МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА имени МИРЗО УЛУГБЕКА

На правах рукописи
УДК 517.947.5

Аллаберганов Одилбек Рахимович

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С БЕСКОНЕЧНОЗОННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

01.01.03. – Математическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Т а ш к е н т – 2007

Работа выполнена на кафедре «Математическая физика и прикладная математика» Ургенчского Государственного университета имени Аль-Хорезми.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Хасанов Акназар Бекдурдиевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Фаязов Кудратулло Садриддинович

Кандидат физико-математических наук, доцент
Маматов Абдугани Эрмаматович

Ведущая организация: Самаркандский государственный университет

Защита диссертации состоится «____» ________________ 2007 г. в ____ часов на заседании объединенного специализированного совета Д 067.02.03 в Национальном Университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека по адресу: 700174, г.Ташкент, ВУЗ городок, Национальный Университет Узбекистана, механико-математический факультет, ауд. Г-303.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Национального Университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат разослан «____» __________________2007 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
доктор физ.-мат. наук **проф. А.А.Абдушукуров**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Настоящая диссертационная работа посвящена изучению обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, 0 < x < \infty$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi)$$

на полуоси с бесконечнозонным действительным потенциалом $q(x)$ и для квадратичного пучка

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + [q(x) + 2\lambda p(x) - \lambda^2]y = 0, \ 0 < x < \infty$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi)$$

операторов Штурма-Лиувилля на полуоси с π-периодическими действительными коэффициентами $p(x)$, $q(x)$.

Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля исследовалась в работах В.А.Амбарцумяна, Г.Борга, Ю.М.Березанского, А.Ш.Блоха, М.Г.Гасымова, И.М.Гельфанда, М.Г.Крейна, И.Кея, Б.М.Левитана, Н.Левинсона, В.Э.Лянце, В.А.Марченко, Ю.Мозера, В.В.Жикова, Ф.С.Рофе-Бекетова, В.А.Садовничего, А.Н.Тихонова, Ш.А.Алимова, Л.Д.Фаддеева, Л.А.Чудова и других.

Интерес к обратным задачам для уравнения Штурма-Лиувилля резко возрос в 1967 году. Эта было связана с появлением на свет замечательной работы Г.Гарднера, Ж.Грина, М.Крускала и Р.Миуры (ГГКМ), в которой они показали «интегрируемость» уравнения Кортевега-де Фриза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

с помощью метода обратной задачи для уравнения Штурма-Лиувилля.

После работ ГГКМ возникла потребность в изучение оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами специального вида, например, с периодическими, почти-периодическими, конечнозонными, бесконечно-зонными, убывающими и т.п.

Потенциал оператора Штурма-Лиувилля (рассматриваемого на всей прямой), называется конечнозонным (бесконечнозонным), если спектр этого оператора получается выкидыванием из всей прямой конечного (бесконечного) числа интервалов. Эти интервалы принято называть лакунами.

Спектр оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом имеет зонную структуру, поэтому периодический потенциал является либо конечнозонным, либо бесконечнозонным. Однако, конечнозонные и бесконечнозонные потенциалы не объязаны быть периодическим.

Непериодические конечнозонные потенциалы впервые были рассмотрены Н.И.Ахиезером. Н.И.Ахиезер ограничился случаем четных потенциалов, эта соответствует совпадению спектральных параметров с концами своих лакун. Ограничение, принятое Н.И.Ахиезером, было обусловлено тем, что до 1961 г. обратная задача на всей прямой по спектральной матрице-функции еще не была хорошо изучена.

Наиболее замечательная часть работы Н.И.Ахиезера заключается в том, что решение обратной задачи для случая конечнозонных потенциалов было сведено им к проблеме обращения Якоби абелевых интегралов.

Как выяснилось позже, для метода Ахиезера четность потенциала несущественна. На это обстоятельство впервые обратили внимание А.Р.Итс и В.Б.Матвеев, которые, используя теорему Ахиезера и выполнив весьма искусные вычисления, вывели для конечнозонных потенциалов явную формулу; см. также Б.А.Дубровин, В.Б.Матвеев, С.П.Новиков, Дэйт-Танака.

Другой подход к теории конечнозонных потенциалов предложил С.П.Новиков. Подход С.П.Новикова основан на установленном ранее Гарднером и, независимо от него, В.Е.Захаровым и Л.Д.Фаддеевым том факте, что уравнение Кортевега-де Фриза порождает вполне интегрируемую гамильтонову систему. Основываясь на этом, С.П.Новиков показывает, что каждый конечнозонный потенциал, а также решение уравнения Кортевега-де Фриза и любого из высших его аналогов при начальном конечнозонном потенциале есть квазипериодическая функция. Этот последний результат С.П.Новикова доказан Б.М.Левитаном используя теорему Ахиезера.

Отметим, что квазипериодичность по времени решения уравнения Кортевега-де Фриза и любого из высших его аналогов в случае конечнозонной периодической начальной функции независимо от С.П.Новикова была доказана также Лаксом.

Степень изученности проблемы. При решении обратной задачи на всей прямой как для периодического так и для конечнозонного (бесконечнозонного) потенциала оператора Штурма-Лиувилля, основными этапами являются вывод формул следов и системы дифференциальных уравнений для спектральных параметров (система уравнений Дубровина-Трубовица).

Обратная задача на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля с конечнозонным-периодическим и конечнозонным не обязательно периодическим потенциалом изучена в работах Н.И.Ахиезера, Х.Хохштадта и Гольдберга, Б.М.Левитана и А.В.Савина.

Обратная задача на полуоси несколько отличается от обратной задачи на всей прямой. В случае полупрямой, кроме потенциала требуется восстановить и граничное условие через спектральные данные.

В параграфе 4 первой главы изучается обратная задача на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля с конечнозонным потенциалом, а именно выводятся формула следов, формула выражающая граничное условие по спектральным данным и система дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица.

Отметим, что примененный в этом параграфе метод для вывода граничного условия, отличается от метода работы Б.М.Левитана и А.В.Савина. В цели получения формулы для граничного условия, двумя способами выводим асимптотики функции Вейля-Титчмарша и сопоставляем их.

Обратная задача на всей прямой для оператора Штурма-Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом изучена в работах Б.М.Левитана. Б.М.Левитан определяет их как предел конечнозонных потенциалов. На основе предельного перехода лежат формулы следов для конечнозонных потенциалов. Многие результаты полученные для конечнозонных потенциалов, он обобщает на случай бесконечнозонных потенциалов, в частности выводит формулы следов, систему уравнений Дубровина-Трубовица, доказывает почти-периодичность бесконечнозонных потенциалов.

Отметим, что бесконечнозонные потенциалы делятся на два типа, в первом типе лакуны сгущаются только в бесконечности, а во втором типе лакуны могут сгущаться и в конечных точках. Мы рассматриваем только первый тип бесконечнозонных потенциалов оператора Штурма-Лиувилля.

В параграфе 2 второй главы изучается обратная задача на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом, а именно выводятся формула следов, формула выражающая граничное условие по спектральным данным и система дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица.

Для уравнения Штурма-Лиувилля прямые и обратные задачи изучены достаточно полно, а в теории прямых и обратных задач для пучков имеется лишь отдельные фрагменты, не составляющие общей картины.

Обратная задача для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля в классе убывающих коэффициентов по данным рассеяния на полуоси и на всей прямой решена в работах Жана и Жолана, по функции Вейля-Титчмарша в работе В.А.Юрко, на конечном отрезке по спектру и нормирующим числам а также по двум спектрам были изучены М.Г.Гасымовым и Г.Ш.Гусейновым, с периодическим потенциалом на всей прямой исследована в работах Г.Ш.Гусейнова, Б.А.Бабажанова, А.Б.Хасанова, А.Б.Яхшимуратова, с конечнозонным периодическим потенциалом на полуоси изучена в работах Б.А.Бабажанова и А.Б.Хасанова.

В третьей главе этой диссертации решается обратная задача на полуоси для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом, а именно выводятся формулы следов и формула нахождения граничного условия через спектральные данные. Отметим, что в этом случае, система уравнений Дубровина-Трубовица была выведена в работе Б.А.Бабажанова и О.Р.Аллаберганова. Следует заметить, что методы примененные при выводах формул следов и формулы для граничного условия в работах Б.А.Бабажанова и А.Б.Хасанова не пригодны в случае периодических бесконечнозонных коэффициентах. Поэтому мы применяем, другой метод, основанный на изучение асимптотики функции Вейля-Титчмарша. Этот метод был применен нами и в второй главе.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тема диссертационной работы утверждена на Ученом Совете Ургенчского государственного университета имени Ал-Хорезма (протокол №5 от 15.01.2004г.) и выполнена в соответствии с плановой темой кафедры «Математическая физика и прикладная математика» УрГУ.

Цель исследования: Изучение обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля.

Задачи исследования: В диссертации рассматриваются следующие основные проблемы:

1) вычислить методом Лакса регуляризованный след для оператора Дирака с особенностью в потенциале;

2) изучить обратную задачу теории рассеяния для оператора Дирака на всей прямой с действительными непрерывными коэффициентами $p(x)$, $q(x)$ при следующих условиях:

(а) $p(x)$, $q(x)$ достаточно быстро стремятся к нулю при $x \to \infty$, где $x \in [a, \infty)$, $a \in R^1$;

(б) спектр задачи $Dy = \lambda y, \quad y_1(a) = 0 \ (-\infty < x \leq a)$ дискретен;

3) построить оператор Дирака с массой для которой множество собственных значений, расположенных на непрерывном спектре, совпадает с заданной числовой последовательностью и для построенного оператора найти достаточные условия принадлежности коэффициентов $p(x)$, $q(x)$ пространству $L^p(0, \infty)$;

4) изучить зависимость расположения вложенных собственных значений оператора Дирака с массой от общих граничных условий.

Объект и предмет исследования. Оператор Штурма-Лиувилля, обратная спектральная задача.

Методы исследований. В работе используются методы функционального анализа, спектральной теории линейных операторов, теории функции комплексного переменного, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

Основные положения, выносимые на защиту. Основными результатами диссертационной работы являются следующие:

1) вычислен методом Лакса регуляризованный след для оператора Дирака с особенностью в потенциале;

2) изучена обратная задача теории рассеяния для оператора Дирака на всей прямой с действительными непрерывными коэффициентами $p(x)$, $q(x)$ при следующих условиях:

(а) $p(x)$, $q(x)$ достаточно быстро стремятся к нулю при $x \to \infty$, где $x \in [a, \infty)$, $a \in R^1$;

(б) спектр задачи $Dy = \lambda y, \quad y_1(a) = 0 \ (-\infty < x \leq a)$ дискретен;

3) построен оператор Дирака с массой для которой множество собственных значений, расположенных на непрерывном спектре совпадает с заданной числовой последовательностью и для построенного оператора найдены достаточные условия принадлежности коэффициентов $p(x)$, $q(x)$ пространству $L^p(0, \infty)$;

4) изучена зависимость расположения вложенных собственных значений оператора Дирака с массой от общих граничных условий.

Первое и второе из перечисленных результатов получен автором совместно с к.ф.–м.н., доц. А.Б.Яхшимуратовым, остальные результаты получены автором самостоятельно.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

– вычислен регуляризованный след для оператора Дирака с особенностью в потенциале;

– изучена обратная задача теории рассеяния для оператора Дирака на всей прямой;

– построен оператор Дирака с массой для которой множество собственных значений, расположенных на непрерывном спектре совпадает с заданной числовой последовательностью;

– изучена зависимость расположения вложенных собственных значений оператора Дирака с массой от общих граничных условий.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в математической физике при интегрировании нелинейных уравнений, а также квантовой механике.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Методы и результаты диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для магистрантов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений в частных производных» Института математики им. В.И.Романовского АН РУз под руководством академиков М.С.Салахитдинова и Т.Ж.Джураева, на семинарах «Современные методы математической физики» при НУУз им. Мирзо Улугбека под руководством академика Ш.А.Алимова, на семинарах «Дифференциальные уравнения и спектральный анализ» при НУУз им. Мирзо Улугбека под руководством академика М.С.Салахитдинова и профессора Р.Р.Ашурова, на семинарах кафедры «Математическая физика и прикладная математика» УрГУ под руководством профессора А.Б.Хасанова и кафедры «Математический анализ» КГУ под руководством проф. С.К.Косбергенова и доц. К.К.Елгондиева; на международных научных конференциях «ILL-POSED AND NON-CLASSICAL PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHISICS AND ANALISIS» (Самарканд, 2000), «Многомерный комплексный анализ» (Красноярск, Россия, 2002), «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики» (Ташкент, 2004), «Современные проблемы математической физики и информационных технологий» (Ташкент, 2005); на Республиканских научных конференциях «Актуальные проблемы комплексного анализа» (Нукус, 2000), «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Нукус, 2004), «Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа» (Нукус, 2006).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Объём диссертации 96 страницы машинописного текста. Библиография 97 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

I. В § 1-3 первой главы приводятся без доказательств известные результаты из работ ([40], [43]), а в § 4 излагается новый метод вывода граничного условия для задачи Штурма-Лиувилля на полуоси с конечнозонным потенциалом.

II. В § 1 второй главы приводятся необходимые сведения о бесконечнозонных потенциалах оператора Штурма-Лиувилля на всей прямой [40]. В § 2 изучается обратная задача на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом, а именно выводятся формула следов, формула, выражающая граничное условие по спектральным данным и система дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица.

1. Пусть $0=\lambda_0<\lambda_1<\mu_1<\ldots<\lambda_n<\mu_n<\ldots$ последовательность чисел, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n-\lambda_n)=a_1<\infty\,,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\mu_n-\lambda_n)=a_2<\infty\,,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}<\infty\,. \tag{0.1}$$

$\tilde{\xi}_n\in[\lambda_n,\mu_n],\ \ n=1,2,\ldots$ произвольные числа и $\tilde{\sigma}_n=\pm1,\ \ n=1,2,\ldots$ произвольные знаки. Введем обозначения

$$f_N(z)=z\prod_{k=1}^{N}\frac{\text{л}_k-z}{\text{л}_k}\cdot\frac{\text{м}_k-z}{\text{л}_k}\,,\quad g_N(z)=\prod_{k=1}^{N}\frac{\tilde{\text{о}}_k-z}{\text{л}_k}\,,$$

$$k_N(z)=g_N(z)\cdot\sum_{k=1}^{N}\frac{\tilde{\sigma}_k\cdot\sqrt{-f_N(\tilde{\xi}_k)}}{g'_N(\tilde{\xi}_k)\cdot(z-\tilde{\xi}_k)}\,,\quad h_N(z)=\frac{f_N(z)+k_N^2(z)}{g_N(z)}\,,\ \ N=1,2,\ldots\,.$$

При выполнении условий (0.1), последовательности функций $\{f_N(z)\}_{N=1}^{\infty}$, $\{g_N(z)\}_{N=1}^{\infty}$, $\{k_N(z)\}_{N=1}^{\infty}$, $\{h_N(z)\}_{N=1}^{\infty}$ равномерно сходятся на каждом компакте комплексной плоскости (см. [40], стр. 174-178). Обозначим пределы этих последовательностей соответственно через $f(z), g(z),\ k(z),\ h(z)$. Эти функции являются целыми аналитическими функциями и удовлетворяют тождеству $g(z)\cdot h(z)-k^2(z)=f(z)$. Кроме того, справедливы представления

$$f(z)=z\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\text{л}_k-z}{\text{л}_k}\cdot\frac{\text{м}_k-z}{\text{л}_k},\quad g(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\text{о}}_k-z}{\text{л}_k},\quad h(z)=(z-\tilde{\tau}_0)\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\tau}_k-z}{\text{л}_k},$$

где $\tilde{\tau}_0\in(-\infty,0],\tilde{\tau}_k\in[\lambda_k,\mu_k],\ \ k=1,2,\ldots$.

Решая обратную задачу по спектральным данным $\lambda_n,\mu_n,\ \tilde{\xi}_n\in[\lambda_n,\mu_n],\ \tilde{\sigma}_n=\pm1,\quad n=1,2,\ldots N$ однозначно определим конечнозонный потенциал $q_N(x)$ оператора Штурма-Лиувилля

$$H_N y\equiv -y''+q_N(x)y=\lambda\,y,\quad x\in R^1.$$

При выполнении условий (0.1) последовательность функций $\{q_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$ равномерно сходится на каждом конечном промежутке действительной оси к некоторой ограниченной функции $q(x) \in C^1(-\infty,\infty)$. Построенную функцию $q(x)$ называют бесконечнозонным потенциалом оператора Штурма-Лиувилля.

Обозначим через $\theta(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ решения уравнения Штурма-Лиувилля

$$Hy \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in R^1$$

удовлетворяющие начальным условиям $\theta(0,\lambda)=1$, $\theta'(0,\lambda)=0$, $\varphi(0,\lambda)=0$, $\varphi'(0,\lambda)=1$. Функции Вейля-Титчмарша для уравнения $Hy=\lambda y$ определяемые условиями

$$\theta(x,\lambda)+m^-(\lambda)\varphi(x,\lambda) \in L_2(-\infty,0), \quad \theta(x,\lambda)+m^+(\lambda)\varphi(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$$

имеют вид

$$m^-(\lambda)=\frac{k(\lambda)}{g(\lambda)}-i\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{g(\lambda)}, \qquad m^+(\lambda)=\frac{k(\lambda)}{g(\lambda)}+i\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{g(\lambda)}.$$

2. Рассмотрим на полуоси следующую граничную задачу

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \ \ 0<x<\infty, \tag{0.2}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0,\pi), \tag{0.3}$$

где $q(x)$ бесконечнозонный потенциал введенный в пункте 1.

Обозначим через $\theta_\alpha(x,\lambda)$ и $\varphi_\alpha(x,\lambda)$ решения уравнения (0.2) удовлетворяющие начальным условиям $\theta_\alpha(0,\lambda)=\cos\alpha$, $\theta'_\alpha(0,\lambda)=\sin\alpha$, $\varphi_\alpha(0,\lambda)=-\sin\alpha$, $\varphi'_\alpha(0,\lambda)=\cos\alpha$. Функция Вейля-Титчмарша для задачи (0.2)+(0.3) однозначно определяется условием

$$\theta_\alpha(x,\lambda)+m_\alpha(\lambda)\varphi_\alpha(x,\lambda) \in L_2(0,\infty), \ \ (\lambda \in C \setminus R^1)$$

и имеет следующий вид

$$m_\alpha(\lambda)=\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)}+i\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{A(\lambda)}, \tag{0.4}$$

где

$$A(\lambda)=h(\lambda)\sin^2\alpha+g(\lambda)\cos^2\alpha+k(\lambda)\sin 2\alpha,$$

$$C(\lambda)=(h(\lambda)-g(\lambda))\sin\alpha\cos\alpha+k(\lambda)\cos 2\alpha.$$

Из вида (0.4) функции Вейля-Титчмарша вытекает, что непрерывный спектр задачи (0.2)+(0.3) имеет вид:

$$E_{ess}=R^1 \setminus \left\{(-\infty,0) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty}(\lambda_k,\mu_k)\right\}.$$

Обозначим через ξ_n, $n=0,1,2,...$ нули функции $A(\lambda)$. Нетрудно показать, что $\xi_0 \in (-\infty,0]$, $\xi_n \in [\lambda_n,\mu_n]$, $n=1,2,...$.

Определение. Числа ξ_n, $n=0,1,2,...$ и знаки $\sigma_n = signC(\xi_n)$, $n=0,1,2,...$ называются спектральными параметрами задачи (0.2)+(0.3).

Определение. Спектральные параметры $\xi_n, \sigma_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ и границы $\lambda_0,\ \lambda_n,\ \mu_n,\ n = 1, 2, \ldots$ непрерывного спектра назовем спектральными данными задачи (0.2)+(0.3).

Восстановление коэффициента $q(x)$ и граничного условия задачи (0.2)+(0.3) по спектральным данным называют обратной задачей.

Теорема 1. (теорема 2.1). Пусть $\xi_n, \sigma_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ спектральные параметры и E_{ess} непрерывный спектр задачи (0.2)+(0.3). Тогда непрерывный спектр следующей задачи

$$\begin{cases} -y'' + q(x+t)y = \lambda y, \ \ 0 < x < \infty \\ y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \ \ \alpha \in (0, \pi) \end{cases} \tag{0.5}$$

не зависит от действительного параметра t и спектральные параметры $\xi_k(t),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица

$$\xi_0'(t) = \frac{-2[ctg^2\alpha + \xi_0(t) - q(t)]\sigma_0(t)\sqrt{-f(\xi_0(t))}}{\prod\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\xi_k(t) - \xi_0(t)}{\lambda_k}},$$

$$\xi_n'(t) = \frac{-2\lambda_n[ctg^2\alpha + \xi_n(t) - q(t)]\sigma_n(t)\sqrt{-f(\xi_n(t))}}{(\xi_0(t) - \xi_n(t)) \cdot \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \dfrac{\xi_k(t) - \xi_n(t)}{\lambda_k}}, \ \ n = 1, 2, \ldots,$$

а также начальным условиям

$$\xi_k(0) = \xi_k,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Знак $\sigma_k(t)$ меняется при каждом столкновении $\xi_k(t)$ с границами своей лакуны ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

Теорема 2. (теорема 2.2). Имеют места следующие формулы:

$$ctg\alpha = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n\sqrt{-f(\xi_n)}}{A_1'(\xi_n)},$$

$$q(t) = 2ctg^2\alpha + 2\xi_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k(t)),$$

где

$$f(\lambda) = \lambda \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k} \cdot \frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k}, \quad A_1(\lambda) = (\lambda - \xi_0)\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{\lambda_k}$$

и $\xi_k(t),\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ спектральные параметры задачи (0.5).

III. В § 1 третьей главы дается определение спектральных данных для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля на полуоси. В § 2-3 выводятся формулы следов и формула выражающая граничное условие через спектральные данные для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля на полуоси.

Рассмотрим в пространстве $L_2(0, \infty)$ следующий пучок

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad (0 < x < \infty) \qquad (0.6)$$

операторов Штурма-Лиувилля с граничным условием

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0,\pi), \qquad (0.7)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ действительные функции, имеющие период π, а λ комплексный параметр.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполняются следующие условия (см. [15]): а) $p(x)$ и $q(x)$ определены на R^1, π-периодичны, $q(x) \in L_2[0,\pi]$, $p(x) \in W_2^1[0,\pi]$; б) для всех функций $y(x) \in W_2^2[0,\pi]$, $y(x) \not\equiv 0$ удовлетворяющих равенству

$$[y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha]y'(0) - [y(\pi)\cos\alpha + y'(\pi)\sin\alpha]y'(\pi) = 0$$

выполняется неравенство $(L_0 y, y) > 0$, где $L_0 y \equiv -y'' + q(x)y$. Здесь $W_2^n[0,\pi]$ - пространство С.Л.Соболева, состоящая из заданных на сегменте $[0,\pi]$ комплекснозначных функций, которые имеют $n-1$ абсолютно непрерывных производных и производную n го порядка, суммируемую с квадратом на $[0,\pi]$. Это условие обеспечивает действительность спектра и спектральных параметров задачи (0.6)+(0.7).

Обозначим через $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$, $\theta(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ решения уравнения (0.6) удовлетворяющие начальным условиям

$$c(0,\lambda) = 1, \; c'(0,\lambda) = 0, \; s(0,\lambda) = 0, \; s'(0,\lambda) = 1,$$

$$\theta(0,\lambda) = \cos\alpha, \; \theta'(0,\lambda) = \sin\alpha, \; \varphi(0,\lambda) = -\sin\alpha, \; \varphi'(0,\lambda) = \cos\alpha.$$

Функция Вейля-Титчмарша для задачи (0.6)+(0.7) однозначно определяется условием $\theta(x,\lambda) + m_\alpha(\lambda)\varphi(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$, ($\lambda \in C \setminus R^1$) и имеет следующий вид

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{(s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda))\cos 2\alpha - (s(\pi,\lambda) + c'(\pi,\lambda))\sin 2\alpha - \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi,\lambda)\cos^2\alpha + 2(s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda))\cos\alpha\sin\alpha - 2c'(\pi,\lambda)\sin^2\alpha}. \qquad (0.8)$$

Выражение (0.8) в терминах $\theta(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ выглядит следующим образом:

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{-\theta(\pi,\lambda)\cos\alpha - \theta'(\pi,\lambda)\sin\alpha + \varphi'(\pi,\lambda)\cos\alpha - \varphi(\pi,\lambda)\sin\alpha}{2(\varphi(\pi,\lambda)\cos\alpha + \varphi'(\pi,\lambda)\sin\alpha)} - \frac{\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2(\varphi(\pi,\lambda)\cos\alpha + \varphi'(\pi,\lambda)\sin\alpha)}. \qquad (0.9)$$

Функция $\Delta(\lambda) = s'(\pi,\lambda) + c(\pi,\lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла задачи (0.6)+(0.7), отметим, что она не зависит от α.

Из выражения (0.9) следует, что непрерывный спектр задачи (0.6)+(0.7) имеет вид $E_{ess} = R^1 \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda_n^-, \lambda_n^+)$. Непересекающиеся интервалы $(\lambda_n^-, \lambda_n^+)$, $n \in Z$ принято называть лакунами пучка (0.6). Отметим, что лакуна $(\lambda_0^-, \lambda_0^+)$, которая содержит точку $\lambda = 0$, всегда является невырожденной: $\lambda_0^- < \lambda_0^+$.

Для удобства введем множество индексов: $\Omega = \{\pm 0, \pm 1, ...\}$. Обозначим через ξ_n, $n \in \Omega$ корни уравнения

$$\varphi(\pi,\lambda)\cos\alpha + \varphi'(\pi,\lambda)\sin\alpha = 0.$$

Отметим, что ξ_n, $n \in \Omega$ совпадают с собственными значениями регулярной задачи для уравнения (0.6) с граничными условиями

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad y(\pi)\cos\alpha + y'(\pi)\sin\alpha = 0,$$

а также $\xi_{-0} \in [\lambda_0^-, 0)$, $\xi_{+0} \in (0, \lambda_0^+]$, $\xi_n \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+]$, $n \in Z \setminus \{0\}$.

Определение. Числа ξ_n, $n \in \Omega$ и знаки

$$\sigma_n = sign\left\{\frac{\varphi(\pi,\xi_n)}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\varphi(\pi,\xi_n)}\right\}, \; n \in \Omega$$

называются спектральными параметрами задачи (0.6)+(0.7).

Определение. Спектральные параметры и границы λ_n^-, λ_n^+, $n \in Z$ непрерывного спектра назовём спектральными данными задачи (0.6)+(0.7).

Теорема 3. (теорема 3.1). Имеют место следующие формулы

$$p(t) = -\left(\frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} - \xi_{-0}(t) - \xi_{+0}(t)\right) - \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2} - \xi_k(t)\right), \tag{0.10}$$

$$q(t) + 2p^2(t) = 2ctg^2\alpha - \left(\frac{(\lambda_0^+)^2 + (\lambda_0^-)^2}{2} - \xi_{-0}^2(t) - \xi_{+0}^2(t)\right) -$$

$$- \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_k^+)^2 + (\lambda_k^-)^2}{2} - \xi_k^2(t)\right). \tag{0.11}$$

Здесь $\xi_n(t)$, $n \in \Omega$ спектральные параметры соответствующие коэффициентам $p(x+t)$ и $q(x+t)$.

Теорема 4. (теорема 3.2). Имеет место следующая формула

$$ctg\alpha = -\sum_{n \in \Omega} \xi_n \frac{\sigma_n \sqrt{\Delta^2(\xi_n) - 4}}{A_1'(\xi_n)}, \tag{0.12}$$

где

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = -4\pi^2(\lambda - \lambda_0^-)(\lambda - \lambda_0^+) \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_k^-)(\lambda - \lambda_k^+)}{k^2},$$

$$A_1(\lambda) = 2\pi(\lambda - \xi_{-0})(\lambda - \xi_{+0}) \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \xi_k}{k}.$$

В работе [4] получен следующий результат: пусть задача (0.6)+(0.7) имеет непрерывный спектр

$$E_{ess} = R^1 \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n^-, \lambda_n^+)$$

и спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n \in \Omega$. Тогда при всех действительных значениях параметра $t \in (-\infty, \infty)$, следующая задача

$$-y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y - \lambda^2 y = 0, \quad 0 < x < \infty$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi),$$

имеет тот же непрерывный спектр E_{ess} и спектральные параметры $\xi_n(t), \sigma_n(t)$, $n \in \Omega$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\dot{\xi}_n(t) = \frac{2[(\xi_n^2(t) - 2\xi_n(t)p(t) - q(t)) + ctg^2\alpha]\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{A_1'(\xi_n(t))}, \; n \in \Omega, \quad (0.13)$$

а также начальным условиям $\xi_n(t)\big|_{t=0} = \xi_n$, $\sigma_n(t)\big|_{t=0} = \sigma_n$, $n \in \Omega$.

Знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении спектрального параметра $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны.

Пользуясь случаем, автор сердечно благодарит научного руководителя профессора А.Б.Хасанова за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению обратной спектральной задачи для операторов Штурма-Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом на полуоси. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) для оператора Штурма-Лиувилля с конечнозонным потенциалом на полуоси выводятся формула следов, формула выражающая граничное условие по спектральным данным и система дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица.

2) для оператора Штурма-Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом на полуоси выводятся формула следов, формула выражающая граничное условие по спектральным данным и система дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица.

3) для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на полуоси выводятся формулы следов и формула нахождения граничного условия через спектральные данные.

Методы исследования и полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в математической физике при интегрировании нелинейных уравнений, а также в квантовой механике и в других областях естествознания.

Список опубликованных работ

1. Бабажанов Б.А., Аллаберганов О.Р. Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами на полуоси. Труды Меж.научный конф. Дифференциальное уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики. Ташкент ,16-19 ноябрь 2004 г. стр 224-227.
2. А.Б.Яхшимуратов, О.Р.Аллаберганов. Об обратной задаче для оператора Штурма-Лиувилля с безконечнозонным потенциалом на полуоси. Труды Меж. конф. Современные проблемы математической физики и информационных технологий. Ташкент , 18-24 апреля 2005 г. стр 223-225.
3. А.Б.Яхшимуратов, О.Р.Аллаберганов. Обратная задача для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на полуоси. УзМЖ, 2006 №3, стр 96-107.
4. А.Б.Яхшимуратов, О.Р.Аллаберганов. Тождества для квадратов производных собственных функций квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом. Труды Меж. конф. Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа. Нукус, 25-27 июня 2006 г.
5. Яхшимуратов А.Б., Аллаберганов О.Р. Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля на полуоси с бесконечнозонным потенциалом. Тезисы Меж. науч. конф. Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий. Алмата, 20-22 сентябрь 2006 г. Стр. 126-127.
6. Аллаберганов О.Р. Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля на полуоси с конечнозонным потенциалом. //УзМЖ, 2007, №2, стр. 21-31.
7. Аллаберганов О.Р. Об обратной задаче на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом. / Межд. Конф. «Дифф. ур., теория функций и прил.», посвящ. 100-летию со дня рожд. Акад. И.Н.Векуа. Новосибирск, 28 мая-2 июня 2007 г., стр. 57-58.
8. Аллаберганов О.Р. Решение обратной задачи на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля с бесконечнозонным непериодическим потенциалом. // ДАН РУз, 2007г., № 3, стр. 9-11.

Физика–математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор Аллаберганов Одилбек Рахимович 01.01.03–Математик физика ихтисослиги бўйича «Ярим укда берилган чексиз зонали потенциалли Штурм-Лиувилл оператори учун тескари масала» мавзусидаги диссертациясининг

Р Е З Ю М Е С И

Таянч сўзлар: Штурм-Лиувилл операторларининг дастаси, хос киймат, хос функция, даврий потенциал, Дубровин-Трубовиц тенгламалари системаси, спектр, спектрал берилганлар, тескари спектрал масала, Вейл–Титчмарш функцияси, Вейл ечими.

Тадқиқот объектлари: Диссертация Штурм-Лиувилл оператори учун кўйилган тескари спектрал масалани ўрганишга багишланган.

Ишнинг мақсади: Ярим ўкда берилган чексиз зонали коэффициентли Штурм-Лиувилл оператори учун тескари масалани ўрганиш.

Тадқиқот усули: диссертацияда функционал анализ, чизиқли операторлар спектрал назарияси, комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси, оддий ва хусусий хосилали дифференциал тенгламалар назарияларининг усуллари қўлланилади.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: диссертацияда олинган барча асосий натижалар янги бўлиб, улар қуйидагилардан иборат:

1) для оператора Штурма-Лиувилля с конечнозонным потенциалом на полуоси выводятся формула следов, формула выражающая граничное условие по спектральным данным и система дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица.

2) для оператора Штурма-Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом на полуоси выводятся формула следов, формула выражающая граничное условие по спектральным данным и система дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица.

3) для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на полуоси выводятся формулы следов и формула нахождения граничного условия через спектральные данные.

Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в математической физике при интегрировании нелинейных уравнений, а также в квантовой механике и в других областях естествознания.

Амалий аҳамияти: диссертация назарий характерга эга.

Татбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: олинган натижалар асосида магистрантларга махсус курс ўқитилади.

Қўлланиш (фойдаланиш) соҳаси: олинган натижалар чизиқли операторлар спектрал назариясида, математик физикада учрайдиган айрим ночизиқли тенгламаларни интеграллашда, квант механикаси ва табиий фанларнинг бошқа соҳаларида қўлланилиши мумкин.

Р Е З Ю М Е

диссертации Аллаберганова Одилбека Рахимовича на тему: «Обратная задача на полуоси оператора Штурма-Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом» на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.03 – Математическая физика

Ключевые слова: обратная задача, функция Вейля–Титчмарша, решение Вейля, спектр, спектральная функция, собственное значение.

Объекты исследования: Работа посвящена изучению обратной задачи на полупрямой для оператора Штурма-Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом.

Цель работы: Изучение обратной спектральной задачи для оператора Дирака.

Метод исследования: В работе используются методы функционального анализа, спектральной теории линейных операторов, теории функции комплексного переменного, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

Полученные результаты и их новизна: Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) для оператора Штурма-Лиувилля с конечнозонным потенциалом на полуоси выводятся формула следов, формула выражающая граничное условие по спектральным данным и система дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица.

2) для оператора Штурма-Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом на полуоси выводятся формула следов, формула выражающая граничное условие по спектральным данным и система дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица.

3) для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на полуоси выводятся формулы следов и формула нахождения граничного условия через спектральные данные.

Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в математической физике при интегрировании нелинейных уравнений, а также в квантовой механике и в других областях естествознания.

Практическая значимость: Работа носит теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: на основе полученных результатов читается спецкурс для магистрантов.

Область применения: Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в математической физике при интегрировании нелинейных уравнений, а также квантовой механике и в других областях естествознания.

R E S U M E

Thesis of Tanirbergenov Muratbek Bazarbaevich on the scientific degree competition of the candidate of sciences in physics and mathematics speciality 01.01.03–Mathematical physics. Subject: “Some questions of the theory inverse spectral problems for Dirac’s operator”

Key words: The inverse problem, the regularized trace formulas, the Weyl–Titchmarsh function, Weyl’s solution, Jost’s solution, the scattering function, the Gel’fand–Levitan–Marchenko integral equation, spectrum, the spectral function, the eigenvalue.

Subjects of the inquiry: The work is devoted to studing to inverse problem by S–function of scattering theory and by the spectral function for Dirac’s operator.

Aim of the inquiry: To study the inverse spectral problem for Dirac’s operator.

Method of the inquiry: In the work are used the methods of functional analysis, spectral theory of linear operators, the theory of functions of complex variable and theory differential equations.

The results achieved and their novelty: The main results of this work are new and consist of the following:

1) the regularized trace formulas for Dirac’s operator with peculiarity in the potential is calculated by Lax’s method;

2) the inverse scattering problem for Dirac’s operator is studied by following conditions:

(a) $p(x)$, $q(x)$ sufficiently quickly tends to zero as $x \to \infty$, where $x \in [a,\infty)$, $a \in R^1$;

(b) spectrum of the problem $Dy = \lambda y$, $y_1(a) = 0$ $(-\infty < x \le a)$ is discrete;

3) Dirac operator with mass which has a countable number of eigenvalues in the continuous spectrum is constructed and for the constructed operator the sufficient conditions to belong coefficients $p(x)$, $q(x)$ to the space $L^p(0,\infty)$ are found;

4) the position’s dependence of eigenvalues in the continuous spectrum Dirac’s operator with mass from the common boundary condition is studied.

Practical value: the work have theoretical character.

Degree of embed and economic effectivity: on the basis of the received results a special course will be read for the students of the magistracy.

Sphere of usage: the obtained results may be used in spectral theory of linear operators, in mathematical physics for integration of nonlinear equation as well as quantum mechanics and other areas of natural subjects.