

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI ALOQA, AXBOROTLASHTIRISH VA
TELEKOMMUNIKATSIYA TEXNOLOGIYALARI DAVLAT
QO'MITASI**

**TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
NUKUS FILIALI**

KOMP`YUTER INJINIRING FAKUL`TETI

“AXBOROT TA`LIM TEXNOLOGIYALARI” KAFEDRASI

«Kasb ta`limi» yunalishining 4- kurs talabasi

SULTONOV DAVRONBEK MAULENBERGENOVICHNING
«Akademik litsey o`quvchilariga mathcad sistemasida tenglamalar tizimini
echishni o`rgatish usuli» mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Kafedra mudiri:

f.-m.f.n. Sh. Allamuratov

Ilmiy raxbar:

f.-m.f.n. Sh. Allamuratov

Bitiruv malakaviy ishi kafedradan dastlabki himoyadan o`tdi
___ sonli bayonnamasi «___» _____ 2014 yil

Nukus-2014

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI ALOQA, AXBOROTLASHTIRISH VA
TELEKOMMUNIKATSIYA TEXNOLOGIYALARI DAVLAT
QO'MITASI**

**TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
NUKUS FILIALI**

KOMPYUTER INJINIRINGI FAKULTETI

«AXBOROT TA'LIM TEXNOLOGIYALARI» KAFEDRASI

TACDIQLAYMAN

Kafedra mudiri _____

«____» _____ 2014 .y.

Sultonov Davronbek Maulenbergovichning

**«Akademik litsey o'quvchilariga mathcad sistemasida tenglamalar
tizimini echishni o'rgatish usuli» mavzusidagi bitiruv malakaviy ishiga**

VAZIFA

Bitiruv malakaviy ishning mavzusi' TATU NF-ning «____» _____ 2014y
buyrug'i bilan tasdiqlandi.

Ishni topshirish muddati: «____» _____ 2014-yil.

Berilgan ishga tegishli ma'lumotlar: diplom praktikasi materiallar', ma'ruza
materiallari', ilmiy adabiyotlar va Internet materiallari.

Bitiruv malakaviy ish mazmuni':

Kirish.

§1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echish usullari

§2 . Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini sonli echish usullari

§3. Chiziqli algebraik tenglamalar tizimini MathCad ta echish

Xulosa

Foydalanilgan adabiyotlar

Vazifa berilgan sana

«____» _____ 2014-yil.

Ilmiy raxbar _____

Vazifani oldi _____

Bitiruv malakaviy ishi paragraflar bo'yicha maslaxatchilar.

Paragraflar	Maslaxatchi	Imzo, sana	
		Vazifani berdi	Vazifani qabulladi
1	Allamuratov Sh.Z		
2	Allamuratov Sh.Z		
3	Allamuratov Sh.Z		

Ishni bajarish rejasi:

№	Bob nomi	Bajarish muddati	Ilmiy raxbar (maslaxatchi imzosi')
1.	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echish usullari	10.02.2014	
2.	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini sonli echish usullari	10.03.2014	
3.	Chiziqli algebraik tenglamalar tizimini MathCad ta echish	10.04.2014	
4.	Titul beti , mundarija, adabiyotlar ruyxati, annotatsiya	10.05.2014	
5.	POWER POINT dasturida dokladning slaydini yaratish	10.06.2014	

Bitiruvchi _____

«____»_____ 2014 -yil.

Ilmiy raxbar _____

«____»_____ 2014 -yil.

АННОТАЦИЯ

В данной выпускной квалификационной работе рассмотрены решения задачи системы линейных алгебраических уравнений с помощью численных методов. Кроме того приведены приближенные методы решения системы линейных алгебраических уравнений в системе MathCad.

ANNOTATSIYA

Mazkur bitiruv malakaviy ishida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini sonli echish usullari qaralgan. Bundan tashqari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini taqriybiy echish usullari MathCad tizimida keltirilgan.

SUMMARY

In the given final qualifying work the decisions of a task of system the linear algebraic equation with the help of numerical methods are considered.

Besides the approached methods of the decision of system the linear algebraic equation in system MathCad are given.



Mundarija

Kirish.....	6
§1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echish usullari.....	9
1.1. Noma`lumlarni ketma-ket yo`q qilish yoki Gauss usuli	9
1.2 . Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularning xossalari.....	13
1.3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini determinantlar yoki Kramer usulida echish	17
1.4 n-nomalumli m-tenglamalar sistemasi uchun Kroneker–Kapelli teoremasi	20
§2 . Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini sonli echish usullari.....	27
2.1. Oddiy iteratsiya usuli.....	27
2.2. Zeydel` usuli.....	33
§3. Chiziqli algebraik tenglamalar tizimini MathCad ta echish.....	35
Xulosa.....	48
Foydalanilgan adabiyotlar.....	50
Texnika xavfsizligi qoidalari.....	51

Kirish

Bu murakkab dunyoning azaliy va abadiy muammolari, shu bilan birga, har bir davrning dolzarb masalalariga har tomonlama asosli ilmiy javoblar topilgan taqdirdagina ma'naviyat olami yangi ma'no-mazmun bilan boyib boradi. Boshqacha aytganda, har bir ilmiy yangilik, yaratilgan kashfiyot-bu yangicha fikr va dunyoqarashga turtki beradi, ma'naviyatning shakllanishiga o'ziga xos ta'sir o'tkazadi.

Shu nuqtai nazardan qaraganda, zaminimizda yashab utgan buyuk allomalarimiz, mutafakkir bobolarimizning ibratli hayoti va faoliyati, bemisl ilmiy-ijodiy kashfiyotlari bugun ham jahon ahlini hayratga solayotganini g'urur bilan ta'kidlash lozim.

Masalan, Muhammad Muso Xorazmiyning o'nlik sanoq sistemasini, algoritm va algebra tushinchalarini dunyoda birinchi bo'lib ilm-fan sohasiga joriy etgani va shu asosda aniq fanlar rivoji uchun o'z vaqtida mustahkam asos yaratgani umuminsoniy taraqqiyot rivojida qanday katta ahamiyatga ega bo'lganini barchamiz yaxshi bilamiz. [1]

Mavzuning dolzarbligi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini sonly echish amaliy matematikaning' muhim masalalaridan biridir. Fizika, mexanika, texnika va umuman tabiatshunoslikning xilma-xil masalalari algebraik tenglamalar tizimini echishga olib keladi. Masalan, mexanik sistema terbanishi chastotalarining kvadratlari matritsalar xarakteristik tenglamalarining ildizlari bo'ladi, bunday tenglama esa n - darajali algebraik tenglamalardir.

Ikkinchi tomondan, amaliy matematikaning extiyojlari ham bunday tenglamalarni echishni taqoza etadi. Masalan, noma'lumlarni yo'qotish yoli bilan murakkab algebraik munosabatlar ikkinchi yoki yuqori darajali algebraik tenglamalarga keltiriladi [9]. Ma'lumki, darajasi to'rtidan yuqori bo'lgan algebraik tenglamalarni echish uchun aniq usullar mavjud emas. Shuning uchun ham bunday tenglamalarning taqribiy echimlarni etarlicha aniqlik bilan topish

imkonini beradigan usullar kerak. Mana shunday talabga javob beradigan hozirgi hisoblash matematikasining tutgan o'рни ahamiyatli. Shu boistam mavzu ilmiy va amaliy jihatdan dolzarb deb hisoblash mumkin.

Tadqiqot obyekti. Chiziqli algebraik teng'lamalar sistemasi bitiruv malakaviy ishining tadqiqot obyektidir. Chiziqli algebraik teng'lamalar sistemasini taqribiy yechish usullari yetarlicha mufassal [2,3,4,5,6,7] adabiyotlarda keltirilgan.

Ishning amaliy ahamiyati. Bitiruv malakaviy ishidan «Hisoblash matematikasi» va «Hisoblash usullari» fanlaridan bo'ladigan amaliy mashg'ulotlarda, seminar mashg'ulotlarida, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini sonli yechish bilan bog'liq tanlov fanlari mashg'ulotlarida foydalanish mumkin. Informatsion texnologiyaning hozirgi kundagi fan va texnikaning xilma-xil sohalaridagi qullanilishida, amalga oshishida shaxsiy komp'yuterlarning, internet tarmog'ining o'рни beqiyosdir.

Shuningdek ushbu bitiruv malakaviy ish algebraik chiziqli tenglamalar sistemasini echish usullarini va MathCad tizimida dasturiy ta'minotini yaratishga bag'ishlangan.

Malakaviy bitiruv ish kirish, ikkita paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlardan iborat. Ishning birinchi paragrafida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini analitik echish usullaridan noma'lumlarni ketma-ket yo'q qilish yoki Gauss usuli va Kramer usuli keltirilgan. Ikkinchi paragrafta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini sonli echish usullari atay aytkanda iteratsiya va Zeydel usullari keltirilgan. Sungida Gauss va zeydel usullariga MathCad ta dastur yaratilgan. Biz ushbu malakaviy bitiruv ishida shu usullarning keng ko'llanadiganlarini va tajribada sinalganlarini keltiramiz.

Ishning tuzilishi.

Mazkur bitiruv malakaviy ish kirish uchta paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar tizimidan iborat bo'lib jami 50 betdan iborat.

Birinchi paragrafta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echish usullaridan noma'lumlarni ketma-ket yo'q qilish yoki Gauss usuli, ikkinchi paragrafta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini sonli echish usullaridan oddiy iteratsiya usuli va Zeydel` usuli keltirilgan, uchinchi paragrafta esa chiziqli algebraik tenglamalar tizimini echish uchun MathCad tizimida dasturiy ta'minot yaratilgan.

1.1. Noma`lumlarni ketma-ket yo'q qilish yoki Gauss usuli

[illegible]
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} \cdot \boldsymbol{a}_{12} \dots \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} \cdot \boldsymbol{a}_{22} \dots \boldsymbol{a}_{2n} \\ \\ \boldsymbol{a}_{S1} \cdot \boldsymbol{a}_{S2} \dots \boldsymbol{a}_{Sn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

9

nollardan iborat bulsa, unda matritsaning tartibi n ga teng birlik matritsa deyiladi. $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$ sonlari (1) tizimning yechimi bulishi uchun ularni tizimga quyganda har bir tenglama ayniyatga aylanishi kerak. $k_1, k_2, \dots, k_n$ sonlari tizimning n -yechimi deb tushinmaslik kerak, ular faqat bitta yechimini beradi.

(1)-tizimning yechimining bor yoki yuq bulishiga qarata tizim ikkiga bo'linadi. Agarda (1) tizimning yechimi bor bo'lsa, tizim birgalki deyiladi va yechim faqat bitta bulsa, birgalki va aniq tizim deyiladi. Agar tizimning cheksiz ko'p yechimi bulsa, tizim birgalki, faqat aniq emas deyiladi. Agarda berilgan tizimning yechimi bulmasa tizim birgaliksiz deyiladi.

Endi Gauss usulini bayon etishga o'taylik.

Mayli (1)-tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin va $a_{11} \neq 0$ sistemadagi birinchi tenglamadan boshka barcha tenglamadan x_1 ni yo'q qilamiz. Uning uchun birinchi tenglamani ketma-ket $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, -\frac{a_{S1}}{a_{11}}$ sonlariga ko'paytirib mos ikkinshi, uchinchi va shunday davom etib eng oxirgi S -chi tenglamaga qo'shaylik. Shunda (1) sistema quydagi tizimga ekvivalent bo'ladi.

[illegible]

Agar a'_{ik} larning tuzilishini yozish kerak bo'lsa, unda uni oson xisoblashga bo'ladi. Misol a'_{22} ning qanday tuzilganini kursataylik

$$a_{12} \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) + a_{22} = a'_{22}$$

(3)-tizimni quydagisha turlandiraylik va $a'_{22} \neq 0$, uning uchun (1)-tizimning 1 va 2-tenglamalarini qoldirib uchinchi tenglamasidan boshlab x_2 ni barcha boshqa

tenglamalardan yuk qilamiz. shunda olingan tenglamalar tizimi (1)-ga ekvivalent bo'ladi.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a''_{33}x_3 + ... + a''_{3n}x_n = b''_2 \\ \\ a'''_{tn}x_3 + ... + a'''_{tn}x_n = b'''_t \end{array} \right. \quad (4)$$

So'ngi tizimda $t \leq S$ tenglama bor, sababi tizimda bazi tenglamalar tushirib qoldirilgan bo'lishi mumkun.

Shunday davom eta veramiz. Bu jarayon qanday vaqitta to'xtaydi? Birinchidan aylandirib bulgan sung shunday xolga kelamiz, u xam bulsa, tenglamaning chap tomondagi noma'lumlarning koeffitsientlarining hammasi nulga teng bo'ladi, ozod xad nuldan o'zgacha bo'ladi. Bu qarama-qarshilik.

U tizimning noma'lum ekanining isboti, yaniy tizim yechimga ega emas.

Bunday hol uchiramasa, biz quydagi holga kelamiz.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,k-1}x_{k-1} + a_{1,k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2,k-1}x_{k-1} + a'_{2k}x_k + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \\ a^{(k-2)}_{k-1,k-1}x_{k-1} + a^{(k-2)}_{k-1,k}x_k + \dots + a^{(k-2)}_{k-1,n}x_n = b^{(k-2)}_{k-1} \\ a^{(k-1)}_{kk}x_{k-1} + \dots + a^{(k-1)}_{kn}x_n = b^{(k-1)}_k \end{array} \right. \quad (5)$$

Oxirgi tizimda $a_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0, \dots, a_{k-1, k-1}^{(k-2)} \neq 0; a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. shuning bilan birga $k \leq S$, albatte $k < S$ bo'lishi mumkin.

Agar $k = n$ bulsa, tizim aniq, $k < n$ bulsa tizim noaniq bo'ladi.

Agarda $k = n$ buladigan balsa, u holda (5) tizim quydagi shaklga keladi.

(6)

Berilgan tizimni echimi topiladi. Agarda $k < n$ bo'lsa, $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ larni ozod noma'lumlar dep ataymiz va ularni tenglikning o'ng tarafga chiqaramiz. Olingan tizimni $x_1, x_2, \dots, x_k$ larga nisbatan echamiz. $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ larga hohlagan son berish mumkinchiligimiz cheksiz bo'lgani uchun, (6) tizimning ham echimlarining soni cheksiz bo'ladi.

Ushbu aytilgan usilni bir jinsli, yani ozod hadlari nul'ga teng bulgan chizikli tenglamalar tizimini echishga ham qo'llanish mumkin. Birjinsli tizim birinchidan barcha vaqтта birjinsli, sababi tizimning $(0,0,...0)$ echimi bor bo'ladi. Mayli birjinsli tizimda noma'lumlarning soni tenglamalarning sonidan katta bo'lsin. Tepada aytilgan usil buyicha berilgan tizimni aylantirganda tenglamalar soni kamayishi mumkin, shuning uchun olingan tizim birjinsli, lekin noaniq bo'lib chiqadi.

Gauss usuli bilan masalalarni echkanda berilgan tizimning noma'lumlarning turgan joylariga qarata matritsani tuzish kerak, matritsaga esa yana bitta ustun–ozod hadlar ustunini qushib yozish kerak. Uning ozod xadlar ustuni ekanligini ko'rsatish uchun bitta tug'ri tik chiziq yurg'azsa bo'ladi. Shundan sung kengaytirilgan matritsani aylantirgan maqul bo'ladi.

Masalan: Quydagi tizimni eching

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

Kengaytirilgan matritsani tuzaylik.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array} \right)^{x(-1)+x(-3)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array} \right)^{x(-4)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array} \right)$$

$$\sim \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ -3x_2 - 2x_3 = 11 \\ -8x_3 = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = -1 \end{matrix}$$

1.2 . İkkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularning xossalari

Mayli, bizga ikki noma'lumli ikki chizikli tenglamalar tizimi berilgan bo'lsin. Uni quydagi kurinishda yozaylik [12].

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

Ularining koeffitsientlaridan ikkinchi tartibli kvadrat matritsa tuzaylik.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Koeffitsientlarini tenglashtirish yuli bilan (1) tizimni echsak, unda

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}; \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad (3)$$

Bundagi $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ deb faraz qilamiz. (3)-den quydagicha fikir yurg`azish mumkin.

Birinchidan x_1, x_2 larning maxraji bir xil va ular faqat x_1 va x_2 koeffitsientlaridan tuzilgan. İkkinchidan (2)-ning bosh diogonalı buyicha joylashgan elementlarning kupaytmasidan ikkinchi yoki yon diogonal buyicha

joylashgan elementlarning kupaytmasi olingan. Ushbu aytilgan tartibta xisoblangan sonni ikkinchi tartibli determinant deb ataymiz va matritsadan farqlash uchun uni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ deb belgilaymiz. Shunda } \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} \text{ boladi}$$

$$\text{Undagi amal } \Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\text{Masalan } \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 14$$

Endi (3)-dagi ikki tenglikning suratining tuzilishini kuraylik. x_1 ning tengligidagi suratida x_1 ning koeffitsientlari sifatida turgan ustunning urniga ozod hadlar joylashib hisoblangan, x_2 ning tengligidagi suratida x_2 ning koeffitsientlari bulib turgan ustunning urniga ikkinchi tartibli determinantni xisoblash qoidasini eska olsak, (3) dagi ikki tenglikni quydagicha yozish mumkin

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (4)$$

Masalan

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot 7 - 5 \cdot 2}{2 \cdot 7 - 3 \cdot 5} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1}{2 \cdot 7 - 3 \cdot 5} = -1 \quad (x; y) = (3; -1)$$

Endi uch noma'lumli uch chizikli tenglamadan tuzilgan tizim berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (5)$$

Uning noma'lumlarining koeffitsientlaridan quydagi matritsanı tuzamiz.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (6)$$

(5)-dagi birinshi tenglamani $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$ songa, ikkinchi tenglamani $-(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$ songa va uchinchi tenglamani $(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$ songa kupaytirsak va uch tenglamani bir-biriga qushsak keyin uxshash hadlarini yig'ishtirgandan sung quydagi tenglikka ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - \\ & - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - \\ & - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32} \end{aligned} \quad (7)$$

Bundagi x_1 ning koeffitsientini (6) matritsaga mos uchinchi tartibli determinant deb ataymiz

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

va deb belgilaymiz. Bundagi aniqlangan amal

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned} \quad (8)$$

Uchinchi tartibli determinantni ushbu sxemada hisoblash sarrus qoidasi dep ataladi.

Endi (7) formulaga qaytib kelsak x_1 ning koeffitsientini ung tarafdagi a'zolar bilan birma-bir taqqoslasak, biz birinchi ustunning elementlarining ozod hadlardan iborat ustun bilan olmashtirishini kuramiz. Shuning uchun ung tarafdagi a'zolari ham determinant ko'rinishda yozish mumkin.

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (9)$$

(8) qoida buyicha uchinchi tartibli determinantni hisoblasak, unda (7) ning ung tarafini olishimiz so'zsiz.

Endi (5) ning birinchi tenglamasini $a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$ songa, ikkinchi tenglamasini $a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$ songa va uchinchi tenglamasini $a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$ songa kupaytirib, uch tenglamani bir-biriga qushamiz. Sung uxshash hadlarni yig'ishtirgandan sung qandaydir tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglikni yaxshilab qarasak x_2 ning koeffitsienti x_1 ning koeffitsientidek ekanligini ko'ramiz. x_2 ning koeffitsientini ung tarafdagi a'zolar bilan birma-bir taqqoslasak, biz ikkinchi ustun elementlarining ozod hadlardan turadigan ustun bilan almashkanligini ko'ramiz. Uni quydagi determinant formasida yozamiz.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad (10)$$

Eng oxirida (5) ning birinchi tenglamasi $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$ songa, ikkinchi tenglamasi $a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}$ songa va uchinchi tenglamasini $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ songa kupaytirib, uch tenglamani bir-biriga qushsak va uxshash hadlarini yig'ishtirsak faqat x_3 qatnashgan ifodaga ega bo'lamiz.

x_3 ning koeffitsientining x_1 va x_2 larning koeffitsientlari singari bo'lganligini ko'ramiz. x_3 ning o'ng tarafidagi a'zolari bilan birma-bir taqqoslasak, biz uchinchi ustunning elementlarining ozod hadlaridan iborat ekanligini ko'ramiz. Uni quydagi determinant shaklida yozamiz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \quad (11)$$

sung (9) ni Δ_1 , (10) ni Δ_2 va (11) ni Δ_3 deb belgilash kiritamiz, unda x_1 , x_2 va x_3 lar uchun quydagi formulalarni yozamiz

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Bu formula Kramer formulasi deb ataladi. Kramer Gabriel` (1704-1752)-Shveytsariyalik matematik.

1.3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini determinantlar yoki Kramer usulida echish

Mayli, bizga n noma`lumli  $n$  tenglamalar tizimi berilgan bo`lsin [9]

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-----} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{ns}x_s + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Agarda x_i ($i = \overline{1, n}$) noma`lumlarini mos β_i ($i = \overline{1, n}$) sonlar bilan olmashtirganda (1) tenglamaning har biri ayniyatga aylansa, u holda $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ sonlar tuplamini (1) tenglamalar tizimining echimi dep ataymiz.

Tizimning noma`lumlarining oldindagi koeffitsientlardan quydagi determinantni tuzamiz.

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ns} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Buni (1) tizimning determinanti deymiz. Endi $d \neq 0$ bo`lganda tenglamalar tizimining echimining qanday topilishini ko`raylik. Biz, determinantning qaysi bir satr yoki ustunin olmaylik, determinant d hamma vaqt ushbu satr yoki ustun elementlari bilan ularning mos algebraik

to'ldiruvchilarining yig'indisiga teng bo'lishini bilamiz, boshqacha qilib aytganda

$$d = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}. \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

bulishi tushinarli.

Shunga uxshash, qandaydir satr yoki ustun elementlari bilan boshqa satr yoki ustunning mos elementlariga tegishli algebraik to'ldiruvchilardan tuzilgan ko'paytmalarning yig'indisi nol'ga teng bulishi aniq, boshqacha aytganda

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j) \quad (4)$$

bo'ladi.

Endi (1) tizimning tenglamalarini mos $A_{1S}, A_{2S} \dots A_{SS} \dots A_{nS}$ larga kupaytirib keyin tenglamalarni a'zoma-a'zo qo'shamiz. U paytta quydagiga ega bo'lamiz

$$(a_{11}A_{1S} + a_{21}A_{2S} + \dots + a_{n1}A_{nS})x_1 + (a_{12}A_{1S} + a_{22}A_{2S} + \dots + a_{n2}A_{nS})x_2 + \dots + (a_{1S}A_{1S} + a_{2S}A_{2S} + \dots + a_{nS}A_{nS})x_S + \dots + (a_{1n}A_{1S} + a_{2n}A_{2S} + \dots + a_{nn}A_{nS})x_n = b_1A_{1S} + b_2A_{2S} + \dots + b_nA_{nS}.$$

Lekin, bu (4) formulaga muvofiq quydagi

$$a_{1k}A_{1S} + a_{2k}A_{2S} + \dots + a_{nS}A_{nS}. \quad (k \neq S)$$

ko'rinishdagi barcha yig'indilarga teng. Shuning uchun

$$a_{1S}A_{1S} + a_{2S}A_{2S} + \dots + a_{nS}A_{nS} = d$$

bo'lib, bunda boshqa barcha skobkalar yuqolib (3-formulaga qaralsin), na'tiyjada biz quydagiga erishamiz

$$d \cdot x_S = b_1A_{1S} + b_2A_{2S} + \dots + b_nA_{nS} \quad (5)$$

Endi (5) tenglamaning ung tarafi bilan shug'illanamiz.

$a_{1S}, a_{2S}, \dots, a_{nS}$ ko'effitsientlarining urniga ozod hadlar quyilgan, yani s-chi ustun bilan d dan farq beradigan, ushbu

$$d_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantni olaylik va uni s -chi ustun elementlari buyicha yoysak, unda (5) tenglamaning s uchi tarafining xuddi uzi kelib chiqadi. Demak, (5) ni quydagicha yozish mumkin.

$$d \cdot x_s = d_s \quad (6)$$

Agarda $d \neq 0$ bo'lsa, unda $x_s = \frac{d_s}{d}$ ($s=1,2,\dots,n$)

Bundan

$$x_1 = \frac{d_1}{d}; \quad x_2 = \frac{d_2}{d}, \dots, x_n = \frac{d_n}{d} \quad (7)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ (1) tenglamalar tizimining qandaydir echimi bo'lsin. (1) tenglamalardan har bir x_i ning o'rniga mos β_i sonlari bilan almashtirib, biz (1) tizimning barcha tenglamalarini ayniyatka aylantiramiz. Tizim (6) ni hosil qilish uchun (1) tenglamalar tizimi u'stida qanday turlandirishlar olib borilgan bo'lsa, oxirgi ayniyatlar ustida ham xuddi shunday turlandirishlarni bajaramiz. U bilan biz ayniyatlarni buzmagani bo'lamiz va quydagi natijaga erishamiz

$$d \cdot \beta_1 = d_1, \quad d \cdot \beta_2 = d_2, \dots, d \cdot \beta_n = d_n,$$

Shunday qilib, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ sonlari (1) tizimning echimi bo'lip topiladi. (7)-ifoda Kramer formulasi dep ataladi.

Kramer qoidasining ahamiyati shunda, bu qoida qo'llanilishi mumkin bo'lgan hollarda tizimning echimi uchun bu tizimning koeffitsientlari lunda ifodani beradi. Lekin, Kramer qoidasini amaliyotta qo'llanish ko'p uzundan-uzoq xisoblashlar bilan bog'lik n noma'lumli n tenglamalar tizimi berilgan bo'lsa, unda n -tartibli $n+1$ determinantni xisoblashga tug'ri keladi. Bayon etilgan,

nomaʼlumlarni ketma-ket yuqotish usuli bu usıldan ancha qulayli, lekin bu usul talap etilgan xisoblashlar asosida n -tartibli bir determinantni xisoblashga tugʻri keladigan xisoblashlarga teng boʻladi.

Misol 2. Tizimni Kramer usulidan foydalanip eching.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Echimi:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 18 - 1 - 12 - 4 + 3 = 12; \quad d_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 24 - 3 - 16 + 9 + 2 = 12$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 4 - 9 + 1 + 16 = 24; \quad d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 27 + 1 + 12 + 6 + 12 = 36$$

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = 1; \quad x_2 = \frac{d_2}{d} = 2; \quad x_3 = \frac{d_3}{d} = 3.$$

misol- 2. Tizimni eching .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 18 \end{cases}$$

Bu tenglamalar tizimini Kramer usuli bilan echish mumkin emas. Yani $d = 0$. Gauss usuli bilan echkanda. Bu tizimning echimi $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$ ga teng boʻladi.

1.4. n -nomalumli m -tenglamalar sistemasi uchun Kroneker–Kapelli teoremasi

Endi, biz chizikli algebraik tenglamalar tizimin tekshirish masalasi bilan shugʻillanamiz. Mayli, bizga n nomaʼlumli m tenglamalar tizimi ($m \neq n$ boʻlishiyam mumkin) berilgan boʻlsin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Agarda (1)-tizimda $x_i (i = \overline{1, n})$ noma'lumlarni yani $x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n$ son qiymatlarini topish mumkin bo'lsa va u (1)-tizimning barcha tenglamalarini qanoatlantirsa, unda (1)-tizim birgalikli deyiladi. Bunda $\beta_i (i = \overline{1, n})$ qiymatlar ko'pligi-tizimning echimi deyiladi.

Agarda chizikli tenglamalarning birlalikli echimi faqat bitta echimga ega bo'lsa, u aniq tizim, agar cheksiz ko'p echimga ega bo'lsa, u holda aniq emas tizim deyiladi.

Berilgan (1)-tizimning noma'lumlarining oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan matritsani A orqali, B orqali esa ozod hadlarga tegishli ustunni A ga qo'shimcha ustun etib kirgizishdan hosil bo'lgan matritsani belgilaylik.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ \text{---} \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n}b_1 \\ \text{---} \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn}b_m \end{pmatrix}$$

Sungi B -matritsanı, biz A ning kengaytirilgan matritsasi dep ataymiz.

Teorema: Berilgan n -noma'lumli, m -tenglamalar tizimi echimga ega bulishi uchun, ushbu tizimning noma'lumlarining oldidagi koeffitsientlaridan tuzilgan matritsaning A rangi bilan kengaytirilgan matritsaning B rangi o'z-ora teng bo'lishi zarurli va etarli, yani $\text{rang}A = \text{rang}B$.

İsboti: Mayli (1)-tizim birgalikli bo'lsin u paytta, biz A va B matritsaning ranglarining birdek bulishini ko'rsatamiz. (1)-tenglamalar tizimi birgalikli bulganligi uchun $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ echimga ega. Bu echim $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_n b_n = b$, yani bu tenglik b vektorining b_1, b vektorlar orqali chizikli anglatilishini ko'rsatadi. Demak, B matritsaning rangin buzmadan B

dan vertikal b vektorini chiqazip tashlash mumkin. U holda, bizda A matritsasi paydo buladi. Bunnan $\text{rang}A = \text{rang}B$ ekanligi kelip chiqadi.

Aksincha. A va B matritsalarining ranglari teng bo'lsin. U payt (1)-tizimning birgalikta ekanligini ko'rsata olamiz. $\text{rang} A = r$ bo'lsin, unda A matritsada nol'dan farqli kamida bir r -chi tartibli d minori bor bo'lishi kerak. Mana, shu d determinant kengaytirilgan B matritsaning ham rangi bo'lishi kerak. d determinantni A va B matritsalarining yuqorgi chap burchagida joylashadi. U paytta A matritsaning r satri chizikli bog'lamsiz bo'lib, qolganlari shular orqali chizikli ifodalanadi. Shunday qilib, tizimning r tenglamalarini tegishli sonlarga ko'paytirib va ularni a'zoma-a'zo qo'shsak, biz qolgan tenglamalarda ham ushbu narsani keltirib chiqaramiz. r tenglamaning har qanday echimi yuqoridagi aytqanimizdek, qolgan tenglamalarni ham qanoatlantiradi.

Endi faqat, o' hol bulishi mumkin a) $r = n$ yoki b) $r < n$. Bu ikki holni alohida-alohida tekshirip chiqamiz. Agar $r = n$ bo'lsa, u holda tenglamadagi noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng bo'ladi, Shuning bilan birga tizimning determinanti $D \neq 0$. Bunday tizim, Kramer formulasi buyicha yolg'iz echimga ega bo'ladi.

Agar $r < n$ bo'lsa, unda tizimdagi tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kam bo'ladi. Ung tarafida ozod hadlar deb ataluvchi $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ noma'lumlarni o'tqazamiz. U paytta

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

kurinishga keladi. Bu tizimni $x_1, x_2, \dots, x_r$ larga qarata echish mumkin, sababi r -chi tartibli determinant $D \neq 0$.

Demak, $r = n$ bo'lgan hollarni tekshirip natijada, (1)-tizimning birgalikli ekanligiga ishonch hosil qilib quyamay, echilish usullarini ham ko'rsattik. Shundek, (1)-tizim birgalikli bo'lsa, unda $r = n$ bulganda tizim aniq ekanligin, $r < n$ bulsa, unda uning noaniqligini toptik. Birgalikli bo'lgan A matritsaning rangi noma'lumlar soniga teng bo'lgandagina, faqat shundagina yagona echimga ega bo'ladi. Teorema to'liq isbotlandi.

Mayli, bizga n -noma'lumli s-tenglamalar tizimi berilgan bo'lsin. Agarda ushbu tizimning ozod hadlarining barchasi nol'ga teng bo'lsa, $b_i = 0, (i = \overline{1, s})$, u holda quydagi tenglamalar tizimiga

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{S1}x_1 + a_{S2}x_2 + \dots + a_{Sr}x_r + a_{Sr+1}x_{r+1} + \dots + a_{Sn}x_n = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

ega bo'lamiz. (2)-tizim birjinsli tenglamalar tizimi dep ataladi. Kroniker-Kapelli teoremasi buyicha bu tizim barcha vaqitta birjinsli ekanligi kelib chiqadi, sababi nol'lardan iborat ustunning tuzilishi matritsaning rangini orttira olmaydi. Shu bilan birga (2)-tizim nol'lik echimga ega.

Aytaylik, (2)-tizimning koeffitsientlaridan tuzilgan A matritsaning rangi r ga teng bo'lsin. Agarda $r = n$ bo'lsa, unda nol'lik echim (2)-tizimning yagona echimi bo'ladi, $r < n$ bo'lganda tizim nol'lik echimlardan boshqa echimlarga ham ega bo'ladi va bu barcha echimlarni topish uchun yuqoridagi ixtiyoriy tenglamalar tizimi bo'lgan holdagi usil qo'llaniladi. Hususiy holda, n noma'lumli n chizikli birjinsli tenglamalar tizimining determinanti nol'ga teng bo'lganda,

Chiziqli bir jinsli tenglamalar tizimining echimlari quydagi xossaga ega. Agar $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ vektor (2) tizimning echimi bo'lsa, unda k qanday son bo'lmasin $k\beta = (kb_1, kb_2, \dots, kb_n)$ vektori ham ushbu tizimning echimi bo'ladi. Keyin, agarda $\gamma = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ vektori tizimning yanada bir echimi bo'lsa, unda $\beta + \gamma = (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_n + c_n)$ vektori ham berilgan tizimning echimi bo'ladi. Umuman olganda, birjinsli (2)-tizimning echimlarining har qanday chizikli kombinatsiyasi ham ushbu tizimning echimi bo'ladi, aksincha tizim birjinsli bo'lmaganda, tizimning echimlarining qandaydir songa ko'paytmasi, ikki echimning yig'indisi berilgan tizimning echimi bo'la olmaydi. Birjinsli tenglamalar tizimining echimlarining har qanday chizikli bog'liqsiz tizimi (2) tenglamalar tizimining fundamental echimlar tizimi deyiladi. (2)-tizim nol'lik emas echimlarga ega bo'lgan holda, yani uning koeffitsientlaridan tuzilgan matritsaning rangi noma'lumlar sonidan kichik bo'lgandagina fundamental echimlar tizimi bor bo'ladi.

İsboti: Mayli $n - r$ (2) tizimdagi $x_{r+1}, x_{r+2} \dots x_n$ ozod hadlar noma'lumlar bo'lsin. U holda tizim

24

Bu (3)-tizimga Kramer qoidasini qo'llash mumkin. Shunda, tartibi $n - r$ bo'lgan $d \neq 0$ tizim paydo bo'ladi. Uni quydagicha yozish mumkin.

$$d = \begin{vmatrix} c_{1,r+1} \dots c_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ c_{n-r,r+1} \dots c_{n-r,n} \end{vmatrix}$$

Bu determinantning i -satri ($1 \leq i \leq n - r$) elementlarin ozod noma'lumlar sifatida qarasak, unda $x_1, \dots, x_r$ lar uchun bir qiymatli aniqlangan aniq bir echimga kelimiz va uni vektor ko'rinishda quydagicha yozamiz

$$\alpha_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ir}, c_{ir+1}, \dots, c_{in})$$

Paydo bo'lgan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ vektorlar tizimi (2)-tizim uchun fundamental echimlar tizimi bo'ladi, sababi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ minimal chiziqli bog'liqsiz, aksincha minimal chizikli bog'liqsiz bo'lganda $d = 0$ bo'lar edi. Boshqacha aytkanda, matritsa $(n - r)$ tartibli nol'dan farqli d minoriga ega.

Ikkinchi taraftan, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$, (2)-tizimning boshqa hohlagan echimi bo'lsin. β vektorin $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ vektorlar orqali chizikli onglatilishini ko'rsatamiz. $\alpha'_i (i = 1, 2, \dots, n - r)$ orqali d determinantining $(n - r)$ o'lchovli vektor sifatida qaralyatkan i -satrini belgilaylik. Keyin $\beta' = (b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_n)$ desak, unda $\alpha'_i (i = 1, 2, \dots, n - r)$ vektorlar chizikli bog'liqsiz, sababi $d \neq 0$. Lekin $n - r$ o'lchovli $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-r}, \beta'$ vektorlar tizimi chizikli bog'liqli, sababi vektorlar soni ularning o'lchamidan katta. Aytaylik, shunday $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ sonlari bor bo'lsa,

$$\beta' = k_1 \alpha'_1 + k_2 \alpha'_2 + \dots + k_{n-r} \alpha'_{n-r} \quad (4)$$

bo'ladi.

Endi n o'lchovli

$$\Delta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n-r} \alpha_{n-r} - \beta$$

vektorin qaraylik. Δ -vektor (2)-birjinsli tenglamalar tizimi echimlarining chizikli kombinatsiyasi bo'lishi bilan birga, ushbu tizimning ham echimi bo'ladi. (4)-dan

Δ -echimda barcha ozod noma'lumlarning qiymatlari nol'ga teng ekanligi kelip chiqadi. Lekin (2) tenglamalar tizimining ozod noma'lumlarining qiymatlari nol'ga teng bo'lganda hosil bo'lgan birdan-bir echimi nol'lik echim bo'ladi. Shunday qilib, $\Delta = 0$ yani

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n-r}\alpha_{n-r}$$

teorema isbotlandi.

Birjinsli bo'lmagan n -noma'lumli s -tenglamalar tizimi berilgan bo'lsin. Uning ozod hadlari $b_i = (i = \overline{1, S})$ bo'lganda hosil bo'lgan birjinsli tenglamalar tizimi, dastlapki tizim uchun keltirilgan tizim deyiladi. Berilgan birjinsli va ikkinchi birjinsli emas tenglamalar tizimining echimlari orasida quydagicha bog'lik bor.

1. (1)-tizimning hohlagan echimi bilan (2)-tizim hohlagan echimining yig'indisi, berilgan (1)-tizimning echimi bo'ladi.

Haqiqattan ham $c_1, c_2, \dots, c_n$ (1)-tizimning echimi, $d_1, d_2, \dots, d_n$ lar (2)-tizimning echimi bo'lsin. (1)-tizimning hohlagan bir k -tenglamasini olaylik va undagi noma'lumlarning urniga $c_1 + d_1, \dots, c_n + d_n$ sonlarini quyamiz. U holda

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}(c_j + d_j) = \sum_{j=1}^n a_{kj}c_j + \sum_{j=1}^n a_{kj}d_j = b_k + 0 = b_k$$

buladi.

2. (1)-tizimning hohlagan ikki echimining ayirmasi keltirilgan (1)-tizim uchun echim bo'ladi.

Haqiqattan ham, $c_1, \dots, c_n$ va $d_1, \dots, d_n$ lar (1) tizimning qandaydir ikki echimi bo'lsin. (2)-tizimning hohlagan bir k -tenglamasini olip, noma'lumlarning urniga $c_1 - d_1, \dots, c_n - d_n$ sonlarini quysak, unda

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}(c_j - d_j) = \sum_{j=1}^n a_{kj}c_j - \sum_{j=1}^n a_{kj}d_j = b_k - b_k = 0$$

paydo bo'ladi.

Bulardan, birjinsli bo'lmagan tenglamalar tizimi (1)-ning bir echimini topib va uni keltirilgan (2)-tizimning har bir echimi bilan qo'shib, (1)-cistemaning barcha echimlarini olish mumkinligi kelib chiqadi.

§2 . Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini sonli echish usullari

2.1. Oddiy iteratsiya usuli

Faraz qilaylik,

$$Ax = b \quad (1)$$

chiziqli tenglamalar tizimi biror usul bilan

$$x = Bx + c \quad (2)$$

ko'rinishga keltirilgan bo'lsin [4]. Qanday keltirish kerakligini keyinchalik ko'rsatamiz va dastlabki yaqinlashish vektori $x^{(0)}$ topilgan bo'lsin. Agar keyingi yaqinlashishlar

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

rekurrent formulalar yordamida topilsa, bunday metod oddiy iteratsiya metodi deyiladi. Agar (3) ketma-ketlikning limiti x^* mavjud bo'lsa, bu limit (1) tizimning echimi bo'ladi. Xaqiqattan (3) ta limitga o'tsak, $x^* = Bx^* + c$ kelib chiqadi. Oddiy iteratsiya metodining yaqinlashish shartini keltiramiz.

Teorema 1. (3) oddiy iteratsiya jarayoni ixtiyoriy $x^{(0)}$ da yaqinlashuvchi bo'lishi uchun B matritsaning barcha xos sonlari modullari bo'yicha birdan kichik bo'lishi zarur va etarlidir.

Bu teorema nazariy jihatdan foydali, lekin amaliy ishlar uchun yaramaydi. Shuning uchun B matritsaning elementlari orqali ifodalanadigan etarli shartlarni keltiramiz.

Teorema 2 . (3) oddiy iteratsiya jarayonining yaqinlashuvchi bo'lishi uchun B matritsaning biror normasi birdan kichik bo'lishi etarlidir.

Teorema 2 etarli shartni quyidagicha ifodalashga imkon beradi.

(3) oddiy iteratsiya metodi yaqinlashishi uchun B matritsaning elementlari quyidagi

$$\max_i \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq \mu < 1, \quad (4)$$

$$\max_j \sum_{i=1}^n |b_{ij}| \leq \mu < 1, \quad (5)$$

$$\sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2 \leq \mu < 1, \quad (6)$$

tengsizliklarning birortasini qanoatlantirishi etarlidir.

Endi (1) ni (2) ko'rinishga keltirish xususida to'xtalib o'tamiz.

a) Agar $a_{ii} \neq 0$ ($i = \overline{1, n}$) bo'lib quyidagi tengsizliklarning

$$\max_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad (7)$$

$$\max_j \sum_{i=1, i \neq j}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{|a_{jj}|^2} \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|^2 < 1 \quad (9)$$

birortasi bajarilsa, B matritsa quyidagicha

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

bo'lib, mos ravishda (4)-(6) tengsizliklar B matritsa uchun bajariladi va (3) oddiy iteratsiya jarayoni yaqinlashuvchi bo'ladi.

b) A matritsa uchun (7)-(9) tengsizliklarning hech qaysisi bajarilmasa, u holda (1) tenglamalar tizimida shunday chiziqli almashtirishlar bajarish kerakki,

hosil bo'lgan yangi tenglamalar tizimining koeffitsientlari uchun (7)-(9) tengsizliklarning birortasi o'rinli bo'lishi kerak.

Misol 1. $Ax=b$ tizimga oddiy iteratsiya metodini qo'llash uchun kanonik holga keltiring.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & 25 & 1 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & -20 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 10 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -20 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -19 \\ 10 \\ -32 \end{pmatrix}.$$

Echish. Bu tizim tenglamalarini mos ravishda 10, 25, -20, 10, -20 sonlariga bo'lib, uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$x = Bx + c,$$

bu erda

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & 0,3 & 0,2 & -0,1 \\ 0,04 & 0 & -0,04 & 0,2 & 0,08 \\ 0,1 & 0,05 & 0 & 0,1 & -0,15 \\ 0 & -0,1 & 0,1 & 0 & 0,5 \\ 0,05 & 0,1 & 0,05 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,44 \\ 0,95 \\ 1 \\ 1,6 \end{pmatrix}.$$

Bu misol uchun (5) dagi yig'indilar mos ravishda 0,2 ; 0,28; 0,1 ; 0,5 ; 0,3 bo'lib, $\|B\|_1 = 0,7 < 1$ ekanligi kelib chiqadi. Endi ixtiyoriy dastlabki yaqinlashish $x^{(0)}$ olib

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c, \quad k = 1, 2, \dots$$

jarayonni tuzsak, u yaqinlashuvchi bo'ladi va echimni berilgan aniqlikda topish mumkin [11].

Misol 2. Quyidagi tizimni oddiy iteratsiya metodini qo'llash uchun kanonik ko'rinishga keltiring va 0,05 aniqliqta hisoblang.

$$2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 20x_4 = 10, \quad a)$$

$$x_1 + 2x_2 - 15x_3 + 3x_4 = 17, \quad b)$$

$$-8x_1 - x_2 + 10x_3 + 19x_4 = 10, \quad c)$$

$$11x_1 - 9x_2 - 2x_3 - x_4 = 6, \quad d)$$

Echish. Berilgan tizimda quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$a) - c) \Rightarrow 10x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0,$$

$$d) - a) + c) \Rightarrow x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6,$$

$$b) \quad x_1 + 2x_2 - 15x_3 + 3x_4 = 7,$$

$$a) \quad 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 20x_4 = 10.$$

hosil bo'lgan tizim tenglamalarini mos ravishda 10, -7, -15, 20 sonlariga bo'lib, bu tizimni $x = Bx + c$ ko'rinishga keltiramiz, bu erda $\|B\|_1 = 0,7 < 1$ bo'ladi.

$$x_1 - 0,2x_2 - 0,4x_3 + x_4 = 0$$

$$0,14x_1 - x_2 + 0,28x_3 - 0,28x_4 = 0,85$$

$$0,066x_1 + 0,13x_2 - x_3 + 0,2x_4 = 0,46$$

$$0,1x_1 - 0,15x_2 + 0,3x_3 + x_4 = 0,5$$

$$x_1 = 0,2x_2 + 0,4x_3 - x_4$$

$$x_2 = -0,85 + 0,14x_1 + 0,28x_3 - 0,28x_4$$

$$x_3 = -0,46 + 0,066x_1 + 0,13x_2 + 0,2x_4$$

$$x_4 = 0,5 - 0,1x_1 + 0,15x_2 - 0,3x_3$$

Iteratsiyaliq protsesni tuzamiz.

$$x^{(k+1)} = cx^{(k)} + f, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \dots + c_{1n}x_n^{(k)} + f_1$$

$$x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k)} + c_{22}x_2^{(k)} + \dots + c_{2n}x_n^{(k)} + f_2$$

.....

$$x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + \dots + c_{nn}x_n^{(k)} + f_n$$

Dastlabki yaqinlashish sifatida $x^{(0)}$ ozod hadlardan iborat vektor ustunni olamiz

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.85 \\ -0.46 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x_1^{(k)} &= 0,2x_2^{(k-1)} + 0,4x_3^{(k-1)} - x_4^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} &= -0,85 + 0,14x_1^{(k-1)} + 0,28x_3^{(k-1)} - 0,28x_4^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} &= -0,46 + 0,066x_1^{(k-1)} + 0,13x_2^{(k-1)} + 0,2x_4^{(k-1)} \\ x_4^{(k)} &= 0,5 - 0,1x_1^{(k-1)} + 0,15x_2^{(k-1)} - 0,3x_3^{(k-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0,2 \cdot (-0,85) + 0,4 \cdot (-0,46) - 0,5 = -0,854 \\ x_2^{(1)} &= -0,85 + 0,14 \cdot 0 + 0,28 \cdot (-0,46) - 0,28 \cdot 0,5 = -1,118 \\ \text{k=1 da } x_3^{(1)} &= -0,46 + 0,66 \cdot 0 + 0,13 \cdot (-0,85) + 0,2 \cdot 0,5 = -0,47 \\ x_4^{(1)} &= 0,5 - 0,1 \cdot 0 + 0,15 \cdot (-0,85) - 0,3 \cdot (-0,46) = 0,511 \\ x_1^{(2)} &= 0,2 \cdot (-1,118) + 0,4 \cdot (-0,47) - 0,511 = -0,92 \\ x_2^{(2)} &= -0,85 + 0,14 \cdot (-0,854) + 0,28 \cdot (-0,47) - 0,28 \cdot 0,511 = -1,24 \\ \text{k=2 da } x_3^{(2)} &= -0,46 + 0,66 \cdot (-0,854) + 0,13 \cdot (-1,118) + 0,2 \cdot 0,511 = -1,06 \\ x_4^{(2)} &= 0,5 - 0,1 \cdot (-0,854) + 0,15 \cdot (-1,118) - 0,3 \cdot (-0,47) = 0,56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| &= |-0,85 + 0,92| = 0,06; \quad |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = |-1,24 + 1,12| = 0,12 \\ |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| &= |-1,06 + 0,47| = 0,5; \quad |x_4^{(2)} - x_4^{(1)}| = |0,56 - 0,51| = 0,05 \end{aligned}$$

İldiz sifatida $x_1 = -0,92$; $x_2 = -1,24$; $x_3 = -1,06$; $x_4 = 0,56$. olishimiz mumkin.

Misol 3. Oddiy iteratsiya usuli bilan eching.

$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 21,7 \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 27,46 \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 28,76 \\ 0,9 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 49,72 \end{cases}$$

Echimi.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{20,9}(21,7 - 1,2x_2 - 2,1x_3 - 0,9x_4) \\ x_2 = \frac{1}{21,2}(27,46 - 1,2x_1 - 1,5x_3 - 2,5x_4) \\ x_3 = \frac{1}{19,8}(28,76 - 2,1x_1 - 1,5x_2 - 1,3x_4) \\ x_4 = \frac{1}{32,1}(49,72 - 0,9x_1 - 2,5x_2 - 1,3x_3) \end{cases}$$

Olingan sistema koeffitsientlari quydagi tengsizlikni qanoatlantiradi.

$$\sum_{j=1}^4 |c_{1j}| \approx 0,20 < 1, \quad \sum_{j=1}^4 |c_{2j}| \approx 0,24 < 1, \quad \sum_{j=1}^4 |c_{3j}| \approx 0,25 < 1, \quad \sum_{j=1}^4 |c_{4j}| \approx 0,15 < 1$$

Shunday qilib iteratsiyaning yaqinlashuvchiligi ta'minlangan. Dastlabki yaqinlashuv sifatida ozod hadlardan iborat ustunni olamiz.

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1,04 \\ 1,30 \\ 1,45 \\ 1,55 \end{pmatrix}$$

$|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < 0,001$ bo'lganicha davom ettiramiz.

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{20,9}(21,7 - 1,56 - 3,045 - 1,395) = 0,75,$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{21,2}(27,46 - 1,248 - 2,175 - 3,875) = 0,95,$$

$$k=1 \text{ da } x_3^{(1)} = \frac{1}{19,8}(28,76 - 2,184 - 1,950 - 2,015) = 1,14,$$

$$x_4^{(1)} = \frac{1}{32,1}(49,72 - 0,936 - 3,250 - 1,885) = 1,36;$$

$$x_1^{(2)} = \frac{16,942}{20,9} = 0,8106, \quad x_2^{(2)} = \frac{21,45}{21,2} = 1,0118,$$

$$k=2 \text{ da } x_3^{(2)} = \frac{23,992}{19,8} = 1,2117, \quad x_4^{(2)} = \frac{45,188}{32,1} = 1,4077;$$

$$x_1^{(3)} = \frac{16,67434}{20,9} = 0,7978, \quad x_2^{(3)} = \frac{21,15048}{21,2} = 0,9977,$$

k=3 da

$$x_3^{(3)} = \frac{23,71003}{19,8} = 1,1975, \quad x_4^{(3)} = \frac{44,88575}{32,1} = 1,3983;$$

$$x_1^{(4)} = \frac{16,7295}{20,9} = 0,8004, \quad x_2^{(4)} = \frac{21,2106}{21,2} = 1,0005,$$

k=4 da

$$x_3^{(4)} = \frac{23,7703}{19,8} = 1,2005, \quad x_4^{(4)} = \frac{44,9510}{32,1} = 1,4003;$$

$$x_1^{(5)} = \frac{16,71808}{20,9} = 0,7999, \quad x_2^{(5)} = \frac{21,19802}{21,2} = 0,9999,$$

k=5 da

$$x_3^{(5)} = \frac{23,75802}{19,8} = 1,1999, \quad x_4^{(5)} = \frac{44,93774}{32,1} = 1,3999;$$

k=4 va k=5 dagi modullar ayirmasini topamiz.

$$|x_1^{(4)} - x_1^{(5)}| = 0,0005; \quad |x_2^{(4)} - x_2^{(5)}| = 0,0006$$

$$|x_3^{(4)} - x_3^{(5)}| = 0,0006; \quad |x_4^{(4)} - x_4^{(5)}| = 0,0004$$

Ular berilgan aniqlik $\varepsilon=0,001$ dan kichik shuning uchun echim sifatida

$$x_1 \approx 0,7999; \quad x_2 \approx 0,9999; \quad x_3 \approx 1,1999; \quad x_4 \approx 1,3999;$$

Taqqoslash uchun aniq echimni keltiramiz.

$$x_1 = 0,8; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 1,2; \quad x_4 = 1,4.$$

2.2. Zeydel` usuli

Bu metod oddiy iteratsiya metodidan shu bilan farq qiladiki, hisoblashlar quyidagi sxema asosida bajariladi:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^n \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^{(k)},$$

.....

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{nj}}{a_{nn}} x_j^{(k+1)}.$$

Bu sxemani matritsa ko'rinishga keltirish uchun $A = C + D$ deymiz, bu erda

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

U holda $Ax = b$ tizimni $Cx = -Dx + b$ ko'rinishda ifodalab olamiz. Zeydel`metodi esa

$$Cx^{(k+1)} = -Dx^{(k)} + b$$

ko'rinishdagi iteratsiyadan iborat. Bu tenglikni $x^{(k+1)}$ ga nisbatan echsak,

$$x^{(k+1)} = -C^{-1}Dx^{(k)} + C^{-1}b$$

hosil bo'ladi. Bu matritsasi $-C^{-1}D$ bo'lgan oddiy iteratsiya metodining o'zginasi.

Teorema 1 ga asosan buni yaqinlashishi uchun $-C^{-1}D$ matritsaning barcha xos sonlari modullari bo'yicha birdan kichik bo'lishi zarur va etarlidir. Bu o'z navbatida quyidagi

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & a_{n3}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

tenglamaning barcha ildizlari modullari bo'yicha birdan kichik bo'lishi zarur va etarligiga ekvivalentdir. Shuni ko'rsatamiz, ya'ni

$$\det(\lambda E + C^{-1}D) = 0 \text{ va } \det(\lambda C + D) = 0$$

tenglamalar bir xil ildizga ega:

$$\det(\lambda E + C^{-1}D) = \det(C^{-1}C(\lambda E + C^{-1}D)) = \det[C^{-1}(\lambda C + D)] = \det C^{-1} \det(\lambda C + D).$$

Bu erda $\det C^{-1} \neq 0$, demak

$$\det(\lambda E + C^{-1}D) = \det(\lambda C + D).$$

Oddiy iteratsiya metodi bilan Zeydel` metodining yaqinlashish sohalari umuman farqli degan xulosaga kelamiz. Haqiqatan ham, shunday tizimlar mavjudki, ular uchun oddiy iteratsiya metodi yaqinlashadi, ammo Zeydel` metodi uzoqlashadi va aksinchasi ham o`rinlidir.

Lekin, quyidagi

$$\max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad \max_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

shartlarning birortasi bajarilsa, oddiy iteratsiya ham Zeydel` metodi ham yaqinlashuvchi bo`lib, bunda birinchi shart o`rinli bo`lsa, Zeydel` metodining yaqinlashishi oddiy iteratsiya metodining yaqinlashidan sekin bo`lmaydi.

§3. Chiziqli algebraik tenglamalar tizimini MathCad ta echish

Misol 1: Quyidagi tizimni eching [5]

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

Echimi:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix} \quad x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = -1.$$

Misol 2: Quyidagi tizimni eching [5]

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

Echimi:

$$x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} 2.25 \\ -1.25 \\ 10.25 \end{pmatrix}$$

Iteratsiya usuli bilan echamiz

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \tau := 0.4 \quad N := 15 \quad x^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$D := A^0 - \tau \cdot A \quad c := \tau \cdot b \quad \text{norm2}(D) = 1.231$$

$$k := 0..N \quad x^{(k+1)} := c + D \cdot x^{(k)} \quad \Delta x_k := \left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right| \quad \Delta x_N = 0.011$$

$$x^{(N+1)} = \begin{pmatrix} 2.243 \\ -1.251 \\ 10.242 \end{pmatrix}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
x =	0	1	0.733	1.853	2.205	2.459	2.519	2.499	2.439	2.372	2.316
	1	0.667	-2.533	-1.733	-1.84	-1.607	-1.471	-1.348	-1.273	-1.231	-1.215
	2	10	9.067	11.173	11.349	11.399	11.142	10.855	10.591	10.397	10.274

Misol 3: Quydagı tizimni eching

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Echimi:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad x := A^{-1} \cdot b$$

$$\text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$$

Misolning Zeydel usulida MathCad ta dasturi

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon := 0.0005$$

```

Zeydel(A,b,ε) :=
  n ← cols(A)
  F ← AT·A
  H ← AT·b
  for i ∈ 0.. n - 1
    for j ∈ 0.. n - 1
      Ai,j ← 0 if i = j
      Ai,j ←  $\frac{-F_{i,j}}{F_{i,i}}$  otherwise
    bi ←  $\frac{H_i}{F_{i,i}}$ 
  k ← 0
  x1 ← b
  while 1
    x ← x1
    for i ∈ 0.. n - 1
      s ← 0
      for j ∈ 0.. n - 1
        s ← s + Ai,j·xj
      xi ← s + bi
    y ← |x - x1|
    x1 ← x
    m ← max(y)
    k ← k + 1
    break if (m < ε) ∨ (k > 200)
  x, k, m

```

$$x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Misol 4: Quydagı tizimni echıng

$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 21,7 \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 27,46 \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 28,76 \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 49,72 \end{cases}$$

Echimi:

$$A := \begin{pmatrix} 20.9 & 1.2 & 2.1 & 0.9 \\ 1.2 & 21.2 & 1.5 & 2.5 \\ 2.1 & 1.5 & 19.8 & 1.3 \\ 0.9 & 2.5 & 1.3 & 32.1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 21.7 \\ 27.46 \\ 28.76 \\ 49.72 \end{pmatrix} \quad x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 1.2 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

$$\text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 1.2 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0.8; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 1.2; \quad x_4 = 1.4$$

Misol 5: Quydagı tizimni echıng

$$\begin{cases} 13,47x_1 - 2,29x_2 + 3,29x_3 + 4,75x_4 = 2,32 \\ 2,75x_1 + 11,11x_2 + 2,28x_3 - 0,75x_4 = 4,75 \\ 0,28x_1 + 6,25x_2 - 9,21x_3 + 0,79x_4 = 2,25 \\ 3,21x_1 + 2,21x_2 + 0,49x_3 + 7,87x_4 = -3,41 \end{cases}$$

Echimi:

$$A := \begin{pmatrix} 13.47 & -2.29 & 3.29 & 4.75 \\ 2.75 & 11.11 & 2.28 & -0.75 \\ 0.28 & 6.25 & -9.25 & 0.79 \\ 3.21 & 2.21 & 0.49 & 7.87 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 2.32 \\ 4.75 \\ 2.25 \\ -3.41 \end{pmatrix}$$

$$\text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 0.493 \\ 0.278 \\ -0.101 \\ -0.706 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0.493; \quad x_2 = 0.278; \quad x_3 = -0.101; \quad x_4 = -0.706$$

Misol 6: Quydagı tizimni echıng

$$\begin{cases} 9,66x_1 + 2,01x_2 + 3,03x_3 + 1,61x_4 = -2,29 \\ 3,22x_1 + 12,41x_2 + 1,65x_3 + 0,93x_4 = 2,64 \\ 1,69x_1 - 2,17x_2 + 13,65x_3 + 3,73x_4 = -6,48 \\ 0,46x_1 + 1,75x_2 - 3,75x_3 + 9,65x_4 = -2,77 \end{cases}$$

Echimi:

$$A := \begin{pmatrix} 9.66 & 2.01 & 3.03 & 1.61 \\ 3.22 & 12.41 & 1.65 & 0.93 \\ 1.69 & -2.17 & 13.65 & 3.73 \\ 0.46 & 1.75 & -3.75 & 9.65 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} -2.29 \\ 2.64 \\ -6.483 \\ -2.77 \end{pmatrix} \quad \text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} -0.14 \\ 0.32 \\ -0.284 \\ -0.449 \end{pmatrix}$$

$$x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} -0.14 \\ 0.32 \\ -0.284 \\ -0.449 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -0.14; \quad x_2 = 0.32; \quad x_3 = -0.284; \quad x_4 = -0.449$$

Misol 7: Quydagı tizimni echıng

$$\begin{cases} 15,75x_1 + 2,91x_2 + 3,60x_3 + 2,09x_4 = -2,84 \\ 3,63x_1 + 12,02x_2 + 6,71x_3 - 0,09x_4 = 9,81 \\ 2,28x_1 + 3,48x_2 + 15,78x_3 + 2,64x_4 = 2,71 \\ 3,41x_1 + 0,51x_2 + 1,07x_3 + 6,07x_4 = 2,33 \end{cases}$$

Echimi:

$$A := \begin{pmatrix} 15.75 & 2.91 & 3.60 & 2.09 \\ 3.63 & 12.02 & 6.71 & -0.09 \\ 2.28 & 3.48 & 15.78 & 2.64 \\ 3.41 & 0.51 & 1.07 & 6.07 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} -2.84 \\ 9.81 \\ 2.71 \\ 2.33 \end{pmatrix} \quad \text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} -0.418 \\ 0.99 \\ -0.078 \\ 0.549 \end{pmatrix}$$

$$x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} -0.418 \\ 0.99 \\ -0.078 \\ 0.549 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -0.418; \quad x_2 = 0.99; \quad x_3 = -0.078; \quad x_4 = 0.549$$

Misol 8: Quydagı tizimni echıng

$$\begin{cases} 0,01x_1 - 2,01x_2 + 4,76x_3 + 1,01x_4 = 2,23 \\ 7,27x_1 + 0,09x_2 + 1,04x_3 + 9,27x_4 = 0,91 \\ 10,35x_1 + 2,35x_2 + 1,28x_3 + 4,01x_4 = 2,08 \\ 0,49x_1 - 0,28x_2 + 4,35x_3 + 1,97x_4 = -2,61 \end{cases}$$

Echimi:

$$A := \begin{pmatrix} 0.01 & -2.01 & 4.76 & 1.01 \\ 7.27 & 0.09 & 1.04 & 9.27 \\ 10.35 & 2.35 & 1.28 & 4.01 \\ 0.49 & -0.28 & 4.35 & 1.97 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 2.23 \\ 0.91 \\ 2.08 \\ -2.61 \end{pmatrix} \quad \text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 1.214 \\ -2.848 \\ -0.575 \\ -0.762 \end{pmatrix}$$

$$x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} 1.214 \\ -2.848 \\ -0.575 \\ -0.762 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 1.214; \quad x_2 = -2.848; \quad x_3 = -0.575; \quad x_4 = -0.762.$$

Misol 9: Quydagı tizimni echıng

$$\begin{cases} 7,71x_1 + 2,83x_2 + 1,08x_3 + 0,75x_4 + 2,23x_5 = 2,39 \\ 2,93x_1 + 3,96x_2 + 14,75x_3 + 2,75x_4 - 0,91x_5 = -0,78 \\ 6,36x_1 + 0,78x_2 + 3,75x_3 + 14,7x_4 + 2,08x_5 = 2,83 \\ 0,48x_1 + 3,73x_2 + 0,75x_3 + 1,09x_4 - 2,61x_5 = -7,38 \\ 0,93x_1 + 1,23x_2 + 11,21x_3 - 7,69x_4 - 3,75x_5 = 0,34 \end{cases}$$

Echimi:

$$A := \begin{pmatrix} 7.71 & 2.83 & 1.08 & 0.75 & 2.23 \\ 2.93 & 3.96 & 14.75 & 2.75 & -0.91 \\ 6.36 & 0.78 & 3.75 & 14.7 & 2.08 \\ 0.48 & 3.73 & 0.75 & 1.09 & -2.61 \\ 0.93 & 1.23 & 11.21 & -7.69 & -3.75 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 2.39 \\ -0.78 \\ 2.83 \\ -7.38 \\ 0.34 \end{pmatrix} \quad \text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 0.566 \\ -1.454 \\ 0.312 \\ -0.178 \\ 0.869 \end{pmatrix}$$

$$x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} 0.566 \\ -1.454 \\ 0.312 \\ -0.178 \\ 0.869 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0.566; \quad x_2 = -1.454; \quad x_3 = 0.312; \quad x_4 = -0.178; \quad x_5 = 0.869.$$

Misol 10: Quydagı tizimni eching

$$\begin{cases} 7,71x_1 + 2,83x_2 + 1,08x_3 + 0,75x_4 + 2,23x_5 = 2,39 \\ 2,93x_1 + 3,96x_2 + 14,75x_3 + 2,75x_4 - 0,91x_5 = -0.78 \\ 6,36x_1 + 0,78x_2 + 3,75x_3 + 14,7x_4 + 2,08x_5 = 2.83 \\ 0,48x_1 + 3,73x_2 + 0,75x_3 + 1,09x_4 - 2,61x_5 = -7,38 \\ 0,93x_1 + 1,23x_2 + 11,21x_3 - 7,69x_4 - 3,75x_5 = 0,34 \end{cases}$$

Echimi:

$$A := \begin{pmatrix} 4.75 & -0.85 & 1.28 & 9.74 & 0.78 \\ 14.35 & 0.79 & 1.94 & 3.79 & -2.85 \\ 9.66 & 2.01 & 3.03 & 1.61 & -2.29 \\ 3.63 & 12.02 & 6.71 & -0.09 & 9.81 \\ 2.83 & 3.02 & 11.79 & 1.75 & -2.71 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1.29 \\ 3.29 \\ 0.71 \\ 11.49 \\ 2.80 \end{pmatrix} \quad \text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 1.062 \\ -2.735 \\ 1.546 \\ -1.073 \\ 3.062 \end{pmatrix}$$

$$x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} 1.062 \\ -2.735 \\ 1.546 \\ -1.073 \\ 3.062 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 1.062; \quad x_2 = -2.735; \quad x_3 = 1.546; \quad x_4 = -1.073; \quad x_5 = 3.062.$$

Misol 11: Quydagı tızimni echıng

$$\begin{cases} 3,75x_1 + 0,28x_2 + 1,05x_3 - 0,48x_4 + 1,28x_5 - 0,28x_6 = 4,23 \\ 0,3x_1 + 3,95x_2 + 3,07x_3 + 0,57x_4 + 3,75x_5 + 1,31x_6 = 0,68 \\ 4,88x_1 - 0,88x_2 + 4,75x_3 + 0,07x_4 + 2,08x_5 - 2,83x_6 = 2,33 \\ 3,44x_1 + 2,88x_2 + 0,75x_3 + 9,79x_4 - 0,28x_5 - 7,38x_6 = -9,77 \\ 18,88x_1 + 0,29x_2 + 1,75x_3 - 3,28x_4 - 4,35x_5 + 0,34x_6 = 2,35 \\ 4,75x_1 + 19,29x_2 + 10,37x_3 + 0,73x_4 - 0,47x_5 + 8,78x_6 = -0,47 \end{cases}$$

Echimi:

$$x_1 = 1.062; \quad x_2 = -2.735; \quad x_3 = 1.546; \quad x_4 = -1.073; \quad x_5 = 3.062.$$

$$A := \begin{pmatrix} 3.75 & 0.28 & 1.05 & -0.48 & 1.28 & -0.28 \\ 0.3 & 3.95 & 3.07 & 0.57 & 3.75 & 1.31 \\ 4.88 & -0.88 & 4.75 & 0.07 & 2.08 & -2.83 \\ 3.44 & 2.88 & 0.75 & 9.79 & -0.28 & -7.38 \\ 18.88 & 0.29 & 1.75 & -3.28 & -4.35 & 0.34 \\ 4.75 & 19.29 & 10.37 & 0.73 & -0.47 & 8.78 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 4.23 \\ 0.68 \\ 2.33 \\ -9.77 \\ 2.35 \\ -0.47 \end{pmatrix}$$

$$x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} -1.868 \\ 12.14 \\ -5.854 \\ -16.538 \\ 0.92 \\ -17.377 \end{pmatrix} \quad \text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} -1.868 \\ 12.14 \\ -5.854 \\ -16.538 \\ 0.92 \\ -17.377 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -1.868; \quad x_2 = 12.14; \quad x_3 = -5.854; \quad x_4 = -16.538; \quad x_5 = 0.92; \quad x_6 = -17.377.$$

Misol 12: Quydagı tizimni eching [6]

$$\begin{cases} 9,77x_1 + 0,37x_2 + 1,43x_3 + 1,34x_4 - 2,33x_5 + 2,84x_6 = 2,39 \\ 3,23x_1 + 18,91x_2 + 8,71x_3 - 3,73x_4 + 0,78x_5 + 4,48x_6 = -0,33 \\ 4,88x_1 - 9,77x_2 + 12,75x_3 + 1,72x_4 + 3,78x_5 - 2,39x_6 = 6,61 \\ 0,07x_1 - 0,75x_2 + 7,23x_3 + 7,96x_4 + 2,88x_5 + 12,33x_6 = 4,78 \\ 7,71x_1 + 2,83x_2 + 1,08x_3 + 0,75x_4 + 2,39x_5 + 4,54x_6 = -6,35 \\ 0,77x_1 + 16,61x_2 - 8,91x_3 + 2,61x_4 + 6,62x_5 - 3,32x_6 = 4,5 \end{cases}$$

Echimi:

$$A := \begin{pmatrix} 9.77 & 0.37 & 1.43 & 1.34 & -2.33 & 2.84 \\ 3.23 & 18.91 & 8.71 & -3.73 & 0.78 & 4.48 \\ 4.88 & -9.77 & 12.75 & 1.72 & 3.78 & -2.39 \\ 0.07 & -0.75 & 7.23 & 7.96 & 2.88 & 12.33 \\ 7.71 & 2.83 & 1.08 & 0.75 & 2.39 & 4.54 \\ 0.77 & 16.61 & -8.91 & 2.61 & 6.62 & -3.32 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 2.39 \\ -0.33 \\ 6.61 \\ 4.78 \\ -6.35 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$$x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} -0.155 \\ 0.541 \\ 0.778 \\ 2.573 \\ -1.323 \\ -1.386 \end{pmatrix} \quad \text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} -0.155 \\ 0.541 \\ 0.778 \\ 2.573 \\ -1.323 \\ -1.386 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -0.155; \quad x_2 = 0.541; \quad x_3 = 0.778; \quad x_4 = 2.573; \quad x_5 = -1.323; \quad x_6 = -1.386.$$

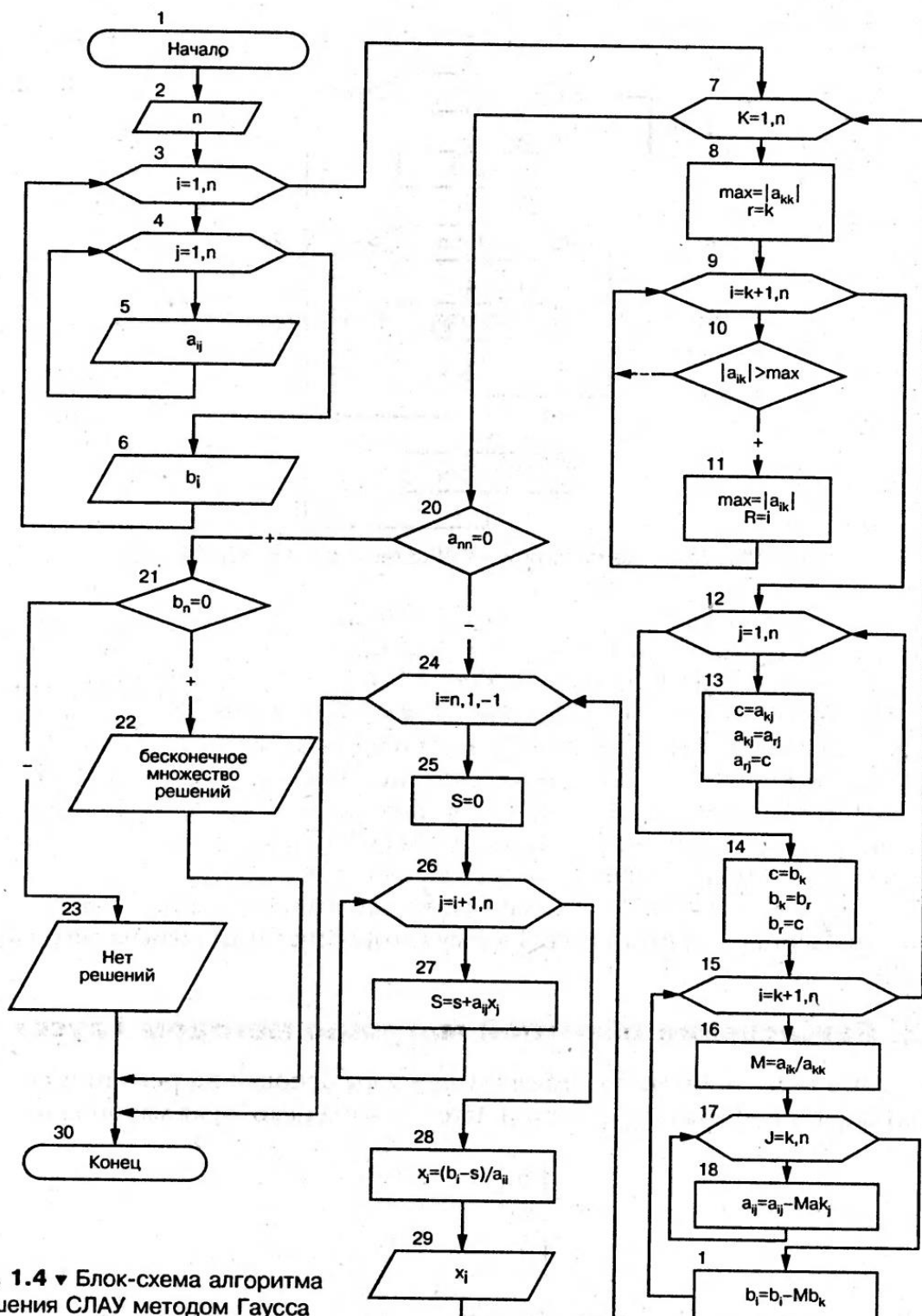


Рис. 1.4 ▼ Блок-схема алгоритма решения СЛАУ методом Гаусса

Xulosa

Tatbiqiy masalalarni sonli echish matematiklar e'tiborini doim o'ziga tortar edi. Shuning uchun ham o'tgan zamonning buyuk matematiklari o'z tadqiqotlarida tabiiy jarayonlarini o'rganish, ularning modellarini tuzish va modellarni tadqiq etish ishlarini birga qo'shib olib borishgan. Ular bu modellarni tekshirish uchun maxsus hisoblash usullarini yaratishgan. Bu usullarining ayrimlari N'yuton, Eyler, Lobachevskiy, Gauss, Chebishev, Ermit nomlari bilan bog'liqdir. Bu shundan dalolat beradiki, hisoblash usullarini yaratishda o'z zomanasining buyuk matematiklari shug'illanishgan [8].

Hisoblash matematikasining hozirgi zamon fan va texnikasining xilma-xil sohalaridagi tadbirlarida, odatda, shunday tipik matematik masalalarga duch kelinadiki, ularni klassik usullar bilan echish mumkin emas yoki echish mumkin bo'lgan taqdirda ham echim shunday murakkab ko'rinishda bo'ladiki, undan samarali foydalanishning iloji bo'lmaydi. Bunday tipik matematik masalalarga algebra (odatda tartibi juda katta bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echish, matritsalarining teskarisini topish, matritsalarining xos sonlarini topish, algebraik va transtsendent tenglamalar hamda bunday tenglamalar sistemasini echish) [7], matematik analiz (sonli integrallash va differentsiallash, funktsiyani yaqinlashtirish masalalari) hamda oddiy va xususiy hosilali differentsial tenglamalarni echish masalalari va boshqalar kiradi. Hisoblash matematikasida uchraydigan ko'p masalalarni $y=Au$ shaklida yozish mumkin, bu erda x va u berilgan R_1 va R_2 funktsional fazolarning elementlari bo'lib, A -operator yoki xususiy holda funktsionaldir. Agar A operator va x element haqida ma'lumot berilgan bo'lib, u ni topish lozim bo'lsa, bunday masala to'g'ri masala deyiladi. Aksincha, A va u haqida ma'lumot berilgan bo'lib, x ni topish kerak bo'lsa, bunday masala teskari masala deyiladi. Odatda, teskari masalani echish murakkabdir.

Bu masalalar har doim ham aniq echilavermaydi. Bunday hollarda hisoblash matematikasiga murojaat qilinadi [2,3].

Bu bitiruv ishi asosan kirish, uchta paragraf, sonli eksperiment va xulosadan iborat bo'lib, algebraik tenglamalar tizimini sonli echish masalasiga bag'ishlangan. Biz bu bitiruv ishida shu usullarning keng qo'llaniladiganlarini va tajribada sinalganlarini (amalda qo'llaniladiganlarini) keltiramiz. Ishning birinchi paragrafida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini analitik echish usullaridan noma'lumlarni ketma-ket yo'q qilish yoki Gauss usuli va Kramer usuli keltirilgan. Ikkinchi paragrafta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini sonli echish usullari atap aytikanda iteratsiya va Zeydel usullari keltirilgan. Sungida Gauss va zeydel usullariga MathCad ta dastur yaratilgan. Yuqorida keltirilgan usullarning asosiy hisoblash algoritmlarini tuzib, uning barchalarini biriktirib bitta programma etib sonli eksperiment berilgan. Bu talabalarning seminar, amaliy ishlarni bajarishda qo'llanishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Karimov I.A. Yuksak ma`naviyat engilmas kuch. -Toshkent: Ma`naviyat, 2008.-174 b.
2. Samarskiy A.A. Vvedenie v chislennye metody. -Moskva: Nauka, 1982.-271 s.
3. Samarskiy A.A. Gulin.A.V. Chislennye metody. -Moskva: Nauka, 1989.-251 s.
4. Kalitkin N.N. Chislennye metody. -Moskva: Nauka, 1978.-512 s.
5. Oxorzin V.A. Prikladnaya matematika v sisteme MathCad. M.; 2008.-344s.
6. Alekseev E.R., Chesnokova O.V. Reshenie zadach vychislitel'noy matematiki v paketax MathCad, MathLab, Maple. NT. Press. 2006.-492 s.
7. Faddeev D.K., Faddeeva.V.N. Vychislitel'nye metody lineynoy algebry. -Moskva: Fizmatgiz, 1960.-366 s.
8. Xojiev J.X., Faynleyb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi kursi. Toshkent, 2001.
9. Proskuryakov I.V. Sbornik zadach po lineynoy algebre. Moskva, Nauka, 1978.
10. Kostrikin A.I. i dr. Sbornik zadach po algebre. Moskva, Nauka, 1986.
11. <http://refs.zn.uz>
12. <http://www.ziynet.uz>
13. <http://infonit.edunet.uz>
14. <http://www.natlib.uz>

Texnika xavfsizligi qoidalar

1. Informatika xonasini beton polli xonalarga yoki binoning erto'lalariga joylashtirish qat'iy ta'qiqlanadi va sinf xonasining poli elektr tokini o'tkazmaydigan qilib (masalan taxtadan) yasalishi va barcha kompyuterlarning korpuslari yerga ulanishi (yoki elektr ta'minotining yevroandozalarga moslab ulanishi) talab qilinadi.
2. Yuqori kuchlanish (220 Volt) yuradigan simlarning barchasi, shu jumladan uzaytirgichlarning, kompyuter va boshqa elektr qurilmalarining elektr ta'minotiga ulanish simlarining ikki marta izolyasiya qilinganligi talab qilinadi.
3. Xonadagi kompyuterlarni devor bo'ylab yoki xonaning o'rtasiga ikki qator qilib joylashtirilishi kerak.
4. Xonadagi barcha kompyuterlarni elektr tarmog'idan uzuvchi yagona uzgich ham bo'lishi kerak.
5. Kompyuter monitori o'tirgan o'quvchilarning ko'zlari darajasida bo'lib, o'quvchilar undan 40 sm dan 80 sm gacha bo'lgan masofada o'tirishlari imkoniyatiga ega bo'lishlari kerak.
6. Kompyuterning klaviaturasi o'tirgan o'quvchilarning bukilgan tirsaklari darajasida bo'lishi kerak. Sichqon uchun klaviaturaning ikkala tomonidan yetarlicha joy qoldirilishi va ular bir xil balandlikda bo'lishlari kerak.
7. Kompyuterda muttasil ishlash vaqti o'quvchilar uchun 60 minutdan ortmasligi kerak.
8. Kompyuter xonasining kvadrat metrlardagi sathi unga joylangan kompyuterlar sonidan kamida 6 marta ko'p bo'lishi kerak.
9. Kompyuter xonalari yetarli quvvatga ega ventilyasiya tizimiga ega bo'lishi kerak.
10. Klaviaturaning kompyuter ishlayotgan paytda uzoq muddatga ochiq holda qolishi va unda chang yig'ilib qolishining oldini olish lozim.