КВАДРАТУРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕДУКЦИИ К ИДЕАЛЬНОМУ ПРИБОРУ

М. А. Раджабова, Б. М. Ахмедов, Э. Улжаев

Узбекистан, Ташкент

Методы интерпретации результатов наблюдений открывают возможность автоматической коррекции некоторых методических погрешностей в экспериментальных данных таким образом, что обеспечивается повышение пространственной или временной разрешающей способности средств наблюдения и контроля. В связи с этим значительный интерес представляют эффективные способы и вычислительные средства оперативной интерпретации экспериментального наблюдения зависимостей, искаженных влиянием средств наблюдения.

В качестве представительного класса задач интерпретация результатов наблюдений рассмотрим достаточно общую задачу редукции к идеальному прибору. Уравнение одномерной задачи редукции к идеальному прибору записывается в виде :

$$\int_S A(r,s)x(s)ds = y(r), r \in R = [c,d], s \in S = [a,b], \qquad (1)$$

где A(r,s) - аппаратная функция средств наблюдения, определяемая характером влияния экспериментальной установки и физических эффектов, скрывающих от наблюдателя истинный вид искомой функции x(s); y(r) - экспериментально наблюдаемая функция на выходе прибора.

Это уравнение суть интегральное уравнение первого рода с постоянными пределами интегрирования (уравнение Фред-гольма первого рода), в котором вещественная и непрерывная в области RS функция A называется ядром [1]. Важными частными случаями уравнения (1) являются уравнение с разностным ядром

A=A(r-s) и уравнение типа свертки, в котором область интегрирования разностного ядра не ограничена, т.е. S =(-∞,+∞). Для этих уравнений существуют эффективные частные способы решения.

Рассмотрим простой квадратурный метод численного решения задачи интерпретации результатов наблюдений, основанный на неитеративном подходе.

Метод квадратур, весьма практичен для уравнения (1): он обеспечивает необходимую точность решения при минимальных ограничениях на вид ядра уравнения, и заключается в составлении и непосредственном использовании расчетных выражений, полученных путем замены интегральных операторов конечными суммами и аппроксимации подинтегральных выражений квадратурными формулами. При использовании метода квадратур численное решение интегрального уравнения сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Таким образом, определенный интеграл можно представить суммой:

$$\int_a^b \varphi(s)ds = \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi(s_j) + \rho(\varphi), \qquad (2)$$

где $s_j \in [a,b]; j = \overline{1,n}; \rho(\varphi) -$ остаточный член квадратурной формулы (погрешность приближения интеграла конечной суммой); C_j - коэффициент квадратурного метода.

Обратимся к методу Тихонова решения условно корректных задач для уравнения (1). Требуемые для применения этих методов предварительные сведения о решении обычно хорошо согласуются с условиями рассматриваемых прикладных задач:

$y(r)\in L_2; x(s)\in W_n^2$, где W_n^2 - пространство функций, имеющих производную n-го порядка, интегрируемую с квадратом

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b \left(x^{(k)}(s)\right)^2 ds\right)^{1/2}. \quad (3)$$

В методе Тихонова введен стабилизирующий функционал

$$\Omega(x) = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n}\left(q_k(s)\left(x^{(k)}(s)\right)^2\right)\right)ds, \quad (4)$$

соответствующий регуляризации n-го порядка; где $q_k(s)$- неотрицательные непрерывные функции; $q_n(s) > 0$.

Увеличение порядка регуляризации *n* означает введение ограничений на производную от решения $x_\alpha(s)$ более высокого порядка. При неизменных прочих условиях увеличение *n* означает сглаживание решения.

Уравнение Тихонова, соответствующее минимуму (4), имеет вид:

$$\alpha\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d}{du}\left[q_r(u)x_\alpha^{(k)}(u)\right]+\int_a^b Q(u,s)x_\alpha(s)ds = f(u), \quad a\le u\le b, \quad (5)$$

с краевыми условиями, например, типа

$$x_\alpha^{(1)}(a)=\ldots=x_\alpha^{(n)}(a)=x_\alpha^{(1)}(b)=\ldots=x_\alpha^{(n)}(b)=0, (6)$$

где

$$Q(k,s)=Q(s,u)=\int_c^d A(r,u)A(r,s)dr; \quad (7)$$

$$f(u)=\int_c^d A(r,u)y(r)dr; \quad (8)$$

α, q_k - параметры регуляризации.

В явном виде решение (5) можно записать для уравнения типа свертки

$$x_\alpha(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_\alpha(s-r)y(r), \quad (9)$$

где:

$$R_\alpha(\Theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{k(-\omega)\cos(\omega\Theta)d\omega}{k(\omega)k(-\omega)+Q(\omega,k)};$$

$$\omega_1\to-\infty; \omega_2\to+\infty; \; k(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}A(\Theta)\cos(\omega\Theta)d\Theta;$$

$$Q(\omega,\alpha)=\alpha, \quad \text{если} \quad \Omega(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(s)ds;$$

$$Q(\omega,\alpha)=\alpha\omega^{2n}, \text{ если } \Omega(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d^n x}{ds^n}\right)^2 ds;$$

$$Q(\omega,\alpha)=\alpha(\omega+q_m)^2, \text{если} \quad \Omega(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(q_m x^2+(x')^2\right)ds;$$

$\omega_1 > \omega_2; q_m > 0, \alpha > 0$ - параметры регуляризации

Применение квадратурной формулы к интегральному уравнению (5) и дискретизация второго аргумента u приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$G(\alpha, x_j) + \sum_{i=1}^{n} q_{ij} x_i c_j = f_j, j = \overline{1,n}; \quad (10)$$

где $q_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}^{*} a_{kj} c_k$;

$a_{kj} = A(r_k, s_j); a_{ki}^{*} = A^{*}(r_k, s_i) = A(s_i, r_k) = a_{ik}; c_k, c_i -$ квадратурные коэффициенты; m - количество дискретных значений переменной r;

$$f_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}^{*} y_k c_k; y_k = y(r_k); \quad (11)$$

$G(\alpha, x_j)$ определяется первым слагаемым (5).

Методы решения алгебраической системы (10) выбираются с учетом свойств ее компонент.

Квадратная матрица $\{q_{ij}\}$ дискретных значений ядра сохраняет такие его свойства, как положительность и симметричность. Аппаратная функция большинства средств наблюдения, для которых решается задача редукции к идеальному прибору, приводит к матрице $\{q_{ij}\}$ с преобладанием элементов главной диагонали. Применительно к методам решения СЛАУ это означает, что можно использовать схему счета без выбора главных элементов.

Для однопроцессорных вычислительных машин наиболее эффективным методом решения СЛАУ общего вида по количеству вычислений и точности результата является двухэтапный [2] - разложение матрицы СЛАУ на верхний и нижний треугольный сомножители, а затем последова-тельное решение образованных таким образом двух простых систем уравнений. Если матрица СЛАУ положительно определена и симметрична, то выгодно использовать метод, основанный на LL*- разложении, т.е. метод квадратных корней, который по сравнению с LU- разложением дает значительный выигрыш в точности и по количеству вычислений. В методах, основанных на LU- и LL*- разложениях, для повышения точности рекомендуется использовать повышенную разрядность при вычислении скалярных произведений.

Для применения эффективного LL*- разложения симметричность матрицы $\{q_{ij}c_i\}$ СЛАУ не должна нарушаться квадратурными коэффициентами c_i. Если же симметрия нарушена, то она может быть восстановлена путем умножения ее строк на квадратурные коэффициенты из соответствующих столбцов матрицы, т.е. образованием матрицы $\{c_j q_{ij} c_i\}$; для сохранения уравнений элементы вектора правой части также умножаются на соответствующие коэффициенты $\bar{c}_j$. Дополнительная симметризация становится излишней, если имеется возможность решать СЛАУ относительно $z_i = c_i x_i$ и получать затем $x_i = z_i / c_i$, $c_i \neq 0$. Такая возможность определяется последовательностью этапов регуляризации и применения квадратур.

Литература:

1. Джадд Д., Вышецки Г. Цвет в науке и технике.—М.: Мир, 1978.—590 с.

2. Соболев В.С., Мокрушин Л.А. Сервисное программное обеспечение ИВК. / Приборы и системы управления. 1990, №7.