

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI ALOQA, AXBOROTLASHTIRISH VA
TELEKOMMUNIKATSIYA TEXNOLOGIYALARI DAVLAT
QO'MITASI**

**TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
NUKUS FILIALI**

KOMP'YUTER INJINIRING FAKUL'TETI

“AXBOROT TA'LIM TEXNOLOGIYALARI” KAFEDRASI

«Kasb ta'limi» yunalishining 4- kurs talabasi

BEGENOVA DILARAM KESIKBAEVNANING
«Ikkita kubaturli formulalarni bir funktsiya sinfida sonli taqqoslash»
mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Kafedra mudiri:

f.-m.f.n. Sh. Allamuratov

Ilmiy raxbar:

f.-m.f.n. Sh. Allamuratov

Bitiruv malakaviy ishi kafedradan dastlabki himoyadan o'tdi
___ sonli bayonnamasi «___» _____ 2014 yil

Nukus-2014

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI ALOQA, AXBOROTLASHTIRISH VA
TELEKOMMUNIKATSIYA TEXNOLOGIYALARI DAVLAT
QO'MITASI**

**TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
NUKUS FILIALI**

KOMPYUTER INJINIRINGI FAKULTETI

«AXBOROT TA'LIM TEXNOLOGIYALARI» KAFEDRASI

TACDIQLAYMAN

Kafedra mudiri _____

« ____ » _____ 2014 .y.

Begenova Dilaram Kesikbaevnaning
«**Ikkita kubaturli formulalarni bir funkciya sinfida sonli
taqqoslash**» mavzusidagi bitiruv malakaviy ishiga

VAZIFA

Bitiruv malakaviy ishning mavzusi' TATU NF-ning « ____ » _____ 2014y
buyrug'i bilan tasdiqlandi.

Ishni topshirish muddati: « ____ » _____ 2014-yil.

Berilgan ishga tegishli ma'lumotlar: diplom praktikasi materiallar', ma'ruza
materiallari', ilmiy adabiyotlar va Internet materiallari.

Bitiruv malakaviy ish mazmuni':

Kirish.

§1. Oddiy kvadratur formulalar

§2. Teylor formulasi

§3. Kvadraturalar nazariyasidagi ekstremal masalalar va ularni echish

§4. Kubatur formula haqida tushincha

§5. Simpsonning kubatur formulasi

§6. Ikki kubaturali formulani bir funktsiya sinfida sonli taqqoslash

Xulosa

Foydalanilgan adabiyotlar

Vazifa berilgan sana

« ____ » _____ 2014-yil.

Ilmiy raxbar _____

Vazifani oldi _____

Bitiruv malakaviy ishi paragraflar bo'yicha maslaxatchilar.

Paragraflar	Maslaxatchi	Imzo, sana	
		Vazifani berdi	Vazifani qabulladi
1	Allamuratov Sh.Z		
2	Allamuratov Sh.Z		
3	Allamuratov Sh.Z		
4	Allamuratov Sh.Z		
5	Allamuratov Sh.Z		
6	Allamuratov Sh.Z		

Ishni bajarish rejasi:

№	Bob nomi	Bajarish muddati	Ilmiy raxbar (maslaxatchi imzosi')
1.	Oddiy kvadratur formulalar	12.11.2013	
2.	Teylor formulasi	12.12.2013	
3.	Kvadraturalar nazariyasidagi ekstremal masalalar va ularni echish	12.01.2014	
4.	Kubatur formula haqida tushincha	12.02.2014	
5.	Simpsonning kubatur formulasi	12.03.2014	
6.	Ikki kubaturali formulani bir funktsiya sinfida sonli taqqoslash	12.04.2014	
7	POWER POINT dasturida dokladning slaydini yaratish	12.05.2014	

Bitiruvchi _____

«____»_____2014 -yil.

Ilmiy raxbar _____

«____»_____2014 -yil.

АННОТАЦИЯ

В данной выпускной квалификационной работе рассмотрены обыкновенные квадратурные и кубатурные формулы. Кроме того был сравнен две кубатурные формулы в одном классе функции двух переменных.

ANNOTATSIYA

Mazkur bitiruv malakaviy ishida oddiy kvadratur va kubatur formulalar qaralgan. Bundan tashqari ikkita kubatur formula ikki uzgaruvchili bir funktsiya sinfida sonli taqqoslangan.

SUMMARY

In the given final qualifying work are considered ordinary squarings and cubages of the formula. Besides was compared two cubages of the formula in one class of function two variable.

Mundarija

Kirish.....	6
§1.Oddiy kvadratur formulalar.....	10
§2. Teylor formulasi.....	19
§3. Kvadraturalar nazariyasidagi ekstremal masalalar va ularni echish.....	21
§4. Kubatur formula haqida tushincha.....	30
§5. Simpsonning kubatur formulasi.....	34
§6. Ikki kubaturali formulani bir funktsiya sinfida sonli taqqoslash.....	37
Xulosa.....	40
Foydalanilgan adabiyotlar.....	42
Texnika xavfsizligi qoidalari.....	43

Kirish

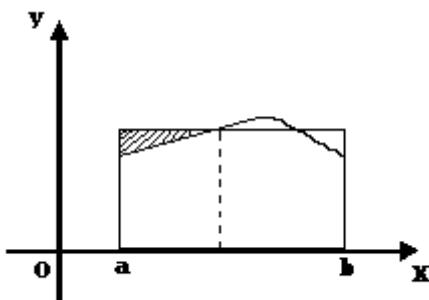
Mavzuning dolzarbligi. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash formulalari bo'lgan to'g'riburchaklar, trapetsiya va parabolalar formulasini biz akademik litsey matematika kursidan bilamiz. Bular kvadratur formulalar deb atalib tug'riburchaklar va trapetsiyalar formulası birinchi darajali ko'phadlar uchun aniq, parabolalar formulası uchinchi darajali ko'phadlar uchun aniq formula bo'ladi. Kubatur formulalar esa qosh integrallarni taqriybiy hisoblashga keltiriladi. Shu bois karrali integrallar uchun aniq kubatur formulalar qurish dolzarb masalalarning biri bo'lib qoladi.

Tadqiqot obyekti. Bir va ikki karrali aniq integrallar bitiruv malakaviy ishining tadqiqot obyektidir.

Bir va ikki karrali aniq integrallar uchun kvadratur va kubatur formulalar qurish usullari yetarlicha mufassal [1,2,4-8] adabiyotlarda keltirilgan.

Ishning amaliy ahamiyati. Bitiruv malakaviy ishidan «Hisoblash matematikasi» va «Hisoblash usullari» fanlaridan bo'ladigan amaliy mashg'ulotlarda, seminar mashg'ulotlarida, bir va ikki karrali aniq integrallarni kuphadlar bilan yaqinlashtirish bilan bog'liq tanlov fanlari mashg'ulotlarida foydalanish mumkin.

Biz akademik litseydan algebra kursidan qandaydir musbat uzliksiz $f(x)$ funksiyasini $[a,b]$ oralig'ida taqribiy integrallashni bilamiz. Ularning eng oddiysi asosi $[a,b]$ kesmada bo'lgan, balandligi $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ bo'lgan $f'(x)$ funksiyasining grafigining o'rta nuktasi bo'lgan $\frac{a+b}{2}$ tug'riburchaklar formulası.



rasm-1.

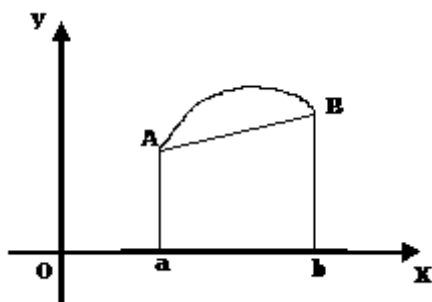
Shunday qilib biz

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (1)$$

Taqribiy kvadraturalar formulasini paydo etamiz. U hohlagan uzluksiz funktsiya uchun qiymatga ega.

Agar $f(x)$ funktsiyasi erikli $Ax+B$ ko'rinishdagi chiziqli funktsiya bo'lsa bu erda A va B doimiy u holda chap tarafi ung tarafiga teng bo'ladi. Shunga bog'lik bizning taqribiy kvadratur formulamiz hohlagan erikli chiziqli $f(x)$ funktsiyasi uchun aniq deb aytamiz.

Biz eng oddiy tug'riburchakli kvadratur formulasini ko'rib chiqdik. Ozingina marakkabroq bu trapetsiyalar formulasi bo'lib topiladi. $f(x)$ manfiy aniqlangan holda aniq integral yon tarafi $x=a$, $x=b$ tug'rilar bilan tepadan grafikning AV xordasi bilan chegaralangan trapetsiyaning yuziga teng son bilan almashtiriladi.



rasm-2.

Shunday qilib trapetsiyalarning kvadratur formulasi quydagicha taqribiy formula yordamida aniqlanadi.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)] \quad (2)$$

Ushbu formula xoxlagan uzluksiz erikli funktsiya uchun urinli. (2) kvadratur formula tug'riburchaklar formulasiga uxshash lekin $y=Ax+B$ kurinishidagi chiziqli funktsiyalar uchun urinli. Biz praktikada keng tarqalgan yana bir kvadratur formula – Simpson formulasi bilan tanishamiz. U funktsiya musbat aniqlanganda uning integrali quydan ox uqi bilan yon taraflardan $x=a$, $x=b$ tug'ri chiziqlari bilan tepadan ikkinchi tartibli parabola bilan chegaralangan yuza bilan

beriladi. Funktsiya grafigi abtsissalari, $\frac{a+b}{2}$, b nuqtalardan o'tadi. U formula quyidagi kurinishga ega.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (3)$$

Simpson formulasini olish usulidan u

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (4)$$

ko'rinishidagi barcha ko'phadlar uchun aniq ekanligi kelib chiqadi.

Bu ko'phadlarning grafiklari oy uqiga parallel yunaltirilgan mumkin bo'lgan parabolalardan iborat. Simpson formulasi haqiqattan ham juda yaxshi sababi u barcha ikkinchi tartibli ko'phadlar uchun aniqlanib quymastan

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Ko'rinishdagi barcha ko'phadlar uchun ham aniq bo'lib hisoblanadi. Haqiqattan ham biz P_3 ni

$$P_3(x) = P_2(x) + a_3x^3$$

ko'rinishida yozishimiz mumkin. Bu erda $P_2(x)$, (4) tenglik bilan aniqlanadi.

U holda

$$\int_a^b P_3(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx + a_3 \int_a^b x^3dx = \int_a^b P_2(x)dx + \frac{a^3}{4}(b^4 - a^4)$$

Lekin bizga

$$\int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{6} \left[P_2(a) + 4P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_2(b) \right]$$

ekanligi belgili. Lekin ikkinchi taraftan $\frac{a^3}{4}(b^4 - a^4)$ qiymatin formula kurinishda

$$\frac{a^3}{4}(b^4 - a^4) = \frac{b-a}{6} \left[(a_3x^3)_{x=a} + 4(a_3x^3)_{x=\frac{b+a}{2}} + (a_3x^3)_{x=b} \right]$$

yozish mu'mkin.

Bundan

$$\int_a^b P_3(x)dx = \frac{b-a}{6} \left[P_3(a) + 4P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_3(b) \right]$$

kelib chiqadi.

Biz uch kvadratur formula ko'rib o'ttik. Dastlabki ikkisi tug'riburchaklar va trapetsiyalar formulasi-birinchi darajali ko'phadlar uchun aniq. Simpson formulasi uchinchi darajali ko'phadlar uchun aniq.

Ushbu konkret keltirilgan misollar bilan biz chegaralanamiz.

Ishning tuzilishi.

Ushbu bitiruv malakaviy ish kirish va olti paragraftan iborat bulib, birinchi paragraf oddiy kvadratur formulalarga bag'ishlangan bo'lib eng oddiy tug'riburchakli, trapetsiyalar va Simpson formulalari to'liq keltirilgan. Ikkinchi paragraf Teylor va Makloren formulasiga bag'ishlangan. Uchinshi paragrafta kvadraturalar nazariyasindagi ekstremal masalalar va ularni echishdagi ayrim natijalar va ularning qo'llanilishi haqida aytib utiladi. To'rtinchi paragrafta kubatur formulalar haqida tushincha beriladi.

Beshinchi paragrafta Simpsonning kubatur formulasi keltiriladi va bir nechta misollar bilan izohlanadi. Oxirgi oltinchi paragrafta esa ikki kubaturli formula bir funktsiya sinfida sonli taqqoslanadi va unga misol ko'rsatiladi.

§1. Oddiy kvadratur formulalar

Biz uch kvadratur formulani ko'rib o'tamiz.

Agar $f(x)$ funksiyasi formula yoki tablitsa ko'rinishida berilsa u holda $\int_a^b f(x)dx$

ning taqribiy qiymatin topish uchun quydagi amallarni bajaramiz.

a) $[a, b]$ integrallash intervalin $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ nuktalar yordamida n bo'lakka

ajratamiz. Bu erda $h = \frac{b-a}{n}$ odim.

b) $y=f(x)$ funksiya qiymatin har bir nuktada

$$y_0=f(a), y_1=f(x_1), \dots, y_{n-1}=f(x_{n-1}), y_n=f(b)$$

hisoblaymiz.

v) Taqribiy kvadratur formulalarning biridan foydalanamiz.

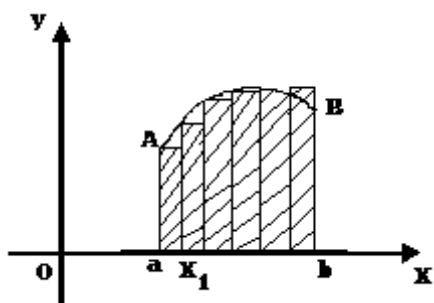
q) Tug'riburchaklar formulasi.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h[f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad (5)$$

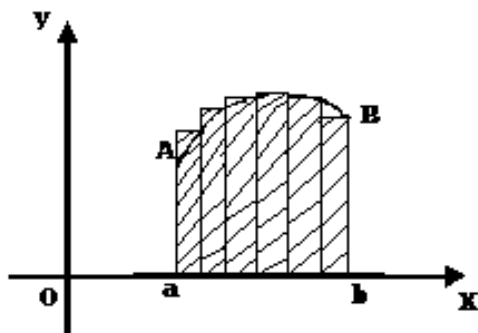
yoki

$$\int_a^b f(x)dx \approx h[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] = h \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (6)$$

Geometrik nazardan bu formulalarga quydagi chizilma mos keladi.



rasm-3.



rasm-4.

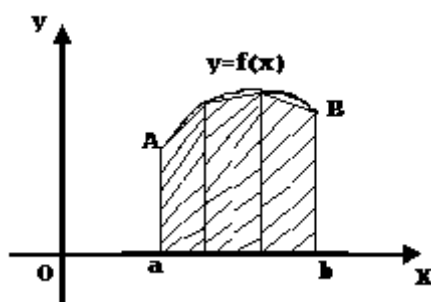
Tug'riburchaklar formulasining xatoligi $\delta(n) \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot y'_{\max}$

Bu erda $y'_{\max}$, $[a, b]$ -intervaldagi $|y'|$ ning eng katta qiymati.

2) Trapetsiyalar formulasi

$$\int_a^b y dx \approx h \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right] = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) \quad (7)$$

Geometrik jihatdan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi shtrixlangan trapetsiyaning yuzasi bilan almashtiriladi.



rasm-5.

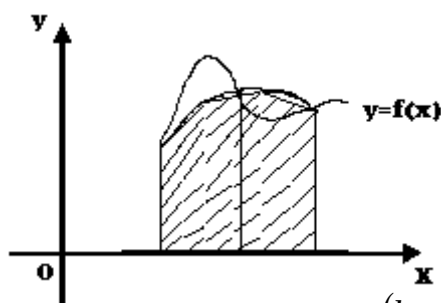
Trapetsiyalar formulasining xatoligi $\delta(n) \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot y''_{\max}$ bu erda $y''_{\max}$, $[a, b]$ intervaldagi $|y''_{\max}|$ ning eng katta qiymati.

3) Simpson formulasi.

Agar n -juft bo'lsa

$$\int_a^b y dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})] \quad (8)$$

Geometrik jixattan bu formula buyicha har bir vertikal $x_i P_i P_{i+2} x_{i+2}$ yul abtsissasi $x_i, x_{i+1} = x_i + h, x_{i+2} = x_i + 2h$ nuqtalaridan o'tuvchi $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ parabola dugalari bilan almashtiriladi.



rasm-6.

Simpson formulasining xatoligi $\delta(n) \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot y^{IV}_{\max}$ bu erda $y^{IV}_{\max}$, $[a, b]$ intervaldagi $|y^{IV}_{\max}|$ ning eng katta qiymati.

Agar bo'linmalar soni qancha ko'p bo'lsa kvadraturalik taqribiy formulaning aniqligi shuncha yuqari bo'ladi.

Birdek n larda (7) formula (6) dan aniq, (8) formula esa (7) dan aniqroq bo'ladi.

Barcha m chi darajali

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

Ko'phadlar uchun aniq bo'lgan kup kvadraturali formulalar tuzish mumkin.

Unga asos qilib Lagranjning klassik interpolyatsion ko'phadini olamiz.

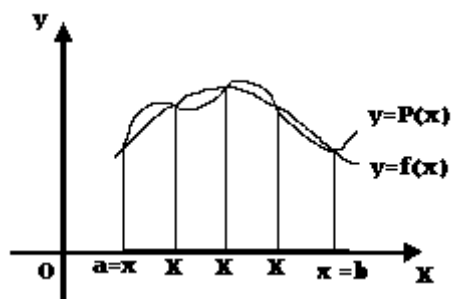
$[a, b]$ kesmasin erikli $m+q$ nuktaga bo'lamiz.

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m \leq b$$

Bu nuqtalarni biz tuginlar dep ataymiz.

Masalaning quyilishi:

Berilgan $f(x)$ funktsiyasi bilan ushbu nuktalarda aniq buladigan m-chi darajali $P_m(x)$ ko'phadini tuzish talab etilsin.



rasm-7.

Shunday qilib $f(x_k)=P_m(x_k)$, $(k=0,q,\dots,m)$ shartining bajarilishi talab etilsin. Izlanayotgan ko'phad Lagranj ko'phadi dep ataladi va quydagicha formula bilan yoziladi.

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^m Q_m^{(k)}(x) f(x_k)$$

Bu erda Q_m^k m-chi darajali ko'phad bo'lib quydagi tenglik bilan aniqlanadi.

$$Q_m^k = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_m)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_m)}, \quad (k=0,1,\dots,m)$$

7-rasmda biz $f(x)$ -funktsiyasini va to'rtinchi darajali Logranj interpolatsion ko'phadini $f(x)$ bilan $[a, b]$ da 5 nuqtada ustma-ust tushadigan qilib chizdik.

Logranj interpolatsion ko'phadini m -chi darajali ko'phad uchun aniq bo'ladigan kvadraturali formula olish uchun qullash mumkin. Haqiqattan ham $f(x)$ - funktsiyasining $[a, b]$ kesmasida olingan aniq integrali taqribiy hisoblash uchun ushbu kesmada $f(x)$ ni interpolatsiyalovchi $P_m(x)$ ko'phadidan aniq integral olish etarli. Natijada biz

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_m(x)dx = \sum_0^m f(x_k) \int_a^b Q_m^{(k)}(x)dx$$

Yoki
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_0^m P_k f(x_k) \quad (9)$$

Bunda
$$P_k = \int_a^b Q_m^{(k)}(x)dx, \quad (k=0,1,\dots,m) \quad (10)$$

(9) taqribiy tenglik m -chi darajali ko'phad uchun aniq bo'lgan qandaydir kvadratur formulani aniqlaydi.

Ko'plagan klassik kvadratur formulalar shunday kelib chiqishiga ega.

Masalan agar (9), (10) formulalarda biz $m=2$, $x_0=a$, $x_1=(a+b)/2$, $x_2=b$ deb olsak Simpson formulasini olamiz. Aks holda agar $[a, b]$ da berilgan x_k nuqtalar va $P'_k (k=0,1,\dots,m)$ sonlar yordamida

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_0^m P'_k f(x_k) \quad (11)$$

kvadratur formula m -chi darajali $P_m(x)$ ko'rinishidagi barcha ko'phadlar uchun olingan bo'lsa unda yuqarida keltirilgandek u Logranjning

$$f(x) = \sum_0^m Q_m^{(k)}(x) f(x_k)$$

interpolyatsion formulasidan kelib chiqadi. Haqiqattan ham (11) formula bilan birgalikta (9) kvadratur formulani qaraymiz, bu erda P_k sonlari (10) tenglik bilan aniqlanadi. Ikki formula ham birdek x_k tugunlar sistemasi bilan aniqlanadi, $(k=0,1,\dots,m)$ va ikkisi ham m -chi darajali ko'phad uchun aniq, xususiyl holda x^l , $(l=0,1,\dots,m)$ funktsiyasi uchun. Bundan quydagi tenglik bajarilishi kerak.

$$\sum_0^m (P_k - P'_k) \cdot x_k^l = 0, \quad (l = 0, 1, \dots, m), \quad (12)$$

(12) ning aniqlanuvchi har xil x_k , ($k=0, 1, \dots, m$) nuqtalari uchun Vandermond determinanti bo'lib noldan o'zgacha. U holda faqat $P_k = P'_k$, ($k=0, 1, \dots, m$) bo'lganda bajariladi. (9) kvadratur formula bilan birgalikta

$$\int_c^d F(u) du \approx \sum_0^m P_k^* f(x_k^*) \quad (9')$$

Formulasini kiritamiz. U quydagi xossalarga ega bo'lsin.

a) $P_k^* \cdot P_k = (d - c) : (b - a), \quad (k=0, 1, \dots, m)$

b) $x_0^* < x_1^* < \dots < x_m^*$ tugunlar $[c, d]$ kesmasiga tegishli va uni x_k , $[a, b]$ ni bo'lgandek nisbatta bo'ladi.

$$(x_0^* - c) : (x_1^* - c) : \dots : (x_m^* - c) = (x_0 - a) : (x_1 - a) : \dots : (x_m - a)$$

(9') formulasini biz (9) ga uqshash formula dep ataymiz. (9) va (9') uqshash formulalar bir vaqtning uzida m -chi darajali ko'phadlar uchun aniq. Haqiqattan ham agar $R(u)$, m -chi darajali ko'phad bo'lsa unda

$$R\left(c + \frac{d - c}{b - a}(x - a)\right)$$

m -chi darajali ko'phad. Shuning uchun

$$\begin{aligned} \int_c^d R(u) du &= \frac{d - c}{b - a} \int_a^b R\left(c + \frac{d - c}{b - a}(x - a)\right) dx = \\ &= \frac{d - c}{b - a} \sum_0^m P_k R\left(c + \frac{d - c}{b - a}(x_k - a)\right) = \sum_0^m P_k^* R(x_k^*) \end{aligned}$$

Yuqarida aytilganlardan va (9') kvadraturali formulaning birdan birligidan agar $x_0^*, x_1^*, \dots, x_m^* \in [c, d]$ tugunlar b) shartini qanoatlantirsa unda u a) shartini ham qanoatlantiradi.

Gaussning kvadraturali formulasi

Simpson va tug'ri burchaklar formulasidan kurganimizdek ko'phadning tugunlarin yaxshi saylab olganimizda Kvadratur formulaning aniqligi oshadi. Shuning uchun quydagicha optimizatsiyalik masalani qoyish mumkin.

Yuqori tartibli ko'phadlar uchun berilgan n -tugunida

$$J(f) = \int_a^b f(x)P(x)dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (13)$$

aniq kvadratur formula tuzing.

Bunday kvadratur formula Gauss formulasi deb ataladi. m-darajali P_m ko'phad uchun (13) ko'rinishdagi Kvadratur formula bor bo'lsin. Bunda $P(x)$ chekli $[a, b]$ kesmasida berilgan, integrallanuvchi og'irlik funktsiyasi, $f(x)$ etarli tekis deb xisoblanadi.

Qoyilgan masalani echish uchun, tugunlarining soni n berilganda, (13) formulaning parametrlarin x_i ($i = \overline{1, n}$) tugunlarin va A_i ($i = \overline{1, n}$) koefitsientlarin, u eng yuqori darajali ko'phad uchun aniq formula buladigan qilib saylab olish kerak. (13) formulasining belgisiz parametrlarining umumiy soni $2n$ ga teng bulganliktan, ushbu parametrlarni bir qiymatli aniqlash mumkin bo'lgan ko'phadning eng katta darajasi $2n-1$ ga teng buladi.

Sababi bunday ko'phadning koefitsientlarining soni ham $2n$ ga teng. Shuning uchun (13) formulaning algebraik aniqlik darajasi $m=2n-1$ ga teng buladi. Bunday formulalarni $P(x)=1$ holat uchun dastlab K.Gauss yasagan. Bunday doimiy og'irlikka ega Kvadratur formulalar, odatda, integral ostidagi funktsiyaning integrallash oralig'ida uzluksiz nuqtalari yuq va u yuqori tartibli tekislikka ega bulganda gina yuqori aniqlikni taminlaydi.

Mustaqil uzgaruvchini chiziqli turlantirish yuli bilan $[a, b]$ kesmasini hardoim $[-1;1]$ kesmasiga keltirish mumkin. Shuning uchun dastlab integrallash oraligi $[-1;1]$ bo'lgan xususiy holni kurib utamiz. Shunday qilib, dastlab eng yuqari algebraik aniqlik darajasiga ega.

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \quad (14)$$

ko'rinishidagi kvadratur formulani yasaymiz. Buning uchun uning t_i ($i = \overline{1, n}$) tugunlari va A_i ($i = \overline{1, n}$) koefitsientlarini, (14) formula eng yuqori $2n-1$ darajali barcha ko'phadlar uchun aniq formula bulish shartidan saylap olamiz.

(14) da aniq tenglikning bajarilishi uchun uning $f(t)=1,t,t^2,\dots,t^{2n-1}$ bulganda tug'ri tenglikka aylanishi zarurli va etarli.

Haqiqattan ham

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k \quad (k=0,1,2,\dots,2n-1)$$

va $f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t^k$ deb uylab, quydagi tenglikka kelamiz`

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(t) dt &= \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \sum_{i=1}^n A_i t_i^k = \\ &= \sum_{i=1}^n A_i \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t_i^k = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \end{aligned}$$

Shunday qilib

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \frac{2}{k+1}, & k - \text{жычн} \\ 0, & k - \text{мак} \end{cases}$$

Tengliklarini hisobga olib, quyilgan masalani echish uchun t_i va A_i larni quydagi $2n$ tenglamalar sistemasidan aniqlash etarli.

$$\sum_{i=1}^n A_i = 2, \quad \sum_{i=1}^n A_i t_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1}, \quad \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-1} = 0, \quad (15)$$

Bu chiziqli emas tenglamalar sistemasini odattagi usul bilan echish katta qiyinchiliklarga olib keladi. Lekin (15) sistemani eshish uchun quydagi yasalma usuldan foydalanish mumkin.

Buning uchun

$$f(t) = t^k P_n(t), \quad (k=0,1,2,\dots,n-1) \quad (16)$$

ko'phadni qaraymiz. Bundan $P_n(x)$, Lejandr ko'phadi. Bu ko'phadlarning darajalari $2n-1$ dan ortiq emas. Shuning uchun (15) sistemasi asosida (16) ko'phadlar uchun (14) formula buladi.

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i), \quad (k=0,1,2,\dots,n-1) \quad (17)$$

Ikkinchi taraftan, Lejandr ko'phadlarining ortogonallik xossasi buyicha $k < n$ bulganda quydagi tenglik urinli`

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = 0 \quad (k=0,1,2,\dots,n-1)$$

Shuning uchun

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i) = 0, \quad (k=0,1,2,\dots,n-1) \quad (18)$$

buladi. Agarda

$$P_k(t_i) = 0, \quad (i=0,1,2,\dots,n) \quad (19)$$

bo'lsa, unda (18) tenglik A_i larning xoxlagan qiymatida bajariladi. Shunday qilib, (14) kvadratur formulasining eng yuqori $m=2n-1$ algebraik aniqligiga erishish uchun, uning t_i tugunlari xisobida Lejandrning mos ko'phadining ildizlarini olish etarli. Lejandr ko'phadlarining ildizlari haqiqiy va har xil bulib, ular $(-1;1)$ oralig'ida yotadi.

(14) kvadratur formulasining t_i tugunlarin (19) tengliklari bajariladigan qilib saylab olib, ularning topilgan qiymatlarin (15) sistemaning dastlabki n tenglamasiga quyamiz. Shunda bu tenglamalar A_i koeffitsientlariga nisbatan n -chiziqli tenglamalar sistemasiga aylanadi. Musbat sistemaning determinanti Vandermond determinanti bo'ladi.

$$D = \prod_{i>j} (t_i - t_j) \neq 0$$

Shuning uchun ushbu sistemada A_i , $(i=\overline{1,n})$ koeffitsientlari bir qiymatli aniqlanadi.

Tugunlari t_i ($i=\overline{1,n}$) Lejandrning $P_n(t)$ ko'phadining ildizlari bulgan va A_i , $(i=\overline{1,n})$ koeffitsientlari (15) sistemaning dastlabki n tenglamasidan aniqlanadigan (14) formula Gaussning kvadratur formulasi deb ataladi.

Misol: Uch ordinata ($n=3$) berilgan holda Gaussning kvadratur formulasini yasang.

Echimi: Lejandrning uchinchi darajali ko'phadi

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

ko'rinishda yozilishi bizga malum. Ushbu ko'phadning korenlarini aniqlaymiz.

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) = 0, \quad t(5t^2 - 3) = 0$$

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0,7745; \quad t_2 = 0; \quad t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0,7745$$

Tugunlarning bu topilgan qiymatlarini (15) tizimning dastlabki uchtagiga olib borib quysak A_1 , A_2 , A_3 koefitsientlarini aniqlash uchun, chiziqli tenglamalarning quydagi sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}A_2 = 0 \\ -\frac{3}{5}A_1 + \frac{3}{5}A_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Bundan $A_1 = A_3 = \frac{5}{9}$; $A_2 = \frac{8}{9}$ qiymatlari topiladi. Demak (14) formula asosida

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = \frac{1}{9} \left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right]$$

kvadratur formulasi kelip chiqadi Gaussning ushbu formulasining, darajalari $m=5$ tan ortiq bo'lmagan, barcha ko'phadlar uchun aniq formula bulishini oson tekshirip ko'rish mumkin.

Yuqorida ko'rsatilgan usul bilan, n ning har xil qiymatlariga mos, Gaussning aniq Kvadratur formulalarini keltirib chiqarish mumkin.

Gaussning Kvadratur formulasini qo'llashning naqulayligi, ularning tugunlari va koefitsientlarining, umumiy holda irratsional sonlar bulishiga bog'lik. Lekin, Gauss formulalarining bu kamchiligi, solishtirmali oz sondagi ordinatlarni foydalanganda, ularning yuqori aniqlikni ta'minlashi bilan yopiladi.

§2. Teylor formulasi

Qandaydir oraliqta aniqlangan $y=f(x)$ funktsiyasini qurib chiqaylik. Bu funktsiya $y'=f'(x)$ birinchi tartibli hosiladan boshqa $(n+1)$ tartibkacha hosilalarga ega bo'lsin.

$$f''(x) = (f'(x))'; \quad f'''(x) = (f''(x))'; \quad f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))'$$

$y=f(x)$ funktsiyasining grafigiga yurg'azilgan urinma $x=a$ nuqtada

$$y-f(a)=f'(a)(x-a) \quad \text{yoki} \quad f(x) = f(a)+f'(a)(x-a) \quad (20)$$

ko'rinishga ega.

$$P_1(x) = f(a)+f'(a)(x-a) \quad (21)$$

Birinchi darajali ko'phad $x=a$ nuqtada $f(x)$ ning qiymati bilan ustma-ust tushadi. $P_1(a)=f(a)$. (21) ko'phad $x=a$ nuqtadagi hosilasining qiymati $y=f(x)$ funktsiyaning hosilasining qiymati bilan tengday. Haqiqattan ham (21) tenglikdan $P'_1(x)=f'(a)$ demak $P'(a)=f'(a)$. (21) ning grafigi $y=f(x)$ funktsiyasiga $M_0(a, f'(a))$ nuqtada urinadi. Ikkinchi tartibli ko'phadni ham topish mumkin.

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \quad (22)$$

U ham $x=a$ nuqtada $y=f(x)$ bilan tengday qiymatga ega. (22) ning grafigi $x=a$ nuqta atrofida $y=f(x)$ ga hali yam tig'izroq joylashadi.

Mayli $y=f(x)$ uchun $x=a$ nuqta atrofida $n+1$ tartibli uzluksiz hosilaga ega $P_n(x)$ ko'phadni topish talab etilsin yani

$$P_n(a) = f(a), \quad P'_n(a) = f'(a), P''_n(a) = f''(a), \dots, P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad (23)$$

bo'lsin $P_n(x)$ ni quydagicha yozib olamiz.

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \dots + C_n(x-a)^n \quad (24)$$

$C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ koefitsientlarini (23) sharttan aniqlaymiz. Uning uchun uning hosilalarini aniqlaymiz.

$$P'_n(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \dots + nC_n(x-a)^{n-1}$$

$$P''_n(x) = 2C_2 + 2 \cdot 3C_3(x-a) + 4 \cdot 3C_4(x-a)^2 + \dots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}$$

$$P_n^n(x) = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2C_n \quad (25)$$

(24) va (25) ka $x=a$ qiymatini qoyib

$P_n(a) = C_0, P'_n(a) = C_1, P''_n(a) = 2C_2, P'''_n(a) = 2 \cdot 3C_3, \dots, P_n^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2C_n$ ga ega bo'lamiz.

Ushbu tenglamalardan va (23) formuladan

$$C_0 = f(a), C_1 = f'(a), C_2 = \frac{f''(a)}{2}, C_3 = \frac{f'''(a)}{2 \cdot 3}, \dots, C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{2 \cdot 3 \dots n}$$

(26) ga ega bulamiz.

Dastlabki m natural sonining ko'paytmasini $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m$ deb belgilab olsaq

$$C_0 = f(a), \quad C_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

deb yozish mumkin. Bu topilgan koeffitsientlarni (24) formulaga quysaq

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (26)$$

$r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ belgilash kiritaylik. U holda $f(x) = P_n(x) + r_n(x)$ yoki

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x) \quad (27)$$

$r_n(x)$ - chamasi qoldiq a'zo deb ataladi. (27) formulada $r_n(x) = 0$ bo'ladi agar funksiya n darajali ko'phad bo'lsa.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

hoxlagan bunday ko'phadni $x-a$ ning darajalari bo'yicha yoyish mumkin. Misol uchun $P_2(x) = x^2 - 5x + 8$ ni $x-1$ ning darajalari buyicha yoying.

$$P_2(x) = x^2 - 5x + 8, \quad P_2(1) = 4$$

$$P'_2(x) = 2x - 5, \quad P'_2(1) = 3$$

$$P''_2(x) = 2, \quad P''_2(1) = 2$$

$$P'''_2(x) = 0 \quad P_2(x) = 4 - 3(x-1) + \frac{2(x-1)^2}{2!} = (x-1)^2 - 3(x-1) + 4$$

(27) formulada $r_n(x)$ qoldiq a'zoni integral formada keltiramiz

$$r_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$$

§3. Kvadraturalar nazariyasidagi ekstremal masalalar va ularni echish

Har xil kvadratur formulalarning kupturligi cheksiz ko'p. Ushbu paragrafta biz ayrim hollarda Kvadraturalik formulaga eng yaqin yaqinlashish beradigan ekstremal masalani echamiz.

Umumiy problema quydagidan iborat $[0, 1]$ da aniqlangan H funktsiyalar klasi va m natural son berilsin. Barcha

$$\int_0^1 f(x)dx \approx L(f) \quad (28)$$

Bunda

$$L(f) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k f(x_k), \quad 0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} \leq 1 \quad (29)$$

kvadratur formulalar ichidan f funktsiyaning

$$\sup_{f \in H} \left| \int_0^1 f dx - L(f) \right| \quad (30)$$

yuqargi chegarasi eng kichik bo'lsin. Shunday qilib, masala $[0,1]$ kesmasida $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ tugunlarda $p_0, p_1, \dots, p_{m-1}$ og'irlikta yaqinlashish H funktsiyalar sinfida barcha yaqinlashishlar ichida eng yaxshi bo'lishi kerak.

Biz ushbu problemani kesimda ikkinchi tartibli hosilasi bilan chegaralangan f funktsiyalar sinfi uchun echamiz. Uning uchun

$$W_\alpha^{(r)}(M; a, b)$$

funktsiyalar sinfin kiritishdan boshlaymiz. U qo'shimcha quydagi shartlarni qanoatlantirsin.

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0$$

$W_0^{(r)}(M; 0, 1)$ sinfiga tegishli har qanday $f(x)$ funktsiyasi

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 K_r(x-t) f^{(r)}(t) dt$$

bunda

$$K_r(u) = \begin{cases} u^{r-1}, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases} \quad (31)$$

integral ko'rinishida yozilishi mumkin shuning uchun (28) kvadratur formula u yoki bu darajali ko'phadlar uchun aniq yoki aniq emas bo'lishiga qaramastan $P_{r-1}(x) \equiv 0$ deb olib quydagi tenglikka kelimiz.

$$\int_0^1 f dx - L(f) = \int_0^1 F_r(t) f^{(r)}(t) dt$$

Bu $W_0^{(r)}(M; 0, 1)$ sinfidan olingan barcha f funktsiyalar uchun tug'ri bo'ladi.

Bunda

$$F_r(x) = \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{(1-t)^2}{r} - \sum_0^{m-1} P_k K_r(x_k - t) \right]$$

Bundan

$$\begin{aligned} \sup_{f \in W_0^{(r)}(M; 0, 1)} \left| \int_0^1 f dx - L(f) \right| &= \frac{M}{(r-1)!} \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^r}{r} - \sum_0^{m-1} P_k K_r(x_k - t) \right| dt = \\ &= \frac{M}{(r-1)!} \int_0^1 \left| \frac{u^r}{r} - \sum_0^{m-1} \lambda_k K_r(u - u_k) \right| du \end{aligned} \quad (32)$$

Bu erda

$$\lambda_k = P_{m-k-q}, \quad u_k = q - x_{m-k-q}, \quad (u_k < u_{k+q}) \quad (33)$$

Yuqarida quyilgan ekstremal masala $W_\alpha^{(r)}(M; a, b)$ sinfi uchun (33) integralning minimumini λ_k, u_k ($k=0, 1, \dots, m-1$) sistemasi uchun topishga tug'ri keladi.

Biz quydagicha natijaga kelimiz.

Teorema 1.

Barcha (28) ko'rinishdagi Kvadratur formulalar ichida

$$\int_0^1 f(x) dx \approx L(f) = \sum_0^{m-1} P_k^* f(x_k^*)$$

formulasi $W_0^{(r)}(M; 0, 1)$ sinfi uchun yagona va eng yaxshi bo'lib xisoblanadi.

Bu erda tugunlar va og'irlik quydagicha aniqlangan.

$$\left. \begin{aligned} x_k^* &= 4(k+1)\omega_m, \quad (k=0, 1, \dots, m-1) \\ \omega_m &= (\sqrt{3} + 4m)^{-1} \\ P_k^* &= 4\omega_m, \quad (k=0, 1, \dots, m-2) \\ P_{m-1}^* &= (2 + \sqrt{3})\omega_m \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Boshqacha aytganda quydagi tenglik urinli

$$\min_{L(f)} \max_{f \in W_0^r(M;0,1)} \left| \int_0^1 f dx - L(f) \right| = \max_{f \in W_0^r(M;0,1)} \left| \int_0^1 f dx - L_*(f) \right| = \frac{M\omega_m^2}{2}$$

Biz natijani $[0, 1]$ kesma uchun oldik $[0, 1]$ dan erikli $[\alpha, \beta]$ ga utkanda x_k^* tugunlar P_k^* og'irlikta $L=\beta-\alpha$ marotaba kattalashadi, yaqinlashishning aniq bahosi sinf uchun

$$\max_{f \in W_0^r(M;\alpha,\beta)} \left| \int_\alpha^\beta f dx - L_*(f) \right| = \frac{M l^3 \omega_m^2}{2}$$

bo'ladi. Olingan eng yaxshi kvadratur formula bitta kamchilikka ega, yani u kafolat berilgan $\frac{M\omega_m^2}{2}$ minimal bahoni barcha ikkinchi tartibli hosilalari chegaralangan funktsiyalar uchun bermaydi, faqat shularning ichida

$$f(0)=f'(0)=0 \quad (35)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchisiga gina beradi.

Shunday qilib, agar biz olingan formuladan foydalanmoqchi bo'lsak va $f(x)$ funktsiyasi (35) formulani qanoatlantirmasa, u holda biz $f(x)$ ni $x=0$ nuqtasi atrofida Teylor formulasiga yayib

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\varphi(x)$$

va $f(0)+xf'(0)$ deb o'z oldiga integral olib keyin $\varphi(x)$ ga Kvadratur formulani qo'llaymiz. Faqat shunda gina yuqorida keltirilgan $\frac{M\omega_m^2}{2}$ bahoda yaqinlashishni olish mumkin.

Olingan Kvadratur formulaning qandaydir o'zgarishlari yangi Kvadratur formulalarning paydo bo'lishiga olib keladi.

Misol`

$$\int_{-1}^{+1} f dx \approx \sum_{-m}^m \mu_k f(\xi_k) \quad (36)$$

kvadratur formulani kurib utaylik bu erda

$$\mu_k = \mu_{-k} = P_{k-1}^*, \quad -\xi_{-k} = \xi_k = x_{k-1}^*, \quad (k=1,2,...m)$$

$\mu_0 = 4\omega_m$, $\xi_0 = 0$ Shunday qilib bu toza kvadratur formula $[-1, 1]$ kesmasida aniqlanib, oldingi formulaga bir tugun $\xi_0 = 0$ va simmetrizatsiyalash yuli bilan olinadi. Bu erda

$$\mu_0, \quad \sum_{-m}^m \mu_k = 2$$

shartini qanoatlantiradiganday qilib saylab olinadi. Shunga bog`lik (36) formulaning simmetriyaligidan (36), 1 va x funktsiyalari uchun aniq, shu bois hohlagan chiziqli funktsiya uchun ham aniq. Undan boshqa u quydagi xossalarga ega.

Teorema 2.

$$\int_{-1}^{+1} f dx \approx \sum_{-m}^m P_k f(x_k) \quad (37)$$

2m+1 tugunli barcha Kvadratur formulalar ichida (36) formula $W^{(r)}(M; -1, +1)$ sinfi uchun eng yaxshi bo`lib topiladi.

$$-1 \leq x_{-m} < \dots < x_0 < \dots < x_m \leq 1$$

Bunda

$$\sup_{f \in W_0^{(r)}(M; -1, +1)} \left| \int_0^1 f dx - \sum_{-m}^m \mu_k f(\xi_k) \right| = M\omega_m^2$$

Isbot:

Agar kvadratur formula barcha P_1 (r-1 darajali) ko`phadlar uchun aniq bo`lmasa, unda u uchun qaralayotgan aniq yuqori chegara ∞ ka teng. Shuning uchun (37) ko`rinishdagi, barcha  $P_1$  lar uchun aniq bo`ladigan kvadratur formulani ko`rish etarli

$$f(0)=0!$$

$$\begin{aligned} \sup_{f \in W_{x_0}^{(r)}} \left| \int_0^1 f dx - \sum_{-m}^m P_k f(x_k) \right| &= \sup_{f_1 \in W_{x_0}^{(r)}(M, -1+x_0)} \left| \int_{-1}^{x_0} f_1 dx - \sum_{-m}^{-1} P_k f_1(x_k) \right| + \\ &+ \sup_{f_2 \in W_{x_0}^{(r)}(M, x_0, 1)} \left| \int_{x_0}^1 f_2 dx - \sum_1^m P_k f_2(x_k) \right| \geq \frac{(x_0 + 1)^3 + (1 - x_0)^3}{2} M\omega_m^2 \geq M\omega_m^2 \end{aligned}$$

Sungi nisbat tenglikka aylanadi agar $x_0=0$ bo`lsa. Agar  $x_0=0$  deb olsak teorema 1 asosida oxirgi nisbat (36) kvadratur formula uchun ayniyatga aylanadi. Og`irlik funktsiya

$$\sum_{-m}^m P_k = 1$$

nisbattan aniqlanadi. Teorema isbotlandi.

Sungi yillarda Kvadraturalar nazariyasidagi ekstremal masalalarga aloqida qizig`uvchanlik paydo bo`ldi. Bunday masalalarni echish yani berilgan funktsiyalar orasidan eng yaxshi Kvadratur formulani topib va uning qoldig`ini baholash, uz navbatida funktsiyalar nazariyasi va funktsional analizdan nozik qiyinchiliklarni engib o`tishga tug`ri keladi. Oxirgi yillarda bu yunalishda ayrim natijalar olingan bo`lsa ham, bunday turga tegishli kuplagan masalalar hali o`z echimini topkani yuq. Kupchilik natijalar dalillanishi bilan keltirilmagan faqat masala quyilgan. Bir o`zgaruvchili funktsiya uchun umumiy masalaning quyilishini eska solib o`tamiz.

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{\rho} P_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f) \approx L(f) + R(f) \quad (38)$$

kvadratur formulani ko`rib utaylik tugunlar  $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 1$  va  $\{P_{kl}\}$  koefitsientlar bilan ( $k=0,1,\dots,m$ ,  $l=0,1,\dots,\rho$ ) fiksirlangan butun  $m \geq 1$ ,  $\rho \geq 0$  larda  $A$  orqali barcha  $(x,P)$  vektorlar to`plamin belgilaymiz.

Agar $\aleph$ $[0, 1]$ da berilgan qandaydir sinf bo`lsa va  $f(x)$  ushbu sinfda etarli darajada differentsiallanuvchi bo`lsa u holda

$$R(\aleph) = R[\aleph \sim x, p] = \sup_{f \in \aleph} |R(f : x, P)|$$

Quydagicha chamani topish talab etilsin.

$$\mathcal{E}_m^{\rho}[\aleph] = \mathcal{E}_m^{\rho}[\aleph : A] = \inf_{(x,p) \in A} R[\aleph; x, P]$$

va A to`plamdan $(P^* = \{P_{kl}^*\}, x^* = \{x_k^*\}) (x^*, P^*)$

vektorini ko`rsatish kerak, u ushbu tuplamda aniq quyi chegarasiga erishsin, yani $\mathcal{E}_m^0[\aleph; A] = R[\aleph : x^*, P^*]$ tengligi bajarilsin x_k^* tugunlari va P_{kl}^* koefitsientlari bilan (38) kvadraturalik formula $\aleph$ sinfida eng kichik xatolikni beradi va shuning uchun u $\aleph$ sinfidagi $|x, P|$ vektorlar tuplami bilan beriluvchi A tuplamindagi eng

yaxshi formula bo'lib hisoblanadi. Biz quyilgan masalani echishda ko'p hollarda aniq natijalar beradigan ikki metodni keltirib utamiz.

1) Qandaydir bo'lakli ko'phad funktsiyaning normasini minimizatsiyalash masalasiga olip kelish va bu masalani echish

2) $f \in \mathbb{S}$ funktsiyalar to'plamida $L(f; x; P)$ kvadratur yig'indi nolga aylanadigandek qilib $R(f)$ qoldiqni baholash ayrim hollarda eng yaxshi kvadratur formula xatoligining yuqorgi chegarasi shunday funktsiyalarda erishadi bu $\varepsilon_m^0[\mathbb{S}]$ chamasini aniq quydan baholashga mumkinchilik yaratadi.

1964- yili Shenberg

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=0}^m P_k f(x_k) + R(f)$$

kvadratur formulaning P_k koefitsientlarini $x_k = \frac{k}{m}, (k = 0, 1, \dots, m)$ tugunlarda

$W^r L_r (r = 1, 2, \dots)$ sinfida optimizatsiyalash masalasini echkan edi.

Bu yunalishda umumiy lashgan natijani 1966-yili Alberg va Nil'son o'z ishlarida fiksirlangan tugunlarda

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = 1$$

$W^r L_r (r = 1, 2, \dots)$ sinfida P_{kl} koefitsientlarda

$$J(f) = \int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{\rho} P_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f) \approx L(f) + R(f) \quad (39)$$

bunda ($0 \leq \rho \leq r-1$), kvadratur formula uchun olgan edi. Biz Al'berg va Nilsonning natijasining oddiy isbotini ko'rib utaylik.

Bu holda biz (39) kvadratur formula darajasi $r-1$ bulgan barcha ko'phadlar uchun aniq deb hisoblap P_{kl} koefitsientlari

$$L(x^v) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{\rho} P_{kl} \frac{v!}{(v-l)!} x_k^{v-l} = J(x^v), \quad (v = 0, 1, \dots, r-1) \quad (40)$$

nisbat bilan bog'lik. Bunda $\mu = \min[v, \rho]$ va (39) formulaning qoldiq a'zosini $R(f)$ ni $f \in W^r L_r$ uchun

$$R(f) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 N_r(t) f^{(r)}(t) dt$$

(40) deb yozish mumkin bu erda

$$N_r(t) = N_r(P_{kl}; t) = \frac{(1-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{\rho} \frac{(r-t)!}{(r-l-1)!} P_{kl} K_{r-l}(x_k - t)$$

va $K_v(u) = u^{v-a}$ agar $u \geq 0$, $K_v(u) = 0$ agar $u < 0$

$$N_r(t) = R[K_r(x-t)] = J[K_r(x-t)] - L[K_r(x-t)]$$

ekanligi tekshirip ko'riladi agar t fiksirlab olinganda

$K_r(x-t)$, x ning funktsiyasi kurinishida R , J , L chiziqli funktsionallari hisoblanadi. (40) tan yuqoridagiga uxshash

$$\sup_{f \in W_{L_r}^r} |R(f)| = \frac{1}{(r-1)!} \|N_r\|_{L_r} = \frac{1}{(r-1)!} \sqrt{3} \quad (41)$$

$$\text{Bunda} \quad J = J(P_{kl}) = \int_0^1 N_r^r(t) dt \quad (42)$$

Biz P_{kl} , (40) shartni qanoatlantirganda $J(P_{kl})$ funktsiyasining minimumini topishimiz kerak. Bu masalani echish uchun biz ayrim tushinchalarni va faktlarni splayn-yaqinlashish nazariyasidan olishga tug'ri keladi. Biz bu erda yangi aspektta kvadraturalar nazariyasidagi ekstremal masalaning splayn nazariyasi bilan tig'iz bog'likligin anglaymiz.

Mayli $C^n[a, b]$, ($n=0,1,2,\dots$), $[a, b]$ da uzining n -chi tartibli hosilasi bilan uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funktsiyalar to'plami bo'lsin. Bu shartni qanoatlantiruvchi $f(x)$ funktsiyalar to'plamini C_∞^n deb belgilaymiz $0=x_0 < x_1 < \dots < x_m=1$ tugunlarin fiksirlangan dep hisoblab $S_{m^r}^\rho$ ($0 \leq \rho \leq r-1$) sinfin kiritamiz, u sinfta $S(x)$ bo'lakli ko'phadlar funktsiyasi kiritiladi va quydagi shartni qanoatlantiradi.

$$1) S(x) \in C_\infty^{2r-\rho-r}$$

2) Har bir $[x_k, x_{k+1}]$, ($k=0,1, \dots, m-1$) bo'lakchada $S(x)$, $2r-1$ tartibli algebraik ko'phad

e) $(-\infty, 0]$ va $[1, \infty)$ kesmaning har birida $S(x)$, $2r-1$ darajali algebraik ko'phad.

$S(x) = S_{m^r}^\rho$, ($2r-1$) tartibli defekti $\rho+1$ ga teng splayn deb aytamiz.

Keyinchalik biz bularni faqat splaynlar dep aytamiz.

Agar $f \in C^p [0, 1]$ funktsiyasi va $S(x) = S(f, x)$ splayni uchun $S_{m^r}^0$ deb quydagi nisbat bajariladi

$$S^{(l)}(f; x_k) = f^{(l)}(x_k) \quad (43)$$

($k=0, 1, \dots, m-1, l=0, 1, \dots, \rho$)

Unda $S(f, x)$ ni $f(x)$ funktsiyasi uchun interpolatsion splayn deb ataladi.

Lemma 1. Agar $f(x)$, $[0, 1]$ da $(r-1)$ -tartibli absolyut uzluksiz hosilaga ega bo'lib va $S(f, x)$, f -uchun interpolatsion splayn bo'lsa unda

$$\int_0^1 [f^{(r)}(x) - S^{(r)}(f; x)]^2 dx = \int_0^1 [f^{(r)}(x)]^2 dx - \int_0^1 [S^{(r)}(f; x)]^2 dx$$

Lemma 2.

$S_{m^r}^\rho$ ($0 \leq \rho \leq r-1, m \geq 2$) Sinfida hohlagan $f \in C^p [0, q]$ funktsiyasi uchun yagona $S(f, x)$ interpolatsion splayn bor bo'ladi.

Teorema` $0=x_0 < x_1 < \dots < x_m=1$ fiksirlangan tugunlarda $W^r L_r$ ($r=1, 2, \dots$) sinfi uchun (39) ko'rinishidagi barcha Kvadratur formulalar ichida eng yaxshisi

$$P_{kl}^* = \int_0^1 C_{kl}(x) dx, \quad (k=0, 1, \dots, m-1, l=0, 1, \dots, \rho)$$

koeffitsient bilan berilgani bo'lib topiladi, bu erda $C_{kl}(x)$, (*) ko'rinishdagi fundamental splaynlar.

$S_{m^r}^\rho$ sinfidan olingan fundamental splaynlar quydagi nisbattan aniqlanadi.

$$C_{ij}^{(l)}(x_k) = \delta_{ki} \cdot \delta_{ij} \quad (*)$$

($i, k=0, 1, \dots, m-1, j, l=0, 1, \dots, \rho$)

Bu erda $k=i$ de $\delta_{ki}=1, k \neq i$ de $\delta_{ij}=0$ hohlagan $f \in C^p$ funktsiya uchun $S(f, x)$ ko'rinishdagi interpolatsion splayn quydagicha yoziladi.

$$S(f; x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\rho} f^{(j)}(x_i) C_{ij}(x)$$

Mos natijani $\tilde{W}^r L_r$ sinfi uchun davriy holda ham olish mumkin. Bu holda (39) formuladagi optimal koeffitsientlar

$$P_{kl}^* = \int_0^1 \tilde{C}_{kl}(x) dx, \quad (k=0,1, \dots, m-1, \quad l=0,1, \dots, \rho)$$

tengligi bilan aniqlanadi, bu erda $\tilde{C}_{kl}(x)$ bir periodli $C_{\infty}^{2r-\rho-r}$ sinfidan olingan fundamental splaynlar, ular har bir $[x_k, x_{k+1}]$, $(k=0,1, \dots, m-1)$ oraliqta $2r-1$ darajali ko'phadlar bilan ustma-ust tushadi yani

$$\tilde{C}_{ij}^{(l)}(x_k) = \delta_{ki} \cdot \delta_{jl} \quad (i, k=0,1, \dots, m-1, \quad j, l=0,1, \dots, \rho)$$

fundamental splaynning ta'rifidan davriy hol bulgandek, davriy emas hol uchun ham P_{kl}^* optimal koefitsientlarni taqribiy hisoblash algoritmini tuzish mumkin. V.L.Velikin $\rho=r-1$, $(r=1,2,\dots)$ bulgan hol uchun bu koefitsientlarning aniq qiymatin beradigan oddiy formula ishlab chiqti $\rho \geq 0$ deb olib

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{0l} &= b_l h_1^{l+1}, & \tilde{P}_{ml} &= (-1)^l b_l h_m^{l+1}, & (l=0,1,\dots,\rho) \\ \tilde{P}_{kl} &= b_l [h_1^{l+1} - (-1)^l h_k^{l+1}] \end{aligned} \quad (44)$$

$(k=0,1, \dots, m-1, \quad l=0,1, \dots, \rho)$ bunda $h_k = x_k - x_{k-1}$ va

$$b_l = \frac{\rho+1}{l!} \sum_{s=0}^{\rho-l} \frac{(\rho+s)!(l+s)!}{s!(\rho+l+s+r)!}$$

$\rho=r-1$, bulganda $\tilde{P}_{kl}$ sonlari $W^r L_r$ sinfidagi (39) formuladagi optimal bo'lgan P_{kl}^* koefitsientlari bilan ustma-ust tushadi.

V.L.Velikin quydagi kvadratur formulani kurip utti.

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{\rho} \bar{P}_{kl} f^{(l)}(x_k) + \bar{R}(f) \quad (\rho=0,1,2,\dots)$$

Bu erda $0=x_0 < x_1 < \dots < x_m=1$ (44) tengligi bilan berilgan koefitsientlar $\bar{P}_{kl} = \bar{P}_{kl}(x)$ tugunlarda $(x_0=0, x_m=1)$ x-vektorni saylab olish bilan aniqlanadi. Shunday qilib $\bar{R}(f) = \bar{R}_{\rho}(f; x)$

Interval uchlarida fiksirlangan tugunlarda berilgan kvadratur formulalar.

Agar tugunlar sifatida $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ deb oraliqning uchlarini $x_0=0, x_m=1$ deb belgilab olsak va koefitsientlarni optimal kurinishda saylab olsak oddiy eng yaxshi kvadratur formula paydo etish mumkin.

Shunday qilib $0=x_0 < x_1 < \dots < x_m=1$ deb olsak

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{\rho_k} P_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f) \quad (45)$$

kvadratur formulani qarap o'tamiz. $a=0$, $a=1$ uchun yozilgan Teylor formulasi $f \in W^r L_p$ funktsiyasi uchun quydagicha yoziladi

$$f(x) = P_{r-1}(t) + \frac{1}{2(r-1)!} \left[\int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt - \int_x^1 (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt \right]$$

Bu erda $P_{r-1}(t)$, $r-1$ darajali ko'phad. Agar (45)- formula $\rho_k \leq r-1$ dan boshlab shunday ko'phadlar uchun aniq bo'lsa, unda uning qoldig'i $R(f)$ ni

$$R(f) = \frac{(-1)^r}{2!} \int_0^1 G_r(t) f^{(r)}(t) dt$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu erda

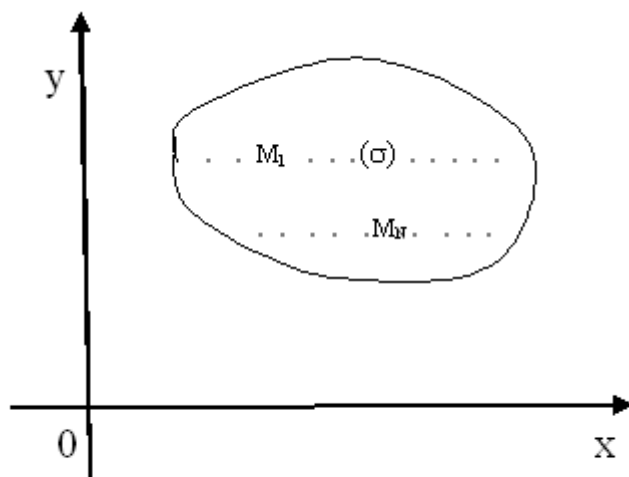
$$G_r(t) = \frac{1}{r} [t^r + (t-1)^r] - \frac{(-1)^r}{r} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{\rho_k} \frac{r! P_{kl}}{(r-l-1)!} \cdot [K_{r-l}(x_k - t) + (-1)^{r+l} K_{r-l}(t - x_k)]$$

$k=r-1$ bulganda $G_r(t)$ har bir (x_k, x_{k+1}) ($k=0, 1, \dots, m-1$) oraliqta yuqorgi koefitsienti birga teng bulgan r -darajali erikli ko'phad. $r-1$ darajali ko'phad uchun (45) formulaning aniqligidan $\rho_k \leq r-2$ da $G_r(0)=G_r(1)=0$ ekanligi kelip chiqadi.

§4. Kubatur formula haqida tushincha

Kubatur formulalar qo'sh integrallarni taqribiy hisoblash uchun mo'ljallangan.

Mayli $z = f(x, y)$ funktsiyasi qandaydir (σ) chegaralangan soxada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Ushbu soxada $M_i(x_i, y_j)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) tugunlar tizimini saylab olamiz. (rasm-8).



rasm-8

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy$$

qo'sh integralni hisoblash uchun taqribiy

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N A_i f(x_i, y_i) \quad (46)$$

formuladan foydalanamiz. A_i – koefitsientlarini topish uchun (46) kubatur formula (47) ko'rinishdagi barcha ko'phadlar uchun bajarilishini talab qilamiz.

$$P_n(x, y) = \sum_{k+l \leq n} c_{kl} x^k y^l, \quad (47)$$

Darajasi berilgan n - sonidan oshib ketmasligi kerak. Buning uchun (46) formula $x^k y^l$ ($k, l = 0, 1, 2, \dots, n; k + l \leq n$) kupaytma uchun aniq bo'lishi kerak.

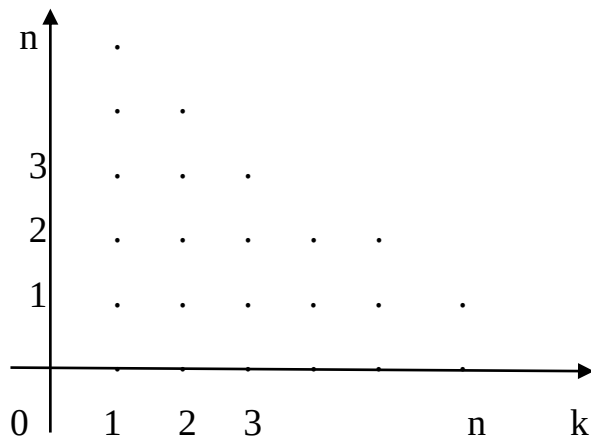
(46) da $f(x, y) = x^k y^l$ deb olib quydagiga ega bo'lamiz.

$$I_{k,l} = \iint_{(\sigma)} x^k y^l dx dy = \sum_{i=1}^N A_i x_i^k y_i^l \quad k, l = 0, 1, \dots, n; k + l \leq n. \quad (48)$$

Shunday qilib (1) formuladagi A_i koefitsientlari umuman aytganda (48) chiziqli tenglamalar tizimidan aniqlanadi. (48) tizim aniqlangan bo'lishi uchun N nom'alumlar soni tenglamalar soniga teng bo'lishi kerak. Bundan kursatkichlar turini tuzib quydagiga ega bo'lamiz.

(rasm-9)

$$N = (n+1) + n + \dots + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

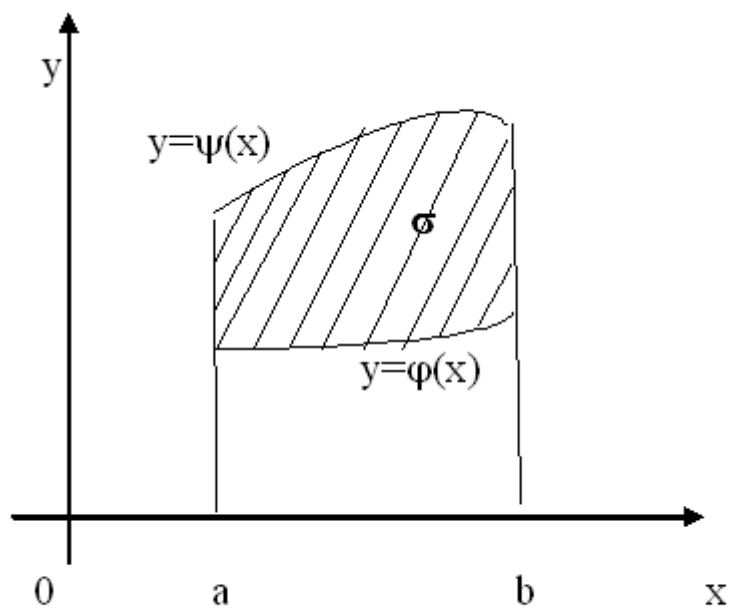


rasm-9

Qo'sh integral xisoblashning yana bir usulini ko'rib utamiz.

Mayli integrallash soxasi uzluksiz $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ ($\varphi(x) \leq \psi(x)$)

chiziqlari bilan va yon tomonlardan $x = a$, $x = b$ chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsin (rasm-10)



rasm-10

Bizga ma'lum qo'sh integralning qoidalaridan integrallash chegarasini quyib quydagiga ega bo'lamiz.

$$I = \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \quad (49)$$

Mayli

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \quad (50)$$

U holda

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx \quad (51)$$

(51) ning ung tarafida turgan bir karrali integralga kvadratur formulalarning bittasini qo'llab quydagiga ega bo'lamiz.

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n A_i F(x_i), \quad (52)$$

bunda $x_i \in [a, b]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) va A_i - qandaydir doimiy koefitsientlar.

Uz galida

$$F(x_i) = \int_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i, y) dy$$

qiymati kvadraturaning quydagi formulasidan aniqlanadi, bu erda $B_{i,j}$ -mos doimiylar.

(52) formuladan

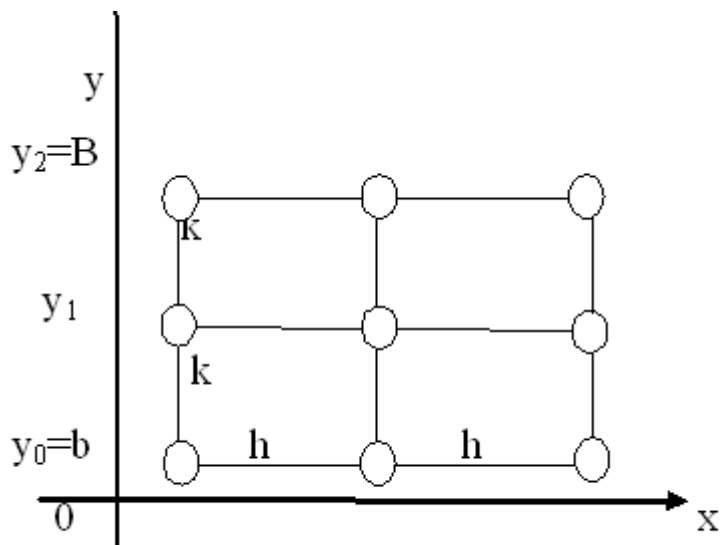
$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_i B_{ij} f(x_i, y_j), \quad (53)$$

bu erda A_i va B_{ij} ma'lum doimiy koefitsientlar.

§5. Simpsonning kubatur formulasi

Mayli integrallash soxasi to'g'ri to'rtburchak bo'lsin va uning taraflari koordinata o'qlariga parallel bo'lsin (11-rasm).

$$R: [a \leq x \leq A; b \leq y \leq B],$$



rasm-11

Har bir $[a, A]$ va $[b, B]$ interval nuqtalar yordamida quydagicha bo'linadi

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h = A;$$

$$y_0 = b, y_1 = b + k, y_2 = b + 2k = B,$$

bu erda

$$h = \frac{A-a}{2}, k = \frac{B-b}{2}.$$

Hammasi bo'lib to'qqiz (x_i, y_j) ($i, j = 0, 1, 2$) nuqtaga ega bo'lamiz. Bundan

$$\iint_{(R)} f(x, y) dx dy = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy \quad (54)$$

Ichki integralni Simpsonning kvadratur formulasi buyicha hisoblab:

$$\begin{aligned} \iint_{(R)} f(x, y) dx dy &= \frac{k}{3} \int_a^A [f(x, y_0) + 4f(x, y_1) + f(x, y_2)] dx = \\ &= \frac{k}{3} \left[\int_a^A f(x, y_0) dx + 4 \int_a^A f(x, y_1) dx + \int_a^A f(x, y_2) dx \right] \end{aligned}$$

ni topamiz.

Har bir integralga Simpson formulasini qo'llab quydagiga ega bo'lamiz.

$$\iint_{(R)} f(x, y) dx dy = \frac{hk}{9} \int_a^A [f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2, y_2)] + 4[f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_2, y_1) + f(x_1, y_2)] + 16f(x_1, y_1)] \quad (55)$$

(55) formula Simpsonning kubatur formulasi deb ataladi.

Uni ixchamlab

$$\iint_{(R)} f(x, y) dx dy = \frac{hk}{9} (\sigma_0 + 4\sigma_1 + 16\sigma_2), \quad (56)$$

yo'zish mumkin bunda:

σ_0 - $f(x, y)$ funktsiyasining R- to'g'riburchakli to'rtburchakning uchlaridagi qiymatlar yig'indisi; σ_1 - $f(x, y)$ funktsiyasining R- to'g'riburchakli to'rtburchakning urtalaridagi qiymatlar yig'indisi; σ_2 - $f(x, y)$ funktsiyasining R- to'g'riburchakli to'rtburchakning markazidagi qiymati. Agar R- to'g'riburchakli to'rtburchakning o'lchami katta bo'lsa u holda kubatur formulaning aniqligini oshirish uchun R- soxani to'g'riburchakli to'rtburchaklar tizimiga ajratamiz va har biriga Simpson kubatur formulasini qo'llaymiz.

R-to'g'riburchakli to'rtburchak soxani n , va m tengday bo'laklarga ajratamiz. Natijada nm to'g'riburchakli to'r hosil bo'ladi. Wz navbatida bu to'g'riburchakli to'rtburchaklarni to'rtta tengday bo'lakka bo'lamiz. Bu kichkina to'rning uchlarini kubatur formulaning M_{ij} tugunlari sifatida qabul qilamiz.

Mayli

$$h = \frac{A-a}{2n}, \quad k = \frac{B-b}{2m}.$$

U holda tugunlar to'ri quydagi koordinatalarga ega bo'ladi:

$$x_i = x_0 + ih \quad (x_0 = a; i = 0, 1, 2, \dots, 2n)$$

$$y_j = y_0 + jh \quad (y_0 = b; j = 0, 1, 2, \dots, 2m)$$

Qisqartirib quydagicha belgilash kiritamiz

$$f(x_i, y_j) = f_{i,j}$$

(10) formulani har bir to'g'ri burchakli to'rt burchakning to'riga qo'llab quydagiga ega bo'lamiz:

$$\iint_{(r)} f(x, y) dx dy = \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [(f_{2i,2j} + f_{2i+2,2j} + f_{2i+2,2j+2} + f_{2i,2j+2}) + \\ + 4(f_{2i+1,2j} + f_{2i+2,2j+1} + f_{2i+1,2j+2} + f_{2i,2j+1}) + 16f_{2i+1,2j+1}].$$

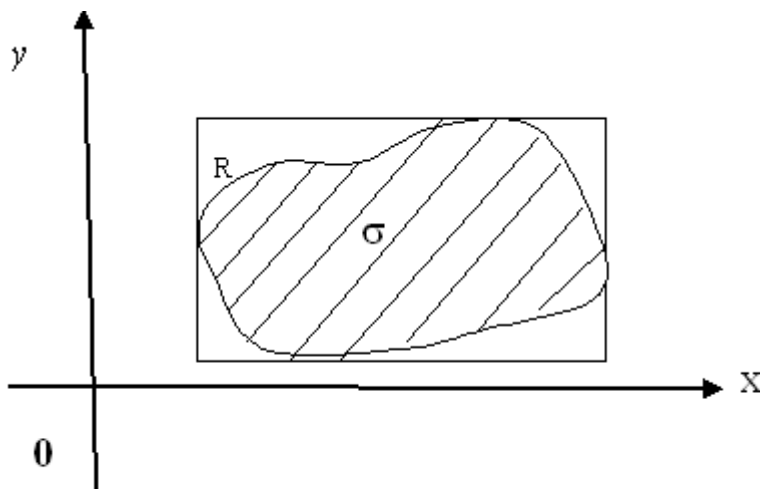
Bundan Simpson kvadratur formulasini topamiz.

$$\iint_{(R)} f(x, y) = \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} \lambda_{ij} f_{ij}, \quad (57)$$

bu erda λ_{ij} quydagi matritsaning mos elementlari.

$$\lambda_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8 & \dots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & 8 & 4 & \dots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 8 & 4 & 8 & 4 & \dots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8 & \dots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Agar integrallash soxasi σ -egri chiziq bo'lsa, u holda $R \supset \sigma$, bo'lib taraflari koordinata o'qlariga parallel. (rasm-12)



Расм-12

Yordamchi funktsiyani qarab o'tamiz

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), (x, y) \in \sigma; \\ 0, (x, y) \in R - \sigma. \end{cases}$$

U holda

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \iint_{(R)} f^*(x, y) dx dy.$$

Oxirgi integral (57) kubatur formula yordamida hisoblanishi mumkin.

§6. Ikki kubaturali formulani bir funktsiya sinfida sonli taqqoslash

Biz bilamiz $f(x)$ funktsiyasining $x \in [a, b]$ oralig'idagi aniq integralin taqribiy

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + R(f) \quad (58)$$

yig'indi bilan almashtirish mumkin. Bu erda $x \in [a, b]$ oralig'i tugunlar deb ataluvchi nuqtalar yordamida N bo'lakka bo'linadi.

$h = \frac{x_n - x_0}{N}$ chamasi odim deb ataladi. (58) integral yig'indi har bir

$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$ tugunda hisoblanadi.

Mayli $f(x, y)$ funktsiyasi

$$W^{r,s}L_2 = \left\{ f(x, y) : f^{(r-1,s)}, f^{(r,s-1)} - \text{absolyut uzluksiz. } \|f^{(r,s)}\| \leq 1 \right\}$$

sinfida aniqlangan bo'lsin. Agar $r = s = 1$ bo'lsa u holda

$$W^{1,1}L_2 = \left\{ f(x, y) : \frac{\partial f}{\partial y} = f^{(0,1)}, \frac{\partial f}{\partial x} = f^{(1,0)} - \text{absolyut uzliksiz. } \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\| \leq 1 \right\} \quad (59)$$

sinfida paydo bo'ladi. Bu sinfda $f(x, y)$ funktsiyasining $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$ oblastta aniq integrali taqribiy

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \sum_{i,j=0}^{n,m} a_{i,j} f(x_i, y_j) + R_1(f) \quad (60)$$

formula yordamida hisoblanadi. (59) sinfinda quydagicha formulani qaraylik

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy &= \sum_{i=0}^N p_i \int_0^1 f(x_i, y) dy + \sum_{j=0}^M p_j \int_0^1 f(x, y_j) dx \\ &- \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N p_i q_j f(x_i, y_j) + R_2 \end{aligned} \quad (61)$$

(58) formula $f(x)$ funktsiyasining kvadratur formulasi (60) va (61) formulalar esa mos $f(x, y)$ funktsiyasining kubatur formulalari deb ataladi.

Endi $\Omega \in [0, 1] \times [0, 1]$ kvadratta berilgan quydagicha shartlarni qanoatlantiruvchi $f(x, y)$ funktsiyalar sinfin WL_2 orqali belgilaylik.

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \|f(x, \cdot)\|_2 \leq C_1, \quad \sup_{0 \leq y \leq 1} \|f(\cdot, y)\|_2 \leq C_2, \quad \|f\|_2 \leq C_3$$

WL_2 sinfinda

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N^2} p_i q_{jN^2} f\left(x_i, \frac{j}{N^2}\right) + \sum_{i=0}^{N^2} \sum_{j=0}^N q_j p_{iN^2} f\left(\frac{i}{N^2}, y_j\right) - \\ &- \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N p_i q_j f(x_i, y_j) + R_2 \end{aligned} \quad (62)$$

kubatur formulani kurib o'tamiz.

[1] ning natijasiga bo'la optimal` koefitsientlarning aniq qiymatining formulalari quydagicha.

$$\begin{aligned} p_0 &= p_N = q_0 = q_N = \frac{1}{2N}, \\ p_i &= q_j = \frac{1}{N}, \quad i = j = 1, 2, \dots, N-1, \\ q_{0, N^2} &= q_{N^2 N^2} = p_{0 N^2} = p_{N^2 N^2} = \frac{1}{2N^2} \\ p_{i N^2} &= q_{j N^2} = \frac{1}{N^2}, \quad i = j = 1, 2, \dots, N^2-1, \\ x_i &= \frac{i}{N}, \quad y_j = \frac{j}{N}. \end{aligned}$$

(62) formula $O(N^3)$ tugunlardagi kubatur formula bo'lib u WL_2 sinfida $O(N^{-2})$ tartibdagi aniqlikni taminlaydi.

Ushbu $O(N^{-2})$ tartibdagi aniqlikni (60) ko'rinishdagi formula yordamida olish uchun biz $O(N^4)$ tugunlardagi [2] qiymatlarni bilishimiz shart. Demak (62) formula WL_2 sinfida (60) formulaga nisbatan tugunlar soni buyicha ancha tejimli bo'lib topiladi.

Misol tariqasida biz $f(x, y) = \frac{1 + (-1)^x - y + x^2 y}{0.5 \cdot x \cdot y \cdot n}$ funksiyasini qaradik.

Taqqoslash natijasi quydagi tablitsada keltirilgan.

N	(60) formulaning umumiy tugunlar soni	(62) formulaning umumiy tugunlar soni	Qoldiq $R_1(f)$	Qoldiq $R_2(f)$
n=3	16	64	0.9544956	0.4711222
n=4	25	145	0.7643785	0.2898189
n=5	36	276	0.6356829	0.1952202
n=6	49	469	0.543488	0.1401315
n=7	64	736	0.4744025	0.1053643
n=8	81	1089	0.420782	8.205926E-02
n=9	100	1540	0.3779905	6.569505E-02
n=10	121	2101	0.3430635	5.377066E-02
n=11	144	2784	0.314024	4.481364E-02
n=12	169	3601	0.2895032	0.0379225
n=16	289	8449	0.2205548	2.174354E-02
n=21	484	18969	0.1699237	1.279008E-02
n=27	784	40096	0.1332101	7.818341E-03
n=32	1089	66561	0.1128831	5.592108E-03
n=45	2116	184276	9.073174E-02	2.856493E-03

Xulosa

Sungi vaqtlarda kvadraturalar nazariyasida ekstremal masalalar juda tezlik bilan rivojlanmoqda. Amaliy masalalarni echkanda taqribiy integrallash masalalarida biz ko'pchilik holda f funktsiyasining qiymati faqat tugunlarda berilgan hollarda qo'llaniladi

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=0}^m P_k f(x_k) + R(f) \quad (63)$$

Umumiy holda (63) ko'rinishdagi $W^r L_p$ va $\tilde{W}^r L_r$ sinfidagi eng yaxshi kvadratur formula haqidagi masala A_{mr}^0 tuplamida $\|\varphi\|_{l_q}$ normasini topishga keltiriladi. Bu erda $\varphi(t)$ uzining $(r-2)$ tartibli hosilasi bilan uzluksiz, r ning kichkina qiymatlaridagi oxirgi natijalar yuqorida keltirilgan teoremlarda o'z urnini topgan yana $W^1 L$ va $W^1 L_2$ sinflari uchun (63) formula quydagi ko'rinishda beriladi

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f\left(\frac{k-1}{m}\right) + R(f)$$

$W L_p$ sinfi uchun (63) kvadratur formulani optimal ko'rinishda quydagicha yozish mumkin

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f\left(\frac{2k-1}{1m}\right) + R(f)$$

Ushbu bitiruv malakaviy ish kirish va turtta paragraftan iborat bulib, birinchi bo'lim oddiy kvadratur formulalarga bag'ishlangan bo'lib eng oddiy tug'riburchakli, trapetsiyalar va Simpson formulalari to'liq keltirilgan. Ikkinchi paragraf Teylor va Makloren formulasiga bag'ishlangan. Uchinshi paragrafta kvadraturalar nazariyasindagi ekstremal masalalar va ularni echishdagi ayrim natijalar va ularning qo'llanilishi haqida aytib utiladi. To'rtinchi paragrafta kubatur formulalar haqida tushincha beriladi. Kubatur formulalar qo'sh integrallarni taqribiy hisoblash uchun mo'ljallangan.

Yani

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy$$

qo'sh integralni hisoblash uchun taqribiy

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N A_i f(x_i, y_i)$$

formuladan foydalanamiz.

Beshinchi paragrafta Simpsonning kubatur formulasi keltiriladi va bir nechta misollar bilan izohlanadi.

Oxirgi oltinchi paragrafta esa ikki kubaturli formula bir funktsiya sinfida sonli taqqoslanadi va unga misol ko'rsatiladi.

Xulosa qilib aytganda bu bitiruv malakaviy ishi talabalar va magistrilar uchun yaxshi qullanma bo'lib topiladi deb uylayman.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Mırzanov J.E. O priblijennom integrirovanii funktsiy dvux peremennıx. // Ukr.mat.jurn.-1986.-37, №4.-S.509-514.
2. Nikol'skiy S.M. Kvadrurnıe formulı. –M.: Nauka, 1974.-224s.
- 3.Oxorzin V.A. Prikladnaya matematika v sisteme MATHCAD.-S.Peterburg-Moskva-Krasnodar,2008.-352s.
4. Loran G.J. Approksimatsiya i optimizatsiya. M: Mir, 1965.
5. Korneychuk N.P.Ekstremal`nıe zadachi teorii priblijeniya. M: Nauka, 1976, - 320 s
6. Vasil`ev.F.P. Metodı resheniya ekstremal`nıx zadach. M.: Nauka, 1981, - 400 s.
7. Ryaben`kiy V.S., Fillipov A.F. Ob ustoychivosti raznostnıx uravneniy. - M.: Gostexizdat. 1956, - 171 s.
8. Sobolev S.L. Vvedenie v teoriyu kubaturnıx formul. -M.: Nauka. 1974. 808 s.
9. Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. Extremal, orthogonality and convergence properties of multi - dimensional splines, Notices Am. Math. Soc. (1964), 64T-339.
10. Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. Convergence properties of generalized splines, Proc. Nat. Acad. Sci. (1966). 66T-47.
11. <http://referat.ru/folder/61/61:20>
Vısshaya matematika. İntegralı. Vıchislitel`nıe metodı.
Algebra.Geometriya.Dvoynoy integral`.Gamma funktsii.
12. <http://www.exponenta.ru/matcad/>
Zadachi matematicheskogo analiza v srede paketa matcad.

Texnika xavfsizligi qoidalari

1. Informatika xonasini beton polli xonalarga yoki binoning erto'lalariga joylashtirish qat'iyon ta'qiqlanadi va sinf xonasining poli elektr tokini o'tkazmaydigan qilib (masalan taxtadan) yasalishi va barcha kompyuterlarning korpuslari yerga ulanishi (yoki elektr ta'minotining yevroandozalarga moslab ulanishi) talab qilinadi.
2. Yuqori kuchlanish (220 Volt) yuradigan simlarning barchasi, shu jumladan uzaytirgichlarning, kompyuter va boshqa elektr qurilmalarining elektr ta'minotiga ulanish simlarining ikki marta izolyasiya qilinganligi talab qilinadi.
3. Xonadagi kompyuterlarni devor bo'ylab yoki xonaning o'rtasiga ikki qator qilib joylashtirilishi kerak
4. Xonadagi barcha kompyuterlarni elektr tarmog'idan uzuvchi yagona uzgich ham bo'lishi kerak.
5. Kompyuter monitori o'tirgan o'quvchilarning ko'zlari darajasida bo'lib, o'quvchilar undan 40 sm dan 80 sm gacha bo'lgan masofada o'tirishlari imkoniyatiga ega bo'lishlari kerak.
6. Kompyuterning klaviaturasi o'tirgan o'quvchilarning bukilgan tirsaklari darajasida bo'lishi kerak. Sichqon uchun klaviaturaning ikkala tomonidan yetarlicha joy qoldirilishi va ular bir xil balandlikda bo'lishlari kerak.
7. Kompyuterda muttasil ishlash vaqti o'quvchilar uchun 60 minutdan ortmasligi kerak.
8. Kompyuter xonasining kvadrat metrlardagi sathi unga joylangan kompyuterlar sonidan kamida 6 marta ko'p bo'lishi kerak.
9. Kompyuter xonalari yetarli quvvatga ega ventilyasiya tizimiga ega bo'lishi kerak.
10. Klaviaturaning kompyuter ishlamayotgan paytda uzoq muddatga ochiq holda qolishi va unda chang yig'ilib qolishining oldini olish lozim