение системы (4.22) и интегрировав с точностью до постоянного интегрирования находим, что

$$\begin{aligned} \bar{U}_z = & \frac{1+c_2}{1+a_0} \bar{G}_1 \left\{ \frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{k\alpha_1} [C_1 I_0(\alpha_1 r) - D_1 K_0(\alpha_1 r)] + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_2^2 - \alpha^2}{k\alpha_2} [C_2 I_0(\alpha_2 r) - D_2 K_0(\alpha_2 r)] \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\text{где } \alpha^2 = \frac{\rho}{1+c_2} \bar{A}_{11}^{-1} p^2 + \bar{A}_{44} \bar{A}_{11}^{-1} k^2.$$

Разложив в степенные ряды по степеням радиальной координаты r выражения (4.24), (4.25) и введя вспомогательные неизвестные переменные по формулам (4.13), можно выразить неизвестные \bar{U}_r , \bar{U}_z через эти вспомогательные функции по формулам (4.16). Подставив общие решения (4.16) в преобразованные по Лапласу и Фурье граничные условия и разложив их в ряды по степеням r_i получены четыре алгебраических уравнения относительно преобразованных главных частей перемещений промежуточной поверхности слоя $\bar{U}_{r,0}$, $\bar{U}_{z,0}$, $\bar{U}_{r,1}$, $\bar{U}_{z,1}$. Затем в уравнениях осуществив обратный переход в пространство оригиналов получена следующая система уравнений

$$\begin{aligned} c_{1i} U_{z,0} + c_{2i} U_{r,0} + \xi (c_{3i} U_{z,1} + c_{4i} U_{r,1}) = \\ = \frac{1}{1+c_2} G_1 A_{11}^{-1} \lambda_1 \left[\frac{\partial f_r^{(i)}(z,t)}{\partial z} \right], \quad (i=1,2) \\ d_{1i} U_{z,0} + d_{2i} U_{r,0} + \xi (d_{3i} U_{z,1} + d_{4i} U_{r,1}) = \\ = \frac{1}{1+c_2} G_1 \lambda_1 \left[\frac{\partial f_r^{(i)}(z,t)}{\partial z} \right], \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (4.26)$$

где операторы c_{ij} , b_{ij} ($i=1,2; j=1,2$) определяются по формулам

$$c_{1i} = \sum_{n=0}^{\infty} G_1 \lambda_2^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[P_{n+1} - \left(\lambda_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1 \right) P_n \right] \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!};$$

$$\begin{aligned}
c_{2i} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left[\lambda_1 P_{n+2} - \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1 \right) P_{n+1} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\lambda_1 + G_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_n \lambda_2^2 \right] \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}; \\
c_{3i} &= \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{7,n}(r_i) G_1 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z} \left[P_{n+2} - \left(\lambda_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1 \right) P_{n+1} \right] \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{1}{r_i} G_1 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z}; \\
c_{4i} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \xi \eta_{7,n}(r_i) \lambda_1 \left[\lambda_1 P_{n+2} - \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_1 \right) P_{n+1} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\lambda_1 + G_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_n \lambda_2^2 \right] \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi}{r_i} G_1 \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \\
d_{li} &= -\sum_{n=0}^{\infty} G_1 \lambda_2^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[G_1 (A_{11} - A_{13}) P_n + \lambda_1 A_{13} P_{n-1} + \frac{G_1 (A_{12} - A_{11})}{2(n+1)} P_n \right] \frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2}; \\
d_{2i} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_1 A_{11} (\lambda_1 P_{n+1} - P_n \lambda_2^2) + A_{13} (\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) P_n - \right. \\
&\quad \left. - \frac{G_1 (A_{12} - A_{11})}{2(n+1)} (\lambda_1 P_{n+1} - \lambda_2^2 P_n) \right] \frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2}; \\
d_{3i} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1 \left\{ \eta_{6,n}(r_i) \frac{\partial}{\partial z} [G_1 A_{11} - G_1 A_{13} (P_{n+1} - \lambda_1 P_n)] + \right. \\
&\quad \left. + G_1 \eta_{7,n}(r_i) \frac{\partial}{\partial z} \frac{(A_{12} - A_{11})}{2(n+1)} P_{n+1} \right\} \frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2}; \\
d_{4i} &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1 \left\{ \eta_{6,n}(r_i) [G_1 A_{11} (\lambda_1 P_{n+1} - \lambda_2^2 P_n) + A_{13} (\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) P_n] + \right. \\
&\quad \left. + G_1 \eta_{7,n}(r_i) \frac{(A_{12} - A_{11})}{2(n+1)} (\lambda_1 P_{n+1} - \lambda_2^2 P_n) \right\} \frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2} + \xi \frac{(A_{12} - A_{11})}{r_i^2} \lambda_1 G_1.
\end{aligned}$$

При этом операторы λ_1^n , λ_2^{2n} , λ_3^n , P_n имеют вид

$$\lambda_1^n = A_{11}^{-n} \left\{ \frac{\rho}{1+c_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - A_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}^n,$$

$$\lambda_2^{2n} = A_{11}^{-n} \left\{ A_{33} \frac{\partial^4}{\partial z^4} + N_1 \rho^2 \frac{\partial^4}{\partial t^4} - N_2 \rho \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial t^2} \right\}^n,$$

$$\lambda_3^n = \left\{ N_3 \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - N_4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}^n, \quad N_1 = \frac{1}{(1+a_0)(1+c_2)} A_{44}^{-1},$$

$$N_2 = \frac{1}{1+a_0} + \frac{1}{1+c_2} A_{44}^{-1} A_{33}, \quad N_3 = \frac{1}{1+c_2} A_{11}^{-1} + \frac{1}{1+a_0} A_{44}^{-1},$$

$$N_4 = A_{11}^{-1} A_{44}^{-1} (A_{13} + A_{44})^2 - A_{44} A_{11}^{-1} - A_{33} A_{44}^{-1},$$

$$\lambda_2^2 P_{-1} = -1; \quad P_0 \equiv 0; \quad P_1 = 1; \quad P_2 = \lambda_3; \quad P_3 = \lambda_3^2 - \lambda_2^2;$$

$$P_4 = \lambda_3 (\lambda_3^2 - 2\lambda_2^2); \quad P_5 = \lambda_3^4 - 3\lambda_3^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^4.$$

Система уравнений (4.26) являются общими уравнениями продольно-радиальных колебаний цилиндрического слоя, из предварительно-напряженного трансверсально-изотропного вязкоупругого материала. Ограничиваясь тем или иным приближением из них можно получить приближенные уравнения, которые можно использовать при решении конкретных прикладных задач. Так ограничиваясь нулевым приближением выведена следующая система интегро-дифференциальных уравнений продольно-радиальных колебаний слоя

$$\begin{aligned} & \frac{r_i}{2} \left(\frac{\rho}{1+a_0} A_{11}^{-1} \left[\frac{\ddot{a}^3 U_{z,0}}{\ddot{a} t^2 \partial z} \right] - A_{33} A_{44}^{-1} \left[\frac{\ddot{a}^3 U_{z,0}}{\ddot{a} z^3} \right] \right) - \frac{r_i}{2} N_5 G_1^{-1} \left[\frac{\ddot{a}^2 U_{r,0}}{\ddot{a} z^2} \right] + \\ & + \frac{\xi}{r_i} \cdot \frac{\ddot{a} U_{z,1}}{\ddot{a} z} + \xi \frac{r_i}{2} \left(\ln \frac{r_i}{\xi} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{\rho}{1+a_0} A_{44}^{-1} \left(\frac{\ddot{a}^2}{\ddot{a} t^2} \right) - N_6 \frac{\ddot{a}^2}{\ddot{a} z^2} \right) \frac{\ddot{a} U_{z,1}}{\ddot{a} z} - \\ & - \xi N_5 G_1^{-1} (L + 2M)^{-1} \left(\frac{\rho}{1+c_2} A_{11}^{-1} \left[\frac{\ddot{a}^4 U_{z,1}}{\ddot{a} t^2 \partial z^2} \right] - A_{11}^{-1} A_{44} \frac{\ddot{a}^4 U_{r,1}}{\ddot{a} z^4} \right) \times \\ & \times \frac{r_i}{2} \left(\ln \frac{r_i}{\xi} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\xi}{r_i} \cdot \frac{\ddot{a}^2 U_{r,1}}{\ddot{a} z^2} = \frac{1}{1+c_2} A_{44}^{-1} \left[\frac{\partial f_{r_z}^{(i)}(z,t)}{\partial z} \right], \quad (i=1,2) \\ & - \xi \left(\ln \frac{r_i}{\xi} \left[\frac{1 + A_{12} A_{11}^{-1}}{2} - A_{11}^{-1} A_{13} \right] - \frac{1}{4} (A_{12} A_{11}^{-1} - 1) \right) \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (A_{12}A_{11}^{-1} + 1)U_{r,0} + \left(\ln \frac{r_i}{\xi} A_{12}A_{11}^{-1} - \frac{1}{2}(A_{12}A_{11}^{-1} - 1) \right) \times \\
& \times \left(\frac{\rho}{1+c_2} A_{11}^{-1} \left[\frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial t^2} \right] - A_{44}A_{11}^{-1} \left[\frac{\partial^2 U_{r,1}}{\partial z^2} \right] \right) + A_{13}A_{11}^{-1} \left[\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} \right] - \\
& - \frac{\xi}{r_i^2} (A_{12}A_{11}^{-1} - 1)U_{r,1} = \frac{1}{1+c_2} A_{11}^{-1} [f_{rz}^{(i)}(z,t)], \quad (i=1,2) \quad (4.27)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
N_5 G_1^{-1} &= A_{13}^{-1} A_{44} + 2A_{11} A_{33} A_{44}^{-1} (A_{13} + A_{44})^{-1}; \quad N_6 = N_5 - A_{33} A_{44}^{-1}; \\
N_5 &= A_{11}^{-1} A_{44} + 2A_{33} A_{44}^{-1} - A_{13} A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1} A_{44}^{-1} (A_{13} + A_{44})^2.
\end{aligned}$$

4.3. Уравнения крутильных колебаний кругового цилиндрического слоя, с учётом начальных перемещений

В цилиндрической системе координат (r, θ, z) рассматривается круговой цилиндрический слой с внутренним r_1 и внешним r_2 радиусами, причём $r_2 > r_1$.

Считается, что крутильные колебания цилиндрического слоя возбуждаются напряжениями на его поверхности

$$\sigma_{r\theta} = f_{r\theta}^{(i)}(r,t), \quad r = r_i \quad (i=1,2) \quad (4.28)$$

Движение слоя описывается уравнением

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} = \rho \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2}. \quad (4.29)$$

При крутильных колебаниях перемещения с учётом начальных перемещений имеют вид (3.11). Зависимости напряжений от малых возмущённых и однородных начальных перемещений имеют вид (3.12). Подстановка последних в уравнения движения (4.29) приводит к следующему уравнению

$$(1+b_1) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} U_\theta = \rho M^{-1} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2}. \quad (4.30)$$

Положим

$$U_{\theta} = \int_0^{\infty} \frac{\sin kz}{-\cos kz} \left. dk \int_l \bar{U}_{\theta} e^{pt} dp, \right. \quad (4.31)$$

тогда из (4.30) имеем

$$\frac{d^2 \bar{U}_{\theta}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \bar{U}_{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{U}_{\theta}}{\partial r} - k^2 \bar{U}_{\theta} - (1+b_1)^{-1} \rho p^2 \bar{M}^{-1} \bar{U}_{\theta} = 0$$

или если ввести обозначение

$$\beta^2 = k^2 + (1+b_1)^{-1} \rho p^2 \bar{M}^{-1}, \quad \bar{M} = \mu [1 - \bar{f}(p)],$$

то получим уравнение

$$\frac{d^2 \bar{U}_{\theta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{U}_{\theta}}{\partial r} - \left(\beta^2 + \frac{1}{r^2} \right) \bar{U}_{\theta} = 0, \quad (4.32)$$

общее решение которого равно

$$\bar{U}_{\theta} = A_1 I_1(\beta r) + A_2 K_1(\beta r). \quad (4.33)$$

Представив внешние воздействующие напряжения $f_{r\theta}^{(i)}(z, t)$ также в виде

$$f_{r\theta}^{(i)}(z, t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin kz}{-\cos kz} \left. dk \int_l \bar{f}_{r\theta}^{(i)} e^{pt} dp, \right. \quad r = r_i \quad (i=1, 2) \quad (4.34)$$

и подставив их в граничные условия (4.28) будем иметь уравнения

$$\frac{\partial \bar{U}_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \bar{U}_{\theta} = \frac{1}{1+b_1} \bar{M}^{-1} [\bar{f}_{r\theta}^{(i)}], \quad r = r_i \quad (i=1, 2) \quad (4.35)$$

которые после подстановки в них общих решений (4.33) принимают вид

$$\begin{aligned} & \beta [A_1 I_0(\beta r_i) - A_2 K_0(\beta r_i)] - \frac{2}{r^2} [A_1 I_1(\beta r_i) + A_2 K_1(\beta r_i)] = \\ & = \frac{1}{1+b_1} \bar{M}^{-1} [\bar{f}_{r\theta}^{(i)}] \quad (i=1, 2) \end{aligned}$$

или

$$\beta [A_1 I_1(\beta r_i) - A_2 K_2(\beta r_i)] = \frac{1}{1+b_1} \bar{M}^{-1} [\bar{f}_{r\theta}^{(i)}], \quad (i=1, 2). \quad (4.36)$$

Разложим в ряды по r решение (4.33)

$$\bar{U}_\theta = \frac{A_2}{\beta^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_1 + A_2 \left[\ln \frac{\beta r}{2} - \frac{1}{2} \psi(n+1) - \frac{1}{2} \psi(n+2) \right] \right\} \frac{(\beta r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}.$$

и введем главные части преобразованного крутильного перемещения \bar{U}_θ промежуточной поверхности слоя, радиус которой как и в предыдущих параграфах определяется по формуле (4.12). Положим

$$A_{10} = \frac{2}{\beta} \bar{U}_{\theta,0}; \quad A_2 = \beta \xi \bar{U}_{\theta,1}, \quad (4.37)$$

где $A_{10} = A_1 + A_2 \left[\ln \frac{\beta \xi}{2} - \frac{1}{2} \psi(1) - \frac{1}{2} \psi(2) \right]$.

Подставив последние значения постоянных интегрирования A_i в разложения преобразованного крутильного перемещения, получим

$$\bar{U}_\theta = \left[\frac{r}{\xi} + \xi \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{4,n} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \beta^{2n+2} \right] \bar{U}_{\theta,1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \beta^{2n} \bar{U}_{\theta,0}. \quad (4.38)$$

где

$$\eta_{4,n}(r) = \ln \frac{r}{\xi} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k(k+1)}. \quad (4.39)$$

В выражении (4.38) функция $\bar{U}_{\theta,1}$ имеет размерность перемещения, а $\bar{U}_{\theta,0}$ размерность деформации, т.е. безразмерная величина.

Аналогично, разложив в степенные ряды по степеням r_i граничные условия (4.3б) получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{\beta^2 r_i^2} \right) \beta A_2 + \sum_{n=0}^{\infty} [A_{10} + \eta_{5,n}(r_i) A_2] \frac{\beta^{2n+3} (r/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!} = \\ & = \frac{1}{1+b_1} \bar{M}^{-1} \left[\bar{f}_{r\theta}^{(i)}(k, p) \right]; \quad (i=1, 2), \end{aligned} \quad (4.40)$$

где $\eta_{5,n}(r_i) = \eta_{4,n}(r_i) = \frac{1}{n+2}$.

Подставив значения выражения (4.37) в разложения граничных условий (4.40) получим

$$\xi \left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{2}{r_i^2} \right) \bar{U}_{\theta,1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!} \beta^{2n+2} \bar{U}_{\theta,0} + \quad (4.41)$$

$$+ \xi \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{5,n} \frac{(r/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!} \beta^{2n+4} \bar{U}_{\theta,1} = \frac{1}{1+b_1} \bar{M}^{-1} \left[\bar{f}_{r\theta}^{(i)}(k, p) \right], \quad (i=1,2).$$

Обратив последние уравнения по r и p получим систему уравнений

$$c_{1i} U_{\theta,0} + \xi c_{2i} U_{\theta,1} = \frac{1}{1+b_1} \bar{M}^{-1} \left[\bar{f}_{r\theta}^{(i)}(k, p) \right], \quad (i=1,2) \quad (4.42)$$

где

$$c_{1i} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_i/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!} \lambda_1^{n+1}; \quad \lambda_1^n = \left\{ \frac{\rho}{1+b_1} M^{-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}^n;$$

$$c_{2i} = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 - \frac{4}{r_i^2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{5,n} (r_i) \frac{(r_i/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!} \lambda_1^{n+1}.$$

Система уравнений (4.42) являются общими уравнениями крутильных колебаний изотропного вязкоупругого кругового цилиндрического слоя, с учётом начальных напряжений. При нулевом приближении система (4.42) примет вид

$$\frac{r_1^2}{4} \lambda_1 U_{\theta,0} + \xi \left\{ \frac{1}{2} \left(\lambda_1 - \frac{2}{r_1^2} \right) + \left(\ln \frac{r_1}{\xi} - \frac{1}{2} \right) \frac{r_1^2}{8} \lambda_1^2 \right\} U_{\theta,1} =$$

$$= \frac{1}{1+b_1} \bar{M}^{-1} \left[\bar{f}_{r\theta}^{(1)}(k, p) \right], \quad (4.43)$$

$$\frac{r_2^2}{4} \lambda_1 U_{\theta,0} + \xi \left\{ \frac{1}{2} \left(\lambda_1 - \frac{2}{r_2^2} \right) + \left(\ln \frac{r_2}{\xi} - \frac{1}{2} \right) \frac{r_2^2}{8} \lambda_1^2 \right\} U_{\theta,1} =$$

$$= \frac{1}{1+b_1} \bar{M}^{-1} \left[\bar{f}_{r\theta}^{(2)}(k, p) \right],$$

где
$$\lambda_1 = \frac{\rho}{1+b_1} M^{-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Далее приведем формулы для определения напряженно-деформированного состояния слоя. Обратив по Фурье и Лапласу выражение (4.38) получим формулу для перемещения U_θ через искомые функции $U_{\theta,0}$ и $U_{\theta,1}$

$$U_\theta(r, z, t) = g_1 U_{\theta,0} + g_2 U_{\theta,1}, \quad (4.44)$$

где
$$g_1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \lambda^n, \quad g_2 = \frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{4,n}(r) \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \lambda^{n+1}.$$

Используя вышеуказанную аналогию легко записать формулы для компонент напряжения через искомые функции

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} &= (1+b_1)M \left[c_1 U_{\theta,0} + \xi c_2 U_{\theta,1} \right], \\ \sigma_{z\theta} &= (1+b_1)M \left[g_1 \frac{\partial U_{\theta,0}}{\partial z} + \xi g_2 \frac{\partial U_{\theta,1}}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (4.45)$$

где $c_1 = c_{1i} \Big|_{r=r}$; $c_2 = c_{2i} \Big|_{r=r}$.

Формулы (4.44) и (4.45) позволяют определить значения перемещений и напряжений в той или иной точке произвольного сечения слоя.

4.4. Уравнения крутильных колебаний трансверсально-изотропного цилиндрического слоя, с учетом начальных перемещений

Как и в предыдущем параграфе рассмотрим предварительно-напряженный цилиндрический слой постоянной толщины, при этом ось z направим по оси симметрии цилиндрического слоя, полярную ось r – произвольно, в плоскости поперечного сечения.

Процедура разработки уравнений аналогично методу, приведенному в предыдущем параграфе, результаты которого здесь будут обобщены на случай учёта трансверсально-изотропных свойств материала слоя. Начальные крутильные перемещения определяются по формуле (3.5), с учётом которых зависимости напряжений от

малых возмущенных и однородных конечных деформаций имеют вид (3.16).

Введем обозначение

$$A_{11} - A_{12} = 2M, \quad A_{44} = M',$$

$$(M, M')\zeta = (\mu, \mu') \left\{ \zeta(t) - \int_0^t [f_1(t - \xi), f_2(t - \xi)] \zeta(\xi) d\xi \right\},$$

где $f_1(t) = a_{44}f_{44}(t)$, $f_2(t) = \frac{a_{11}f_{11}(t) - a_{12}f_{12}(t)}{2\mu}$, a_{11}, a_{12}, a_{44} - упругие

константы определяемые по формулам (3.14). С учётом этих обозначений напряжения $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{z\theta}$ имеют вид

$$\sigma_{r\theta} = M \left[\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_r}{r} \right], \quad \sigma_{z\theta} = M' \left[\frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right],$$

подстановка которых в уравнения движения (4.29) приводит к следующему

$$M \left[\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} \right] + \frac{1}{r} M \left[\frac{\partial U_\theta}{\partial r} \right] - \frac{1}{r^2} M \left[\frac{\partial U_\theta}{\partial r} \right] + M' \left[\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} \right] = \frac{\rho}{1+b_1} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2}. \quad (4.46)$$

Представив крутильное перемещение в виде (4.31) и подставив его в (4.46) получим уравнение для определения \bar{U}_θ

$$\frac{d^2 \bar{U}_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{U}_\theta}{dr} - \left(\beta^2 + \frac{1}{r^2} \right) \bar{U}_\theta = 0, \quad (4.47)$$

общее решение которого равно

$$\bar{U}_\theta = A_1 I_1(\beta r) + A_2 K_1(\beta r), \quad (4.48)$$

где $\beta^2 = \bar{M}^{-1}(\bar{M}'k^2 + (1+b_1)^{-1}\rho p^2)$, $\bar{M} = \mu[1 - \bar{f}(p)]$, $\bar{M}' = \mu'[1 - \bar{f}(p)]$

Подставив в преобразованные по Фурье и Лапласу граничные условия общее решение (4.48), получим

$$\beta [A_1 I_2(\beta r_i) + A_2 K_2(\beta r_i)] = \frac{1}{1+b_1} \bar{M}^{-1} [\bar{f}_{r\theta}(z, t)] \quad (4.49)$$

В выражениях (4.48) разложив функции Макдональда в степенные ряды по степеням радиальной координаты r и введя вспомогательные функции по формулам (4.37) можно получить

выражение для преобразованного крутильного перемещения имеющий вид (4.38), которое после обращения примет вид

$$U_{\theta}(r, z, t) = g_1 U_{\theta,0} + g_2 U_{\theta,1}, \quad (4.50)$$

где

$$g_1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \lambda^n, \quad g_2 = \frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{4,n}(r) \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \lambda^{n+1},$$

$$\lambda = \frac{\rho}{1+b_1} M^{-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] - M^{-1} M' \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Аналогично разложив в степенные ряды по степеням r_i граничные условия (4.28) получены уравнения вида (4.40), и сделав обратный переход в последнем получена следующая система уравнений

$$\hat{c}_{1i} U_{\theta,0} + \xi \hat{c}_{2i} U_{\theta,1} = \frac{1}{1+b_1} \bar{M}^{-1} \left[\bar{f}_{r\theta}^{(i)}(k, p) \right], \quad (i=1, 2) \quad (4.51)$$

где

$$\hat{c}_{1i} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\rho}{1+b_1} M^{-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] - M^{-1} M' \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}^{n+1} \frac{(r_i/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!};$$

$$\hat{c}_{2i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{1+b_1} M^{-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] - M^{-1} M' \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4}{r_i^2} \right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{5,n}(r_i) \left\{ \frac{\rho}{1+b_1} M^{-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] - M^{-1} M' \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}^{n+1} \frac{(r_i/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!}.$$

Уравнения (4.51) являются общими уравнениями крутильных колебаний кругового цилиндрического слоя из предварительно-напряженного трансверсально-изотропного вязкоупругого материала, которые выведены для произвольных ядер вязкоупругих операторов. При $n=0$ эта система приводится к виду

$$\frac{r_i^2}{4} \left[\frac{\rho}{1+b_1} M^{-1} \left[\frac{\partial^2 U_{\theta,0}}{\partial t^2} \right] - M^{-1} M' \frac{\partial^2 U_{\theta,0}}{\partial z^2} \right] + \frac{2}{r_i^2} U_{\theta,1} -$$

$$\begin{aligned}
 & \xi \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\rho}{1+b_1} M^{-1} \left[\frac{\partial^2 U_{\theta,1}}{\partial t^2} \right] - M^{-1} M' \frac{\partial^2 U_{\theta,1}}{\partial z^2} \right] + \left(\ln \frac{r_i}{\xi} - \frac{1}{2} \right) \frac{r_i^2}{8} \times \right. \\
 & \times \left[\frac{\rho^2}{(1+b_1)^2} M^{-2} \left[\frac{\partial^4 U_{\theta,1}}{\partial t^4} \right] - 2M^{-2} M' \frac{\rho}{1+b_1} \left[\frac{\partial^4 U_{\theta,1}}{\partial t^2 \partial z^2} \right] - \right. \\
 & \left. \left. - M^{-2} (M')^2 \frac{\partial^4 U_{\theta,1}}{\partial z^4} \right] \right\} = \frac{1}{1+b_1} \bar{M}^{-1} \left[\tilde{f}_{r\theta}^{(i)}(k, p) \right], \quad (i=1,2) \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

где $M = (A_{11} - A_{12})/2$; $M' = A_{44}$.