НЕМИНИМАЛЬНО-ФАЗОВАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ

С.С. Касымов, Ш.М. Гулямов, Ш.А. Раджабов

Узбекистан, Ташкент

Для получения закона сначала будем предполагать, что динамика управляемого процесса описана при помощи линейного векторного разностного уравнения вида

$$A(q^{-1})\underline{y}_t = B(q^{-1})\underline{u}_{t-k} + \\ + \underline{d} + C(q^{-1})\underline{\xi}_t \qquad (1)$$

где $\underline{y}$ - m-мерный вектор выходного наблюдаемого сигнала; $\underline{u}$ - m-мерный вектор управления (входной сигнал); $\underline{d}$ - m-мерный вектор, состоящий из постоянных элементов, характери-зующий установившееся выходное значение отклика при нулевом значении входного сигнала; $\underline{\xi}_t$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с нулевыми средними значениями и ковариацией $E\{\underline{\xi}_t, \underline{\xi}_t^T\}$; E - оператор усреднения ; k - время задержки; q^{-1}- оператор запаздывания (обратного сдвига)

$$q^{-1}\underline{y}_t = \underline{y}_{t-1}.$$

Полиномиальные матрицы A, B и C размерностью $m \times m$ определяются уравнениями

$$A(q^{-1}) = I + A_1 q^{-1} + \ldots + A_n q^{-n};$$

$$B(q^{-1}) = B_0 + B_1 q^{-1} + \ldots + B_n q^{-n};$$

$$C(q^{-1}) = I + C_1 q^{-1} + \ldots + C_n q^{-n};$$

где B_0 - невырожденная матрица (определитель ее не равен нулю); det $C(\alpha)$-определить матрицы $C(\alpha)$, его корни лежат снаружи единичной окружности.

Выводимый закон управления должен быть справедлив и для неминимально-фазовых систем. Для вывода закона управления систем используются следующие допущения относительно системы, описываемой уравнением (1): число выходов равно числу входов; B_0 –невырожденная матрица; корни $\det C(\alpha)$ лежат снаружи единичной окружности.

Качество функционирования СУУ выразим в виде целевого функционала вида

$$J = E\left\{\left\|\sum_{i=0}^{k-1} p_i - \underline{y}_{t-k-i} - \sum_{t=0}^{N} R_i \underline{w}_{t-i}\right\|^2 + \\ + \left\|\sum_{i=0}^{M} Q_i' \underline{u}_{t-i}\right\|^2\right\}, \quad (2)$$

где $w \times m$- мерный вектор задающего сигнала; p_i - действительные числа, p_0 =1; R_i и Q' - $m \times m$ мерные матрицы; $\|\underline{x}\|^2 = \underline{x}^T \cdot \underline{x}$- положительно определенная квадратичная форма; E - оператор усреднения.

Значения верхних пределов сумм целевого функционала N и M некритичны; в частном случае возможны значения N=0, M=0 или M=1.

Оптимальная стратегия управления должна минимизировать принятый критерий качества (2) по всем допустимым стратегиям управления. Допустимая стратегия управления определяется зависимостью управляющего сигнала в момент времени t от всех наблюдаемых выходов y_t, $y_{t-1}, \ldots$ и всех предварительно приложенных сигналов управления $\underline{u}_{t-1}, \underline{u}_{t-2}, \ldots$.

Критерий качества (1.2) может быть записан в векторной форме [1] как

$$J = E\left\{ \left\| P(q^{-1})\underline{y}_{t+k} R(q^{-1})\underline{w_t} \right\|^2 + \right. \left. + \left\| Q'(q^{-1})\underline{u_t} \right\|^2 \right\}, \quad (3)$$

где P,R и Q - полиномиальные матрицы.

Стратегии управления включает оптимальный наименьшеквадратич-ный предсказатель, получаемый на основе уравнения (1). Предсказатель осуществляет экстраполяцию выходного сигнала $\underline{y}$ в момент времени t на k шагов вперед $\underline{y}^*(t+k/t)$, используя информацию о предыдущих значениях

$\underline{y}_{t,}\underline{y}_{t-1},\ldots,\underline{u}_t,\underline{u}_{t-1},\ldots,$ имеющихся в момент времени t.

Уравнение предсказателя имеет вид

$$\underline{y}^*_{t+k/t} = \tilde{C}^{-1}(q^{-1})[\tilde{F}'(q^{-1})\underline{y}_t + + \tilde{E}'(q^{-1})B(q^{-1})\underline{u}_t + \underline{\gamma}]. \quad (4)$$

Ошибка предсказателя определяется соотношением

$$\underline{e}_{t+k} = \underline{y}_{t+k} - \underline{y}^*_{t+k/t} = = \underline{\xi}_{t+k} + \ldots + E'_{k-1}\underline{\xi}_{t+1}.$$

Как можно видеть она не коррелирует с $\underline{y}_t, \underline{y}_{t-1},\ldots,\underline{u}_t,\underline{u}_{t-1},\ldots,$ а также с $\underline{y}^*_{t+k/t}$.

Подставляя выражение для ошибки предсказания (4) в уравне-ние критерия качества (2) получим

$$J = E\left\{ \left\| P(q^{-1})[\underline{y}^*_{t+k/t} + \underline{e}_{t+k}] - R(q^{-1})\underline{w}_t \right\|^2 + \right. \left. + \left\| Q'(q^{-1})\underline{u}_t \right\|^2 \right\},$$

с учетом того, что $P(q^{-1})\underline{e}_{t+k}$ не коррелирует с $\underline{u}_{t-i}$, $\underline{w}_{t-i}$, и $\underline{y}_{t-i}$, а также с $P(q^{-1})\underline{y}_{t+i/t}$, перепишем его в виде

$$J = \left\| P(q^{-1})\underline{y}^*_{t+k/t} - R(q^{-1})\underline{w}_t \right\|^2 + + \left\| Q'(q^{-1})\underline{u}_t \right\|^2 + E\left\{ \left\| P(q^{-1})\underline{e}_{t+k} \right\|^2 \right\}. \quad (5)$$

Таким образом, задача нахождения оптимальной стратегии управления может быть сведена к обычной процедуре оптимизации, экстремума J по u:

$$\begin{aligned} &B_0^T\left[P(q^{-1})\underline{y}^*_{t+k/t} - R(q^{-1})\underline{w}_t\right]+ \\ &\quad +[Q'(0)]^T Q'(q^{-1})\underline{u}_t = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Вводя в уравнение (6) новое обозначение матричного полинома

$$Q(q^{-1}) = (B_o^T)^{-1}[Q'(0)]^T Q'(q^{-1})$$

и приравнивая его векторной функции $\underline{\Phi}^*_{t+k/t}$, получим

$$\underline{\Phi}_{t+k/t} = \underline{P}(q^{-1})\underline{y}^*_{t+k/t} - R(q^{-1})\underline{w}_t + Q(q^{-1})\underline{u}_t$$

Отсюда следует, что оптимальное управление будет удовлетворять равенству $\underline{\Phi}_{t+k/t}$ =0. Определим векторную функцию $\underline{\Phi}_{t+k}$ соотношением

$$\underline{\Phi}_{t+k} = P(q^{-1})\underline{y}_{t+k} - R(q^{-1})\underline{w}_t + Q(q^{-1})\underline{u}_t . \quad (7)$$

Теперь осуществим переход к эквивалентной проблеме мини-зации, выразив критерий качества (3) через векторную функцию (7), соотношение (6) и с учетом (4) получим

$$\underline{\Phi}_{t+k} = \underline{\Phi}^*_{t+k} + \underline{E}_{t+k} , \qquad (8)$$

где $\underline{\varepsilon}_{t+k} = \sum_{i=0}^{k-1} p_i \underline{\varepsilon}_{t-k-i}$ не коррелирует с $\underline{\Phi}^*_{t+k/t}$; функция $\underline{\Phi}^*_{t+k/t}$ является как бы оптимальным предсказателем $\underline{\Phi}_{t+k}$ в момент времени t .

Отметим также, что минимизация целевого функционала (3) приведет к тому же самому управлению, что и в случае минимизации критерия качества, выраженного через $\underline{\Phi}^*$:

$$J = E\left\{\left\|\Phi_{t+k}\right\|^2\right\} = \underline{\Phi}^{*2}_{t+k/t} + E\left\{\left\|\underline{\varepsilon}_{t+k}\right\|^2\right\}$$

Подытоживая вышесказанное, можно отметить, что для системы, динамика которой аппроксимируется матричным линейным рекуррентным уравнением

$$A(q^{-1})\underline{y}_t = B(q^{-1})\underline{u}_{t-k} + C(q^{-1})\underline{\xi}_t + d,$$

оптимальная стратегия управления, минимизирующая критерий (3), будет определяться уравнением

$$\tilde{F}(q^{-1})\underline{y}_t + \tilde{G}(q^{-1})\underline{u}_t + \tilde{H}(q^{-1})\underline{w}_t + \underline{\delta} = 0 . \ (9)$$

В частном случае, когда $P = 1$ и $Q' = 0$, будем иметь закон управления, минимимизирующий дисперсию. Отметим, что закон оптимального регулирования (9), с одной стороны, определяет допустимую стратегию управления, т. к. $G(0) = \tilde{E}_k^{'}(0)B(0) = I$, а с другой стороны – оптимальную стратегию, как минимизирующую (2). Она не является единственной, поскольку $\tilde{E}'$ и $\tilde{F}'$ не является однозначными.

Пока отсутствуют работы, посвященные исследованию проблемы устойчивости СУУ. Для случая $P = P_0 = I$ (где I-единичная матрица); $\underline{w}_t = \underline{\delta} = 0$; Q =0 (регулятор, минимизирующий дисперсию), устойчивость системы будет определятся равенством B=0. Поскольку

$$\det(\tilde{E}B)\det[A+B(\tilde{E}B)^{-1}(\tilde{C}-EA)] = \det B \det\tilde{C},$$

система будет неустойчивой, если B является матрицей неминимально-фазовой системы.

Если $Q \neq 0$, имеется возмож-ность сделать систему устойчивой путем соответствующего выбора. Примем $Q = \lambda \mathrm{I}$. Тогда, если для разомкнутой системы матрица A характеризует нестабильную систему, а B - неминимальнофазовую (полюса и нули лежат внутри единичной окружности), то результирующая система будет устойчивой при достаточно малых значениях. Для матрицы A устойчивой разомкнутой системы и матрицы B неминимально-фазовой системы замкнутая система будет устойчивой при достаточно больших λ. Для больших значений λ имеем

$$\det\left(\tilde{E}B+\tilde{C}\lambda\right) \cong \det\tilde{C}\lambda,$$

откуда

$$\det\left[A+B\left(\tilde{E}B+\tilde{C}\lambda\right)^{-1}\left(\tilde{C}-\tilde{E}A\right)\right] \cong \det A,$$

т.е. система устойчива.

Литература

1. Койво Х.Н., Пузырев В.А. Самонастраивающиеся управляю-щие устройства .- Зарубежная радиоэлектроника, 1982, № 8.