РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О.О.Зарипов, Т.В.Ботиров, Х.З.Игамбердиев

Узбекистан, Ташкент

В большинстве процессов управления или многошаговых процедур принятия решения в технических системах имеют место присущие им неопределенности. Эти неопределенности не позволяют точно оценить влияние управляющих воздействий и, следовательно, использовать теорию детерминированного управления. Неопределенности, существующие как в самой системе, так и в наблюдениях, во многих задачах могут быть представлены как стохастические процессы. К каким задачам применимы методы стохастического управления [1,2].

Рассмотрим линейную динамическую систему, описываемую уравнениями

$$x_{i+1} = A_{i+1|i} x_i + \Gamma_i w_i , \qquad (1)$$

$$z_{i+1} = H_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1} , \qquad (2)$$

где x_{i+1} - вектор состояния объекта в момент времени $i+1$, z_{i+1} - вектор измерений, $A_{i+1|i}, \Gamma_i, H_i$ - соответствующие матрицы динамического объекта; w_i и v_{i+1} - нормально распределенные возмущающие воздействия с нулевыми средними и неотрицательно определенными ковариационными матрицами Q_i и R_{i+1} соответственно.

Для оценивания вектора состояния x_i динамической системы (1), (2) обычно используются традиционные уравнения фильтра Калмана.

Точность оценивания вектора состояния x_i на основе калмановского фильтра существенно зависит от точности задания ковариационных матриц Q_i и R_{i+1} шума состояния и помехи измерений. В процессе функционирования объекта управления ковариационные матрицы Q_i и R_{i+1} могут изменяться во времени. Весьма эффективной является концепция идентификационного подхода [1], которая заключается в оценивании в процессе функционирования фильтра априорно неизвестных параметров и последующего их использования в алгоритме динамической фильтрации. В соответствии с этим методом уравнение для вектора состояния, содержащего неизвестные параметры ковариаций и линейно изменяющийся во времени, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x^c_{i+1} &= A^c_{i+1,i} x^c_i + \Gamma^c_i w^c_i , \\ x^{cT}_{i+1} &= \left[\tilde{P}^T_{i+1|i} \tilde{Q}^T_{i+1} \tilde{R}^T_{i+1} \right], \qquad (3) \\ w^{cT}_i &= \left[w^{QT}_i w^{RT}_i \right]. \end{aligned}$$

В (3) x^c_i – вектор состояния для фактической матрицы дисперсий прогнозируемой оценки состояния, матрицы дисперсий шума состояния и матрицы дисперсий шума измерений; w^c_i – вектор шума состояния параметров ковариаций; Γ^c_i –переходная матрица этого шума; A^c_i –переходная матрица состояния.

Модель измерений ковариаций в рассматриваемом случае можно принять в виде

$$\tilde{c}_{i+1} = H^c_{i+1} x^c_{i+1} + \overline{\Delta}\tilde{c}_{i+1} , \qquad (4)$$

где H^c_{k+1} и $\overline{\Delta}\tilde{c}_{k+1}$ могут быть определены из векторов невязки в субоптимальном фильтре.

Располагая теперь выражениями (1)-(4) и априорными значениями их параметров для оценивания вектора состояния объекта и параметров ковариаций можно применить один фильтр к исходной системе (1), (2), а другой - к системе уравнений для ковариаций

(3), (4), используя невязки первого фильтра как данные для оценки параметров ковариаций в исходной системе.

Для оценивания вектора состояния x_i можно также использовать метод расширения. В соответствии с этим методом формируются уравнения вида:

$$x_{i+1}^a = A_{i+1,i}^a x_i^a + \Gamma_i^a w_i^a,\ z_{i+1} = H_{i+1}^b x_{i+1}^a + \bar{\Delta} v_{i+1},\ x^{aT} = \left[x^T \bar{w}^T \bar{v}^T\right],\ w^{aT} = \left[\bar{\Delta} w^T w_{\bar{w}}^T w_{\bar{v}}^T\right],$$

Оценки векторов x_i, w_i и v_i здесь также можно получить по методу наименьших квадратов с помощью одного фильтра и оценки матриц Q_i и R_{i+1} с помощью другого фильтра, поскольку шумы расширенного состояния и измерений имеют теперь нулевые средние значения.

При решении рассматриваемой задачи возможны ситуации, когда возмущающие воздействия могут быть коррелированы между собой. В этой связи возникает необходимость разработки алгоритмов вычисления вектора состояния x_i при взаимно коррелированных шумах в рамках рассматриваемой двухуровневой схемы динамического оценивания. Будем предполагать, что выполняются следующие помехо-сигнальные условия:

$$M\left\{(x_0 - \bar{x}_0) w_i^T\right\} = K_{x_i w}(i),$$

$$M\left\{(x_0 - \bar{x}_0) v_i^T\right\} = K_{x_i v}(i),\ M\left\{w_i v_l^T\right\} = K_{wv}(i,l)$$

и условия аппроксимации вида: $\left\|H - H^*\right\| \le h,\ \left\|z - z^*\right\| \le \delta$, где H^* и z^* - истинные значения матрицы H и вектора z.

Тогда, следуя [1,2], можно показать, что в сформулированных выше условиях задача оценивания вектора состояния x_i в k-й момент времени эквивалентна задаче решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\left[H_k^{(0)T} W_k^{-1} H_k^{(0)}\right] x_k^\gamma = H_k^{(0)T} W_k^{-1} z_k^{(0)}, \qquad (5)$$

где $H_{k+1}^{(0)} = \begin{bmatrix} H_k^{(0)} A_{k|k+1} \\ H_{k+1} \end{bmatrix}$, $z_{k+1}^{(0)} = \begin{bmatrix} z_k^{(0)} \\ z_{k+1} \end{bmatrix}$, $w_{k+1}^{(0)} = \begin{bmatrix} \zeta_k^{(0)} \\ v_{k+1} \end{bmatrix}$, $W_k = M\left\{w_k^{(0)} w_k^{(0)T}\right\}$,

$\zeta_k^{(0)} = w_k^{(0)} - H_k^{(0)} A_{k|k+1} \Gamma_k w_k$, $\gamma = [\delta, h]$ – точностной вектор. В (5) предполагается, что матрица W_k^{-1} существует.

При решении системы (5) необходимо использовать методы регуляризации [3,4]. Это обусловлено тем обстоятельством, что непосредственное решение уравнения (5) приводит к его численной неустойчивости, проявляющуюся в том, что малые погрешности в исходных данных могут вызвать конечные, но неприемлемые по величине ошибки решения. Это и заставляет при решении (5) использовать регулярные методы.

Традиционный способ регуляризации решения уравнения (5) состоит в том, что вместо (5) решается система алгебраических уравнений вида:

$$\left[H_k^{(0)T} W_k^{-1} H_k^{(0)} + \alpha I\right] x_k^{\alpha,\gamma} = H_k^{(0)T} W_k^{-1} z_k^{(0)}.$$

Матрица этой системы положительно определена для $\alpha > 0$, и поэтому для любого вектора измерений $z_k^{(0)}$ существует единственная оценка $x_k^{\alpha,\gamma}$. Параметр регуляризации α в рассматриваемом случае может быть определен, например, на основе принципа обобщенной невязки [3].

В предположении, что корреляционная матрица шума измерения W_k задана и вектор шума измерения нормально распределен, параметр регуляризации α может быть вычислен как корень нелинейного уравнения:

$$\underset{\alpha}{\underline{rank(I)}} = Sp\left[\left(H_k^{(0)T} W_k^{-1} H_k^{(0)} + \alpha I\right)^{-1}\right] + \left(z_k^{(0)\alpha}, z_k^{(0)\alpha}\right).$$

Здесь также может быть использован алгоритм вида:

$W_k^e(T) = W_k\, E^T(T)$,

где $T = T\left[z_k^{(0)}, H_k^{(0)}\right]$, $E^T(T) = I - H_k^{(0)} T$.

В случае, если корреляционная матрица W_k шума измерения неизвестна, то целесообразно при выборе параметра регуляризации использовать метод перекрестной значимости [4]. В соответствии с этим методом рассматривается функционал вида:

$$u_0^\alpha = \frac{1}{N_Z} \left\| z_k^{(0)} - H_k^{(0)} x_k^{\alpha,\gamma} \right\|^2 \Big/ \left[1 - Sp[\Phi(\alpha)]/N_Z\right]^2, \quad (6)$$

где $Sp[\bullet]$ – индекс следа матрицы.

В качестве параметра регуляризации, определяемого обобщенным методом взаимной значимости, принимается значение α_u, доставляющее минимум функционалу (6).

В случае, когда дисперсия шума измерения неизвестна, но его корреляционная матрица известна с точностью до дисперсии σ^2, т.е. $W_k = \sigma^2 W_k^H$, где W_k^H – нормированная корреляционная матрица. В этом случае параметр регуляризации α может быть вычислен на основе уравнения вида

$$\sigma^2 = \Big\{ Sp[D] + \left(x_k^{\alpha,\gamma}, \left(\sigma^{-2} H_k^{(0)T} W_k^{-1\,H} H_k^{(0)} + \alpha I\right)^{-1} x_k^{\alpha,\gamma} \right) -$$
$$- 2\left(H_k^{(0)T} W_k^{-1H} z_k^{(0)}, x_k^{\alpha,\gamma} \right) + \left(z_k^{(0)}, W_k^{-1H} z_k^{(0)} \right) \Big\} \Big/ N_z ,$$

где $D = H_k^{(0)T} W_k^{-1\,H} H_k^{(0)} \left(\sigma^{-2} H_k^{(0)T} W_k^{-1\,H} H_k^{(0)} + \alpha I\right)^{-1}$.

Таким образом, при построении регуляризованного решения уравнения (5) имеется возможность выбрать тот или иной способ определения параметра регуляризации в зависимости от полноты и формы задания априорной информации о шуме измерения.

Приведенные выше соотношения позволяют адаптировать алгоритмы оценивания вектора состояния динамических объектов к реальным помехосигнальным условиям, обусловленным априорной неопределенностью, и тем самым повысить точность определения вектора настроек регулятора.

Литература:

1.Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. / Под ред. К. Т. Леондеса. Пер. с англ., - М.: Мир, 1980. - 407 с.

2.Кузнецов Е.С. Управление техническими системами: Учебное пособие / МАДИ (ТУ) – М.: 2001. – 262 с.

3.Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Итерационные методы решения нерегулярных уравнений.- М.: Ленанд, 2006. – 214 с.

4.Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седельников А.И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике.–Новосибирск: Наука,1984.–240с.