1. Определенный интеграл: основные понятия, свойства, способы вычисления

К понятию определенного интеграла приводит рассмотрение различных задач геометрии, физики, техники. Простейшей из них является задача о вычислении площади криволинейной трапеции, т.е. фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, двумя прямыми $x = a$, и $x = b$ и осью абсцисс (рис.I)

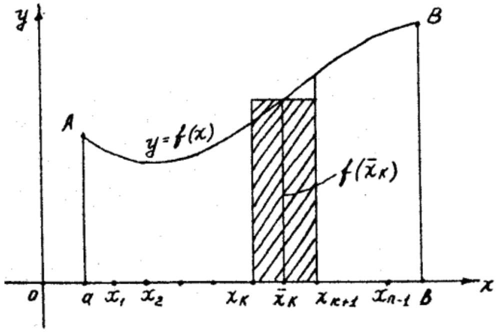

Рис. 1

Основные трапеции разбиваются на *n* элементарных отрезков Δx_k, на каждом из которых в точках $\bar{x}_k$ берутся значения $f(\bar{x}_k)$, составляется интегральная сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k$.

Определенным интегралом от функции $f(x_k)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел, к которому стремится интегральная сумма, когда наибольшая из длин элементарных отрезков разбиения стремится к нулю:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k$$

Геометрически определенный интеграл есть площадь криволинейной трапеции $S_{aABb} = \int\limits_a^b f(x)dx$.

При этом предполагается, что $f(x)$ - функция непрерывная.

Из физических задач отметим следующие:

1) вычисление работы переменной силы, модуль которой равен $f(s)$, а направление совпадает с положительным направлением оси OX: $A = \int\limits_{S_1}^{S_2} f(s)ds$, где интеграл берется по пути;

2) вычисление пути, пройденного точкой при неравномерном движении со скоростью, модуль которой равен $\varphi(t)$: $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt$, где интеграл берется по времени;

3) вычисление массы неоднородной материальной кривой с линейной плотностью $\mu(s)$: $M = \int\limits_{S_1}^{S_2} \mu(s)ds$, где интеграл берется по длине кривой.

Определенный интеграл находится по формуле Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b (x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная.

2. Основные свойства определенного интеграла

1) $\int\limits_a^b \left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x) \right] dx =$.

$$=\int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)\,dx$$

2) $\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$.

3) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

4) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx$.

6) $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \quad f(x) \geq 0$ и $\int_a^b f(x)\,dx < 0 \quad f(x) \leq 0$.

7) $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b \varphi(x)\,dx$ при $f(x) \geq \varphi(x)$.

8) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

9) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\lambda)d\lambda$

10) Теорема об оценке определенного интеграла

$m\int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b \varphi(x)f(x)dx < M\int_a^b \varphi(x)dx$, где $\varphi(x) > 0$, m – наименьше, а M – наибольшее значение функции $f(x)$ на $[a,b]$.

11) Теорема о среднем значении $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\bar{x})\int_a^b \varphi(x)dx$.

Она же в частном случае $\int_a^b f(x)\, dx = f(\bar{x})\,(b-a)$.

При вычислении площади криволинейной трапеции следует особое внимание обратить на свойство 6, согласно которому определенный интеграл рассматривается как величина алгебраическая: если $f(x)>0$ на $[a,b]$, то площадь имеет знак плюс (см.рис. 1), если же $f(x)<0$, то площадь имеет знак минус (рис. 2). Но как величина геометрическая площадь в обоих случаях вычисляется по формуле

$$S = \left|\int_a^b f(x)\, dx\right|.$$

Этим же правилом руководствуются и в том случае, когда функция $f(x)$ на $[a,b]$ не является знакопостоянной. Тогда находят точки пересечения кривой $y = f(x)$ с осью Ox (или соответственно кривой $x=\varphi(y)$ с осью Oy) и на тех отрезках, где $f(x)<0$ (или соответственно $\varphi(y)<0$ надо положить $[-f(x)]$ или соответственно $[-\varphi(y)]$.

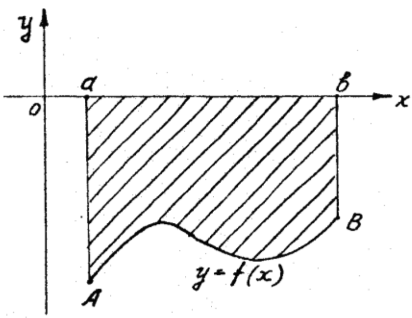

Рис. 2

Пример 1. Определенный интеграл

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(1-1) = 0,$$

но площадь, ограниченная кривой $y = \sin x$ и отрезком $[0, 2\pi]$ оси Ox,

$$S = \int_0^{\pi} \sin dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -(-1-1) + (1+1) = -(-2) + 2 = 4$$

Пример 2. Определенный интеграл

$$\int_0^3 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right) dx = \int_0^3 x^3 dx - \int_0^3 5x^2 dx + \int_0^3 6x dx =$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^3 - 5 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 6 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^3 = \frac{81}{4} -$$

$$= -\frac{135}{3} + 27 = \frac{567 - 540}{12} = \frac{27}{12} = 2\frac{1}{4},$$

но площадь, ограниченная кривой $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ и отрезком [0,3] оси Ox (рис. 3)

$$S = \int_0^3 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)dx = \int_0^2 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)dx +$$

$$+\left|\int_2^3 \left(x^2 - 5x^2 + 6x\right)dx\right| = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2\right)\Bigg|_0^2 +$$

$$+\left|\left(\frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2\right)\Bigg|_2^3\right| = \frac{32}{12} + \left|-\frac{15}{12}\right| = 3\frac{1}{12}$$

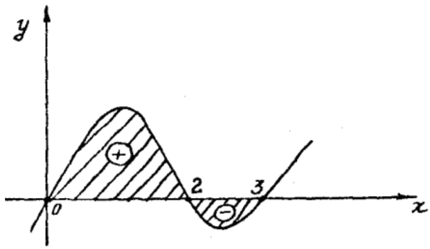

Рис. 3

3. Способы вычисления определенного интеграла

1) Почленное интегрирование-это применение свойства 1.
2) Интегрирование по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

3. Интегрирование подстановкой.

Пусть для вычисления определенного интеграла предлагается подстановка $x = \varphi(t)$. При этом предполагается, что выполнены следующие условия:

а) функция $\varphi(t)$ – однозначная, непрерывная и дифференцируемая;

б) функция $f = (\varphi(t))$ – непрерывная;

в) числовым значениям $x=a$ и $x=b$ соответствуют числовые значения $t=\psi(x)\big|_{x=a}=\psi(a)=\alpha$ и $t=\psi(x)\big|_{x=b}=\psi(b)=\beta$.

Последние формулы дают значения пределов интегрирования по новой переменной t. Поэтому $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Эффективность подстановки в определенном интеграле состоит в том, что в первообразной не надо переходить к первоначальной переменной интегрирования x, а надо найти новые пределы интегрирования по новой переменной t. Для перехода к новым пределам интегрирования рекомендуется составить такую таблицу:

x	a	b
t	$\alpha=\psi(a)$	$\beta=\psi(b)$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$.

Решение. Применим подстановку $x=3\sin t$, $dx=3\cos t dt$. Изменение пределов интегрирования:

x	0	3
t	0	$\frac{\pi}{2}$

а тогда

$$\int\limits_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t dt=$$

$$=9\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{9}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{9}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{4}\pi$$

Из этого примера видно, что переход к первообразной $F(t)=\frac{9}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)$ от t к x привел бы к сложным тригонометрическим преобразованиям.

4. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах

Существует несколько вариантов решения этой задачи. Самые простые даны на рис. 1 и 2, более сложный – на рис. 3. При этом имеется в виду, что площадь – величина геометрическая. Все варианты будут рассматриваться на отдельных примерах с применением правила, изложенного в 1.

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями и осями координат (рис. 4).

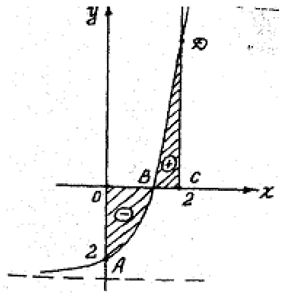

Рис. 4

Решение. Пределы интегрирования находятся как абсциссы точек пересечения кривой $y=e^x-3$ с осью Ox. Имеем $e^x-3=0$, т.е. $x=\ln 3$. Искомая площадь

$$S = S_{OAB} + S_{BCD} = \int_{0}^{\ln 3} -\left(e^x - 3\right) dx + \int_{\ln 3}^{2} \left(e^x - 3\right) dx =$$

$$= -e^x \Big|_0^{\ln 3} + 3x\Big|_0^{\ln 3} + e^x \Big|_{\ln 3}^{2} - 3x\Big|_{\ln 3}^{2} = -\left(e^{\ln 3} - e^0\right) +$$

$$+ 3(\ln 3 - 0) + e^2 - e^{\ln 3} - 3(2 - \ln 3) = (-3 + 1) + 3\ln 3 + e^2 - 3 -$$

$$- 6 + 3\ln 3 = e^2 + 6\ln 3 - 11 = 7{,}4 + 6{,}6 - 11 \approx 3$$

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = -y^2 + 4y - 3$, $y = 5$ и осями координат (рис.5).

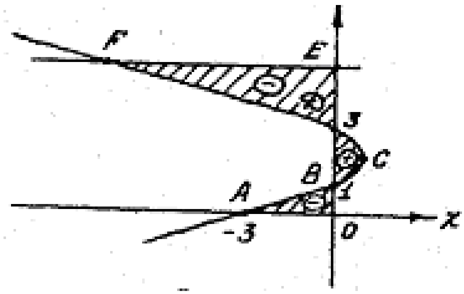

Рис. 5

Решение. Так как основание трапеции расположено на оси Oy, то интегрирование выполняется по переменной y и пределы интегрирования находятся как ординаты точек пересечения кривой $x = -y^2 + 4y - 3$ с осью Oy. Получаем $B(0{,}1)$, $D(0{,}3)$.

Искомая площадь

$$S = S_{AOB} + S_{BCD} + S_{DEF} = \int_0^1 \left(y^2 - 4y + 3\right)dy + \int_1^3 \left(-y^2 + 4y - 3\right)dy +$$

$$+\int_3^5 \left(y^2 - 4y + 3\right)dy = \frac{1}{3}y^3\Big|_0^1 - 2y^2\Big|_0^1 + 3y\Big|_0^1 - \frac{1}{3}y^3\Big|_1^3 +$$

$$+2y^2\Big|_1^3 - 3y\Big|_1^3 + \frac{1}{3}y^3\Big|_3^5 - 2y^2\Big|_3^5 + 3y\Big|_3^5 =$$

$$= \frac{1}{3} - 2 + 3 - \frac{1}{3}(27-1) + 2(9-1) - 3(3-1) + \frac{1}{3}(125-27) - 2(25-9) +$$

$$+3(5-3) = \frac{1-26+98}{3} - 15 = \frac{73-45}{3} = \frac{28}{3} \approx 9.$$

Представляет интерес, когда площадь S ограничена двумя линиями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$, причем $f_1(x) \le f_2(x)$ на $[a,b]$, (рис.6). В этом случае площадь фигуры $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$.

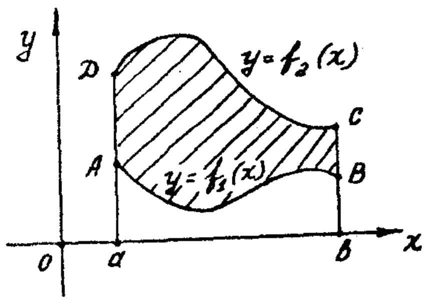

Рис. 6

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{5}{2} \quad \text{и} \quad x - 2y + 5 = 0 \text{ (рис.7).}$$

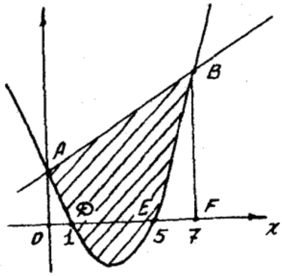

Рис. 7

Решение. Решая совместно уравнения заданных линий, находим пределы интегрирования $x_1 = 0$ и $x_2 = 7$. Тогда по приведенной выше формуле

$$S_{ASB} = \int_0^7 \left[\frac{x+5}{2} - \left(\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{5}{2} \right) \right] dx = \int_0^7 \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{2} - \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^7 \frac{7x}{2} dx - \int_0^7 \frac{x^2}{2} dx = \frac{7}{4} x^2 \Big|_0^7 - \frac{1}{6} x^3 \Big|_0^7 = \frac{343}{12} = 28\frac{7}{12}.$$

Пример 7. Вычислить площадь между параболой $y = -x^2 - 2x + 3$, касательной к ней точке $M(-2;\ 5)$ и осью Oy (рис.8).

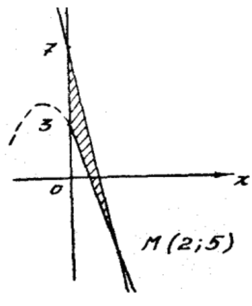

Рис. 8

Решение. Уравнение касательной $y - y_0 = y'_M (x - x_0)$. Так как

$$y'_M = \left(-2x-2\right)\Big|_M = -6, \qquad y+5=-6\left(x-2\right),$$

или $y=-6x+7$. Искомая площадь

$$S=\int_0^2\left[\left(-6x+7\right)-\left(-x^2-2x+3\right)\right]dx=\int_0^2\left(x^2-4x+4\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2-4\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2+4x\Big|_0^2=\frac{8}{3}-8+8=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.$$

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то площадь фигуры, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси абсцисс, вычисляется по формуле $S=\int_{t_1}^{t_2}\psi\left(t\right)\varphi'\left(t\right)dt$, где t_1 и t_2 находятся из уравнений $a=\varphi\left(t_1\right)$; $b=\psi\left(t_2\right)$.

Пример 8. Вычислить площадь петли линии $x=3t^2$, $y=3t-t^3$ (рис.9).

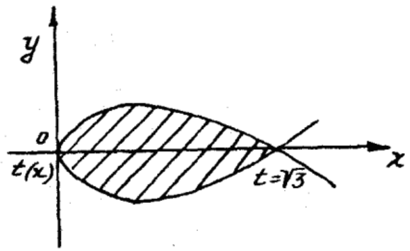

Рис. 9

Эта кривая – петлевая парабола.

Решение. Полагая $y=0$, т.е. $3t-t^3=0$, находим $t_1=0$, $t_2=\sqrt{3}$. Это и есть пределы интегрирования.
Тогда

$$S = 2\int_0^{\sqrt{3}}\left(3t - t^3\right)6t\,d\,t = 12t^3\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{12}{5}t^5\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{72\sqrt{3}}{5}$$

В виде упражнений рекомендуется получить уравнение петлевой параболы в декартовых координатах и найти площадь петли.

5. Вычисление площади плоской фигуры в полярных координатах

Пусть дан криволинейный сектор AOB (рис.10), т.е. плоская фигура, ограниченная линией AB с полярным уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя радиусами – векторами OA и OB. Площадь этого сектора вычисляется по формуле

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[\rho(\varphi)\right]^2 d\varphi$$

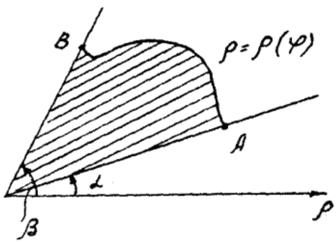

Рис. 10

Пример 9. Вычислить площадь сектора, ограниченного линией $\rho = 6\varphi$ (спираль Архимеда) и двумя лучами $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{6}$ и $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{3}$ (рис.11).

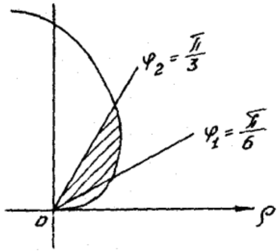

Рис. 11

Решение. По основной формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (6\varphi)^2 d\varphi = 6\varphi^3 \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{7}{36}\pi^3 .$$

Пример 10. Вычислить площадь фигуры, расположенной внутри окружности $\rho = 3\sqrt{3}\sin\varphi$ и одновременно внутри кардиоиды $\rho = 3(1+\cos\varphi)$ (рис.12).

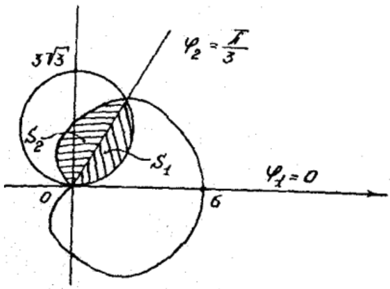

Рис. 12

Решение. Искомая площадь $S = S_1 + S_2$, находим пределы интегрирования, решая совместно уравнения заданных линий:

$$\sqrt{3}\sin\varphi = 1+\cos\varphi, \quad \sqrt{3}\,2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\cos\frac{\varphi}{2}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2}\right)=0,\ \ \cos\frac{\varphi}{2}=0,\quad \frac{\varphi}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi\kappa,\quad \varphi=\pi+2\pi\kappa$$

Следовательно, $\varphi_2=\pi$

$$\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2}=0,\qquad tg\,\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad \frac{\varphi}{2}=\frac{\pi}{6}+\pi k,\qquad \varphi=\frac{\varphi}{3}+2\pi k$$

Следовательно, $\varphi_1=\dfrac{\pi}{3}$. Тогда получаем

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(3\sqrt{3}\sin\varphi\right)^2 d\varphi=\frac{27}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{27}{4}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{27}{8}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{9\pi}{4}-\frac{27}{16}\sqrt{3}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}9\left(1+\cos\varphi\right)^2 d\varphi=\frac{9}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{9}{2}\varphi\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}+9\sin\varphi\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}+\frac{9}{4}\varphi\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}+$$

$$+\frac{9}{8}\sin\ 2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{9}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{9\sqrt{3}}{2}+\frac{9\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}-\frac{9\sqrt{3}}{16}=$$

$$=3\pi+\frac{3}{2}\pi-\frac{81\sqrt{3}}{16}=\frac{9\pi}{2}-\frac{81\sqrt{3}}{16}=\frac{9\pi}{2}-\frac{81\sqrt{3}}{16}$$

и искомая площадь

$$S=S_1+S_2=\frac{9\pi}{4}-\frac{27\sqrt{3}}{16}+\frac{9\pi}{2}-\frac{81\sqrt{3}}{16}=\frac{27}{4}\left(\pi-\sqrt{3}\right)$$

Пример 11. Вычислить площадь фигуры, расположенной внутри кардиоиды $\rho=2\left(1+\cos\varphi\right)$ выше прямой $x+2y-4=0$ (рис.13).

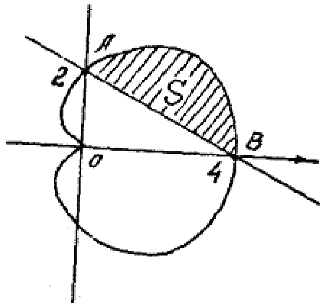

Рис. 13

Решение. Искомая площадь $S = S_{OAMBO} - S_{\Delta OAB}$.
Находим отдельно

$$S_{OAMBO} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [2(1+\cos\varphi)]^2\, d\varphi = \frac{3}{2}\pi + 4,$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} 4 \cdot 2 = 4$$

Тогда

$$S = \left(\frac{3}{2}\pi + 4\right) - 4 = \frac{3}{2}\pi.$$

6. Вычисление объема тела вращения

Если криволинейная, ограниченная линией $y = f(x)$, осью Ox двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, вращается вокруг Ox (или вокруг Oy) (рис.14), то объемы тел вращения выражаются соответственно формулами

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b y^2(x)dx = \pi\int_a^b f^2(x)\, dx,$$

$$V_{Oy} = 2\pi\int_a^b xy(x)dx = 2\pi\int_a^b xf(x)\, dx.$$

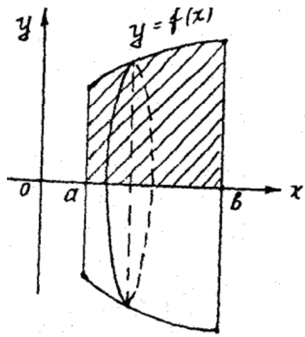

Рис. 14

Если же криволинейная трапеция, ограниченная осью Ox, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ и двумя линиями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, причем $f_2(x) \geq f_1(x)$ (рис.15), вращается вокруг Ox (или вокруг Oy), то объемы тел вращения выражаются соответственно формулами

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b \left[f^2{}_2(x) - f^2{}_1(x) \right] dx, \quad V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x\left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx.$$

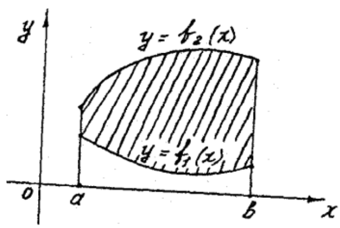

Рис. 15

В том же случае, когда уравнения соответствующих линий даны в виде $x = \varphi(y)$, а вращение совершается вокруг Oy (рис.16), объемы тел вращения выражаются формулами

$$V_{Oy} = \pi \int_P^q \varphi^2(y) dy, \qquad V_{Oy} = \pi \int_P^q \left[\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)\right] dy.$$

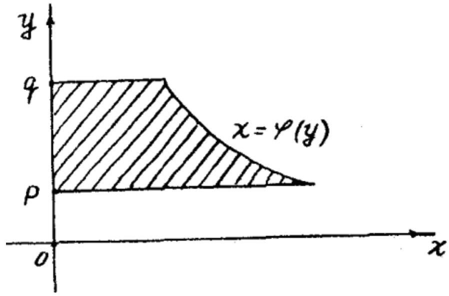

Рис. 16

Пример 12. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = e^{2x} - 2$, $x = 1$, $y = 0$, вокруг Ox (рис.17).

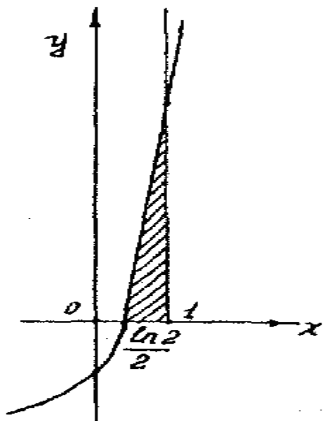

Рис. 17

Решение. Полагая $y=0$, т.е. $e^{2x}-2=0$, находим $e^{2x}=2$, $2x=\ln 2$, $x_1=\frac{1}{2}\ln 2$. Тогда

$$V_{OX}=\pi\int_{x_1}^{x_2}y^2(x)dx=\pi\int_{\frac{1}{2}\ln 2}^{1}(e^{2x}-2)^2\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}e^{4x}\Big|_{\frac{1}{2}\ln 2}^{1}-2\pi e^{2x}\Big|_{\frac{1}{2}\ln 2}^{1}+4\pi x\Big|_{\frac{1}{2}\ln 2}^{1}=\pi\left(\frac{e^4}{4}+7\pi-2e^2-2\ln 2\right).$$

Пример 13. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $2y^2-12y+9x=0$, $x=0$, вокруг Oy (рис.18).

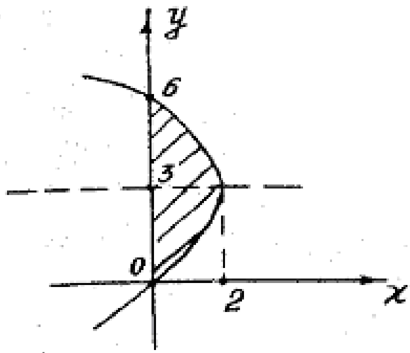

Рис. 18

Решение. Точки пересечения параболы с Oy дают пределы интегрирования $y_1=0$, $y_2=6$. Интегрирование производится по переменной y, поэтому находим $x=\frac{2}{9}\left(6y-y^2\right)$. Учитывая симметрию, получаем

$$V_{oy}=2\pi\int_0^3\left[\frac{2}{9}(6y-y^2)\right]^2 dy=\frac{8\pi}{81}\int_0^3(36y^2-12y^3+y^4)dy=\frac{64}{5}\pi .$$

Предлагается этот же пример решить по формуле

$$V_{oy}=2\pi\int_a^b x\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$$

И убедиться в совпадении ответов.

Пример 14. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\arccos x$, $y=\arccos\frac{x}{3}$, $y=0$, вокруг Oy (рис.19).

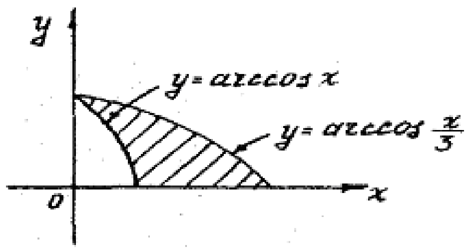

Рис. 19

Решение. Интегрирование выполняем по переменной y, а для этого находим $x_1=\cos y$, $x_2=3\cos y$, тогда получаем

$$V_{oy}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[x_2^2(y)-x_1^2(y)\right]dy=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[9\cos^2 y-\cos^2 y\right]dy=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 y\,dy=$$

$$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2y\right)dy=8\pi\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\sin 2y\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi^2 .$$

Пример 15. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$, вокруг Oy (рис.20).

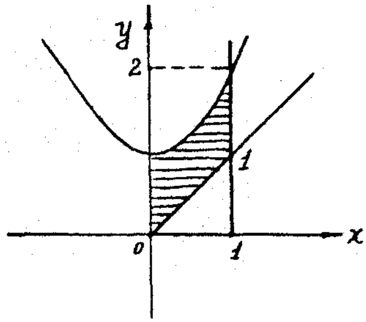

Рис. 20

Решение. Искомый объем находим по формуле

$$V_{Oy} = 2\pi\int_0^1 x[y_2(x) - y_1(x)]\,dx = 2\pi\int_0^1 x\left[\left(x^2+1\right) - x\right]dx =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \left(x^3 + x - x^2\right)dx = \frac{5}{6}\pi.$$

7. Вычисление длины дуги плоской линии

В соответствии с каждым способом задания функции получаем три случая решения этой задачи.

1. Линия задана в декартовых координатах. Тогда длина дуги линии $y = y(x)$, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x_1 = a$ и $x_2 = b$,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx.$$

Если же линия задана уравнением $x = x(y)$, то длина l дуги, содержащейся между двумя точками с ординатами $y_1 = c$ и $y_2 = d$,

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2}\, dy$$

Пример 16. Найти длину дуги линии $2y = x^2 - 2$ между точками пересечения линии с осью Ox (рис.21).

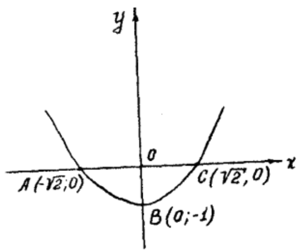

Рис. 21

Решение. В силу симметрии имеем

$$l_{ABC}=2l_{BC}=2\int_0^{\sqrt2}\sqrt{1+(y_x^1)^2}\,dx=2\int_0^{\sqrt2}\sqrt{1+x^2}\,dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{l} u=\sqrt{1+x^2}\ \Rightarrow \\ du=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ dv=dx\Rightarrow v=x \end{array}\right|\Rightarrow 2(x\sqrt{1+x^2}\,\Big|_0^{\sqrt2}-\int_0^{\sqrt2}\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx)=$$

$$=2\cdot\sqrt2\cdot\sqrt3-2\int_0^{\sqrt2}\frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}dx=2\sqrt6-2\int_0^{\sqrt2}\sqrt{1+x^2}\,dx+2\ln(\sqrt2+\sqrt3),$$

$$2\int_0^{\sqrt2}\sqrt{1+x^2}\,dx=J,\qquad J=2\sqrt6-J+2\ln(\sqrt2+\sqrt3)$$

$$2J=2(\sqrt6+\ln(\sqrt2+\sqrt3))$$

$$2\int_0^{\sqrt2}\sqrt{1+x^2}=(\sqrt6+\ln(\sqrt2+\sqrt3))$$

Пример 17. Найти длину дуги линии $x=-y^2+2y+3$ между точками пересечения линии с осью Oy (рис.22).

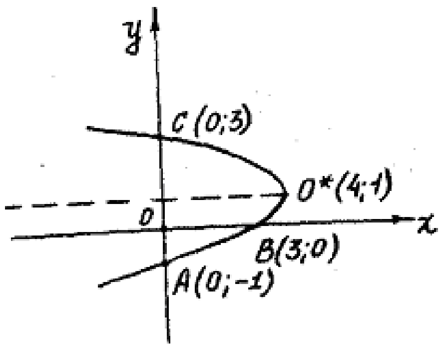

Рис. 22

Решение.

$$l_{ABC}=\int_{-1}^{3}\sqrt{1+(x'_y)^2}\,dy=\int_{-1}^{3}\sqrt{4y^2-8y+5}\,dy=2\int_{-1}^{3}\sqrt{(y-1)^2+\frac{1}{4}}\,dy.$$

Применяем подстановку $y-1=t$ и получаем

$$y=t+1,\quad dy=dt\,.$$

Находим пределы интегрирования

$$y_1=-1,\;\; t_1=-2,$$

$$y_2=3,\quad t_2=2.$$

Тогда получим

$$l_{ABC}=2\int_{-2}^{2}\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\,dt\Rightarrow\left|\begin{array}{l}u=\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\Rightarrow du=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}}dt\\ dv=dt\Rightarrow v=t\end{array}\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(t\cdot\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\Bigg|_{-2}^{2}-\int_{-2}^{2}t\cdot\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\,dt\right)=$$

$$=4\sqrt{17}-2\int_{-2}^{2}\frac{t^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}}dt=4\sqrt{17}-2\int_{-2}^{2}\cdot\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\,dt+\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}}=$$

$$=4\sqrt{17}-2\int_{-2}^{2}\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\,dt+\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\right|_{-2}^{2}=$$

$$=4\sqrt{17}-2\int_{-2}^{2}\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\,dt+\frac{1}{2}\left(\ln(2+\frac{\sqrt{17}}{2})-\ln(-2+\frac{\sqrt{17}}{2}\right)=$$

$$=4\sqrt{17}-2\int_{-2}^{2}\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\,dt+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}=$$

$$=4\sqrt{17}-2\int_{-2}^{2}\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\,dt+\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{17}+4)^2}{17-16}=$$

$$=4\sqrt{17}-2\int_{-2}^{2}\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\,dt+\ln\left(\sqrt{17}+4\right);$$

обозначаем

$$2\int_{-2}^{2}\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}dt = J,$$

тогда
$$2j = 4\sqrt{17} + \ln\left(\sqrt{17}+4\right)$$

$$J = 2\sqrt{17} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)$$

искомый интеграл

$$2\int_{-2}^{2}\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}dt = 2\sqrt{17} + \frac{1}{2}\ln\left(4+\sqrt{17}\right).$$

2. Линия задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$

Тогда длина дуги линии $l = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\ dt$ где t_1 и t_2 – значения параметра, соответствующие концам дуги.

Пример 18. Найти длину трактрисы $\begin{cases} x = a\ln tg\,\dfrac{t}{2} - a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

от $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$ до $t_2 = \dfrac{3}{4}\pi$ (рис.23).

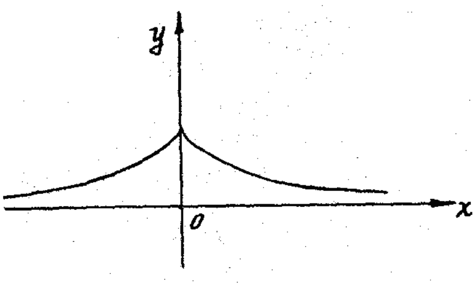

Рис. 23

Решение.

$$x_t' = a(\frac{1}{\sin t} + \sin t), \quad y_t' = a\cos t, \quad (x_t')^2 + (y_t')^2 = a^2 ctg^2 t \ ,$$

$$l = a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}t} ctg t dt = -a\ln\left|\sin t\right| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = -a(\ln\sin\frac{3}{4}\pi - \ln\sin\frac{\pi}{2}) =$$

$$= -a(\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1) = \frac{a}{2}\ln 2.$$

Замечание: Так как $ctg\, t < 0$ при $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{4}$, то интеграл для вычисления l берем со знаком «- ».

Пример 19. Найти длину эволюты эллипса

$$\begin{cases} x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t \\ y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$$

где a, b, c – параметры эллипса, причем

$c^2 = a^2 - в^2 \Rightarrow a^2 = в^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{в^2 + c^2}$ (рис.24)

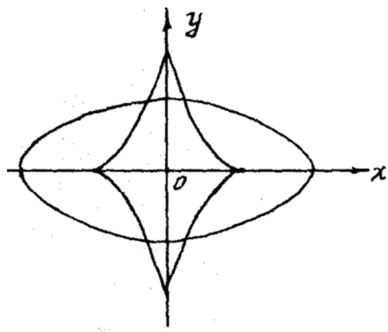

Рис. 24

Решение. $x_t' = -3\dfrac{c^2}{a}\cos^2 t \sin t$, $\quad y_t' = 3\dfrac{c^2}{b}\sin^2 t\cos t$,

$$\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2=\frac{9c^4}{a^2b^2}\sin^2 t\cos^2 t\left(b^2+c^2\sin^2 t\right).$$

Тогда

$$l=4\int\limits_0^{\pi/2}\frac{3c^2}{a\text{в}}\sqrt{\text{в}^2+c^2\sin^2 t}\,\sin t\cos t dt=$$

$$=\frac{6}{a\text{в}}\int\limits_0^{\pi/2}(\text{в}^2+c^2\sin^2 t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\,(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2\sin^2\mathrm{t})=$$

$$=\frac{4}{a\text{в}}(\text{в}^2+c^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{4}{a\text{в}}\left[\left(\text{в}^2+c^2\right)^{\frac{3}{2}}-(\text{в}^2)^{\frac{3}{2}}\right]=$$

$$=\frac{4}{a\text{в}}\left[(a^2)^{\frac{3}{2}}-(\text{в}^2)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{4}{a\text{в}}(a^3-\text{в}^3).$$

3. Линия задана уравнением $\rho=\rho(\varphi)$ в полярных координатах.

В этом случае длина $l=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$, где φ_1 и φ_2 – значения полярного угла в крайних точках дуги.

Пример 20. Прямая $x=\frac{3}{4}a$ делит замкнутую линию $\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-2ax\right)-a^2y^2=0$ на две части. Найти длину дуги обеих частей этой замкнутой линии (рис.25).

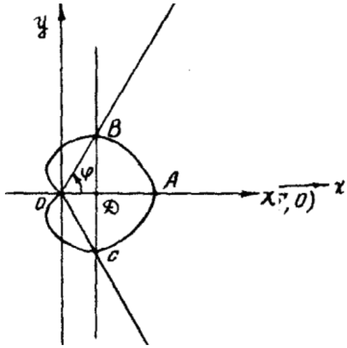

Рис. 25

Решение. Так как уравнение замкнутой линии содержит сумму квадратов переменных, то удобно перейти к полярным координатам по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, после чего получаем два уравнения:

прямая $\rho = \dfrac{3a}{4\cos\varphi}$ и замкнутая линия

$$\rho^2\left(\rho^2 - 2a\rho\cos\varphi\right) - a^2\rho^2\sin^2\varphi = 0,$$

т.е $\rho = a(1+\cos\varphi)$, а это кардиоида. Для определения пределов интегрирования находим точки пересечения двух линий- прямой и кардиоиды:

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{3a}{4\cos\varphi} \\ \rho = a(1+\cos\varphi) \end{cases},$$

Получаем уравнение

$$\cos^2\varphi + \cos\varphi - \frac{3}{4} = 0; \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2} \pm 1; \qquad \cos\varphi_1 = \frac{1}{2}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{3}.$$

$$l_{CAB}=2\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)+a^2\sin^2\varphi}d\varphi=$$

$$=2a\int\limits_0^{\pi/3}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}d\varphi=2\sqrt{2}a\int\limits_0^{\pi/3}\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi=$$

$$=4a\cdot 2\int\limits_0^{\pi/3}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/3}=4a.$$

Длина дуги COB

$$l_{COB}=8a\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=8a\left(1-\frac{1}{2}\right)=4a$$ т.е.

$$l_{CAB}=l_{COB}$$

Видно, что прямая $x=\frac{3}{4}a$ делит длину дуги кардиоиды пополам. Сумма длин дуг CAB и COB равнее 8а, т.е., как известно, равна длине кардиоиды.

Пример 21. Найти длину дуги между точками $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_1(x_2,\ y_2)$, расположенными на линии $\sqrt{x^2+y^2}=a\cdot arctg\,\frac{y}{x}$ (рис.26).

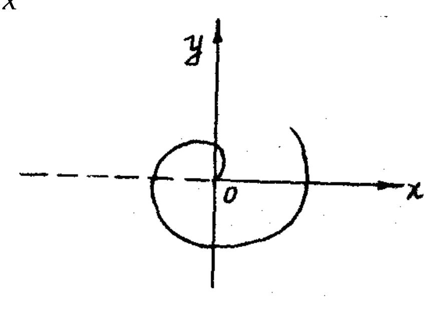

Рис. 26

Решение. Переходим к полярным координатам и получаем $\rho=arctg(tg\varphi)$, т.е. $\rho=a\varphi$, а это спираль

Архимеда. Если точкам M_1 и M_2 соответствуют значения полярного угла φ_1 и φ_2, то длина плоской дуги

$$l_{M_1M_2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{matrix} u = \sqrt{1+\varphi^2} \Rightarrow du = \dfrac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} d\varphi \\ dv = d\varphi \Rightarrow v = \varphi \end{matrix} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\Big|_{\varphi}^{\varphi_2} - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \cdot \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} d\varphi \right) =$$

$$= a\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \right) =$$

$$= a\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} - a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi + a\ln\left|\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right|\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

введем обозначение

$$a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi = J,$$

Тогда

$$2J = a\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\Big|_0^{2\pi} + a\ln\left|\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right|\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= a2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + a\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)$$

$$J = a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi = \frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)\right).$$

Из этой общей формулы можно получить, в частности, длину одного витка спирали Архимеда

$$l=\frac{1}{2}a\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2}+\ln\left|\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right|\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right)$$

Замечание. Если бы мы обратились к вычислению длины дуги таких линий, как розы, улитка Паскаля, лемниската Бернулли, то обнаружили бы, что при решении этой задачи приходим к интегралам, которые не выражаются в элементарных функциях, к так называемым эллиптическим интегралам. Хотя это и общеизвестно, но следует отметить, что вычисление длины дуги таких «хороших» линий, как эллипс, гипербола, синусоида также приводит к эллиптическим интегралам.

8. Вычисление площади поверхности вращения

Если линия, заданная параметрическими уравнениями

$$\begin{cases}x=x(l)\\ y=y(l)\end{cases}$$

где l – длина дуги, вращающейся вокруг оси Ox, то площадь поверхности вращения $P_{Ox}=2\pi\int\limits_{l_1}^{l_2}2y(l)dl$, где l_1 и l_1 – значения параметра l, соответствующие концам дуги, а dl – дифференциал длины дуги. Для дифференциала площади поверхности вращения имеем $dP=2\pi y(l)dl$. Упрощенно dP можно рассматривать как боковую поверхность усеченного конуса с образующей dl и средним радиусом $y(l)$. Из основной теоретической формулы для P получаем рабочие формулы для различных случаев задания уравнения линии.

1. Линия задана в декартовых координатах уравнением $y=y(x)$ и вращается вокруг оси Ox.

Тогда $P_{Ox} = 2\pi \int\limits_a^b y(x)\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}\,dx$.

Если же линия задана уравнением $x = x(y)$ и вращается вокруг оси Oy, то $P = 2\pi \int\limits_c^d x(y)\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}\,dy$

Пример 22. Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением вокруг оси Ox одной петли линии $8a^2y^2 = x^2\left(a^2 - x^2\right)$ (рис.27).

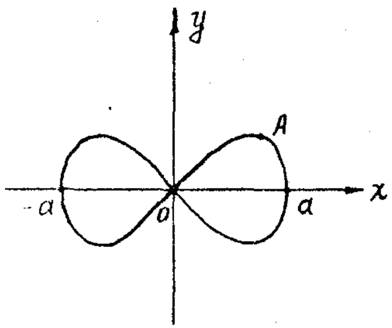

Рис. 27

Решение. Линия симметрична относительно Ox и Oy, имеет в начале координат точку пересечения, а с осью Ox пересекается в точках $x_1 = -a$ и $x_2 = a$. Явное уравнение линии

$$y = \pm \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2\sqrt{2}\,a}$$

Для дуги OAa имеем $y' = \dfrac{a^2 - 2x^2}{2\sqrt{2}\,a\sqrt{a^2 - x^2}}$ тогда

$$1+(y'_x)^2=1+\frac{(a^2-2x^2)^2}{8a^2(a^2-x^2)}=\frac{9a^4-12a^2x^2+4x^4}{8a^2(a^2-x^2)}=\frac{(3a^2-2x^2)^2}{8a^2(a^2-x^2)}.$$

$$\sqrt{1+(y'_x)^2}=\sqrt{\frac{(3a^2-2x^2)^2}{8a^2(a^2-x^2)}}=\frac{3a^2-2x^2}{2\sqrt{2}a\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$P_{OX}=2\pi\int_0^a\frac{x\sqrt{a^2-x^2}\cdot(3a^2-2x^2)}{2\sqrt{2}a\cdot 2\sqrt{2}a\cdot\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{\pi}{4a^2}\int_0^a x(3a^2-2x^2)dx=$$

$$=\frac{3\pi}{8}x^2\Big|_0^a-\frac{\pi}{8a^2}x^4\Big|_0^a=\frac{3\pi a^2-\pi a^2}{8}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

Пример 23. Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением вокруг оси Oy петли линии $9ax^2=y(3a-y)^2$ петлевой параболы (рис. 28).

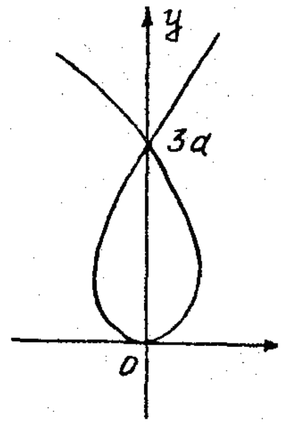

Рис. 28

Решение. Линия симметрична относительно оси Oy и имеет с ней точки пересечения $y_1=0,\ y_2=3a$. Явное уравнение, разрешенное относительно x.

$$x=\frac{\sqrt{y}(3a-y)}{3\sqrt{a}};\qquad x'_y=\frac{1}{3\sqrt{a}}(3\sqrt{y}-y^{\frac{3}{2}})'_y=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{a}}(3a\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{3\sqrt{a}}(\frac{3a}{2\sqrt{y}}-\frac{3y}{2\sqrt{y}})=\frac{a-y}{2\sqrt{ay}};$$

$$1+(x'_y)^2=1+\frac{(a-y)^2}{4ay}=\frac{(a+y)^2}{4ay};$$

$$\sqrt{1+(x_y^1)^2}=\sqrt{\frac{(a+y)^2}{4ay}}=\frac{a+y}{2\sqrt{ay}};$$

$$P=2\pi\int_0^{3a}\frac{\sqrt{y}(3a-y)}{3\sqrt{a}}\cdot\frac{a+y}{2\sqrt{ay}}dy=\frac{\pi}{3a}\int_0^{3a}\left(3a^2+2ay-y^2\right)dy=$$

$$=\frac{\pi}{3a}\left(3a^2y+ay^2-\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^{3a}=3\pi a^2.$$

2. Линия, заданная параметрическими уравнениями

$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t)\end{cases}$ вращается вокруг оси Ox.

Тогда

$$P_{Ox}=2\pi\int_{t_1}^{t_2}y(t)\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$$

Если же вращение происходит вокруг оси Oy, то

$$P_{Oy}=2\pi\int_{t_1}^{t_2}x(t)\sqrt{(x'_t)+(y'_t)^2}\,dt$$

Пример 24. Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением вокруг оси Ox эпициклоиды с двумя заострениями

$\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t) \\ y = a(3\sin t - \sin 3t) \end{cases}$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$, где $AO = 2a$ радиус направляющего круга (рис. 29).

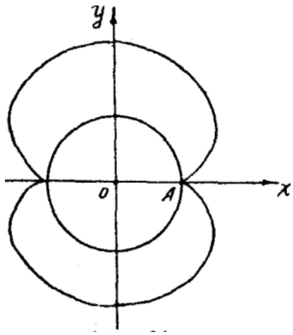

Рис. 29

Решение. $x'_t = 3a(-\sin t + \sin 3t)$, $y'_t = 3a(\cos t - \cos 3t)$

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = 9a^2(2 - 2(\cos 3t \cos t + \sin 3t \sin t)) =$$

$$= 2 \cdot 9a^2(1 - \cos 2t) = 36a^2 \sin^2 t$$

$$\sqrt{(x'_t) + (y'_t)^2} = 6a \sin t .$$

$$P_{Ox} = 2\pi \int_0^{\pi/2} a(3\sin t - \sin 3t) 6a \sin t \, dt =$$

$$= 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot (3\sin^2 t - \sin t \cdot \sin 3t) dt =$$

$$= 12\pi a^2 \left(3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t - \cos 4t) \, dt \right) = 9\pi^2 a^2 .$$

Пример 25. Та же кривая, что и в примере 24, вращается вокруг оси Oy. Надо вычислить площадь поверхности вращения.

Решение.

$$P_{Oy} = 2\pi \int_0^{\pi/2} a(3cost - cos3t)6a\sin t dt =$$

$$= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} (3\cos t \sin t - \sin t \cos 3t)dt =$$

$$= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{3}{2} \cdot 2\sin t \cos t - \frac{1}{2}(\sin 4t - \sin 2t)\right]dt =$$

$$= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} (\frac{3}{2} \cdot \sin 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{1}{2}\sin 2t)dt =$$

$$= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} (2\sin 2t - \frac{1}{2}\sin 4t)dt = 24\pi a^2$$

3. Линия, заданная уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярных координатах, вращается вокруг полярной оси. Так как радиус вращения при этом равен $\rho = (\varphi) \cdot \sin\varphi$, то площадь поверхности вращения

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi) \sin\varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'_\varphi(\varphi)\right)^2}\, d\varphi .$$

Пример 26. Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением вокруг полярной оси правой части кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, отсекаемой прямой $\rho = \dfrac{3a}{4\cos\varphi}$ (см. рис. 25).

Решение.

$$P_{CAB} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} a(1 + \cos\varphi) \cdot \sin\varphi \sqrt{a^2(1 + \cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\ d\varphi =$$

$$=2\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi=$$

$$=8\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos^3\frac{\varphi}{2}\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=16\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos^4\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{-\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}=-\frac{32}{5}\pi a^2\cos^5\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=-\frac{32}{5}\pi a^2\left[\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^5-(\cos 0)^5\right]=$$

$$=-\frac{35}{5}\pi a^{2.}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5-1\right]=-\frac{32}{5}\pi a^2\left(\frac{9\sqrt{3}}{32}-1\right)=\frac{\pi a^2}{5}\left(32-9\sqrt{3}\right).$$

Пример 27. Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением вокруг полярной оси левой части кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$, отсекаемой прямой $\rho=\dfrac{3a}{4\cos\varphi}$ (см. рис. 25).

Решение. Используя значения, полученные в примере 26, найдем

$$P_{BOC}=-\frac{32}{5}\pi a^2\cos^5\frac{\varphi}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{9\sqrt{3}}{5}\pi a^2$$

$P_{CAB} + P_{BOS} = \frac{32}{5}\pi a^2$, т.е. площадь поверхности вращения кардиоиды вокруг полярной оси. Рекомендуется проверить это непосредственным вычислением.

В заключение рассмотрим примеры на вычисление площади поверхности, образуемой вращением составной линии.

Пример 28. Часть линии $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ и касательной к ней в точке пересечения с осью Ox, отсеченные осью Oy, вращаются вокруг оси Ox (рис.30.). Вычислить площадь поверхности вращения.

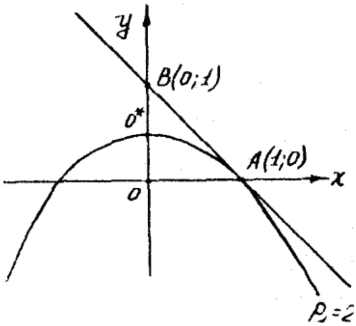

Рис. 30

Решение. Составляем уравнение касательной $y' = -x,\ y'(A) = -1$, т.е. $k_{KAC} = -1$. Тогда уравнение касательной будет таким: $y = -x + 1$. Составная линия состоит из дуги AD^* параболы и отрезка AB касательной. Пусть P$_1$ – площадь поверхности, образуемая вращением дуги $D^* A$, тогда

$$P_1 = 2\pi \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 + x^2}\,dx = -\pi \int_0^1 \left(x^2 - 1\right)\sqrt{x^2 + 1}\,dx.$$

Для вычисления интеграла делаем подстановку $x = tg\ t,\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{\cos t}$.

Пределы интегрирования по t будет $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

Тогда $P_1 = -\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\sin x^2 t}{\cos^5 t} - \dfrac{1}{\cos^3 t} \right) dt$.

Находим первообразную

$$\int \frac{\sin^2 t}{\cos^5 t} dt - \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \int \sin t \cos^{-5} t \sin t dt - \int \frac{dt}{\cos^3 t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt \\ dv = \cos^{-5} t \cdot \sin t \cdot dt \Rightarrow v = \dfrac{1}{4\cos^4 t} \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin t}{4\cos^4 t} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^4 t} \cdot \cos t dt - \int \frac{dt}{\cos^3 t} =$$

$$= \frac{\sin t}{4\cos^4 t} - \frac{5}{4}\int \frac{dt}{\cos^3 t}; \qquad \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \int \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^3 t} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{\cos t} + \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt = \int \frac{dt}{\cos t} + \sin t \cos^{-3} \cdot \sin t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt \\ dv = \cos^{-3} t \cdot \sin t \cdot dt \Rightarrow v = \dfrac{1}{2\cos^2 t} \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dt}{\cos t} + \frac{\sin t}{2\cos^2 t} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 t} \cos t dt =$$

$$= \int \frac{dt}{\cos t} + \frac{\sin t}{2\cos^2 t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\cos t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\cos t} + \frac{\sin t}{2\cos^2 t};$$

Окончательно получаем

$$\int\frac{\sin^2 t}{\cos^5 t}dt-\int\frac{dt}{\cos^3 t}=\frac{\sin t}{4\cos^4 t}-\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\cos t}+\frac{\sin t}{2\cos^2 t}\right)=$$

$$=\frac{\sin t}{4\cos^4 t}-\frac{5}{8}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}-\frac{5}{8}\int\frac{dt}{\cos t}=\frac{\sin t}{4\cos^4 t}-\frac{5}{8}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}-\frac{5}{8}\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

тогда

$$P_1=\pi\left[-\frac{1}{4}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^4}+\frac{5}{8}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2}+\frac{5}{8}\ln\left|tg\,(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})\right|-\frac{5}{8}\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]=$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}+\frac{5}{8}\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{5}{8}\left(\ln tg\,\frac{3\pi}{8}-\ln tg\,\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{1}+\frac{5}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{2}+\frac{5}{8}\ln tg\,\frac{tg\,\frac{3\pi}{8}}{tg\,\frac{\pi}{4}}\right)=$$

$$=\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{8}+\frac{5}{8}\ln tg\,\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{8}\left(\sqrt{2}+5\ln tg\,\frac{3}{8}\pi\right).$$

Пусть P_2 – площадь поверхности, образуемая вращением отрезка AB.

Тогда $P_2=2\pi\int\limits_0^1(-x+1)\sqrt{2}\,dx=\pi\sqrt{2}$.

Но ясно, что P_2 – есть боковая поверхность прямого кругового конуса с радиусом основания $R=1$ и образующей $l=\sqrt{2}$, следовательно

$$P_1+P_2=\frac{\pi}{8}\left(9\sqrt{2}+5\ln tg\frac{3\pi}{8}\pi\right).$$

Пример 29. Вычислить площадь поверхности, образуемой при вращении вокруг оси Oy той же составной линии, что и в примере 28 (см.рис. 30).

Решение. Уравнение дуги AD^* $x=\sqrt{1-y}$, управление касательной $x=1-y$. Находим площадь P_1. Для этого найдем

$$x'_y=-\frac{1}{2\sqrt{1-y}}, \qquad \sqrt{1+\left(x_y^1\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4(1-y)}}=\frac{\sqrt{5-4y}}{2\sqrt{1-y}}.$$

Тогда

$$P_1=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}x(y)\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}dx=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-y}\cdot\frac{\sqrt{5-4y}}{2\sqrt{1-y}}dy=$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{5-4y}dy=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)$$

Находим площадь P_2.

Для этого найдем $x'_y=-1, \quad \sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}=\sqrt{2}$

Тогда

$$P_2=2\pi\int_0^1(1-y)\sqrt{2}\,dy=\pi\sqrt{2}$$

Искомая полная поверхность вращения

$$P_1+P_2=\pi\left(\sqrt{2}+\frac{5}{6}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

9. Задача для самостоятельного решения

1. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y^2 = 4x$, осью Ox и прямыми $x = 4,\ \ x = 9$.

Ответ: $S = 25\frac{1}{3}$.

2. Вычислить площадь между цепной линией $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Осями Ox и Oy и прямой $x = a$.

Ответ: $S = \frac{a^2}{2e}\left(e^2 - 1\right)$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линией $y = \ln x$, осью Ox и прямыми $x = 1,\ \ 4x = a$.

Ответ: $S = a(\ln a - 1) + 1$.

4. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = 2^x,\ \ y = 2,\ x = 0$.

Ответ: $S = 2 - \frac{1}{\ln 2}$.

5. Вычислить площадь, петли линии $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

Ответ: $S = \frac{8}{15}$.

6. Вычислить площадь одного лепестка лемнискаты Бернулли $\rho^2 = 9\cos 2\varphi$.

Ответ: $S = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

7. Вычислить площадь части плоскости, расположенной внутри кардиоиды $\rho = 4(1 - \cos\varphi)$, левее прямой $\rho = -\frac{3}{\cos\varphi}$.

Ответ: $S = 8\pi - 9\sqrt{3}$.

8. Вычислить площадь части плоскости, расположенной внутри кардиоиды $\rho = 4(1 - \cos\varphi)$, правее прямой $\rho = -\dfrac{3}{\cos\varphi}$.

Ответ: $S = 16\pi + 9\sqrt{3}$.

9. Вычислить площадь части плоскости, расположенной внутри окружности $\rho = 3\sqrt{3} \cdot \sin\varphi$ и вне кардиоиды $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$.

Ответ: $S = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$.

10. Вычислить площадь части плоскости, расположенной внутри кардиоиды $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$ и вне окружности $\rho = 3\sqrt{3}\sin\varphi$.

Ответ: $\dfrac{27}{4}\left(\pi + \sqrt{3}\right)$.

11. Вычислить площадь части плоскости, ограниченной окружностью $\rho = 6\sin\varphi$ и прямой $\rho = \dfrac{6}{\sin\varphi + \cos\varphi}$. (меньшую часть).

Ответ: $S = \dfrac{9}{4}(\pi - 2)$.

12. Вычислить площадь части плоскости, ограниченной кардиоидой $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$, и прямой $\rho = \dfrac{6}{\cos\varphi + 2 \cdot \sin\varphi}$. (меньшую часть).

Ответ: $S = \frac{27\pi}{8}$.

13. Вычислить объем тела, образуемого вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = 3\sin x, \quad y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$.

Ответ: $V = 2\pi^2$.

14. Вычислить объем тела, образуемого вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

Ответ: $V = \frac{\pi}{5}$.

15. Вычислить объем тела, образуемого вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x, \quad y = 4 - \ln x$, $y = 0$.

Ответ: $\frac{1}{2}\pi\left(y^4 - 1\right)^2$.

16. Вычислить объем тела, образуемого вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = \sqrt{2 - y}$, $x = 1$.

Ответ: $V = 5\pi$.

17. Вычислить объем тела, образуемого вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = x^2$.

Ответ: $V = \frac{2}{35}\pi$.

18. Вычислить объем тела, образуемого вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \arccos\frac{x}{5}$, $y = \arccos\frac{x}{3}$, $y = 0$.

Ответ: $V = 4\pi^2$.

19. Вычислить длину дуги эвольвенты окружности $\begin{cases} x = a\left(\cos t + \sin t\right) \\ y = a\left(\sin t - t\cos t\right) \end{cases}$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

Ответ: $l = \frac{1}{2}a\pi^2$.

20. Вычислить длину дуги гипоциклоиды с тремя заостреними $\begin{cases} x = 2acost + acos2t, \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t. \end{cases}$

Ответ: $l = 16a$.

21. Вычислить длину дуги эпициклоиды с двумя заостреними $\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t) \\ y = a(3\sin t - \sin 3t) \end{cases}$

Ответ: $l = 24a$.

22. Вычислить длину дуги эпициклоиды с тремя заостреними $\begin{cases} x = a(4\cos t - \cos 4t) \\ y = a(4\sin t - \sin 4t) \end{cases}$

Ответ: $l = 32a$.

23. Вычислить длину дуги эпициклоиды с четырьмя заостреними $\begin{cases} x = a(5\cos t - \cos 5t) \\ y = a(5\sin t - \sin 5t) \end{cases}$

Ответ: $l = 40a$.

24. Вычислить длину дуги линии $y=\frac{2}{\pi}\ln\sin\frac{\pi x}{2}$ от $x_1=\frac{1}{2}$ до $x_2=\frac{3}{2}$.

Ответ: $l=\frac{4}{\pi}\ln tg\,\frac{3\pi}{8}$.

25. Вычислить длину дуги линии

$\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t \end{cases}$ от $t_1=0$ до $t_2=1$.

Ответ: $l=\sqrt{2}(e-1)$.

10. Условия задач домашнего задания

Задача-1

Вычислить площадь фигуры A, расположенной в плоскости xOy.

Вариант	Линии, ограничивающие фигуру A
I	II
1	$y=2\sqrt{x}-1,\qquad y=x-1$.
2	$y=2\ln x,\quad y=\ln(x+2),\quad x=4$.
3	$y=arctg\ x$ и прямая, проходящая через начало координат и через точку с абсциссой $x=1$ на данной линии.
4	$y=4,\ y=\ln\ x$ и касательная к этой линии в точке пересечения ее осью Ox.
5	$y=e^{-x},\quad y=e^{-2x},\quad x=0$.
6	$y=\arcsin x$ касательная к этой линии в начале координат и прямая $x=1$.
7	$y=\sqrt{x+4},\quad y=2-\sqrt{x},\ y=0$.

8	$y = arctgx, \quad y = arctg(2x-4), \qquad y = 0$.
9	$y = -4,\ y = \ln x$ и касательная к этой линии в точке пересечения ее с осью Ox.
10	$y = \ln(-x), \quad y = \ln(x+4), \quad y = \ln 6$.
11	$y^2 = \frac{1}{4}x, \quad y^2 = x-3$.
12	$y = \ln(x+1), \quad y = 2\ln(x-1), \ y = 0$.
13	$y = 1-\sqrt{x}, \quad y = 1-\frac{x}{3}$.
14	$y = e^x - 1, \quad y = e^{2x} - 3, \quad x = 0$.
15	$y = 3 - x^2, \quad y = 2x$.
16	$y = \arcsin x$ и прямая, проходящая через концы этой линии.
17	$y = x+2, \quad y = 4(3-x)$.
18	$x = 0, \qquad y = e^x - e$ и касательная к этой линии в точке пересечения ее с осью Ox.
19	$y = e^x - 1, \quad y = 2e^{-x}, \quad x = \ln 4$.
20	$y = \arcsin x, \quad y = \arcsin(x-2), \ y = -\frac{\pi}{2}$.
21	$y = e^x - 1, \quad y = \frac{1}{4}e^x, \quad y = \frac{1}{4}$.
22	$y = 2\ln x, \quad y = -\ln x, \quad x = e$.
23	$(y-3)^2 = 4x, \quad y = x$.
24	$y^2 = -4x, \quad y^2 = 3-x$.
25	$y = \frac{\pi}{4}, \quad y = arctgx$ и касательная к этой линии в начале координат.
26	$y = \ln(x+2), \quad y = 2\ln x, \ y = 0$.
27	$y = 4\sqrt{1-x^2}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

28	$y = x\ln x, \quad y = lx, \quad y = \dfrac{1}{e}$.
29	$y = xe^{2x}, \quad y = xe^{-2}$.
30	$y = \arcsin x, \quad y = arctg\, 2x$.

Задача-2

Фигура B, расположенная в плоскости XOY, вращается около координатной оси. Вычислить объем полученного тела вращения

Вариант	Линии, ограничивающие фигуру B	Ось вращения
I	II	III
1	$y = \arcsin x$ и прямая, проходящая через концы этой линии.	Oy
2	$y = \sqrt{x+2}, \quad y = -x^{-2}, \quad y = 0$.	Oy
3	$y = x + 2, \quad y = 2 - \sqrt{x}, \quad y = 0$.	Ox
4	$y = \sqrt[3]{x}, \quad y = 0, \quad x = 8$.	Oy
5	$y = 2 - \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{4}x^2 - 4, \quad x = 0$.	Oy
6	$y = x^3, \quad y = \sqrt[3]{x}$.	Oy
7	$y = \ln(x+1), \quad y = 5, \quad y = 0$.	Oy
8	$x = \sqrt{6-y}\,(y \ge 2), \quad x = 4 - \sqrt{2y}\,(y \le 2),$ $x = 0, \; y = 0$.	Oy
9	$y = (x-2)^2, \quad y = 4 - x^2$.	Ox
10	$y = 2 - \frac{x^2}{2}, \quad y = 4 - \frac{5}{2}x^2$.	Ox
11	$y = e^x - 1, \quad y = 2, \quad x = 0$.	Ox
12	$(y-2)^2 = 4 - x, \quad x = 0$.	Ox
13	$y = arctgx, \quad x = 1, \quad y = 0$.	Oy
14	$y = \sqrt{2x}, \quad y = 4 - x, \quad x = 0$.	Oy
15	$y = \ln x, \quad y = 2 - \ln x, \quad y = 0$.	Oy
16	$y = 4x^2 - 4, \quad y = x^2 - 1$.	Ox

17	$y = 2\sin x$ и та ветвь тангенсоиды $y = tgx$, которая проходит через начало координат.	Ox
18	$y = 2\sqrt{x}, \quad y = 6 - \sqrt{x}, \quad x = 0$.	Oy
19	$y = 5 - \sqrt{x}, \quad y = -1 + \sqrt{x}, \quad x = 0$.	Oy
20	$x = 4,\ y = \ln x$ и касательная к этой кривой в точке пересечения ее с осью Ox.	Oy
21	$y = x, \quad y = \sqrt{x}$.	Oy
22	$y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = x - 1, \quad x = 0$.	Oy
23	$y = 0, \quad y = \sin x + 1$ (между двумя соседними точками касания линии с осью Ox).	Ox
24	$y = e^{-x}, \quad y = 4e^{-x}, \quad y = 4$.	Ox
25	$x = \sqrt{y}, \quad x = \sqrt{4 - y}, \quad y = 0$.	Ox
26	$y = x, \quad x = 2 - \sqrt{y}, \quad y = 0$.	Ox
27	$y = \ln(x - 1), \quad x = 3, \quad y = 0$.	Oy
28	$x = 2, \quad y = \arcsin\frac{x}{2}$ и касательная к этой кривой в начале координат.	Oy
29	$x = 0, \quad y = 4 - 2\sqrt{x}$ и касательная к этой линии в точке пересечения ее с осью Ox.	Oy
30	$y = 2\sqrt{x}, \quad y = 6 - \sqrt{x}, \quad y = 0$.	Ox

Задача-3

Вычислить площадь части плоскости C, расположенной указанным образом относительно данных линий (в полярной системе координат)

Вариант	Фигура C
I	II
1	внутри окружности $\rho=\sqrt{6}\cos\varphi$ и одновременно вне лемнискаты $\rho^2=9\cos 2\varphi$.
2	внутри кардиоиды $\rho=1+\cos\varphi$ и одновременно внутри окружности $\rho=1$.
3	внутри окружности $\rho=4\cos\varphi$ и одновременно вне окружности $\rho=2$ (выше полярной оси).
4	внутри окружности $\rho=\sqrt{6}\cos\varphi$ и одновременно внутри лемнискаты $\rho^2=9\cos^2\varphi$.
5	внутри окружности $\rho=4\sin\varphi$ и одновременно вне окружности $\rho=2\sqrt{2}$.
6	внутри окружности $\rho=1$ и одновременно внутри кардиоиды $\rho=2(1-\cos\varphi)$.
7	внутри окружности $\rho=\sin\varphi$ и одновременно вне окружности $\rho=\cos\varphi$.
8	Ограниченная первым $(0\le\varphi\le 2\pi)$ и вторым $(2\pi\le\varphi\le 4\pi)$ витками спирали Архимеда $\rho=3\varphi$ и полярной осью.
9	внутри окружности $\rho=\sqrt{3}\sin\varphi$ и одновременно внутри кардиоиды $\rho=1-\cos\varphi$.
10	внутри кардиоиды $\rho=1-\cos\varphi$ и одновременно вне окружности $\rho=\sqrt{3}\sin\varphi$.
11	внутри кардиоиды $\rho=1-\cos\varphi$ и одновременно внутри окружности $\rho=\cos\varphi$.
12	между внутри лемнискаты $\rho^2=4\cos 2\varphi$ и $\rho^2=\cos 2\varphi$.
13	внутри лемнискаты $\rho^2=\cos 2\varphi$ и одновременно

	внутри окружности $\rho = \sin\varphi$.
14	внутри окружности $\rho = \cos\varphi$ и одновременно вне окружности $\rho = \sin\varphi$.
15	внутри кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$ и одновременно вне кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$.
16	внутри окружности $\rho = 3$ и одновременно вне кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.
17	внутри лемнискаты $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$ и одновременно вне окружности $\rho = 1$.
18	внутри окружности $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$ и одновременно вне кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$.
19	внутри правой ветви лемнискаты $\rho^2 = 9\cos 2\varphi$ и одновременно вне окружности $\rho = \sqrt{6}\cos\varphi$.
20	внутри окружности $\rho = 4\cos\varphi$ справа от прямой $\rho = \dfrac{3}{\cos\varphi}$.
21	внутри окружности $\rho = \cos\varphi$ и одновременно вне кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$.
22	внутри окружности $\rho = 4\cos\varphi$ и одновременно внутри окружности $\rho = 2\sqrt{2}$.
23	внутри окружности $\rho = 1$ и одновременно внутри кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.
24	внутри окружности $\rho = 3\sqrt{2}$ и одновременно вне окружности $\rho = 6\sin\varphi$.
25	внутри кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$ справа от прямой $\rho = \dfrac{3}{4\cos\varphi}$.
26	внутри окружности $\rho = 6\cos\varphi$ и одновременно вне окружности $\rho = 3\sqrt{2}$.

27	внутри окружности $\rho = 2\sin\varphi$ и одновременно внутри окружности $\rho = 1$.
28	внутри кардиоиды $\rho = 3(1-\cos\varphi)$ и одновременно внутри окружности $\rho = \frac{3}{2}$.
29	внутри окружности $\rho = \frac{3}{2}$ и одновременно вне кардиоиды $\rho = 3(1-\cos\varphi)$.
30	внутри кардиоиды $\rho = 3(1+\cos\varphi)$ и одновременно вне кардиоиды $\rho = 1-\cos\varphi$.

Задача-4

Вычислить длину дуги или площадь поверхности вращения

Вариант	Содержание задач
I	II
1	Дуга кривой $y = \sqrt{e^x + 1}$ между точками с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$ вращается около оси Ox. Вычислить поверхности вращения.
2	Вычислить длину той части линии $y = \frac{1}{2}ch2x$, на которой $y \le \frac{1}{2}ch6$.
3	Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2x}+1}$ между точками с абсциссами $x_1 = \frac{1}{2}\ln 3$ и $x_2 = \frac{1}{2}\ln 24$.
4	Вычислить длину дуги линии $y = \ln\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

	между точками с абсциссами $x_1 = \frac{1}{2}\ln 2$ и $x_2 = \frac{1}{4}\ln 5$.
5	Дуга окружности $x^2 + (y-2)^2 = 9$, на которой $(y \geq 0)$, вращается около оси Ox. Вычислить площадь полученной поверхности вращения.
6	Дуга кривой $y = \frac{1}{2} ch2x$, на которой $y \leq \frac{1}{2} ch6$, вращается около оси Ox. Вычислить площадь полученной поверхности вращения.
7	Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{1}{\cos 2x}$ между точками с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{8}$.
8	Вычислить площадь поверхности сектора, полученного при вращении окружности $x^2 + (y-4)^2 = 1$ около оси Ox.
9	Вычислить длину дуги линии $y = \frac{1}{2}\arcsin e^{3x}$ между точками с абсциссами $x_1 = \frac{1}{6}\ln\frac{3}{4}$ и $x_2 = \frac{1}{6}\ln\frac{8}{9}$.
10	Вычислить длину той дуги кривой $y^2 = 4x^3$, которая лежит внутри окружности $x^2 + y^2 = \frac{3}{2}x$.
11	Фигура, ограниченная осью Ox, параболой $y = \sqrt{4-x}\,(x \geq 0, y \geq 0)$ и касательной к ней в точке пересечения параболы с осью Oy, вращается около оси Ox. Вычислить полную поверхность полученного тела вращения.

12	Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{1}{2}\arcsin e^{2x}$ между точками с абсциссами $x_1=\frac{1}{4}\ln\frac{3}{4}$ и $x_2=0$.
13	Дуга кривой $y=\frac{1}{\sin 2\varphi}$ между точками с абсциссами $x_1=\frac{\pi}{6}$ и $x_2=\frac{\pi}{4}$ вращается около оси Ox. Вычислить площадь поверхности вращения.
14	Фигура, ограниченная линиями $y=x^3$ и $y=4x(x\geq 0, y\geq 0)$ вращается около оси Ox. Вычислить полную поверхность полученного тела вращения.
15	Дуга кривой $y=\frac{1}{3}\sqrt{x^3}$, на которой $x\leq 4$, вращается около оси Ox. Вычислить площадь полученной поверхности вращения.
16	Фигура, ограниченная осью Ox, кривой $y=(x+2)^3$ и касательной к этой кривой в точке пересечения ее с осью Oy, вращается около оси Ox. Вычислить полную поверхность полученного тела вращения.
17	Вычислить длину дуги кривой $y=\sqrt{2}\ln\left[2-(x-3)^2\right]$, которая лежит выше оси Ox.
18	Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками пересечения ее с осью Ox.
19	Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{6}{\sin\frac{x}{3}}$ между

	точками с абсциссами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = 2\pi$.
20	Вычислить длину той дуги кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$, которая лежит внутри окружности $\rho = \cos\varphi$, и длину дуги окружности, лежащей внутри данной кардиоиды.
21	Вычислить длину той части кривой $y = \frac{6}{\cos\frac{x}{3}}$, на которой $y \le 12$.
22	Дуга кривой $y = \frac{1}{2}\sqrt{e^{-2x} + 1}$ между точками с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = \ln 4$ вращается около оси Ox. Вычислить площадь полученной поверхности вращения.
23	Дуга окружности $x^2 + (y-12)^2 = 169$, на которой $y \ge 0$, вращается около оси Ox. Вычислить площадь полученной поверхности вращения.
24	Вычислить длину дуги кривой $y = 4\ln\sin\frac{x}{4}$ между точками с абсциссами $x_1 = \pi$ и $x_2 = 3\pi$.
25	Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{1}{6}(x-12)\sqrt{x}$ между точками пересечения ее с осью Ox.
26	Дуги кривой $y = \frac{1}{6}\sqrt{x}(x-12)$ между точками пересечения ее с осью Ox вращается около оси Ox. Вычислить площадь полученной поверхности вращения.
27	Вычислить длину дуги кривой $y = e^{2x}$ между точками с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{4}\ln 5$.

28	Дуги кривой $y^2 = 6(x+4)$, на которой $x \le 0$, вращается около оси Ox. Вычислить площадь полученной поверхности вращения.
29	Вычислить длину дуги кривой $y = \dfrac{1}{\sin 2x}$ между точками с абсциссами $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$.
30	Вычислить длину дуги логарифмической спирали $\rho = 4e^{2\varphi}$, расположенной между двумя окружностями $\rho = 12$ и $\rho = 20$.

Литература

1. Г.Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. -М.: Наука, 1985.
2. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я.Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. -М.: Высшая школа, 1986.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов (под редакция Б.П.Демидовича) -М.: Астрель. АСТ, 2004.
4. http://vischool.r2.ru/books.htm
5. http://www.91.ru/Education/MatAn/Listok27.htm

Содержание

1-§. Определенный интеграл: основные понятия, свойства, способы вычисления ……………………… 3
2. Основные свойства определенного интеграла………… 4
3. Способы вычисления определенного интеграла………. 8
4. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах………….. 9
5. Вычисление площади плоской фигуры в полярных координатах………... 14
6. Вычисление объема тела вращения……………………. 17
7. Вычисление длины дуги плоской линии ……………… 22
8. Вычисление площади поверхности вращения………… 31
9. Задача для самостоятельного решения………………… 41
10. Условия задач домашнего задания…………………….. 45
Литература…………………………………………….. 55

Редактор Ахметжанова Г.М.