МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА
«ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
для выполнения расчетно-графической работы по ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Тема: «Произвольная плоская система сил»

ТАШКЕНТ-2010

Методическая пособие «произвольная плоская система сил» предназначена для студентов всех специальностей, обучающих курс теоретической механики.
Содержание пособия позволяет студентам овладеть теоретическими основами и практическими навыками решения задач при действии произвольной плоской системы сил.

Составитель: доцент Юсупов А
Рецензент: доцент Жумаев Х.Ж

Рассмотрено на заседании кафедры «Прикладная механика»
Протокол № 5 12,10, 2010

Рассмотрено и утверждено на научно методическом совете факультета «Строительство дорог»
Протокол № 2010

Произвольная плоская система сил

Содержание

§1.Связи и реакции связей.

Тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве, называется свободным .

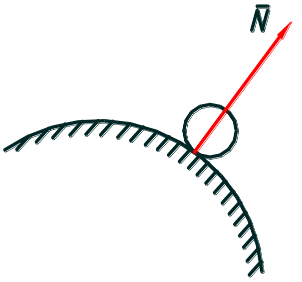
Тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скреплённые или соприкасающиеся с ним тела называется несвободным .

Всё то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве называется связью .

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным перемещениям, называется силой реакции связи или просто реакцией связи. Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Когда связь одновременно препятствует перемещениям тела по нескольким направлениям, реакция связи разлагается на составляющие по искомым направлениям. Рассмотрим, как направлены реакции некоторых основных видов связей.

(поверхность) или опора

а)



в)

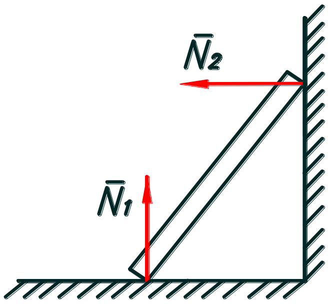


Рис. 1

Гладкой называется поверхность, трением о которую данного тела можно пренебречь. Реакция N гладкой поверхности или опоры направлена по нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке (Рис. 1 а, в). Когда одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (выступ), то реакция направлена по нормали к другой поверхности (Рис. 2)

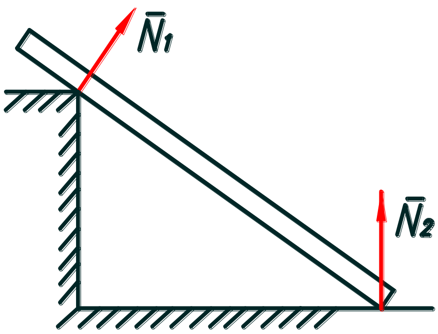


Рис. 2

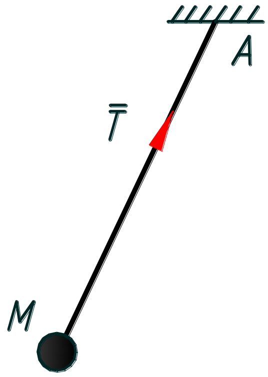


Рис. 3

2. Нить, стержень.

Связь, осуществляемая в виде гибкой нерастяжимой нити, не даёт телу M удаляться от точки подвеса нити по направлению AM. Поэтому реакция $\overline{T}$ натянутой нити направлена вдоль нити к точке её подвеса (Рис. 3)

Пусть стержень AB, закреплённый на концах шарнирами является связью в некоторой конструкции. Примем, что весом стержня по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Если стержень находится в равновесии, то на стержень будут действовать в точках A и B две силы, направленные вдоль одной прямой, т.е вдоль оси стержня.

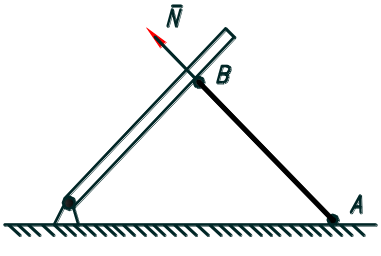


Рис. 4

Следовательно, стержень будет работать только на растяжение или сжатие, а реакция $\overline{N}$ стержня будет направлена вдоль оси стержня (рис. 4)

3. Подвижный и неподвижный шарниры.

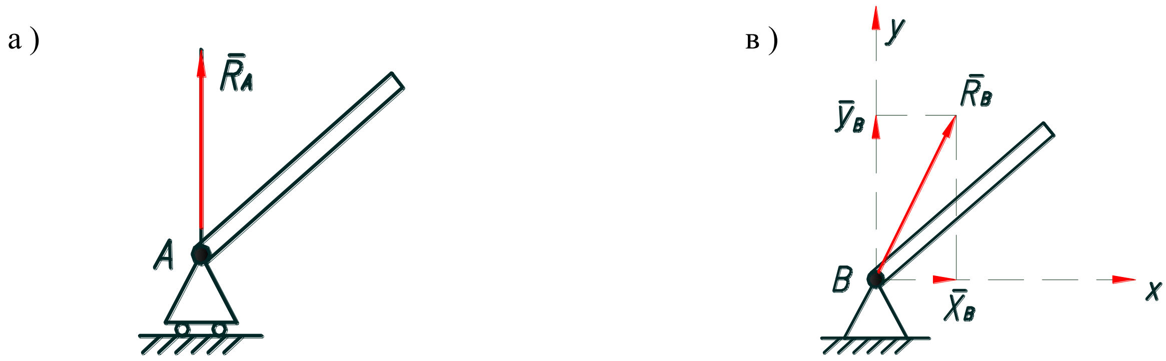


Рис. 5

Реакция $\overline{R_A}$ подвижного шарнира направлена перпендикулярно линии возможного перемещения по гладкой поверхности, т.е по нормали к ней (Рис. 5а)

Направление реакции неподвижного шарнира в общем случае неизвестно. Она разлагается на две составляющие X_B и Y_B по осям координат, а её величина определяется по формуле(1) (Рис. 5в)

4. Жесткое защемление

Реакция связи при жёстком защемлении элемента конструкции определяется реакцией $\overline{R_C}$ точки С, которая разлагается на две составляющие X_C и Y_C, а также неизвестный момент M_C (рис. 6), т.е реакциями связи будут неизвестные X_C, Y_C и M_C.

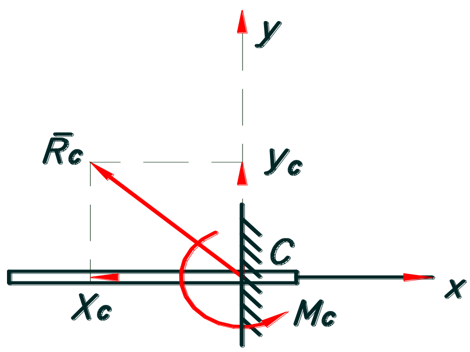


Рис. 6

<u>Аксиома</u> (аксиома освобождения от связей)

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями этих связей.

§2. Приведение произвольной плоской системы сил к одному центру.

Пусть на твёрдое тело действует сила $\overline{F}$, приложенная в точке А (рис. 7а). Действие этой

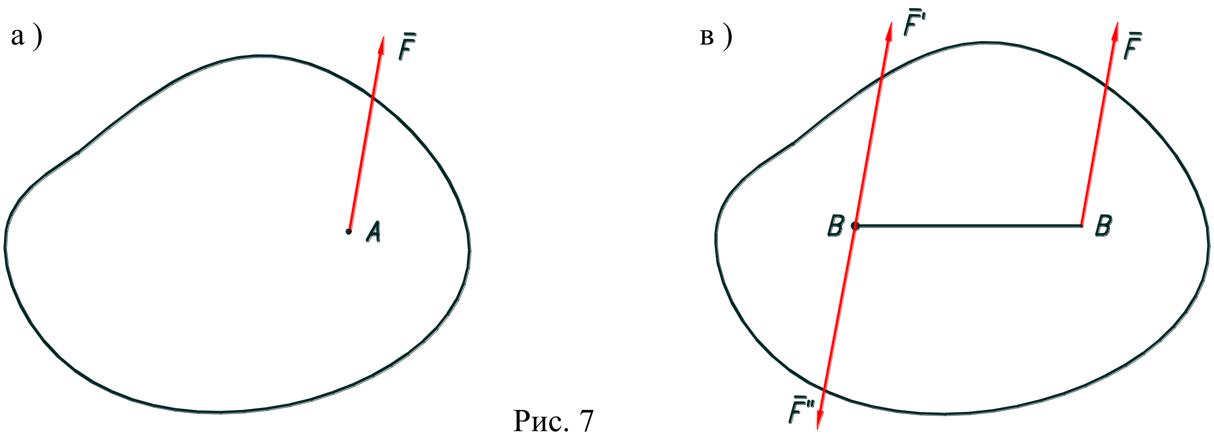


Рис. 7

силы не изменится, если в любой точке В тело приложить две уравновешенные силы $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, такие $\overline{F}' = \overline{F}$, $\overline{F}'' = \overline{F}$. Полученная система трёх сил $\overline{F}$, $\overline{F}'$, $\overline{F}''$ представляет силу $\overline{F}'$, равную $\overline{F}$, но приложенную в точке В и пару ($\overline{F}$, $\overline{F}''$) с моментом m= $m_B(\overline{F})$

$$\overline{F} \sim (\overline{F}, \overline{F}', \overline{F}'') \sim [\overline{F}', (\overline{F}, \overline{F}'')] \qquad (2)$$

<u>Теорема</u> (о параллельном переносе силы)

Силу, приложенную к абсолютно твёрдому телу, можно, не изменяя оказываемого действия, переносить параллельно ей самой в любую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится.

Пусть в точках A_1, A_2,……, A_n твердого тела действуют соответственно силы F_1, F_2,……, F_n, лежащие в одной плоскости. Возьмём в этой плоскости произвольную точку О, которую назовём <u>центром приведения</u> и, пользуясь вышеуказанной теоремой перенесём все силы в центр О. В результате на тело будет действовать система сил

$$\overline{F_1'} = \overline{F_1}\ , \overline{F_2'} = \overline{F_2}\ , \ldots\ldots, \overline{F_n'} = \overline{F_n} \qquad (3)$$

приложенных в точке О, и система пар, моменты которых будут равны

$$m_1 = m_0(\overline{F_1})\ ,\ m_2 = m_0(\overline{F_2}), \ldots\ldots, m_2 = m_0(\overline{F_2}) \qquad (4)$$

Или иначе можно записать, что

$$\begin{cases} \overline{F_1} \sim (\overline{F}, \overline{F_1'}, \overline{F_1''}) \sim \left[\overline{F_1'}, (\overline{F_1}, \overline{F_1''})\right] \\ \overline{F_2} \sim (\overline{F}, \overline{F_2'}, \overline{F_2''}) \sim \left[\overline{F_2'}, (\overline{F_2}, \overline{F_2''})\right] \\ \overline{F_n} \sim (\overline{F}, \overline{F_n'}, \overline{F_n''}) \sim \left[\overline{F_n'}, (\overline{F_n}, \overline{F_n''})\right] \end{cases} \qquad (5)$$

Силы, приложенные в центре О можно заменить одной силой $\overline{R}$, приложенной в том же центе, причём $\overline{R} = \sum \overline{F_к'}$ или, согласно (3)

$$\overline{R} = \sum \overline{F_к} \qquad (6)$$

Величина $\overline{R}$, равная геометрической сумме всех сил системы называется <u>главным вектором</u> системы.

Точно также, по правилу о сложении пар, расположенных в одной плоскости, все пары можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости. Момент этой пары $M_O = \sum m_к$ или согласно равенствам (4)

$$M_O = \sum m_O(\overline{F_к}) \qquad (7)$$

Величина M_O, равная сумме моментов всех сил относительно центра О, называется <u>главным моментом</u> системы относительно центра О.

В результате доказана следующая <u>теорема</u>: Всякая плоская система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно взятому центру О заменяется одной силой $\overline{R}$, равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения О, и одной парой с моментом M_O, равный главному моменту системы относительно центра О.

§3.Условия равновесия произвольной плоской системы сил.

Для равновесия любой плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия

$$\begin{cases} \overline{R} = 0 \\ M_O = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Найдём вытекающие из равенств (8) аналитические условия. Эти условия можно получить в трех различных формах.

1. <u>Основная форма</u> условий равновесия.

Величины $\overline{R}$ и M_O определяются равенством

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad M_O = \sum m_O(\overline{F_к})$$

Где $\quad R_X = \sum F_{кх} \qquad R_У = \sum F_{ку}$

R может равняться нулю только тогда, когда одновременно $R_x = 0$ и $R_y = 0$. Следовательно, условия (8) будут выполнены, если будет

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \\ \sum m_O(\overline{F_k}) = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

Равенства (9) Выражают следующие аналитические условия равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумму их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

2. Вторая форма условий равновесия

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров A и B и сумма их проекции на ось, не перпендикулярную к прямой AB , были равны нулю:

$$\begin{cases} \sum m_A(\overline{F}_к) = 0 \\ \sum m_B(\overline{F}_к) = 0 \\ \sum F_{k\xi} = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Где $\xi = \begin{cases} x \\ y \end{cases}$, не перпендикулярная прямой AB

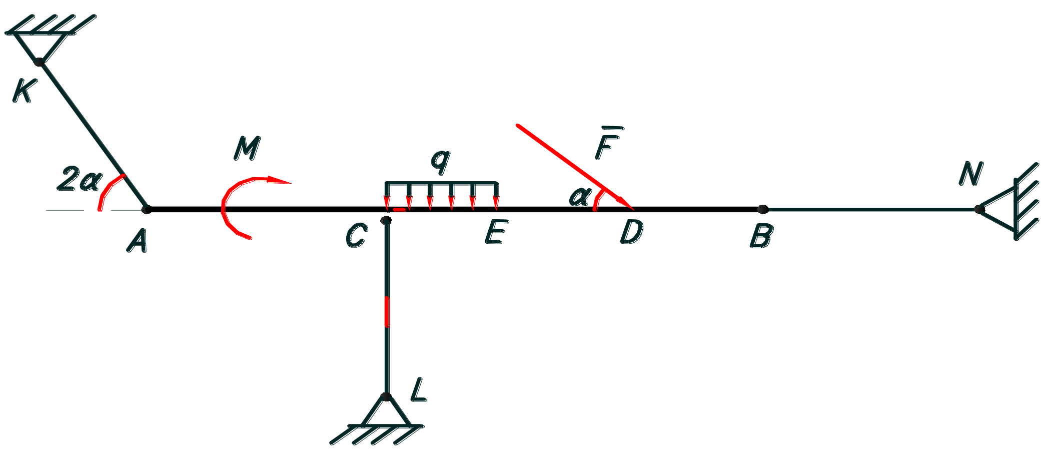
3. Третья форма условий равновесия (уравнения трех моментов)

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех центров A, B и C, не лежащих на одной прямой, были равны нулю

$$\begin{cases} \sum m_A(\overline{F}_к) = 0 \\ \sum m_B(\overline{F}_к) = 0 \\ \sum m_C(\overline{F}_к) = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

§4.Определение реакций опор конструкции

Задача 1



Дано:

AB = 6 м

AC = 2 м

CE = 2 м

ED = 1 м

α = 30°

q = 2 Н/м

F = 6 Н

M = 8 Н/м

Рис. 8

Балка АВ в точках А, С и В шарнирно соединена со стержнями АК, CL и BN. Реакции в этих точках будут направлены вдоль осей этих стержней, т.е неизвестными реакциями связей будут усилия T_1, T_2 и T_3, направленные по осям стержней.

Распределённую на участке СЕ силу заменим сосредоточенной силой Q, действующую в середине участка СЕ, причем

$$Q = q \cdot l = 2 \cdot 2 = 4 \qquad (H)$$

Пользуясь системой освобождения от связей отбросим в точках А, С и В связи и к действующим активным силам добавим реакции T_1, T_2 и T_3 (рис. 9). К полученной системе сил применим условия равновесия (9). При этом выберем систему координат с положительными направлениями оси х вправо и оси у вверх

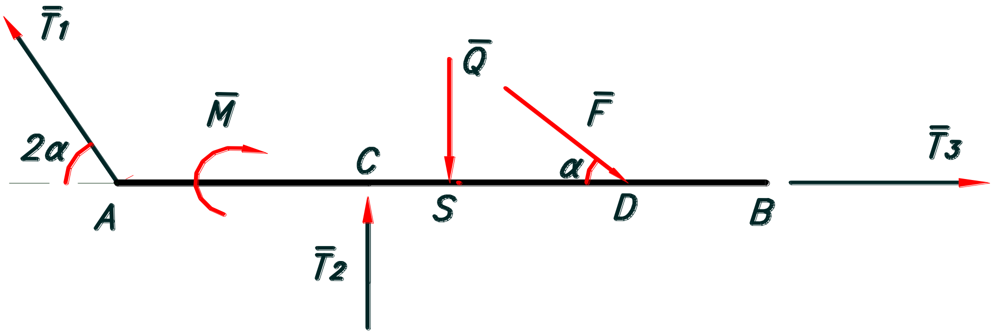


Рис. 9

Применение условий равновесия дает следующую систему (12) трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 & T_1 \cos 2\alpha + F\cos\alpha - T_3 = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 & -T_1 \sin\alpha + T_2 - Q - F\sin\alpha = 0 \\ \sum m_A(F_k) = 0 & -M + T_2 \cdot AC - Q \cdot AS - F\sin\alpha \cdot AD = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

Решая систему уравнений (12) последовательно находим:

Из третьего уравнения системы (12) - T_2

$$T_2 = \frac{M + Q \cdot AS + F \cdot \sin\alpha \cdot AD}{AC} = \frac{8 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 0{,}5 \cdot 5}{2} = \frac{37}{2} = 17{,}5$$

Из второго уравнения системы (12) - T_1

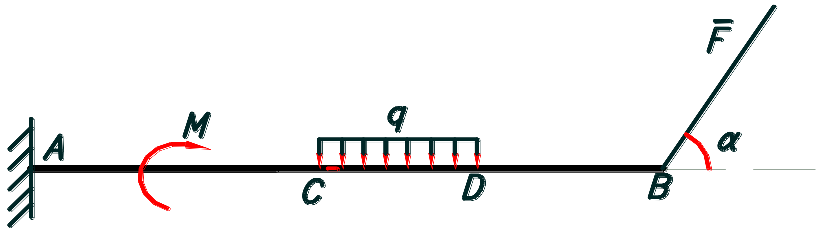
$$T_1 = \frac{T_2 - Q - F\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{17{,}5 - 4 - 6 \cdot 0{,}5}{0{,}87} = \frac{10{,}5}{0{,}87} \approx 12{,}1$$

Из первого уравнения системы (12) - T_3

$$T_3 = T_1 \cos 2\alpha + F\cos\alpha = 12{,}1 \cdot 0{,}87 + 6 \cdot 0{,}87 \approx 15{,}7$$

Ответ: $T_1 = 12{,}1H; T_2 = 17{,}5H; T_3 = 15{,}7H$

Задача 2



Дано:

AB = 6 м

AC = 3 м

CD = 2 м

α = 60°

q = 3 Н/м

F = 4 Н

M = 2 Н/м

Рис. 10

Балка AB в точке A закреплена жестко. Реакциями в этой точке будут X_A, Y_A и M_A.
Распределенную на участке CD силу заменим сосредоточенной силой Q , действующей в точке E – середины участка CD , причем

$$Q = q \cdot l = 3 \cdot 2 = 6\ (Н)$$

Пользуясь аксиомой освобождения от связей к активным силам добавим реакции X_A, Y_A и M_A , а саму связь отбросим (Рис.11).

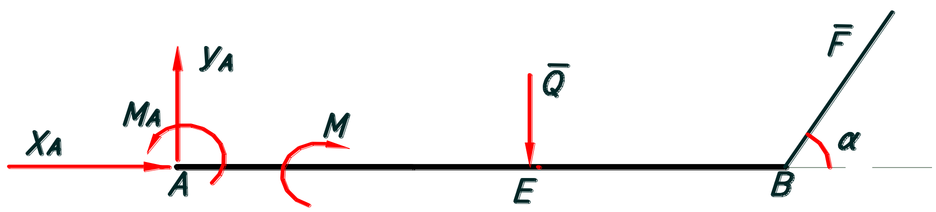


Рис.11

К полученной системе сил применим условия равновесия (10)

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 & X_A - F\cos\alpha = 0 \\ \sum m_A(F_k) = 0 & M_A - M - Q \cdot AE - F\sin\alpha \cdot AB = 0 \\ \sum m_B(F_k) = 0 & -Y_A \cdot AB + M_A - M + Q \cdot AB = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

Получим систему (13) трех уравнений с тремя неизвестными X_A, Y_A и M_A.

Из первого уравнения системы (13) получим X_A

$$X_A = F\cos\alpha = 4 \cdot 0{,}5 = 2$$

Из второго уравнения системы (13) получим M_A.

$$M_A = M + Q \cdot AE + F\sin\alpha \cdot AB = 2 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 0{,}87 \cdot 6 = 2 + 24 + 20{,}9 = 46{,}9$$

Из третьего уравнения системы (13) получим Y_A

$$Y_A = \frac{M_A - M + Q \cdot AB}{AB} = \frac{46{,}9 - 2 + 6 \cdot 6}{6} = \frac{8{,}9}{6} \approx 1{,}5$$

Ответ: X_A=2 Н ; Y_A=1,5 Н ; M_A=46,9 Н /м.

Задача 3

Дано:

AC= 2 м

CE = 6 м

CD = 2 м

KE=2 м

α = 45°

q = 4 Н/м

F = 5 Н

M =6Н/м

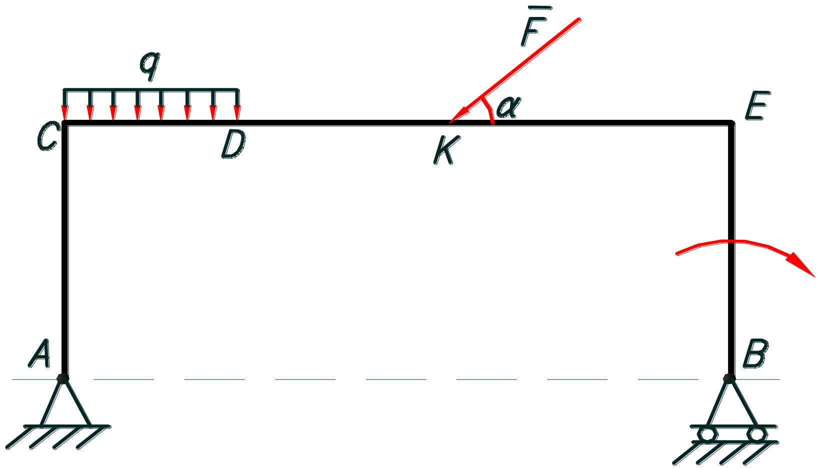


Рис.12

Дана рамная конструкция, закрепленная в точке A неподвижным шарниром, а в точке B – подвижным шарниром.

Распределенную нагрузку q заменим сосредоточенной в точке N силой Q

Q = q · l = 4 · 2 = 8

Отбросим связи и заменим их реакциями в точке A - X_A, $У_A$, а в точке B - R_B (рис. 13)

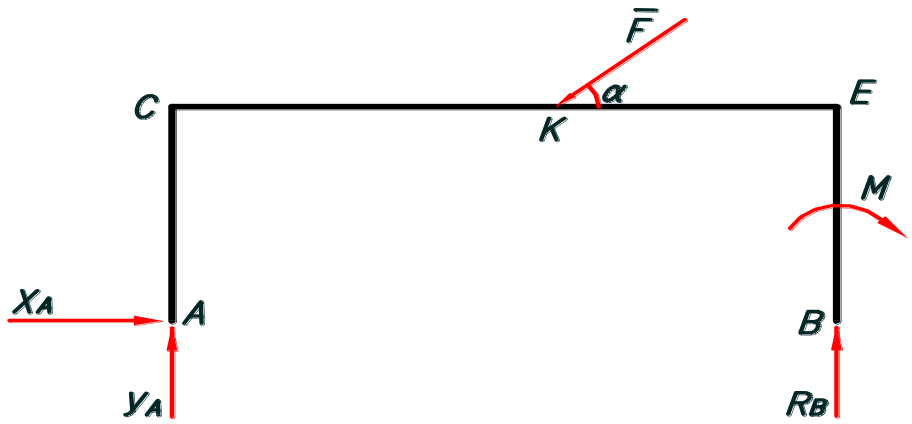


Рис. 13

К полученной плоской системе сил применим условия равновесия (11)

$$\begin{cases} \sum m_A(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum m_B(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum m_C(\bar{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} -Q \cdot CN - F\sin\alpha \cdot CK + F\cos\alpha \cdot AC - M + R_B \cdot CE = 0 \\ -Y_A \cdot AB + Q \cdot NE + F\cos\alpha \cdot BE + F\sin\alpha \cdot EK - M = 0 \\ X_A \cdot AC - Q \cdot CN - F\sin\alpha \cdot CK - M + R_B \cdot CE = 0 \end{array} \qquad (14)$$

Получили систему трех уравнений (14) с тремя неизвестными X_A, Y_A и R_B. Решим эту систему.

Из первого уравнения системы (14) найдем R_B

$$R_B = \frac{Q \cdot CN + F\sin\alpha \cdot CK - F\cos\alpha \cdot AC + M}{CE} = \frac{8 \cdot 1 + 5 \cdot 0{,}7 \cdot 4 - 5 \cdot 0{,}7 \cdot 2 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

Из второго уравнения системы (14) найдем Y_A

$$Y_A = \frac{Q \cdot NE + F\cos\alpha \cdot BE + F\sin\alpha \cdot EK - M}{AB} = \frac{8 \cdot 5 + 5 \cdot 0{,}7 \cdot 2 + 5 \cdot 0{,}7 \cdot 2 - 6}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

Из третьего уравнения системы (14) найдем X_A

$$X_A = \frac{Q \cdot CN + F\sin\alpha \cdot CK + M - R_B \cdot CE}{AC} = \frac{8 \cdot 1 + 5 \cdot 0{,}7 \cdot 4 + 6 - 3{,}5 \cdot 6}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

Ответ: X_A =3,5 Н ; Y_A = 8 Н ; R_B =3,5 Н