ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ОРТА ҲӘМ АРНАЎЛЫ
БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ

ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК УНИВЕРСИТЕТИ

МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ
«МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ» кафедрасы

«АНАЛИЗДИҢ ТАҢЛАНҒАН БАПЛАРЫ»
пәнинен

Лекция текстлери

Жоқары билимлендириўдиң 400000-билим тараўындағы:

5460100 - математика қәнигелиги

ДҮЗГЕН: ТАНИРБЕРГЕНОВ М.Б.

НӨКИС-2007

1-лекция

Монотон функциялар

1-анықлама. $[a,b]$ кесиндиде анықланған $f(x)$ функция берилген болсын. Егерде ҳәр қандай $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ ушын $x_1 < x_2$ болғанда

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

теңсизлик орынлы болса, онда $f(x)$ функция монотон кемимейтуғын функция деп аталады.

Монотон өспейтуғын функцияның анықламасы ҳәм усыған уқсас бериледи.

Барлық ҳақыйқый санлар көплигинде берилген ҳәр қандай функция ушын

$$\lim_{h \to +0} f(x_0 + h) \text{ ҳәм } \lim_{h \to -0} f(x_0 + h)$$

лимитлер бар болса, онда бул лимитлер сәйкес $f(x)$ функцияның x_0 ноқаттағы оң ҳәм шеп лимитлери деп аталады ҳәм сәйкес $f(x_0 + 0)$ ҳәм $f(x_0 - 0)$ арқалы белгиленеди. Егер $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ болса, онда $f(x)$ функция x_0 ноқатта үзликсиз деп айтылады. Егерде $f(x_0 + 0)$ ҳәм $f(x_0 - 0)$ лар бар болып, бир-бирине тең болмаса, онда $f(x)$ функция x_0 ноқатта биринши түр үзилиске ийе ҳәм ол $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ айырманың мәниси $f(x)$ фуекцияның усы x_0 ноқаттағы секириўи деп аталады.

Монотон кемимейтуғын функцияның функцияның базы-бир қәсийетлерин келтиремиз.

1-теорема. $[a,b]$ кесиндиде монотон кемимейтуғын ҳәр қандай $f(x)$ функция усы кесиндиде өлшеўли, шегараланған ҳәм жәмлениўши функция болып табылады.

2-теорема. Монотон функцияның үзилис ноқатлары тек биринши түрдеги болып олар көпи менен санақлы болыўы мүмкин.

Дәлиллениўи. Мейли x_0 ноқаты монотон кемимейтуғын $f(x)$ функцияның үзилис ноқаты болсын. Енди x_0 ноқатқа шептен жыйнақлы

$\{x_n\}$ избе-изликти аламыз: $x_n \to x_0$, $x_n < x_0$, (егер x_0 ноқаты a менен үстпе-үст түссе, онда n ушын $x_n = a$). $f(x_n) \le f(x_0)$ монотонлығынан $l = \sup\limits_{n} f(x_n)$ бар болады. Енди мейли қәлеген $\forall \varepsilon > 0$ берилген болсын. Анық жоқары шегараның анықламасына көре сондай n' номер бар болып, $f(x_{n'}) > l - \varepsilon$ теңсизлиги орынлы болады. Мына $\delta = x_0 - x_{n'}$ белгилеў кирип, n_0 ди сондай қылып $n \ge n_0$ лерде $|x_n - x_0| < \delta$ теңсизлиги орынлы болатуғын етип сайлап аламыз. Сонда $n \ge n_0$ лерде $x_n > x_{n'}$ болады, сонлықтан

$$f(x_n) \ge f(x_{n'}) > l - \varepsilon$$

Барлық ўақытта $f(x_n) \le l$ екенлигинен, онда $n \ge n_0$ лерде

$$l - \varepsilon < f(x_n) \le l,$$

яғный $f(x_n) \to l$. Буннан

$$\lim_{\substack{x_n \to x_0 \\ x_n < x_0}} f(x_n) = f(x_0 - 0).$$

Тап усындай қылып

$$\lim_{\substack{x_n \to x_0 \\ x_n > x_0}} f(x_n) = f(x_0 + 0).$$

Кейинги ўақытлары $\omega(f, x_0)$ арқалы $f(x)$ функцияның x_0 ноқаттағы

$$\omega(f, x_0) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

секириўин белгилеймиз.

Мейли $x_1, x_2, \ldots.., x_k$ ноқатлары $f(x)$ функцияның үзилис ноқатлары болсын (олардың арасында кесиндиниң ушлары ҳәм болыўы мүмкин). Енди және x_i^- ҳәм x_i^+ ноқатларын төмендегидей қылып киритемиз:

$a \le x_1^- \le x_1 < x_1^+ < x_2^- < x_2 < x_1^+ < \ldots.. < x_k^- < x_2 \le x_k^+ \le b$ (егер $x_1 = a$ болса, онда $x_1^- = a$). Буннан $\lfloor x_i^-, \ x_i^+ \rfloor$ кесиндидеги функцияның артырмаларының қосындысы $f(x)$ тиң $[a, b]$ кесиндидеги артырмасынан аспайды:

$$\sum_{i=1}^{k}\left[f(x_i^+)-f(x_i^-)\right]\leq f(b)-f(a).$$

x_i^- ҳәм x_i^+ лерди x_i қа умтылтырсақ, онда кейинги теңсизликте

$$\sum_{i=1}^{k}\omega(f,x_i)\leq f(b)-f(a). \qquad (1)$$

x_i^- ийе боламыз.

Енди функцияның секириўи 1 ден үлкен болған ноқатларды қараймыз. (1) ден бундай ноқатлардың саны шекли екенлиги келип шығады. Оларды номерлеп шығамыз:

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n_1}.$$

Енди функцияның секириўи 1/2 үлкен, бирақ 1 ден киши болған ноқатлар көплигин қараймыз. Және олардың саны шекли болады ҳәм оларды номерлеп шығамыз:

$$x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots\ldots, x_{n_2}.$$

Усындай қылып даўам еттирсек, онда функцияның үзилис ноқатлар шекли ямаса санақлы болатуғынлығын көремиз.

4-теорема. Шептен үзликсиз болған ҳәр қандай монотон функцияны бирден-бир усыл менен үзликсиз монотон функция ҳәм шептен үзликсиз болған секириў функцияның қосындысы сыпатында жазыў мүмкин.

Дәлиллениўи. Мейли $h(x)=\sum\limits_{x_i<x}\omega(f,x_i)$ ҳәм $\varphi(x)=f(x)-h(x)$, буннан $f(x)=\varphi(x)+h(x)$. Бул жерде $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_i, \ldots$ - $f(x)$ функцияның үзилис ноқатлары $h(x)$ ниң монотон екенлиги айқын, онда $\varphi(x)$-үзликсиз функция екенлигин көрсетиў жеткиликли.

Енди $[a,b]$ кесиндиниң қәлеген x ноқатын ҳәм усы ноқатты $x\in(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ интервал. (1) формула оның шеп тәрепинде турған қосынды барлық үзилис ноқатлар ушын ҳәм орынлы. Соның ушын

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x-\varepsilon)=[f(x+\varepsilon)-h(x+\varepsilon)]-[f(x-\varepsilon)+h(x-\varepsilon)]=$$
$$=f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)-\sum_{x-\varepsilon\le x_i<x+\varepsilon}\omega(f,x_i)\ge 0\,. \tag{2}$$

(1) формуладан

$$0\le h(x+\varepsilon)-h(x-\varepsilon)=\sum_{x-\varepsilon\le x_i<x+\varepsilon}\omega(f,x_i)\le f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon), \tag{3}$$

буннан, x ноқаты $f(x)$ функцияның үзликсизлик ноқаты болса, онда x ноқаты $h(x)$ тиң ҳәм үзликсизлик ноқаты болады, себеби (3) оң тәрепи нолге умтылғанда оның шеп тәрепи ҳәм нолге умтылады. Бирақ сонда $\varphi(x)=f(x)-h(x)$ функциясы x ноқатта үзликсиз болады.

Мейли енди x ноқаты $f(x)$ -функцияның секириўи $\omega(f,x)$ тең болған үзилис ноқаты болсын. (3) теңсизликте $\varepsilon\to 0$ да лимитке өтсек, онда

$$\omega(h,x)\le\omega(f,x). \tag{4}$$

Екинши тәрептен, x ноқаты $x\in(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ да жатыўшы x_i лардың биреўи, сонлықтан

$$\omega(f,x)\le\sum_{x-\varepsilon\le x_i<x+\varepsilon}\omega(f,x)=h(x+\varepsilon)-h(x-\varepsilon),$$

Буннан, $\varepsilon\to 0$ да лимитке өтсек, онда

$$\omega(f,x)\le\omega(h,x). \tag{5}$$

(4) ҳәм (5) ден $\omega(f,x)=\omega(h,x)$. Бирақ онда (2) көре

$$\omega(\varphi,x)=\omega(f,x)-\omega(h,x)=0,$$

яғный $\varphi(x)$ бул ноқатта ҳәм үзликсиз болады.

(1) формуланы $[x',x'']\subset[a,b]$ қолလансақ, онда

$$h(x'')-h(x')\le f(x'')-f(x'),$$

Буннан

$$\varphi(x')=f(x')-h(x')\le f(x'')-h(x'')=\varphi(x''),$$

Бул $\varphi(x)$ диң монотон екенлигин дәлиллейди.

2-лекция

Монотон функцияның туўындысы

Бизге белгили, $f(x)$ функцияның туўындысы

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

бар болыўы ямаса болмаслығы мүмкин, бирақ төмендеги төрт аңлатпаның ҳәр бири анық бир мағанаға ийе болып ол шекли мәниске, ямаса $+\infty$ ге ямаса $-\infty$ ге тең:

$$\overline{\lim_{h\to +0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=D^{+}f(x),$$

$$\underline{\lim_{h\to +0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=D_{+}f(x),$$

$$\overline{\lim_{h\to -0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=D^{-}f(x),$$

$$\underline{\lim_{h\to -0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=D_{-}f(x).$$

$D^{+}f$, $D_{+}f$,$D^{-}f$ ҳәм $D_{-}f$ санлар f тиң x ноқаттағы туўынды санлары деп аталады.

Егер $D^{+}f=D_{+}f$, ($D^{-}f=D_{-}f$) болса, онда $f(x)$ функция оң(сәйкес шеп) туўынды деп аталады ҳәм бул туўынды $f'_{+}(x)$ ($f'_{-}(x)$) менен белгиленеди.

Буннан функцияның туўындыға ийе болыўы ушын жоқарыдағы төрт туўынды санлардың бир-бирине тең болыўы зәрүрли ҳәм жетерли.

Мысаллар. 1). $f(x)=|x|$ функция $x=0$ ноқатта түрли оң ҳәм шеп туўындыларға ийе болады.

Ҳақыйқатында да,

$$D^{+}f=\overline{\lim_{h\to +0}}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h}{h}=1,\qquad D_{+}f=\underline{\lim_{h\to +0}}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h}{h}=1,$$

$$D^{-}f=\overline{\lim_{h\to -0}}\,\frac{|h|-0}{h}=\overline{\lim_{h\to +0}}\,\frac{|-h|-0}{-h}=-\lim_{h\to +0}\frac{h}{h}=-1,$$

$$D_{-}f=\underline{\lim_{h\to -0}}\,\frac{|h|-0}{h}=\underline{\lim_{h\to +0}}\,\frac{|-h|-0}{-h}=-\lim_{h\to +0}\frac{h}{h}=-1.$$

2). $$f(x)=\begin{cases} x\,sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

функция ушын $x=0$ ноқатта:

$$D^{+}f=1,\quad D^{-}f=1,\quad D_{+}f=-1,\quad D_{-}f=-1.$$

Ҳақыйқатында да,

$$D^{+}f=\overline{\lim_{h\to +0}}\,\frac{h\,sin\frac{1}{h}-0}{h}=\overline{\lim_{h\to +0}}\,sin\frac{1}{h}=1,$$

себеби $sin\,x$ функцияның ең үлкен мәниси $+1$ ге тең;

$$D_{+}f=\underline{\lim_{h\to +0}}\,\frac{h\,sin\frac{1}{h}-0}{h}=\underline{\lim_{h\to +0}}\,sin\frac{1}{h}=-1,$$

себеби $sin\,x$ функцияның ең киши мәниси -1ге тең. Тап усындай қылып,

$$D^{-}f=\overline{\lim_{h\to -0}}\,\frac{h\,sin\frac{1}{h}-0}{h}=\overline{\lim_{h\to +0}}\,\frac{(-h)sin\frac{1}{(-h)}-0}{(-h)}=-\underline{\lim_{h\to +0}}\,sin\frac{1}{h}=1,$$

$$D_{-}f=\underline{\lim_{h\to -0}}\,\frac{h\,sin\frac{1}{h}-0}{h}=\underline{\lim_{h\to +0}}\,\frac{(-h)sin\frac{1}{(-h)}-0}{(-h)}=-\overline{\lim_{h\to +0}}\,sin\frac{1}{h}=-1.$$

1-теорема (А.Лебег). $[a,b]$ кесиндиде анықланған қәлеген монотон функция бул кесиндиниң дерлик ҳәр бир ноқатында шекли туўындыға ийе болады.

Дәлиллениўи. Дәслеп теореманы $[-a,a]$ кесиндиде үзликсиз монотон функциялар ушын дәлиллеп, соң усы кесиндиде үзликсиз болмаған монотон функциялар ушын орынлылығы көрсетиледи. Буннан теореманың қәлеген $[a,b]$ кесинди ушын дәлилдениўи $y=\dfrac{b+a}{2}+\dfrac{b-a}{2a}x$ сызықлы алмастырыўы арқалы келип шығады.

Үзликсиз функцияларға байланыслы төмендеги лемманы келтиремиз:

1-лемма (Ф.Рисс). $[-a,a]$ кесиндиде анықланған үзликсиз $\varphi(x)$функция берилген болсын. E көплик $[-a,a]$ кесиндиниң сондай ишки x ноқатлардан ибарат болып, бул ноқатлардың хәр биринен оңда

$x<\xi, \qquad \varphi(x)<\varphi(\xi)$ (1)

қатнасты қанаатландыратуғын ξ ноқат бар болсын. Сонда E ашық көплик болып, оны дүзиўши (a_k,b_k) аралықлардың хәр биринде $\varphi(a_k)\le\varphi(b_k)$ теңсизлик орынлы болады.

Дәлиллениўи. Ҳақыйқатында да, E ашық көплик, себеби $x_0<\xi$ хәм $\varphi(x_0)<\varphi(\xi)$ болса, онда φ диң үзликсизлигине муўапық x_0 диң базы-бир дөгерегинен алынған x тиң хәмме мәнислери ушын хәм $x<\xi$, $\varphi(x)<\varphi(\xi)$ теңсизликлер орынлы болып қалады.

Енди (a_k,b_k) аралық E көпликти дүзиўши аралықлардың бири болсын. Бул дүзиўши аралықтан алынған қәлеген x ноқат ушын $\varphi(x)\le\varphi(b_k)$ теңсизлиги орынлы екенлиги көрсетилсе, онда x ти a_kға умтылдырып, (1) теңсизликти пайда етемиз.

Ҳақыйқатында да, x_1 ноқат x хәм b_k ноқатлар арасында болып(яғный $x<x_1<b_k$),

$$\varphi(x_1)>\varphi(b_k) \qquad (2)$$

Теңсизликти қанаатландыратуғын хәм b_k ға ең жақын ноқат болсын. Сонда $x_1=b_k$ теңликтиң орынлы екенлигин көрсетемиз. Егер бундай болмаса, онда E анықламасына көре сондай $\xi_1<b_k$ ноқат бар болып, оның ушын

$$\varphi(x_1)<\varphi(\xi_1) \qquad (3)$$

теңсизлик орынлы болады; екинши тәрептен,

$$\varphi(\xi_1)\le\varphi(b_k). \qquad (4)$$

Кейинги (2),(3) хәм (4) теңсизликлер қарама-карсылықты келтирип шығарады. Демек, $x_1=b_k$ хәм жоқарыдағы пикирлеўге көре $\varphi(a_k)\le\varphi(b_k)$, яғный лемма дәлилленди.

1-анықлама. (1) шәртти қанаатландырыўшы x ноқатты, қысқалық ушын, оңға көтерилиў ноқаты деп аталады.Шепге көтерилиў ноқаты анықламасы хәм усыған уқсас келтириледи: егер x ноқта ушын

$$\xi<x, \qquad \varphi(x)<\varphi(\xi)$$

шәртлерди қанаатландырыўшы ξ ноқат табылса, онда x шепке көтерилиў ноқаты деп аталады. Жоқарыдағыға уқсас, шепке көтерилиў ноқатлары көплигиниң ашықлығы хәмде бул көпликти дүзиўши (a_k,b_k) аралықларда

$$\varphi(a_k)\ge\varphi(b_k)$$

қатнастың орынлылығы көрсетиледи.

Енди монотон $f(x)$ функцияның $[-a,a]$ кесиндиде үзликсиз деп, теореманың дәлиллениўине өтемиз. Мәселен, $f(x)$ кемимейтуғын болсын. Мына

$$\text{а) } D_+f<+\infty, \qquad \text{б) } D^+f\le D_-f$$

теңсизликлердиң дерлик орынлы деп болжаған ҳалда теореманы дәлиллеймиз.

Ҳақыйқатында да, $f(x)$ кемимейтуғын функция болғанлықтан

$$f^*(x) = -f(-x)$$

функция ҳәм кемимейтуғын болады ҳәмде

$$D^+ f^*(x) = \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h} = \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{-f(-(x+h)) + f(-x)}{h} =$$

$$= \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{f(-x-h)) - f(-x)}{-h} = \overline{\lim_{\tau\to-0}} \frac{f(-x+\tau)) - f(-x)}{\tau} = D_- f(-x),$$

ҳәм

$$D_- f^*(x) = \underline{\lim_{h\to-0}} \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h} = \underline{\lim_{h\to-0}} \frac{-f(-x-h) + f(-x)}{h} =$$

$$= \underline{\lim_{h\to-0}} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h} = \underline{\lim_{\tau\to+0}} \frac{f(-x+\tau) - f(-x)}{\tau} = D_+ f(-x).$$

Енди, б) теңсизликти $f^*(x) = -f(-x)$ функцияға қоллансақ, онда төмендеги теңсизликтиң дерлик орынлы болатуғынлығы келип шығады:

$$D^+ f^*(x) = D^- f(-x) \le D_- f^*(x) = D_+ f(-x),$$

яғный

$$D^- f(-x) \le D_+ f(-x).$$

$D_+ f, D^+ f,\ D^- f$ ҳәм $D_- f$ санлардың анықламасынан мына теңсизликлер тиккелей келип шығады.

Булардан ҳәмде а) ҳәм б) теңсизликлерден

$$D^+ f \le D_- f \le D^- f \le D_+ f < \infty$$

теңсизликлердиң дерлик орынлы болыўы келип шығады: буннан шекли туўындыға ийе болыўы дерлик көринип турыпты.

Теореманы толық дәлиллеў ушын а) ҳәм б) теңсизликлерди дәлиллеў қалды.

а) теңсизликти дәлиллеў ушын

$$E_\infty = \{x : D^+ f(x) = \infty\} \quad \text{ҳәм} \quad E_c = \{x : D^+ f(x) > c\}$$

көпликлерди киритемиз; $E_\infty \subset E_c$ екенлиги айқын. Егер $D^+ f(x) > c$ болса, онда сондай $x < \xi$ ноқат бар болып, оның ушын

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > c.$$

Буннан, егер $g(x) = f(x) - cx$ деп алсақ, онда $g(\xi) > g(x)$. Демек, E_c көплик $g(x)$ функция ушын жоқарыдағы леммада анықланған (a_k, b_k) аралықта жайласқан болады. Усының менен бирге, сол леммаға көре,

$$f(b_k)-cb_k \geq f(a_k)-ca_k\ ,\ \text{ямаса}\ \ c(b_k-a_k)\leq f(b_k)-f(a_k)$$

теңсизликлер орынлы болады. Буннан:

$$c\sum_k (b_k-a_k)\leq \sum_k [f(b_k)-f(a_k)]\leq f(b)-f(a).$$

Бул теңсизликлерден көринип турғанындай, c жетерли дәрежеде үлкен болғанда (a_k, b_k) аралықлардың узынлықларының қосындысы қәлегенше киши қылып алыў мүмкин. Демек, E_∞ көпликтиң өлшеўи нолге тең, яғный а) қатнас дерлик орынлы болады.

б) теңсизлик ҳәм жоқарыдағы пикирлеўлерди избе-из қолланыў нәтийжесинде келтирип шығарамыз. Бул теңсизликке кери болған

$$D^+ f > D_- f$$

теңсизликти қанаатландырыўшы ноқатлар көплиги E^* мына

$$D_- f < c < C < D^+ f$$

теңсизликлерди қанаатландырыўшы ноқатлар көплиги E_{cC} лардың қосындысына тең болады; бунда c ҳәм C санлар, $c<C$ қатнасты қанаатландырған ҳалда, барлық рационал мәнислерди қабыл қылады, яғный

$$E^* = \bigcup_{\substack{c<C, \\ Cc\in Q}} E_{cC}\,. \tag{5}$$

Бул жерде Q - рационал санлар көплиги. Бирақ $\{(c,C):\ c\in Q,\ C\in Q\}$көплиги санақлы болғанлығы ушын (5) қосынды ағзаларының саны санақлы. Демек, егер E_{cC} лар ҳәр бириниң өлшеўи ноль екенлиги көрсетилсе, онда E^* көпликтиң өлшеўи ҳәм ноль екенлиги келип шығады.

Сондай қылып, теореманы дәлиллеў ушын E_{cC} көпликтиң өлшеўи ноль екенлигин көрсетиў жеткиликли.

Мейли $x\in E_{cC}$ болсын. Сонда $D_- f<c$ болғанлығы ушын x дан шепте жатыўшы ҳәмде

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}<c \tag{6}$$

теңсизликти қанаатландырыўшы ξ ноқат бар болады. $\xi - x\leq 0$ болғаны ушын (6) теңсизликтен

$$f(\xi)-c\xi > f(x)-cx$$

теңсизликти пайда етемиз. Сондай қылып, x ноқат $g(x)=f(x)-cx$ функцияның шепке көтерилиў ноқаты. Бул функцияға Ф.Рисс леммасын ҳәм оннан келип шығатуғын салдарды қолласақ, онда шепке көтерилиў ноқатларынан ибарат болған ашық көпликтиң дүзиўши аралықлары ушын

$$f(a_k)-ca_k \geq f(b_k)-cb_k$$

теңсизликти, буннан болса

$$f(b_k)-f(a_k)\leq c(b_k-a_k)$$

теңсизликти пайда етемиз.

Жоқарыдағы алынған x ноқат табылған (a_k, b_k) аралықлардың биринде жатады. Бул ноқатда

$$D^+ f(x) > C$$

Болғаны ушын (a_k, b_k) аралықта

$$x < \xi, \qquad \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > C \tag{8}$$

теңсизликти қанаатландырыўшы ноқатты табыў мүмкин. Кейинги жасаўларымыз (a_k, b_k) аралықлардың ишинде оынланады.

(8) теңсизликлер x ноқаттың $f(x) - Cx$ функция ушын оңға көтерилиў ноқаты екенлигин көрсетеди. Бул функцияның (a_k, b_k) аралықтағы барлық оңға көтерилиў ноқатлар көплиги ашық болып, бул көпликти $\left(a_{k_j}, b_{k_j}\right)$, $j = 1,2,.....$ дүзиўши аралықлардың қосындысына тең болады, соның менен бирге бул аралықлардың шегарасында

$$f\left(a_{k_j}\right) - C a_{k_j} \le f\left(b_{k_j}\right) - C b_{k_j}$$

ямаса

$$f\left(b_{k_j}\right) - f\left(a_{k_j}\right) \ge C\left(b_{k_j} - a_{k_j}\right).$$

Буны j индекс бойынша қосып,

$$\sum_j \left(b_{k_j} - a_{k_j}\right) \le \frac{1}{C} \sum_j \left[f\left(b_{k_j}\right) - f\left(a_{k_j}\right)\right] \le \frac{1}{C}[f(b_k) - f(a_k)].$$

теңсизликлерди пайда етемиз. (7) ден пайдаланып

$$\sum_j \left(b_{k_j} - a_{k_j}\right) \le \frac{c}{C}(b_k - a_k)$$

қатнасқа, k бойынша қосып

$$\sum_k \sum_j \left(b_{k_j} - a_{k_j}\right) \le \frac{c}{C} \sum_j (b_k - a_k) \le \frac{c}{C}(a + a) = \frac{2ac}{C} \tag{9}$$

қатнасқа ийе боламыз. Көринип турғанындай, $\left(a_{k_j}, b_{k_j}\right)$ аралықлар системасы, (a_k, b_k) аралықлар системасы сыяқлы, E_{cC} көпликти қаплайды, бирақ $\left(a_{k_j}, b_{k_j}\right)$аралықлардың узынлықларының қосындысы (a_k, b_k) лар узынлықларының қосындысынан киши.

E_{cC} көпликтиң ҳәр бир x ноқаты ушын $\left(a_{k_j}, b_{k_j}\right)$ аралықлардың ишинде жоқарыдағы жасаўларды тәкирарлаў мүмкин. Нәтийжеде жаңа үшинши түрли $\left(a_{k_{j_m}}, b_{k_{j_m}}\right)$, $m = 1,2,......$ системаны ҳәм төртинши түрли $\left(a_{k_{j_{m_n}}}, b_{k_{j_{m_n}}}\right)$, $m, n = 1,2,.....$ системаны келтирип шығарамыз ҳәм булар ушын:

$$\sum_{m}\sum_{n}\left(b_{k_{j_{m_n}}}-a_{k_{j_{m_n}}}\right)\le\frac{c}{C}\sum_{m}\left(b_{k_{j_m}}-a_{k_{j_m}}\right)\le\frac{c}{C}\left(b_{k_j}-a_{k_j}\right).$$

Бул аңлатпа k ҳәм j бойынша қосып ҳәм (9) дан пайдаланып

$$\sum_{k}\sum_{j}\sum_{m}\sum_{n}\left(b_{k_{j_{m_n}}}-a_{k_{j_{m_n}}}\right)\le\left(\frac{c}{C}\right)^2\sum_{k}\left(b_k-a_k\right)\le\left(\frac{c}{C}\right)^2(a+a)=\left(\frac{c}{C}\right)^2\cdot 2a$$

теңсизликлерди жаза аламыз.

Бул аңлатпа көрсетеди, төртинши қәдемде де алынған $\left(a_{k_{j_{m_n}}},\ b_{k_{j_{m_n}}}\right)$ аралықлардың (E_{cC} көпликти қаплаған халда) узынлықлары қосындысы дәслепки қәдемдеги алынқан аралықлардың узынлықларынан киши. Егер жоқырағы жасаўларды даўам еттирсек, онда p-қәдемдеги аралықлар системасы ҳәм E_{cC} көпликти қаплайды ҳәм бул системадағы аралықлардың узынлықларының қосындысы $\left(\frac{c}{C}\right)^p\cdot 2a$ дан үлкен болмайды ҳәм демек, p-жетерли дәрежеде үлкен болғанда, оны қәлеген саннан киши қылыныўы мүмкин. Буннан E_{cC} көпликтиң өлшеўи нолге теңлиги келип шығады.

Усының менен теорема үзликсиз монотон функциялар ушын дәлилленди. Бул теореманы үзилиске ийе болған монотон функциялар ушын ҳәм орынлы болады.

2-теорема (Фубини). $[a,b]$ кесиндиде

$$S(x)=f_1(x)+f_2(x)+......$$

қатар берилген болып, оның ағзалары кемеймейтуғын (өсип бармайтуғын) функциялар болсын. Сонда бул қатарды дерлик ҳәр бир ноқатында ағзама ағза дифференциаллаў мүмкин, яғный дерлик ҳәр бир ноқатта:

$$S'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+......$$

ӨЗГЕРИЎИ ШЕГАРАЛАНҒАН ФУНКЦИЯЛАР

3-лекция

Өзгериўи шегараланған функциялар

Әҳмийетли ҳәм көпшилик қолланыўларға ийе болған функциялар арасында өзгериўи шегараланған функциялар класы әҳмийетли орынды туталды.

Анықлама. $[a,b]$ *кесиндиде анықланған* $\Phi(x)$ *функция берилген болсын. Егер* $[a,b]$ *кесиндини*

$$a = a_0 < a_1 < ..... < a_n = b$$

ноқатлар менен қәлеген n бөлекке бөлгенимизде $a_i\left(i = 1,2,.....,n\right)$ *ноқатларды таңлап алыўға байланыслы болмаған ҳәм төмендеги*

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\Phi(a_i) - \Phi(a_{i-1})\right| < K \qquad (1)$$

теңсизликти қанаатландыратуғын K турақлы саны бар болса, онда $\Phi(x)$ *функция* $[a,b]$ *кесиндиде өзгериўи шегараланған деп аталады.*

Ҳәр қандай өзгериўи шегараланған функция шегараланған функция болады. Ҳақыйқатында да, $\Phi(x)$ өзгериўи шегараланған болғанлығы себепли қәлеген $\forall x \in [a,b]$ ушын

$$\left|\Phi(x) - \Phi(a)\right| < K .$$

Буннан ҳәм

$$\left|\Phi(x)\right| \le \left|\Phi(x) - \Phi(a)\right| + \left|\Phi(a)\right| \le K + \left|\Phi(a)\right|$$

теңсизликтен $\Phi(x)$ функцияның шегараланғанлығы келип шығады.

Әдетте (1) теңсизликтиң шеп тәрепиндеги қосындының анық жоқарғы шегарасын ($[a,b]$кесиндини бөлеклерге түрли қылып бөлиўлер көплигине қарата) $V_a^b(\Phi)$ пенен белгиленеди ҳәм бул санды $\Phi(x)$ функцияның $[a,b]$ кесиндидеги толық өзгериўи деп аталады.

Мысаллар. 1) $[a,b]$ кесиндиде анықланған ҳәм монотон өсиўши $\Phi(x)$ функция шегараланған өзгериске ийе болады, себеби оның ушын (1) көринистеги ҳәр қандай қосынды $\Phi(b) - \Phi(a)$ ге тең.

Усыған уқсас, $[a,b]$ кесиндиде анықланған ҳәм монотон кемиўши $\Phi(x)$ функция ҳәм шегараланған өзгериске ийе болады.

2) Егер базы-бир оң ҳәм турақлы A саны ҳәм қәлеген $\forall x, y \in [a,b]$ ноқатлар ушын $\left|f(x) - f(y)\right| \le A\left|x - y\right|$ теңсизлик орынлы болса, онда $f(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде Липшиц шәртин қанаатландырады деп аталады. $[a,b]$ кесиндиде шегараланған ҳәм Липшиц шәртин қанаатландырыўшы $f(x)$

функцияның өзгериўи шегараланған болады. Ҳақыйқатында да, Липшиц шәртине муўапық:

$$|f(a_{k+1})-f(a_k)|\leq A|a_{k+1}-a_k|,$$

буннан: $V_a^b(f)\leq A|b-a|$, яғный f тиң өзгериўи шегаралаған.

Енди өзгериўи шегараланған функциялардың дүзилиси ҳәм айырым қәсийетлерин келтирип өтемиз.

1-Теорема. $[a,b]$ *кесиндиде өзгериўи шегараланған еки* $\varPhi_1(x)$ *ҳәм* $\varPhi_2(x)$ *функцияның қосындысы ҳәм айырмасы ҳәм өзгериўи шегараланған функциялар болады.*

Дәлиллениўи. Ҳақыйқатында да, $[a,b]$ кесиндини қәлеген n бөлекке бөлип,

$$\sum_{i=1}^{n}|\varPhi(a_i)-\varPhi(a_{i-1})|\leq\sum_{i=1}^{n}|\varPhi_1(a_i)-\varPhi_1(a_{i-1})|+\sum_{i=1}^{n}|\varPhi_2(a_i)-\varPhi_2(a_{i-1})|$$

теңсизликлерди жазыўымыз мүмкин; бул жерде: $\varPhi(x)=\varPhi_1(x)+\varPhi_2(x)$. Буннан $V_a^b(\varPhi)\leq V_a^b(\varPhi_1)+V_a^b(\varPhi_2)$, яғный $\varPhi(x)$ функцияның өзгериўи шегараланғанлығы тиккелей келип шығады.

Айырма ушын ҳәм теорема уқсас дәлилленеди.

Енди $\varPhi_1(x)$ ҳәм $\varPhi_2(x)$ функциялардың көбеймесин аламыз:

$$\varPhi(x)=\varPhi_1(x)\cdot\varPhi_2(x).$$

$p=\sup\limits_{a\leq x\leq b}|\varPhi_1(x)|,\quad q=\sup\limits_{a\leq x\leq b}|\varPhi_2(x)|$ болсын. $\varPhi_1(x)$ ҳәм $\varPhi_2(x)$ функциялар өзгериўи шегараланған болғанлығы себепли шегараланған болады. Соның ушын p ҳәм q санлар шекли болады. Бул жағдайда:

$$|\varPhi(a_{k+1})-\varPhi(a_k)|\leq|\varPhi_1(a_{k+1})\varPhi_2(a_{k+1})-\varPhi_1(a_k)\varPhi_2(a_{k+1})|+$$
$$+|\varPhi_1(a_k)\varPhi_2(a_{k+1})-\varPhi_1(a_k)\varPhi_2(a_k)|\leq q|\varPhi_1(a_{k+1})-\varPhi_1(a_k)|+p|\varPhi_2(a_{k+1})-\varPhi_2(a_k)|.$$

Буннан

$$V_a^b(\varPhi)\leq qV_a^b(\varPhi_1)+pV_a^b(\varPhi_2).$$

яғный $\varPhi_1\cdot\varPhi_2$ функцияның өзгериўи шегараланған.

2-Теорема. *Егер $a < c < b$ болса, онда*

$$V_a^b(\Phi) = V_a^c(\Phi) + V_c^b(\Phi). \tag{2}$$

Дәлиллениўи. Егер c ноқат бөлиў ноқатларының бирине тең деп есаплаймыз мәселен, $c = a_m$ болса, онда

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left|\Phi(a_{i+1}) - \Phi(a_i)\right| = \sum_{i=0}^{m-1} \left|\Phi(a_{i+1}) - \Phi(a_i)\right| + \sum_{i=m}^{n-1} \left|\Phi(a_{i+1}) - \Phi(a_i)\right| \tag{3}$$

теңлик орынлы болады. $[a,b]$ кесиндини қәлеген қылып майда бөлеклерге бөлиў есабына бул теңликтиң оң тәрепиндеги қосындыны $V_a^c(\Phi) + V_c^b(\Phi)$ санға қәлегенше жақын қылып алыў мүмкин. Соның ушын

$$V_a^b(\Phi) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} \left|\Phi(a_{i+1}) - \Phi(a_i)\right| \geq V_a^c(\Phi) + V_c^b(\Phi) \tag{4}$$

қатнасларды жазыўымыз мүмкин.

Екинши тәрептен, қәлеген бөлеклерге бөлинген $[a,b]$ кесиндини алып, қосымша c бөлиў ноқаты киритилсе, онда (1) теңсизликтиң шеп тәрепи тек артыўы мүмкин. Соның ушын c бөлиў ноқатыма ямаса бөлиў ноқаты емеспе парыққы болмайды. (3)ге көре теңсизлик орынлы:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left|\Phi(a_{i+1}) - \Phi(a_i)\right| \leq V_a^c(\Phi) + V_c^b(\Phi).$$

Бул теңсизлик шеп тәрепиниң жоқары шегарасы алынса, онда

$$V_a^b(\Phi) \leq V_a^c(\Phi) + V_c^b(\Phi) \tag{5}$$

теңсизлик келип шығады.

(4) ҳәм (5) қатнаслардан (2) теңлик келип шығады.

3-Теорема. $[a,b]$ *кесиндиде өзгериўи шегараланған ҳәр қандай* $\Phi(x)$ *функция еки монотон өсиўши функцияның айырмасы сыпатында жазылыўы мүмкин.*

Дәлиллениўи. $F(x) = V_a^x(\Phi)$, $G(x) = V_a^x(\Phi) - \Phi(x)$ функцияларды киритип, олардың ҳәр бириниң монотон өсиўшилиги көрсетилсе, онда теорема дәлилленген болады.

2-теоремаға көре, егер $y \geq x$ болса, онда

$$V_a^y(\Phi) - V_a^x(\Phi) = V_x^y(\Phi) \geq 0,$$

яғный $F(x)$-монотон өсиўши функция. $G(x)$ функция ҳәм монотон өсиўши. Ҳақыйқатында да, $y \geq x$ болсын. Сонда:

$$G(y) - G(x) = V_a^y(\Phi) - V_a^x(\Phi) - \Phi(y) + \Phi(x) = V_x^y(\Phi) - [\Phi(y) - \Phi(x)] \geq 0,$$

себеби

$$V_x^y(\Phi) \geq [\Phi(y) - \Phi(x)].$$

Соңғы теореманың әҳмийети соннан ибарат, бунық жәрдеми менен өзгериўи шегараланған функциялардың базы-бир қәсийетлерин монотон өсиўши функциялардың қәсийетинен келтирип шығарыў мүмкин ҳәм керисинше. Мәселен, өзгериўи шегараланған $\Phi(x)$ функция базы-бир ноқатта оңнан үзликсиз болса, онда $F(x)$ ҳәм $G(x)$ функциялар ҳәм оңнан үзликсиз болады. Мәселен, бул тастыйықлаўды $F(x)$ функция ушын дәлиллеймиз.

$\Phi(x)$ функцияның x_0 ноқатта оңнан үзликсизлигинен пайдаланып, қәлеген берилген $\forall\varepsilon > 0$ ушын сондай $\exists\delta > 0$ санды табамыз, егер $x_1 - x_0 < \delta$ ҳәм $x_1 > x_0$ болса, онда

$$|\Phi(x_1) - \Phi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

теңсизликти жазыўымыз мүмкин.

Енди $[x_0, b]$ кесиндини n дана $x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_n = b$ бөлекке бөлемиз, олар ушын төмендеги теңсизлик орынлы болсын:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| > V_{x_0}^b(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

x_1 ноқатты алыўда $x_1 < x_0 + \delta$ теңсизликке дыққат аўдарамыз керек. Сонда (6)ға көре:

$$V_{x_0}^c(\Phi) < \sum_{k=0}^{n-1} |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=0}^{n-1} |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| + \varepsilon < V_{x_1}^c(\Phi) + \varepsilon$$

ямаса 2-теоремаға көре

$$V_{x_0}^{x_1}(\Phi) = V_{x_0}^b(\Phi) - V_{x_1}^b(\Phi) < \varepsilon,$$

буннан $F(x)=V_a^x(\Phi)$ функцияның $x=x_0$ ноқатта оңнан үзликсизлиги тиккелей келип шығады.

4-нәтийже. *Егер өзгериўи шегараланған $\Phi(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде үзликсиз болса, онда $F(x)$ ҳәм $G(x)$ функциялар ҳәм усы кесиндиде үзликсиз болады.*

5-нәтийже. *Базы-бир функцияның $[a,b]$ кесиндиде өзгериўи шегараланған болыўы ушын оның еки монотон өсиўши функцияның айырмасы сыпатында жазыў мүмкинлиги зәрүрли ҳәм жетерли.*

6-нәтийже (Лебег). *Өзгериўи шегараланған ҳәр қандай функция дерлик ҳәр бир ноқатта шекли туўындыға ийе болады.*

Биз алдыңғы темаларымызда шептен ҳәм оңнан үзликсиз болған секириў функциясын киритken едик. Енди бул параграфта секириў функциясын төмендегише улыўмаластырамыз: $x_0, x_1, ...,x_n,....$ ноқатлар $[a,b]$ кесиндиден алынған саны шекли ямаса санақлы ноқатлар болсын деп болжаймыз. Ҳәр бир x_k, $k=1,2,.....$ ноқатқа еки q_k ҳәм h_k санларды сәйкес қоямыз ҳәм олар ушын мына

$$\sum_k \left(|q_k|+|h_k|\right)<+\infty$$

қатнастың орынлы болыўын талап етемиз: буннан тысқары, $x_k=a$ болғанда $q_k=0$ ҳәм $x_k=b$ болғанда есе $h_k=0$ болсын. Төмендеги теңлик пенен анықланған

$$H(x)=\sum_{x_k\le x} q_k+\sum_{x_k<x} h_k$$

функция секириў функциясы деп аталады. Бул функция ушын $V_a^b(H)=\sum_k \left(|q_k|+|h_k|\right)$ екенлигин тиккелей тексерип көриў мүмкин. $H(x)$ функцияның үзилиў ноқатлары $x_1, x_2,.....,x_n,....$ лардан ибарат болып, ҳәр бир k натурал сан ушын q_k ҳәм h_k санлардан биреўи нолден парықлы болса, онда оның x_k ноқаттағы секириўи төмендегиге тең:

$$H(x_k)-H(x_{k-0})=q_k, \quad H(x_{k+0})-H(x_k)=h_k.$$

7-теорема. $[a,b]$ *кесиндиде анықланған ҳәр қандай өзгериўи шегараланған* $f(x)$ *функция бирден-бир усыл менен* $\varphi(x)$ *үзliксиз функция ҳәм* $H(x)$ *секириў функцияларының қосындысы сыпатында аңлатыў мүмкин.*

Бул теореманың дәлиллениўи 4-теореманың дәлиллениўинен дерлик парық етпегенликтен оның дәлилдениўине тоқтап отырмаймыз.

Енди үзликсиз, бирақ өзгериси шегараланбаған функцияға мысал келтиремиз.

$$\Phi(x)=x\cos\frac{\pi}{x}, \quad (x\neq 0),$$
$$\Phi(0)=0.$$

Бул функция $x=0$ ноқаттың дөгерегинде саны шексиз максимум ҳәм минимум ноқатларға ийе болады. Төмендеги кестени дүземиз:

$$x=1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},......,\ \frac{1}{n},....,$$

$$\Phi(x)=-1,\ +\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},.......,(-1)^n\frac{1}{n},.....$$

Буннан көринип турыпты:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\Phi\left(\frac{1}{k}\right)-\Phi\left(\frac{1}{k+1}\right)\right|=\frac{3}{2}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+.......+\frac{2n+1}{n(n+1)}>1+\frac{1}{2}+.......+\frac{1}{n},$$

яғный $\Phi(x)$ функцияның $[0,1]$ кесиндидеги өзгериўи

$$V_0^1(\Phi)=+\infty.$$

8-теорема. *Егер* $[a,b]$ *кесиндиде анықланған ҳәм өзгериси шегараланған* $\Phi(x)$ *функция базы-бир* $x_0\in[a,b]$ *ноқатта үзликсиз болса, онда бул ноқатта* $\varphi(x)=V_a^x(\Phi)$ *функция ҳәм үзликсиз болады.*

9-теорема. $[a,b]$ *кесиндиде анықланған функциялардан ибарат* $P=\{\Phi\}$ *шексиз көплик берилген болып, бул функциялар көплиги базы-бир турақлы* M *саны менен шегараланған, яғный*

$$|\Phi(x)|\leq M \quad (x=[a,b];\ \Phi\in P) \tag{8}$$

болса, онда қәлеген санақлы $E \subset [a,b]$ *көплик ушын* P *көпликтен сондай* $\{\varPhi_n\}$ *функциялар избе-излигин ажыратып алыў мүмкин, бул избе-излик* E *көпликтиң ҳәр бир ноқатында жыйнақлы болады.*

10-теорема. $[a,b]$ *кесиндиде анықланған өсиўши функциялардан ибарат шексиз* $P = \{\varPhi\}$ *көплик берилген болып, бул функциялар көплиги базы-бир турақлы* M *саны менен шегараланған, яғный*

$$|\varPhi(x)| \leq M \quad (x = [a,b]; \varPhi \in P)$$

болса, онда P *көпликтен* $[a,b]$ *кесиндиниң ҳәр бир ноқатында базы-бир өсиўши* $\varphi(x)$ *функцияға жыйнақлы избе-излити ажыратып алыў мүмкин.*

11-теорема (Хелли). $[a,b]$ *кесиндиде анықланған функциялардан ибарат шексиз көплик* $H = \{\varPhi(x)\}$ *берилген болып, бул функциялар көплиги ҳәм олардың* $[a,b]$ *кесиндидеги толық өзгериси базы-бир* M *турақлысы менен шегараланған, яғный*

$$|\varPhi(x)| \leq M, \;\; V_a^b(\varPhi) \leq M \quad (x = [a,b]; \varPhi \in H)$$

болса, онда H *көпликтен* $[a,b]$ *кесиндиниң ҳәр бир ноқатында базы-бир өзгериси шегараланған* $\varPhi(x)$ *функцияға жыйнақлы избе-изликти ажыратып алыў мүмкин.*

Дәлиллениўи. H көпликтиң қәлеген $\varPhi$ элементи ушын төмендеги қатнасларды жазыўымыз мүмкин:

$$|F(x)| = \left|V_a^x(\varPhi)\right| \leq M; \quad |F(x) - \varPhi(x)| \leq 2M$$

$\{F(x)\}$системаға 10-теореманы толық қолланып, оннан базы-бир $f(x)$ функцияға жыйнақлы $\{F_n(x)\}$ функциялар избе-излигин ажыратып аламыз, яғный

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = f(x).$$

Ҳәр бир $F_n(x)$ функцияға жыйнақлы $G_n(x) = F_n(x) - \varPhi_n(x)$ функцияны сәйкес қойып $\{G_n(x)\}$ функциялар избе-излигине ҳәм 10-теореманы қолланамыз.

Нәтийжеде $[a,b]$ кесиндиде базы-бир $\varphi(x)$ функцияға жыйнақлы $\{G_{n_k}(x)\}$ функциялар избе-излиги келип шығады, яғный

$$\lim_{n\to\infty} G_{n_k}(x)=\varphi(x).$$

Нәтийжеде $\{F_{n_k}(x)-G_{n_k}(x)\}$функциялар избе-излиги H көпликтен ажыратып алынған болып, ол $\psi(x)=f(x)-\varphi(x)$ функцияға $[a,b]$ кесиндиде жыйнақлы болады.

ЛЕБЕГТИҢ АНЫҚ ЕМЕС ИНТЕГРАЛЫ. АБСОЛЮТ ҮЗЛИКСИЗ ФУНКЦИЯЛАР

5,6-лекциялар

Лебегтиң анық емес интегралы

Мейли $[a,b]$ кесиндиде жәмлениўши $f(x)$ функция берилген болсын. Лебег интегралының қәсийетине көре бул функция $[a,b]$ кесиндиниң хәр қандай өлшеўли үлес көпликлеринде ҳәм жәмлениўши болады. Дара жағдайда, $f(x)$ функцияны алып, $[a,b]$ аралықтың хәр қандай $[a,x]$ бөлегинде

$$\int_a^x f(t)dt$$

болады, Лебег интегралын қарасақ, онда оның мәниси x қа ғәрезли болады. Бул интеграл Лебегтиң анық емес интегралы деп аталады. Биз оны $L(x)$ арқалы белгилеймиз. Лебегтиң анық емес интегралы жүдә әҳмийетли функциялар класын тексериўге алып келеди.

Математикалық анализдиң улыўма курсынан мәлим, $[a,b]$ кесиндиде анықланған үзликсиз $f(x)$ функция ҳәм оның Риман мағанасындағы анық емес интегралы

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+F(a)$$

ушын $[a,b]$ кесиндиниң хәр бир ноқатында

$$F'(x)=f(x) \tag{1}$$

қатнас ҳәмде $[a,b]$ кесиндиниң ҳәр бир ноқатында үзликсиз туўындыға ийе болған $\varphi(x)$ функция ушын

$$\varphi(x)=\varphi(a)+\int\limits_a^x \varphi'(t)dt \tag{2}$$

Ньютон-Лейбниц формуласы орынлы болады.

Усыған уқсас айтым Лебег интегралы ушын ҳәм орынлы болады ма, яғный $f(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде жәмлениўши болса, онда (1) ҳәм (2) теңликлер сақланады ма? Төменде усы сораўға жуўап беремиз.

Дәслеп төмендеги теореманы дәлиллеймиз.

1-теорема. Егер $f(x)$ жәмлениўши функция болса, онда оның Лебег мағанасындағы анық емес интегралы

$$L(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$$

өзгериўи шегараланған функция болады.

Дәлилилениўи. $f(x)$ функцияның $[a,b]$ кесиндиде жәмлениўшилигинен усы аралықта $L(x)$ функцияның бар болыўы келип шығады. Егер $[a,b]$ кесиндиде $f(x)\geq 0$ болса, онда $L(x)$ монотон болып, оның өзгериси (вариациясы) шегараланған болады. Улыўма жағдайда $f(x)$ функцияны еки терис болмаған $f^+(x)=\dfrac{|f(x)|+f(x)}{2}$ ҳәм $f^-(x)=\dfrac{|f(x)|-f(x)}{2}$ функциялардың айырмасы сыпатында, яғный

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x) \tag{3}$$

көринисте жазыў мүмкин екенлиги келип шығады.

2-теорема (Лебег). Жәмлениўши $f(x)$ функцияның анық емес Лебег интегралы $L(x)$ дерлик ҳәр бир ноқатында мәниси $f(x)$ ге тең туўындыға ийе болады.

Дәлиллениўи. 1-теоремаға көре $L(x)$ функция өзгериси шегараланған функция болып табылады. $L(x)$ функция дерлик ҳәр бир ноқатта шекли туўындыға ийе болады. Енди (1) теңликтиң дерлик ҳәр бир ноқатында орынлы екенлигин $f(x)$ функция терис болмаған жағдай ушын көрсетиў жеткиликли, себеби улыўма жағдай (3) теңлик жәрдеминде усы ҳалға келтириледи. $f(x)$ терис болмағаны ушын оған монотон өсип жыйнақлы болатуғын бағаналы $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар избе-излиги бар болады. Бағаналы, $\varphi_n(x)$ функцияның анық емес Лебег интегралы $L_n(x)$ге дерлик ҳәр бир шекли $L'_n(x)$ туўындықа ийе ҳәм $L'_n(x)=\varphi_n(x)$ теңлик орынлы болады.

37.1-теоремаға көре

$$L(x)=\lim_{n\to\infty} L_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[L_1(x)+\sum_{k=1}^{n}\left[L_{k+1}(x)-L_k(x)\right]\right]=$$

$$=L_1(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[L_{k+1}(x)-L_k(x)\right].$$

болып, буннан 46.6-теоремаға муўапық дерлик ҳәр бир ноқатта

$$L'(x)=L'_1(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[L'_{k+1}(x)-L'_k(x)\right]=\varphi_1(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)\right]=f(x).$$

теңликке ийе боламыз.

3-теорема. $[a,b]$ кесиндиде анықланған $f(x)$ функцияның анық емес Лебег интегралы $L(x)$ шегараланған толық өзгериске ийе ҳәм

$$V_a^b(L)=\int_a^b |f(x)|dx.$$

Анықлама. $[a,b]$ кесиндиде базы-бир өлшеўли $f(x)$ функция анықланған болсын. Егер $x\in[a,b]$ ноқатта

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt=0$$

қатнас орынлы болса, онда бул ноқат $f(x)$ функцияның Лебег ноқаты деп аталады.

4-теорема. Егер $x \in [a,b]$ ноқат $f(x)$ функцияның Лебег ноқаты болса, онда бул ноқатта Лебег анық емес интегралының

$$L(x) = \int_a^x f(t)dt$$

туўындысы $f(x)$ ге тең болады.

5-теорема. Егер $f(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде жәмлениўши болса, онда $[a,b]$ кесиндиниң дерлик ҳәр бир ноқаты $f(x)$ функцияның Лебег ноқаты болады.

Нәтийже. Егер $f(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде жәмлениўши болып,

$$L(x) = \int_a^x f(t)dt$$

болса, онда $[a,b]$ кесиндиниң дерлик ҳәр бир ноқатында $L'(x) = f(x)$.

6-теорема. Жәмлениўши $f(x)$ функцияның ҳәр бир үзликсизлик ноқаты оның Лебег ноқаты болады.

Абсолют үзликсиз функциялар

Енди абсолют үзликсиз функциялар класы менен танысамыз. Бул функциялар классы өзгериўи шегараланған функциялар класынан кеңирек болып, интегралланыўшы функциялардың анық емес интегралы менен тығыз байланысқан.

1-анықлама. $[a,b]$ кесиндиде анықланған $f(x)$ функция берилген болсын. Егер қәлеген $\forall \varepsilon > 0$ ушын сондай $\exists \delta > 0$ саны бар болып, саны шекли ҳәм өз-ара кесилиспейтуғын ҳәр қандай

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots\ldots, [a_n, b_n] \qquad (1)$$

кесиндилер системасы ушын

$$\bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k] \subset [a,b], \qquad \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \qquad (2)$$

шәртлер орынлы болғанда

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k)-f(a_k)| < \varepsilon$$

теңсизлик орынлы болса, онда $f(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде абсолют үзликсиз деп аталады.

Анықламаға көре хәр қандай абсолют үзликсиз функция әпиўайы мағанада ҳәм үзликсиз: буны көрсетиў ушын жоқарыдағы анықламада $n=1$ қылып алыў жеткиликли.

Абсолют үзликсиз функцияға мысал сыпатында Липшиц шәртин, яғный

$$|f(x_2)-f(x_1)| \le M|x_2-x_1|$$

теңсизликти қанаатландырыўшы функцияны алыўымыз мүмкин.

Ҳақыйқатында да, егер (1) кесиндилер системасы ушын (2) шәртлер орынлы болса, онда

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k)-f(a_k)| \le M\sum_{k=1}^{n} |b_k-a_k| < M\delta$$

болып, δ санын $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$ деп таңласақ, онда

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k)-f(a_k)| < \varepsilon$$

болады.

1-теорема. Егер $f(x)$ ҳәм $\varphi(x)$ функциялар абсолют үзликсиз болса, онда олардың қосындысы, айырмасы, көбеймеси ҳәм абсолют үзликсиз функциялар болады. Буннан тысқары, егер берилген кесиндиде $\varphi(x)$ нолге тең болмаса, онда $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ҳәм усы кесиндиде абсолют үзликсиз болады.

2-теорема. $[a,b]$ кесиндидеги абсолют үзликсиз функцияның бул кесиндиде өзгериўи шегараланған болады.

Дәлиллениўи. Мейли $f(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде абсолют үзликсиз болсын. Сонда $f(x)$ функция ушын $\varepsilon=1$ ге сәйкес δ саны бар болып, оның узынлықларының қосындысы δ дан киши болған өз-ара кесилиспейтуғын ҳәм саны шекли (n) интераллардың

$$(a_1,b_1),(a_2,b_2),......,(a_n,b_n), \qquad \sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$$

системасы ушын

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<1$$

теңсизлик орынлы болады.

Бул δ саны бойынша сондай m натурал саны табылып, $[a,b]$ кесиндиниң ҳәр бириниң узынлығы δ дан киши болған m дана бөлекке бөлиў мүмкин, яғный

$$a=c_0<c_1<c_2<.....<c_m=b$$

ҳәм

$$c_{k+1}-c_k<\delta \quad (k=0,1,2,....,m-1).$$

Соң, $[c_k,c_{k+1}]$ кесинди өз-ара кесилиспейтуғын ҳәм саны шекли қандай бөлеклерге бөлинбесин, төмендеги теңсизлик орынлы болады:

$$V_{c_k}^{c_{k+1}}(f)\le 1 \quad \text{ҳәм демек} \quad V_a^b(f)\le m,$$

яғный $f(x)$ диң өзгериси (вариациясы) шегараланған болады.

Бул теоремадан үзликсиз, бирақ өзгериси шегараланбаған функция абсолют үзликсиз емес болатуғынлығы келип шығады.

3-теорема. Ҳәр қандай $F(x)$ абсолют үзликсиз функцияны еки өсиўши абсолют үзликсиз функцияның айырмасы тәризинде аңлатыў мүмкин:

$$F(x)=V(x)-G(x), \qquad V(x)=V_a^x(F).$$

Дәлиллениўи. Теореманы дәлиллеў ушын 49.2 ҳәм 47.2-теоремаларға муўапық $V(x)$ ҳәм $G(x)$ функциялардың абсолют үзликсизлигин дәлиллеў жеткиликли. Егер $V(x)$ диң абсолют үзликсизлигин көрсетсек, онда 49.1-

теоремаға көре, $G(x)=V(x)-F(x)$ абсолют үзликсиз болады. $V(x)$ ниң абсолют үзликсиз екенлигин дәлиллеймиз.

Қәлеген $\forall\varepsilon>0$ алып, $F(x)$ тиң абсолют үзликсизлик шәртинен $\exists\delta>0$ ны табамыз. Узынлықларының қосындысы δ дан киши болған $(a_1,b_1),(a_2,b_2),......,(a_n,b_n)$ аралықларды алып

$$\sum_{k=1}^{n}\{V(b_k)-V(a_k)\}=\sum_{k=1}^{n}V_{a_k}^{b_k}[F] \tag{3}$$

қосындыны көремиз. Бул қосынды

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n_{k-1}}\left|F(x_{k_{j+1}})-F(x_{k_j})\right| \tag{4}$$

қосындылардың жоқары шегарасына тең, бул жерде $a_k=x_{k_0}<x_{k_1}<x_{k_2}<.....<x_{k_n}=b_k$ болса (a_k,b_k) аралықлардың қәлеген бөлинмеси. Буннан,

$$b_k-a_k=\sum_{j=0}^{n_{k-1}}(x_{k_{j+1}}-x_{k_j}).$$

Барлық (a_k,b_k) аралықлардың узынлықларының қосындысы δ дан киши болғаны себепли $F(x)$ тиң абсолют үзликсизлигине көре (3) аңлатпа (4) аңлатпалардың жоқары шегарасы болғаны ушын ҳәр бир (4) аңлатпа ….дан үлкен емес. Бул жағдайда (3) аңлатпа ҳәм ε нан үлкен болмайды, бул $V(x)$ ның абсолют үзликсизлигин көрсетеди.

4-теорема. $[a,b]$ кесиндиде абсолют үзликсиз функция берилген болып, оның мәнислери $[A,B]$ кесиндиде жайласқан болсын. Егер $[A,B]$ кесиндиде берилген $\psi(x)$ функция Липшиц шәртин қанаатландырса, онда қурамалы $\psi(f(x))$ функция ҳәм абсолют үзликсиз болады.

5-теорема. Егер $[a,b]$ кесиндиде анықланған абсолют үзликсиз $f(x)$ функцияның туўындысы $f'(x)$ дерлик ҳәр бир ноқатта нолге тең болса, онда $f(x)$ турақлы санға тең болады.

Нәтийже. Егер еки абсолют үзликсиз $f(x)$ ҳәм $g(x)$ функциялардың туўындылары $f'(x)$ ҳәм $g'(x)$ өз-ара эквивалент(яғный дерлик тең) болса, онда бул функцияның айырмасы турақлы санға тең болады.

6-теорема. Лебегтиң анық емес интегралы $F(x)$ абсолют үзликсиз функция болады.

Дәлиллениўи. 38.9-теоремаға муўапық ҳәр қандай $\forall\varepsilon > 0$ ушын сондай $\exists\delta > 0$ саны табылып, егер e көпликтиң өлшеўли δ дан киши, яғный $\mu(e) < \delta$ болса, онда

$$\left|\int_e f(t)dt\right| < \varepsilon$$

Дара жағдайда, яғный өз-ара кесилиспейтуғын саны шекли $\{(a_k, b_k)\}$, $(k = \overline{1,n})$ аралықлар системасы узынлықларының қосындысы δ дан киши болса, онда

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k} f(t)dt\right| < \varepsilon .$$

Бирақ

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)dt = F(b_k) - F(a_k)$$

булардан:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{F(b_k) - F(a_k)\}\right| < \varepsilon,$$

яғный $F(x)$ абсолют үзликсиз.

7-теорема (А. Лебег). $[a,b]$ кесиндиде анықланған абсолют үзликсиз үзликсиз $F(x)$ функцияның туўындысы $F'(x) = \varphi(x)$ жәмлениўши ҳәм ҳәр бир x ушын

$$\int_a^x \varphi(t)dt = F(x) - F(a). \tag{9}$$

Дәлиллениўи. 49.3-теоремаға муўапық абсолют үзликсиз функцияны еки кемимейтуғын абсолют үзликсиз функциянының айырмасы көринисинде аңлатыў мүмкин; соның ушын теореманы кемимейтуқын абсолют үзликсиз функциялар ушын дәлиллеў жеткиликли.

49.2-теоремаға көре $F(x)$ функцияның өзгериси шагараланған. 47.6-нәтийжеге көре $F(x)$ функцияның туўындысы дерлик ҳәр бир ноқатта бар болады; оны $\varphi(x)$ менен билгилеймиз.

$F(x)$ тиң туўындысы

$$\varPhi_h(x)=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

қатнастың лимитине тең. $F(x)$ кемимейтуғын болғаны ушын $h>0$ болғанда $\varPhi_h(x)$ терис емес ҳәм $h\to 0$ да $[a,b]$ кесиндиниң дерлик ҳәр бир ноқатында $\varphi(x)$ функцияға жыйнақлы болады.

$\varphi(x)$ функцияның жәмлениўши екенлигин көрсетиў ушын 38.11-Фату теоремасынан пайдаланамыз. Буның ушын $\varPhi_h(x)$ функциялардан $[a,b]$ кесинди бойынша алынған интеграллардың шегараланғанлығын көрсетемиз.

Ҳақыйқатында да,

$$\int_a^x \varPhi_h(x)dx=\frac{1}{h}\int_{\alpha+h}^{\beta+h} F(x+h)dx-\frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\beta} F(x)dx=\frac{1}{h}\int_{\beta}^{\beta+h} F(x+h)dx-\frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\alpha+h} F(x)dx$$

аңлатпа $h\to 0$ да $F(\beta)-F(\alpha)$ ға умтылады. Себеби $F(x)$ функцияның абсолют үзликсизлигине көре қәлеген $\forall\varepsilon>0$ сан ушын $\exists\delta>0$ санын сондай қылып таңлаймыз, нәтийже $h<\delta$ болғанда ҳәр бир $x\in[\beta,\beta+h]$ ушын

$$|\,F(x)-F(\beta)|<\varepsilon$$

болады. Соның менен бирге, егер $x\in[\alpha,\alpha+h]$ болса, онда

$$|\,F(x)-F(\alpha)|<\varepsilon$$

болады. Булардан

$$\left|\frac{1}{h}\int\limits_{\beta}^{\beta+h}F(x+h)dx-\frac{1}{h}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+h}F(x)dx-(F(\beta)-F(\alpha))\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{h}\int\limits_{\beta}^{\beta+h}(F(x)-F(\beta))\,dx-\frac{1}{h}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+h}(F(x)-F(\alpha))dx\right|\le$$

$$\le\frac{1}{h}\int\limits_{\beta}^{\beta+h}|F(x)-F(\beta)|dx+\frac{1}{h}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+h}|F(x)-F(\alpha)|dx<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

Буннан, $\varepsilon>0$ санның қәлегенлигинен $h\to 0$ да

$$\frac{1}{h}\int\limits_{\beta}^{\beta+h}F(x)dx-\frac{1}{h}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+h}F(x)dx\to F(\beta)-F(\alpha)$$

қатнас келип шығады. Демек, $\Phi_h(x)$ функцияның интегралы шегараланған болады. Сондай қылып, Фату теоремасын қолланыў мүмкин. Бул теоремадан $F'(x)=\varphi(x)$ диң жәмлениўшилиги менен бирге

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}F'(x)dx\le F(\beta)-F(\alpha)$$

теңсизлиги ҳәм келип шығады. Егер $\alpha\to a,\ \beta\to b$ болса, онда $F'(x)$ туўынды $[a,b]$ да жәмлениўши ҳәм

$$\int\limits_{a}^{b}F'(x)dx\le F(b-0)-F(a+0)$$

$F(x)$ функция a ҳәм b ноқатларда үзликсиз болғаны ушын

$$\int\limits_{a}^{b}F'(x)dx\le F(b-0)-F(a+0). \tag{10}$$

$F(x)$ абсолют үзликсиз болғанда (9) теңлик орынлы болыўын көремиз.

Мына

$$G(x)=\int\limits_{a}^{x}\varphi(x)dx$$

функцияны киргиземиз. $G(x)$ функция 49.7-теоремаға тийкарында абсолют үзликсиз ҳәм 48.1-теоремаға тийкарында дерлик ҳәр бир ноқатында

$G'(x)=\varphi(x)$. Бирақ екинши тәрептен, $F'(x)=\varphi(x)$; соның ушын $H(x)=F(x)-G(x)$ айырманың туўындысы дерлик ҳәр бир ноқатында нолге тең болады.

Демек, 49.5-теоремаға көре $H(x)$ турақлы C_0 санға тең. Сонда

$$F(x)=G(x)+H(x)=\int_a^x \varphi(\xi)d\xi+C_0$$

Егер $x=0$ болса, онда $C_0=F(a)$. Соның менен теорема толық дәлилленди. Демек, абсолют үзликсиз функция өзиниң туўындысының анық емес интегралы болып табылады. 49.7 ҳәм 49.8-теоремалардан төмендеги әҳмийетли нәтийже келип шығады:

Нәтийже. $F(x)$ функция базы-бир жәмлениўши функцияның анық емес интегралы болыўы ушын абсолют үзликсиз борлыўы зәрүрли ҳәм жеткиликли.

Басланғыш функцияны тиклеў

1-теорема. $[a,b]$ кесиндиде монотон кемимейтуғын $f(x)$ функцияның $f'(x)$ туўындысы усы кесиндиде жәмлениўши болып ҳәм

$$\int_a^b f'(x)dx\le f(b)-f(a). \tag{1}$$

Дәлиллениўи. Анықлама бойынша $[a,b]$ функцияның x ноқаттағы туўындысы

$$h_\tau(x)=\frac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau} \tag{2}$$

функцияның $\tau\to 0$дағы лимитке тең болады. $f(x)$ функцияның монотонлығынан 45.1-теоремаға муўапық ол жәмлениўши. Буннан ҳәр бир τ ушын $h_\tau(x)$ функцияның жәмлениўшилиги келип шығады. Соның ушын (2) теңликти $[a,b]$ кесинди бойынша интеграллап,

$$\int_a^b h_\tau(x)dx=\frac{1}{\tau}\int_a^b f(x+\tau)dx-\frac{1}{\tau}\int_\alpha^b f(x)dx=\frac{1}{\tau}\int_b^{b+\tau} f(x)dx-\frac{1}{\tau}\int_a^{a+\tau} f(x)dx$$

теңликке келемиз. $\tau \to +0$ да бул теңликтиң оң тәрепи $f(b)-f(a+0)$ ға умтылады. Екинши тәрептен, $f(x)$ функцияның монотон кемимейтуғынлығынан

$$\int_a^b h_\tau(x)dx \le f(b)-f(a).$$

Лебег итегралы астында лимитке өтиў ҳаққындағы 38.11-Фату теоремасына көре

$$\int_a^b f'(x)dx = \lim_{\tau\to 0}\int_a^b h_\tau(x)dx = f(b)-f(a+0) \le f(b)-f(a).$$

(1) қатнаста қатаң теңсизлик орынлы болған монотон функцияға мысал қылып Кантор функциясын алыўымызға болады. Қурылысына қарай бул функция монотон ҳәм үзликсиз болып, оның туўындысы дерлик барлық жерде нолге тең. Демек,

$$0 = \int_0^1 K'(x)dx = K(1)-K(0) = 1-0 = 1.$$

2-теорема. Егер $f'(x)$ функция ҳәр бир ноқатында бар болып, шекли ҳәм жәмлениўши болса, онда (1) қатнастағы теңлик орынлы болады.

Теореманың дәлилллениўи төмендеги үш леммаға тийкарланған:

3-лемма. $[a,b]$ кесиндиде базы-бир шекли $\varphi(x)$ функция берилген болсын. Егер $[a,b]$ кесиндиниң ҳәр бир ноқатында $\varphi(x)$ функцияның туўынды санлары терис болмаса, онда $\varphi(x)$ өсиўши функция болады.

4-лемма. $[a,b]$ кесиндиде өлшеўи нолге тең болған қәлеген E көплик берилген болсын. Сонда сондай үзликсиз $g(x)$ функция бар болып, E көпликтиң ҳәр бир x ноқатында:

$$g'(x) = +\infty.$$

5-лемма. $[a,b]$ кесиндиде шекли $\varphi(x)$ функция берилген болсын. Егер $[a,b]$ кесиндиниң дерлик ҳәр бир ноқатында $\varphi(x)$ функцияның барлық туўынды санлары терис болмай, $[a,b]$ ниң ҳеш қандай ноқатында $-\infty$ ге тең болмаса, онда $\varphi(x)$ өсиўши болады.

Белгиге ийе өлшеў. Радон-Никодим теоремасы

Мейли базы-бир σ-аддитив μ өлшеўге ийе болған E көпликте жәмлениўши $f(x)$ функция берилген болсын. Сонда 38.5-теоремаға муўапық бул функция E көпликтиң ҳәр қандай өлшеўли $A \subset E$ үлес бөлегинде ҳәм жәмлениўши болады. Егер тайынланған $f(x)$ функция ушын төмендеги Лебегтиң анық емес интегралы

$$L(A) = \int_A f(x) d\mu \tag{1}$$

ди қарасақ, онда Лебег интегралының σ-аддитивлик қәсийетине көре, (1) теңлик пенен анықланған $L(A)$ көплик функция σ-аддитив өлшеўиниң терис емес екенлиги қәсийетинен басқа барлық қәсийетлерине ийе болады (себеби, егер E көпликте $f(x) \leq 0$ болса, онда ҳәр қандай өлшеўли $A \subset E$ көплик ушын $L(A) \leq 0$ болады). Бул мәнислер көплиги терис болған жағдайды ҳәм өз ишине алыўшы қәлеген көплик функциялар класын үйрениўге алып келеди.

1-анықлама. Базы-бир көпликлер системасында анықланған $L(\cdot)$ көплик функциясы ушын усы системадан алынған ҳәр қандай өз-ара кесилиспейтуғын саны санақлы A_1,
$A_2, ..., A_n, ...(A_k \cap A_j = \varnothing, \quad k \neq j)$ көпликлерде

$$L\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} L(A_k)$$

теңлик орынлы болса, онда бундай көплик функциясы σ-аддитив көплик функциясы деп аталады.

2-анықлама. σ-аддитив μ өлшеўге ийе болған E көпликтиң өлшеўли үлес көпликлерден ибарат $Z(E)$ системада анықланған ҳәр қандай σ-аддитив $L(\cdot)$ көплик функциясы белгиге ийе өлшеў деп аталады.

3-анықлама. Егер қәлеген $B \in Z(E)$ ушын $L(A \cap B) \leq 0$ ($L(A \cap B) \geq 0$) болса, онда $A \in Z(E)$ көплик $L(\cdot)$ белгиге ийе өлшеўге қарата терис(оң) көплик деп аталады.

Терис ҳәм оң көпликлердиң бар болыўы ҳаққындағы төмендеги теореманы дәлиллеймиз:

1-теорема. Егер белгиге ийе $L(\cdot)$ өлшеў $Z(E)$ системада анықланған болса, онда E көпликтиң сондай өлшеўли E^- үлеси бар болып, $L(\cdot)$ белгиге ийе өлшеўге қарата E^- көплик терис, ал $E^+ = E \setminus E^-$ көплик оң болады.

E көпликтиң оң E^+ ҳәм терис E^- көпликлердиң қосындысы көринисинде аңлатылыўы, яғный

$$E = E^+ \cup E^-$$

жайылмасы оның Хан мағанасындағы жайылмасы деп аталады.

E көпликтиң Хан мағанасындағы жайылмасы $L(\cdot)$ белгиге ийе өлшеўге қарата эквивалентлигинше бирден-бир болады, яғный егер

$$E = E_1^+ \cup E_1^- \quad \text{ҳәм} \quad E = E_2^+ \cup E_2^-$$

болса, онда қәлеген $A \in Z(E)$ ушын

$L\left(A \cap E_1^+\right) = L\left(A \cap E_2^+\right)$ ҳәм $L\left(A \cap E_1^-\right) = L\left(A \cap E_2^-\right)$ болады.

Егер $Z(E)$ σ-алгебрада $L^+(\cdot)$ ҳәм $L^-(\cdot)$ көплик функцияларды сәйкес тәризде

$$L^+(A) = L\left(A \cap E^+\right) \quad \text{ҳәм} \quad L^-(A) = -L\left(A \cap E^-\right)$$

теңликлер арқалы анықласақ, онда еки σ-аддитив өлшеўге ийе боламыз. Буннан белгиге ийе $L(\cdot)$ өлшеўди

$$L = L^+ - L^-$$

көринисте жазыў мүмкинлиги келип шығады. Белгиге ийе өлшеўдиң бул көринистеги жайылмасы оның Жордан мағанасындағы жайылмасы деп аталады.

Енди μ σ-аддитив өлшеў болып, $Z(E)$ системада ….көпликтиң барлық өлшеўли үлес көпликлеринен дүзилген σ-алгебра болсын. Егер базы-бир $A_0 \in Z(E)$ көплик ҳәм белгиге ийе $L(\cdot)$ өлшеў ушын ҳәр бир $B \in E \setminus A_0$ да $L(B)=0$ ҳәм ҳәр қандай өлшеўли $C \in A_0$ ушын $L(C)>0$ болса, онда A_0 көплик белгиге ийе $L(\cdot)$ өлшеўдиң тасыўшысы деп аталады.

Егер ҳәр қандай жалғыз ноқатлы A көплик ушын $L(A)=0$ болса, онда бундай белгиге ийе өлшеў белгиге ийе үзликсиз өлшеў деп аталады.

Егер белгиге ийе $L(\cdot)$ өлшеўдиң тасыўшысы шекли ямаса санақлы көпликлерден ибарат болса, онда өлшеў белгиге ийе дискрет өлшеў деп аталады.

4-анықлама. Егер $\mu(A)=0$ болған ҳәр қандай $A \in Z(E)$ ушын $L(A)=0$ болса, онда $L(\cdot)$ ди μ өлшеўге қарата абсолют үзликсиз белгиге ийе өлшеў деп аталады.

Егер белгиге ийе $L(\cdot)$ өлшеўдиң тасыўшысы μ -өлшеўи ноль болған базы-бир $A \in Z(E)$ көпликтен ибарат болса, онда ол μ -өлшеўге қарата сингуляр белгиге ийе өлшеў деп аталады.

Лебег интегралының σ-аддитивлик қәсийетине көре

$$L(A)=\int_A f(x)d\mu$$

теңлик арқалы анықланған $L(A)$ көплик функциясы σ-аддитив белгиге ийе өлшеў болады. Лебег интегралының абсолют үзликсизлиги қәсийетинен белгиге ийе $L(A)$ өлшеўдиң μ өлшеўге қарата абсолют үзликсиз екенлиги келип шығады. Енди базы-бир белгиге ийе ν өлшеўдиң σ-аддитив μ өлшеўге қарата абсолют үзликсизлиги белгили болғанда, оларды (1) көринисте аңлатыў мүмкин бе, деген сораў келип шығады. Бул сораўға

Радон-Никодим теоремасы жуўап береди. Дәслеп төмендеги жәрдемши лемманы келтиремиз.

Лемма. Егер нолге тривиал тең болмаған ν өлшеў μ өлшеўге қарата абсолют үзликсиз болса, онда сондай натурал n ҳәм $\mu(B)>0$ болған өлшеўли B көплиги табылып, B көплиги белгиге ийе $\nu-\frac{1}{n}\mu$, $n=1,2,....$ өлшеўге қарата оң көплик болады.

2-теорема (Радон-Никодим). Егер белгиге ийе ν өлшеўи ҳәм σ-аддитив μ өлшеў $Z(X)$ σ-алгебрада анықланып, белгиге ийе ν өлшеў μ өлшеўге қарата абсолют үзликсиз болса, онда X көпликте μ өлшеў бойынша жәмлениўши сондай $f(x)$ функция бар болып, ҳәр бир $A\in Z(X)$ ушын

$$\nu(A)=\int_A f(x)d\mu$$

теңлик орынлы.

$f(x)$ функция белгиге ийе ν өлшеўдиң μ өлшеў бойынша туўындысы деп аталады ҳәм дерлик бир мәнисли анықланады, яғный егер $\nu(A)=\int_A g(x)d\mu$ ҳәм $\nu(A)=\int_A f(x)d\mu$ болса, онда

$$\mu\{x\in X:\ \ f(x)\neq g(x)\}=0$$

болады.

СТИЛТЬЕС ИНТЕГРАЛЫ

10-лекция.

Лебег-Стилтьес өлшеўи

Жоқарыда Лебег өлшеўин қарағанымызда, $[a,b]$ кесиндиниң Лебег өлшеўи деп оның узынлығы $(b-a)$ айтқан едик. Бирақ $[a,b]$ кесиндини ҳәм оның үлес көпликлерин басқаша улыўмалырақ усыл менен ҳәм киритиў мүмкин.

Мейли $[a,b]$ кесиндиде анықланған, шептен үзликсиз ҳәм монотон кемимейтуғын $F(x)$ функция берилген болсын. Бул функция арқалы $[a,b]$ кесиндиниң, $[a,b)$ ҳәм $(a,b]$ ярым интерваллардың ҳәм (a,b) интервалдың өлшеўлерин сәйкес тәризде төмендегише анықлаймыз:

$$\begin{aligned} m[a,b] &= F(b+0)-F(a), \\ m[a,b) &= F(b)-F(a), \\ m(a,b] &= F(b+0)-F(a+0), \\ m(a,b) &= F(b)-F(a+0). \end{aligned} \tag{1}$$

Енди $[a,b]$ кесинди берилген болып, усы кесиндиниң барлық $[\alpha,\beta)$ көринистеги ярым интероваллардан ибарат болған системаны H арқалы билгилеймиз. H системаның ярым сақыйна дүзетуғынлығы айқын. (1) ге көре ҳәр қандай $[\alpha,\beta)\in H$ ушын

$$m[\alpha,\beta)=F(\beta)-F(\alpha) \tag{2}$$

теңликке ийе боламыз. H системада бул теңлик пенен анықланған m көплик функциясы өлшеў болады. Ҳақыйқатында да, ҳәр қандай $[\alpha,\beta)\in H$ ушын $m[\alpha,\beta)\geq 0$ екенлиги (2) теңликке көре $F(x)$ функцияның монотон кемимейтуғынлығынан келип шығады. Енди m көплик функциясының аддитив функция екенлигин көрсетемиз.

Мейли

$$[\alpha,\beta)=[\alpha,\gamma_1)\cup[\gamma_1,\gamma_2)\cup[\gamma_2,\gamma_3)\cup\ldots\ldots\ldots\cup[\gamma_{n-1},\gamma_n)\cup[\gamma_n,\beta)$$

болсын. Онда (2) ге көре

$$m[\alpha,\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=[F(\beta)-F(\gamma_n)]+[F(\gamma_n)-F(\gamma_{n-1})]+\ldots..+[F(\gamma_2)-F(\gamma_1)]+$$
$$+[F(\gamma_1)-F(\alpha)]=m[\gamma_n,\beta)+m[\gamma_{n-1},\gamma_n)+\ldots..+m[\gamma_1,\gamma_2)+m[\alpha,\gamma_1)$$

теңликке ийе боламыз. Демек, H системада (2) теңлик пенен анықланған m көплик функциясы өлшеў болады.

Анықлама. Егер $F(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде анықланған, шептен үзликсиз ҳәм монотон кемимейтуғын функция болып, H система $[a,b]$ кесиндиниң барлық $[\alpha,\beta)$ көринистеги ярым интерваллардан ибарат болған система болса, онда H системада (2) теңлик пенен анықланған m көплик функциясы F функция арқалы пайда қылынған Стилтьес өлшеўи деп аталады. $F(x)$ функциясы Стилтьес өлшеўин келтирип шығарыўшы (жаратыўшы) функция деп аталады.

$F(x)$ ҳәм $F(x)+C$ функциялары бир қыйлы Стилтьес өлшеўин келтирип шығарады. Улыўма, (2) өлшеўди келтирип шығаратуғын функциялардың улыўма көриниси $F(x)+C$ ден ибарат болады. Ҳақыйқатында да, $F(x)$ ҳәм $\Phi(x)$ функциялары (2) өлшеўди келтирип шығаратуғын қәлеген функциялар болсын. $[a,b]$ кесиндиден базы-бир $x_0 \in [a,b]$ ноқатты тайынлап алып, қәлеген $\forall x \in [a,b]$ ноқатты аламыз. Егер $x \le x_0$ болса, онда (2) теңликке көре, $[x_0, x)$ ярым интервал ушын ($F(x)$ ҳәм $\Phi(x)$ функциялары m өлшеўди келтирип шығратуғын функциялар болғаны ушын) $m[x_0,x) = F(x) - F(x_0) = \Phi(x) - \Phi(x_0)$ болып, буннан

$$\Phi(x) - F(x) = \Phi(x_0) - F(x_0) \tag{3}$$

теңликке ийе боламыз. Усыған уқсас, егер $x < x_0$ болса, онда (2) теңликтен $[x, x_0)$ ярым интервал ушын $m[x,x_0) = F(x_0) - F(x) = \Phi(x_0) - \Phi(x)$ болып, буннан және $\Phi(x) - F(x) = \Phi(x_0) - F(x_0)$ теңликке келемиз. $\forall x \in [a,b]$ болғаны ушын $\Phi(x) - F(x) = C(C = const)$ теңлик келип шығады. Демек, ҳәр бир $\forall x \in [a,b]$ ушын m өлшеўди келтирип шығаратуғын ҳәр қандай $F(x)$ ҳәм $\Phi(x)$ функциялары арасында

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

қатнас орынлы болады екен.

1-Теорема. Мейли $F(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндиде монотон кемимейтуғын функция ҳәм

$$m[\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \tag{4}$$

өлшеў H системада анықланған Стилтьес өлшеўи болсын. (4) өлшеўдиң σ-аддитив өлшеў болыўы ушын $F(x)$ функциясының $[a,b]$ кесиндиде шептен үзликсиз болыўы зәрүрли ҳәм жетерли.

Дәлиллениўи. Зәрүрлилиги. (4) өлшеўди σ-аддитив өлшеў деп, $F(x)$ функциясының шептен үзликсиз екенлигин көрсетемиз.

Мейли $F(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиниң базы-бир ноқатында шептен үзликсиз болмасын деп болжайық, яғный $x_0 \in [a,b]$ ноқатта $F(x)$ функция ушын $F(x_0 - 0) \neq F(x_0)$ қатнас орынлы болсын, $[a,b]$ кесиндиден усы x_0 ноқатқа өсип умтылатуғын $\{x_n\}$ избе-изликти аламыз:

$$x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_n, \qquad x_n \to x_0, \; n \to \infty, \tag{5}$$

$F(x)$ функция кемимейтуғын болғанлығы себепли

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ x_n < x_0}} F(x_n) = F(x_0 - 0) \neq F(x_0)$$

қатнас орынлы. (5) қатнасқа көре $[x_1, x_2) \subset [x_1, x_3) \subset .... \subset [x_1, x_n) \subset ....,$

қатнастың орынлы екенлиги айқын. Бул қатнастан ҳәм $n \to \infty$ да $x_n \to x_0$ екенлигинен, $[x_1, x_0) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [x_1, x_n)$ теңлик келип шығады. Буннан ҳәм σ-аддитивлигинен

$$m[x_1, x_0) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [x_1, x_n) \right) = \lim_{n \to \infty} m[x_1, x_n)$$

теңликти аламыз. Нәтийжеде (4) теңликке көре

$$\lim_{n \to \infty} [F(x_n) - F(x_1)] = F(x_0) - F(x_1)$$

ямаса $\lim\limits_{n \to \infty} F(x_n) = F(x_0)$ теңлик ийе боламыз. Бул болжаўымызға

қарама-қарсы. Демек, $F(x)$ функциясы шептен үзликсиз екен.

Жетерлилиги. $F(x)$ функцияны $[a,b]$ кесиндиде шептен үзликсиз деп, (4) теңлик пенен анықланған m өлшеўди σ-аддитив екенлигин көрсетемиз. Мейли

$$[\alpha, \beta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n), \qquad [\alpha_k, \beta_k) \cap [\alpha_j, \beta_j) = \varnothing, \; k \neq j \tag{6}$$

болсын. Онда ҳәр қандай N натурал сан ушын $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n) \subset [\alpha, \beta)$ қатнас орынлы болады. Буннан ҳәм m өлшеўдиң σ-аддитив ҳәм монотонлық қәсийетинен $\sum_{n=1}^{N} m[\alpha_n,\beta_n) \le m[\alpha,\beta)$ теңсизликке ийе боламыз. Бул теңсизлик ҳәр қандай N натурал сан ушын орынлы болғанлығы себепли $N \to \infty$ да орынлы болады:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m[\alpha_n,\beta_n) \le m[\alpha,\beta). \tag{7}$$

Енди кери теңсизликти дәлиллеймиз.Мейли (6) қатнаста $\alpha < \beta$ болсын, сонда $\alpha < \beta' < \beta$ қатнасты қанаатландырыўшы β' саны барлық ўақытта бар болады. $F(x)$ функция шептен үзликсиз болғанлығы себепли қәлеген $\forall \varepsilon > 0$ сан ушын ҳәр бир n натурал санда $\alpha_n' < \alpha_n$ қатнасты қанаатландырыўшы сондай α_n ҳәм α_n' санлар табылып, олар ушын

$$F(\alpha_n) - F(\alpha_n') < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

қатнас орынлы болады. Буннан

$$F(\beta_n) - F(\alpha_n') < F(\beta_n) - F(\alpha_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{8}$$

теңсизлик келип шығады. Бул жерде β_n сан (6) қатнастағы $[\alpha_n,\beta_n)$ ярым интервалды дүзиўши сан. α_n',α_n ҳәм β_n санлардың алыныўына көре $[\alpha_n,\beta_n) \subset (\alpha_n',\beta_n)$ қатнас орынлы. Демек, $[\alpha,\beta)$ ярым интервалда жайласқан $[\alpha,\beta')$ кесинди саны санақлы (α_n',β_n) интерваллар менен қапланар екен.

Белгили Борель-Лебег теоремасына көре бул системадан $[\alpha,\beta']$ кесиндини қаплайтуғын саны шекли $\{(\alpha_{n_k}',\beta_{n_k}),\ k = 1,2,.....r\}$ үлес системаны ажратып алыў мүмкин. Егер саны шекли $\{(\alpha_{n_k}',\beta_{n_k})\}$ интерваллар системасы $[\alpha,\beta']$ кесиндини қапласа, онда $[\alpha_{n_k}',\beta_{n_k})$ ярым интерваллар системасы ҳәм усы кесиндини қаплайды, яғный

$$[\alpha,\beta'] \subset \bigcup_{k=1}^{r} [\alpha_{n_k}',\beta_{n_k}).$$

Буннан төмендеги қатнас тиккелей келип шығады:

$$[\alpha,\beta') \subset \bigcup_{k=1}^{r} [\alpha_{n_k}',\beta_{n_k}).$$

Бул қатнастан ҳәм m өлшеўиниң аддитивлик және монотонлық қәсийетинен

$$m[\alpha,\beta')\leq\sum_{k=1}^{r} m[\alpha'_{n_k},\beta_{n_k})$$

теңсизликке ийе боламыз.(4) теңликке тийкарланып $m[\alpha,\beta')=F(\beta')-F(\alpha)$ ҳәм

$$m[\alpha'_{n_k},\beta_{n_k})=F(\beta_{n_k})-F(\alpha'_{n_k})$$

теңликлердиң орынлы болғанлығы ушын (9) қатнастан

$$F(\beta')-F(\alpha)\leq\sum_{k=1}^{r}\left[F(\beta_{n_k})-F(\alpha'_{n_k})\right]$$

теңсизлик келип шығады. Буннан ҳәм $F(x)$ функцияның кемимейтуғын екенлигинен

$$F(\beta')-F(\alpha)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left[F(\beta_n)-F(\alpha'_n)\right]$$

қатнасқа ийе боламыз. Буның оң тәрепиндеги қосынды астындағы аңлатпаға (8) теңсизликти қоллансақ, онда

$$F(\beta')-F(\alpha)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left[F(\beta_n)-F(\alpha_n)\right]+\varepsilon$$

теңсизликке ийе боламыз. Бул теңсизлик $\alpha<\beta'<\beta$ қатнасты қанаатландырыўшы ҳәр қандай β' сан ушын орынлы болғанлығы ушын ол $F(x)$ функцияның шептен үзликсизлигине тийкарланып, $\beta'\to\beta$ болғанда ҳәм орынлы болады, яғный

$$F(\beta)-F(\alpha)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left[F(\beta_n)-F(\alpha_n)\right]+\varepsilon .$$

Буннан ҳәм $\forall\varepsilon>0$ санның қәлегенлигинен

$$F(\beta)-F(\alpha)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left[F(\beta_n)-F(\alpha_n)\right]$$

теңсизлик келип шығады. Бул қатнастан (4) теңликке көре

$$m[\alpha,\beta)\leq\sum_{n=1}^{\infty}m[\alpha_n,\beta_n)$$

теңсизликке ийе боламыз.Бул ҳәм (7) теңсизлик теореманы дәлиллейди.

Сондай қылып, H ярым сақыйнада (4) теңлик пенен анықланған σ-аддитив m өлшеўге ийе болдық.

Бул өлшеўди алдын баян етилген усыл менен H системаны өз ишине алған минимал $Z(H)$ сақыйнаға даўам еттиремиз, сонда σ-аддитив μ_F өлшеўге ийе боламыз. Бул өлшеў F функцияға сәйкес болған (ямаса F функция келтирип шығарған) Лебег-Стилтьес өлшеўи деп аталады. F функцияға μ_F өлшеўди келтирип шығарыўшы функция деп аталады.

Лебег-Стилтьес өлшеўиниң төмендеги тийкарғы үш ҳалы менен танысып өтемиз.

1. Мейли $F(x)$ функция (1) теңлик пенен анықланған шептен үзликсиз $h(x)$ бағаналы функция болсын. Бул функцияның үзилис ноқатларын $x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_n < ......$ болып, усы ноқатларға сәйкес келген секириўлер болса, онда $h_1 > 0, h_2 > 0,......,h_n > 0,....,\left(\sum_{k=1}^{\infty} h_k < \infty\right)$ санлардан ибарат болсын. 1-анықламадан $F(x)$ сыпатында $h(x)$ функцияны аламыз. Онда $h(x)$ функция келтирип шығарған μ өлшеў бойынша $[a,b]$ аралықтың ҳәр қандай үлеси өлшеўли болып, $A \subset [a,b]$ көпликтиң μ_h өлшеўи усы көпликке тийисли x_i ларға сәйкес келген h_i лардың қосындысына тең, яғный

$$\mu_h(A) = \sum_{x_i \in A} h_i \tag{10}$$

Ҳақыйқатында да, Лебег-Стилтьес өлшеўиниң анықламасынан көринип турғанындай, ҳәр бир x_i ноқаттың өлшеўи h_i ге тең, яғный

$$\mu_F(\{x_i\}) = h_i .$$

Егер $D = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{x_i\}$ болса, онда $\mu_h([a,b] \setminus D) = 0$ теңлик орынлы. Демек, μ_h өлшеўдиң тасыўшысы D екен. Буннан ҳәм μ_h өлшеўдиң σ-аддитивлигинен ҳәр қандай $A \subset [a,b]$ ушын (10) теңлик келип щшығады.

2-анықлама. Базы-бир F бағаналы монотон функция келтирип шығарған μ_F өлшеў дискрет өлшеў деп аталады.

2. Мейли F монотон функция $[a,b]$ кесиндиде абсолют үзликсиз болып, оның туўындысы $F'(x)=f(x)$ болсын. Лебег теоремасына тийкарланып ҳәр бир интервал $[\alpha,\beta)\subset [a,b]$ ушын оның өлшеўиниң

$$m_F([\alpha,\beta))=F(\beta)-F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)d\mu$$

теңлик арқалы анықлаймыз(бул жерде μ өлшеў $[a,b]$ кесиндидеги Лебег өлшеўи). Сонда, элементлери $[a,b]$ кесиндиниң барлық $[\alpha,\beta)$ көринистеги ярым интерваллардан ибарат болған H системада анықланған σ-аддитив m_F өлшеўге ийе боламыз. 25.2-теоремаға көре m_F өлшеў H системаны өз ишине алған минимал $Z(H)$ сақыйнада анықланған σ-аддитив μ_F өлшеўге даўам еттириў мүмкин. Бул усылда анықланған μ_F өлшеў ҳәр қандай $A\in Z(H)$ ушын

$$\mu_F(A)=\int_{A} f(x)d\mu \tag{11}$$

теңлик пенен анықланады.

3-анықлама. Егер μ_F ҳәм μ өлшеўлер берилген болып (μ-Лебег өлшеўи), $\mu(A)=0$ болған ҳәр қандай өлшеўли A көплик ушын $\mu_F(A)=0$ болса, онда μ_F өлшеўди(μ өлшеўге қарата) абсолют үзликсиз өлшеў деп аталады.

Лебег интегралының абсолют үзликсизлиге көре (11) теңликтен μ_F өлшеўдиң μ өлшеўге қарата абсолют үзликсизлиги келип шығады.

3. Мейли F монотон сингуляр функция болсын. Белгили болғанындай, бундай функция үзликсиз болып, өзгериси шегараланған ҳәм туўындысы дерлик нолге нолге тең болады. Буннан, F сингуляр функция келтирип шығарған μ_F өлшеўдиң тасыўшысы Лебег өлшеўи ноль болған көпликтен ибарат көпликтен ибарат екенлиги келип шығады.

4-анықлама. Егер μ_F ҳәм μ өлшеўлер берилген болып (μ-Лебег өлшеўи) ҳәр қандай бир ноқатлы көпликте μ_F нолге тең, бирақ сондай

$\mu(A)=0$ болған өлшеўли A көплик болып, $\mu_F(CA)=0$ теңлик орынлы болып, μ_F ге μ қарата сингуляр өлшеў деп аталады.

Демек, базы-бир F сингуляр функция арқалы келтирилип шығарылған өлшеў Лебег өлшеўине қарата сингуляр өлшеў болады екен.

Егер $F=F_1+F_2$ болса, онда

$$m_F([\alpha,\beta))=F(\beta)-F(\alpha)=F_1(\beta)-F_1(\alpha)+F_2(\beta)-F_1(\alpha)=m_{F_1}([\alpha,\beta))+m_{F_1}([\alpha,\beta))$$

теңликке көре $\mu_F=\mu_{F_1}+\mu_{F_2}$.

Ҳәр қандай монотон функцияны үш түрли функция –абсолют үзликсиз, бағана ҳәм сингуляр функциялардың қосындысы сыпатында аңлатыў мүмкин. Буннан ҳәм (11) теңликтен ҳәр қандай Лебег-Стилтьес өлшеўи абсолют үзликсиз, дискрет ҳәм сингуляр өлшеўлердиң қосындысы сыпатында аңлатыў мүмкин, деген әҳмийетли жуўмақ келип шығады.

11,12- лекциялар.

Лебег-Стилтьес интегралы

Мейли $[a,b]$ кесиндиде анықланған монотон F функция арқалы келтирилип шығарылған μ_F Лебег-Стилтьес өлшеўи берилген болсын. Бул өлшем ушын Лебег интегралы түсинигин киритип, әдеттегидей, интегралланыўшы функциялар класын анықлаўымыз мүмкин. $[a,b]$ кесиндиде анықланған $f(x)$ функцияның μ_F өлшеў бойынша Лебег интегралы *Лебег-Стилтьес интегралы* деп аталады ҳәм ол төмендегише белгиленеди:

$$\int_a^b f(x)dF(x).$$

Мысаллар. 1. $F(x)=h(x)=\sum\limits_{x_i<x} h_i$, бул жерде $h(x)$- бағана функция болып, $x_1,x_2,x_3,.......,x_n,....$, лар $h(x)$ ның үзилис ноқатлары, $h_1,h_2,h_3,.......,h_n,....$ лар болса усы ноқатларға сәйкес болған функцияның секириўлери. $F(x)$ функция жасаўшы μ_F өлшеўдиң тасыўшысы $x_1,x_2,x_3,.......,x_n,....$, ноқатлар екенлиги ҳәм ҳәр бир x_i ноқатының өлшеўи

$\mu_F(\{x_i\}) = h_i$, $i = 1,2,....$, екенлиги Лебег-Стилтьес өлшеўиниң биринши ҳалында көрген едик. Енди, енди μ_F өлшеўге сәйкес келген Лебег-Стилтьес интегралын алсақ, онда төмендегиге ийе боламыз:

$$\int_a^b f(x)d\mu_F = \int_a^b f(x)dh(x) = \sum_{i=1} f(x_i)h_i \,.$$

2. Егер F абсолют үзликсиз функция болса, онда

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)dx \qquad (1)$$

теңлик орынлы болады.Демек, бул жағдайда Лебег-Стилтьес интегралы Лебег интегралға айланады екен.

Ҳақыйқатында да, егер $f(x)$ функция бағана функция болса, онда $[a,b]$ кесиндини саны шекли ямаса санақлы өз-ара кесилиспейтуғын өлшеўлши $A_1, A_2, ...$ көпликлердиң қосындысы сыпатында аңлатыў мүмкин, ҳәр бир A_k көпликте $f(x)$ функция турақлы c_k санға тең болады. Бундай функция ушын μ_F өлшеўдиң σ-аддитивлигинен төмендегиге ийе боламыз:

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)d\mu_F = \int_{\bigcup_k A_k} f(x)d\mu_F = \sum_k \int_{A_k} f(x)d\mu_F =$$

$$= \sum_k c_k \mu_F(A_k) = \sum_k c_k \int_{A_k} F'(x)dx = \sum_k \int_{A_k} c_k F'(x)dx =$$

$$= \int_{\bigcup_k A_k} f(x)F'(x)dx = \int_a^b f(x)F'(x)dx.$$

Демек, бағаналы функциялар ушын (1) теңлик орынлы болады екен.

Енди, егер $f(x)$ қәлеген интегралланыўшы функция болса, онда бул функцияға тең өлшеўли $f_n(x)$ бағаналы функциялар избе-излиги бар болады. Бул избе-изликти кемимейтуғын деп есаплаймыз. Сонда $\{f_n(x)F'(x)\}$ избе-излик ҳәм кемимейтуғын болады ҳәм ол $f(x)F'(x)$ функцияға дерлик жыйнақлы болады. Егер мына

$$\int_a^b f_n(x)dF(x) = \int_a^b f_n(x)F'(x)dx$$

теңликте (Леви теоремасына көре) $n \to \infty$ лимитке өтсек, онда (1) теңлик пайда болады.

Жоқарыдағы Лебег-Стилтьес өлшеўин көргенимизде, усы өлшеўди келтирип шығарған F функцияны монотон кемимейтуғын етип алған едик. Бирақ Лебег-Стилтьес өлшеўин ҳәр қандай өзгериўи шегараланған $G(x)$ функция ушын ҳәм анықлаў мүмкин.Ҳақыйқатында да, $G(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде өзгериўи шегараланған қәлеген функция болсын. 47.3-теоремаға көре бундай еки $\varphi(x)$ ҳәм $\psi(x)$ монотон функцияның айырмасы көринисинде аңлатыў мүмкин, яғный

$$G(x)=\varphi(x)-\psi(x)\ .$$

Енди, $G(x)$ функция арқалы Лебег-Стилтьес интегралының анықламасына көре

$$\int_a^b f(x)dG(x)=\int_a^b f(x)d\varphi(x)-\int_a^b f(x)d\psi(x)$$

теңлик пенен анықлаймыз. Егер $G(x)$ функция басқа $\varphi_1(x)$ ҳәм $\psi_1(x)$ монотон функциялардың айырмасы көринисинде аңлатылған болса, яғный

$$G(x)=\varphi_1(x)-\psi_1(x)$$

болса, онда

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)-\int_a^b f(x)d\psi(x)=\int_a^b f(x)d\varphi_1(x)-\int_a^b f(x)d\psi_1(x)$$

теңлик орынлы болады. Ҳақыйқатында да, анықламаға көре

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)-\int_a^b f(x)d\psi(x)=\int_a^b f(x)dG(x)=\int_a^b f(x)d\varphi_1(x)-\int_a^b f(x)d\psi_1(x)$$

теңликке тиккелей ийе боламыз.

Лебег-Стилтьес интегралының базы-бир қолланыўлары

Лебег-Стилтьес интегралы әмелий мәселелерде жүдә көп қолланады. Төменде солардың айырымларына тоқталып өтемиз.

Итималлықлар теориясында тосыннанлы шаманың бөлистирилиў функциясы

$$F(x)=P(\xi<x)$$

теңлик жәрдеминде бериледи(бул жерде $P(\xi<x)$ сан ξ тосыннанлы шама мәнислериниң x дан киши болыўы итималлығы). Тосыннанлы шаманың мәнислери дискрет ямаса үзликсиз болыўы мүмкин. Егер ξ тосыннанлы шама дискрет болса, онда оның мәнислери көплиги көпи менен санақлы болады. Мейли $x_1,x_2,x_3,.......,x_n,....,$ лар ξ тосыннанлы шаманың мәнислери болып, $p_1,p_2,p_3,.......,p_n,....,$ санлары усы мәнислерди қабыл қылыў итималлықлары болсын:

$$p_i=P(\xi=x_i),\quad p_i\geq 0,\ \sum_i p_i=1.$$

Бундай тосыннанлы шаманың бөлистирилиў функциясы $F(x)$

$$F(x)=\sum_{x_i<x} p_i$$

$[a,b]$ кесиндиде секириў функциясынан болады.

$[a,b]$ кесиндиде бөлистирилиў функциясы анық болған тосыннанлы шамалар ушын оның математикалық күтилмеси ҳәм дисперсиясы сәйкес тәризде $M\xi = \int_a^b x dF(x)$ ҳәм $D\xi = \int_a^b (x - M\xi)^2 dF(x)$ Лебег-Стилтьес интеграллары арқалы табылады.Егер буны дискрет тосыннанлы шамаға қоллансақ, онда сәйкес төмендеги қосындыларды аламыз:

$$M\xi = \sum_i x_i p_i \text{ ҳәм } D\xi = \sum_i (x - M\xi)^2 p_i \ .$$

Егер ξ тосыннанлы шама үзликсиз болса, онда оның $F(x)$ бөлистирилиў функциясы абсолют функция болады. Бөлистирилиў функциясының $F'(x) = p(x)$ туўындысы ξ тосыннанлы шама итималықларының бөлистирилиў тығызлығы деп аталады.Бундай тосыннанлы шаманың математикалық күтилмеси ҳәм дисперсиясы төмендеги теңликлер менен анықланады:

$$M\xi = \int_a^b xp(x)dx \text{ ҳәм } D\xi = \int_a^b (x - M\xi)^2 p(x)dx \, .$$

Риман-Стилтьес интегралы

$[a,b]$ кесиндиде анықланған еки $f(x)$ ҳәм $\varphi(x)$ функция берилген болсын. $[a,b]$ кесминдини $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ноқатлар менен қәлеген тәрезде n бөлекке бөлемиз;

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < .... < a_n = b, \quad \max_{1 \le i \le n}(a_i - a_{i-1}) = a_n \, . \qquad (1)$$

Ҳәр бир $[a_{i-1}, a_i]$ кесиндиде базы-бир x_i ноқатты алып,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\}$$

қосындыны түземиз.

Анықлама. Егер a_n нолге умтылатуғын S_n қосынды $[a,b]$ кесиндиниң қандай бөлиниўинен ҳәм x_i ноқатларының қандай таңлап алыўынан ғәрезсиз анық бир лимитке умтылса, онда бул лимиттиң мәниси $f(x)$ функцияның $[a,b]$ аралықтағы $\varphi(x)$ функция бойынша алынған Риман-Стильес интегралы деп аталады ҳәм төмендегише жазылады:

$$\lim_{a_n \to 0} S_n = \int_a^b f(x)d\varphi(x).$$

Бунда $f(x)$ интегралланыўшы функция, ал $\varphi(x)$ интеграллаўшы функция деп аталады.

1-теорема. Егер $[a,b]$ кесиндиде $f(x)$ үзликсиз ҳәм $\varphi(x)$ өзгериўи шегараланған функциялар болса, онда $f(x)$ функцияның $\varphi(x)$ функция бойынша Риман-Стилтьес интегралы бар болады ҳәм ол усы функцияның Лебег-Стилтьес интегралына тең болады.

Дәлиллениўи. $[a,b]$ кесиндиниң

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < .... < a_n = b$$

бөлиниўин қараймыз. Егер ҳәр бир n натурал сан ушын $[a_{i-1}, a_i)$, $i = 1,2,......,n$ ярым интервалдан ξ_i ноқатын қәлегенше қылып таңлап, $f_n(x)$ бағана функцияны

$$f_n(x) = f(\xi_i), \quad a_{i-1} \le x < a_i, \quad i = 1,2,......,n$$

теңлик пенен анықласақ, онда $n \to \infty$ да $\{f_n(x)\}$ избе-излик $[a,b]$ кесиндиде үзликсиз $f(x)$ функцияға тең өлшеўли жыйнақлы болады. Ҳақыйқатында да, $f(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде үзликсиз болғаны себепли, ҳәр қандай $\forall \varepsilon > 0$ сан ушын сондай $\exists \delta > 0$ сан бар болып, $|x - \xi| < \delta$ болғанда $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ болады. Енди $\forall x \in [a,b]$ қәлеген ноқат болсын.Сонда бул ноқат $[a_{i-1}, a_i)$ ярым интерваллардың биреўине тийисли болады. Берилген $\varepsilon > 0$ сан ушын n натурал санды сондай таңлаў мүмкин, нәтийжеде $[a_{i-1}, a_i)$ ярым интерваллар узынлықлардың ең үлкени δ саннан киши қылып таңлап алыў мүмкин. Сонда

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(\xi_i) - f(x)|$$

теңликтен ҳәм $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i)$, $x \in [a_{i-1}, a_i)$ ҳәм $\max(a_i - a_{i-1}) < \delta$ қатнаслардан $f(x)$ функцияның үзликсизлигине көре

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

теңсизликке ийе боламыз. Буннан, $x \in [a,b]$ ҳәм $\varepsilon > 0$ қәлеген болғанлығы себепли $\{f_n(x)\}$ избе-изликтиң $f(x)$ функцияға тең өлшеўли жыйнақлы болады. Енди

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\}$$

интеграллық қосындыға $f_n(x) = f(\xi_i)$, $a_{i-1} \le x < a_i$ бағана функцияның Лебег-Стилтьес интегралы деп қараўымыз мүмкин. $[a,b]$ кесиндини шексиз киши бөлеклерге бөлиў нәтийжесинде $\{f_n(x)\}$ функциялар избе-излиги $f(x)$ функцияға тең өлшеўли жыйнақлы болғанлығы (3) қосындының $a_n \to 0$ лимити бар болады ҳәм бул лимит $f(x)$ функциядан $[a,b]$ кесинди бойынша алынған Лебег-Стилтьес интегралын береди. Екинши тәрептен, бул лимиттиң өзи, анықлама бойынша, $f(x)$ функциядан алынған Риман-Стилтьес интегралы деп белгилеген едик.

Енди Риман-Стилтьес интегралының бир неше әпиўайы қәсийетлерин келтирип өтемиз.

2-теорема. Төмендеги

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)+\int_a^b \psi(x)d\varphi(x)=\int_a^b \{f(x)+\psi(x)\}d\varphi(x)$$

теңлик орынлы ҳәм буның шеп тәрепиниң бар болыўынан оның оң тәрепиниң бар болыўы келип шығады.

Дәлиллениўи. Мына

$$S_n=\sum_{i=1}^n [f(x_i)+\psi(x_i)]\{\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})\}=\sum_{i=1}^n f(x_i)\{\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})\}+$$

$$\sum_{i=1}^n \psi(x_i)\{\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})\}=S_n^{(1)}+S_n^{(2)}$$

Егер a_n нолге умтылғанда $S_n^{(1)}$ ҳәм $S_n^{(2)}$ қосындылар сәйкес тәризде I_1 ҳәм I_2 лимитлерге умтылса, онда $S_n=S_n^{(1)}+S_n^{(2)}$ қосынды $I=I_1+I_2$ қосындыға умтылады, бул жерде:

$$I_1=\int_a^b f(x)d\varphi(x)\ , \quad I_2=\int_a^b \psi(x)d\varphi(x),$$

$$I=\int_a^b \{f(x)+\psi(x)\}d\varphi(x).$$

3-теорема. Төмендеги

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)+\int_a^b f(x)d\psi(x)=\int_a^b f(x)d\{\varphi(x)+\psi(x)\}$$

теңлик орынлы ҳәм буның шеп тәрепиниң бар болыўынан оның оң тәрепиниң бар болыўы келип шығады.

Бул теореманың дәлиллениўи 2-теореманың дәлиллениўине уқсас дәлилленеди.

4-теорема. Егер $a<b<c$ болса, онда

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)+\int_b^c f(x)d\varphi(x)=\int_a^c f(x)d\varphi(x).$$

Бул теңлик интеграллардың оң тәрепиндегиси бар болғанда бар болады.

Бул теореманың дәлиллениўи 2-теореманың дәлиллениўине уқсас, бирақ бунда оң тәрепиндеги интегралға сәйкес қосынды дүзгенде, яғный $[a,b]$ кесиндини бөлгенде b ноқатын бөлиў ноқаты қылып алыў мүмкин.

5-салдар. Соны ҳәм айтып өтиў керек, себеби $\int_a^c f(x)d\varphi(x)$ интегралдың бар болыўынан $\int_a^b f(x)d\varphi(x)$ ҳәм $\int_b^c f(x)d\varphi(x)$ интеграллардың бар болыўы келип шығады. Бирақ кериси ҳәр дайым орынлы емес. Буған мысал келтиремиз. $[-1,+1]$ кесиндиде төмендегише берилген $f(x)$ ҳәм $\varphi(x)$ функциялар берилген болсын:

$$f(x)=\begin{cases}0, & егер\ -1\le x\le 0,\\ \frac{1}{x}, & егер\ 0<x\le 1,\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}x, & егер\ -1\le x<0,\\ 0, & егер\ 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Буннан,

$$\int_{-1}^{0} f(x)d\varphi(x)=0\ ,\qquad \int_{0}^{1} f(x)d\varphi(x)=0$$

себепли $[-1,0]$ кесиндиде $f(x)=0$ ҳәм $[0,1]$ кесиндиде $\varphi(x)=0$. Бирақ

$$\int_{-1}^{1} f(x)d\varphi(x)$$

интеграл анықланбаған, себеби $[-1,+1]$ кесиндини бөлеклерге бөлгенимизде $f(x)$ ҳәм $\varphi(x)$ функциялардың берилиўи көре 0 ноқатын өз ишине алмаған бөлеклерге сәйкес ағзалар 0 ге тең болады. 0 ноқатын өз ишине алған $a_{i-1}<0<a_i$ бөлекке сәйкес болған ағза(ноль ноқат бөлиў ноқаты болмаған ҳалда)төмендегише болады:

$$\sigma_i=\{\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})\}f(x_i)=-\frac{a_{i-1}}{x_i}\ (егер\ x_i>0\ болса).$$

Буннан көринип турғанындай, x_i нолге қәлегенше жақын болғанда σ_i сан қәлегенше үлкен болыўы мүмкин, демек, тийисли қосынды лимитке ийе болмайды.

6-теорема. $\int_a^b kf(x)dh\varphi(x)=kh\int_a^b f(x)d\varphi(x)$ (k ҳәм h-турақлы санлар).

Дәлиллениўи. Ҳақыйқатында да,

$$\int_a^b kf(x)dh\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} kf(x_i)\{h\varphi(a_i)-h\varphi(a_{i-1})\}=$$

$$kh\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\{\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})\}=kh\int_a^b f(x)d\varphi(x).$$

7-теорема. Мына

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)\ ҳәм\ \int_a^b \varphi(x)df(x)$$

интеграллардың биреўиниң бар болыўынан екиншисиниң бар болыўы келип шығады ҳәм төмендеги теңлик орынлы болады:

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)+\int_a^b \varphi(x)df(x)=f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a)=f(x)\varphi(x)\Big|_a^b.$$

Бул теңлик *бөлеклеп интегралаў формуласы* деп аталады.

Дәлиллениўи. $\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x)$ интеграл бар деп божаймыз, (2) қосындыға уқсас төмендеги қосындыны дүземиз:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\{\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})\}=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(a_i)-\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(a_{i-1}).$$

$a_n=b,\ a_0=a$ болғанлығы ушын қосындыға $[f(x)\varphi(x)]\big|_a^b$ аңлатпаны қосып ҳәм айырып тасласақ, онда мына теңлик келип шығады:

$$\begin{aligned}S_n&=f(x_n)\varphi(a_n)+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\varphi(a_i)-\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i+1})\varphi(a_i)-\\&-f(x_1)\varphi(a_0)=[f(x)\varphi(x)]\big|_a^b-\{[f(b)-f(x_n)]\varphi(b)+\\&+\sum_{i=1}^{n-1}\varphi(a_i)[f(x_{i+1})-f(x_i)]+[f(x_1)-f(a)]\varphi(a)\Big\}=[f(x)\varphi(x)]\big|_a^b-S'_n.\end{aligned}$$

бул жерде S'_n-соңғы үлкен қаўыс ишиндеги аңлатпа. S'_n-қосындының дүзилиўине дыққат пенен қаралса, онда ол ҳәм S_n қосындыға уқсас дүзилген болып, бундағы өзгешелик S'_n-де $[a,b]$ кесиндини бөлиў ноқатлары сыпатында $x_0=a<x_1<x_2<x_3<.......<x_n=b$ ноқатлар қатнасып атырғанлығы, $a_1,a_2,a_3,.......,a_{n-1}$ ноқатлар (яғный S_n ди дүзиўде бөлиў ноқатлары) тийисли $x_1\le a_1\le x_2,\ x_2\le a_2\le x_3,.......,x_{n-1}\le a_{n-1}\le x_n$ теңсизликлерди қанаатландырады. $\alpha_n=\max\limits_{0\le i\le n-1}(a_{i+1}-a_i)$ нолге умтылғанда $\beta_n=\max\limits_{0\le i\le n-1}(x_{i+1}-x_i)$ ҳәм нолге умтылады. Болжаўымызға көре, $\alpha_n\to 0$ да S_n диң лимити бар болады, демек, $S'_n=[f(x)\varphi(x)]\big|_a^b-S_n$ теңликтен, жоқарыдағы пикирлеўге көре, $\beta_n\to 0$ да S'_n диң лимити бар болыўы келип шығады. Бул лимит Риман-Стилтьес интегралының анықламасына көре $\int\limits_a^b\varphi(x)df(x)$ге тең болады. Керисинше, соңғы интеграл бар деп болжасақ, онда жоқарыдағыға уқсас, $\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x)$ интегралдың бар екенлигин көрсетимиўимиз мүмкин.

13-лекция

Стилтьес интегралы астында лимитке өтиў

1-теорема. $[a,b]$ кесиндиде анықланған өзгериўи шегараланған $\varphi(x)$ функция ҳәм $f(x)$ функцияға тең өлшеўли жыйнақлы үзликсиз функциялардың $\{f_n(x)\}$ избе-излиги берилген болсын. Сонда

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)d\varphi(x)=\int_a^b f(x)d\varphi(x). \qquad (1)$$

Дәлиллениўи. Математикалық анализ курсындағы белгили теоремаға көре $f(x)$ функция тең өлшеўли жыйнақлы үзликсиз функциялар избе-излигиниң лимити болғанлығы себепли үзликсиз болады. Соның ушын 55.1-теоремаға көре соңғы қатнастың оң тәрепиндеги интеграл бар болады.

§55 ниң (2) теңликтеги S_n қосынды ушын төмендеги қатнасларды жазыўымыз мүмкин:

$$|S_n| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\} \right| \le \max_{a \le x \le b} |f(x)| \sum_{i=1}^{n} |\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})| \le M_f V_a^b(\varphi)$$

бул жерде

$$M_f = \max_{a \le x \le b} |f(x)| .$$

Буннан тиккелей

$$\left| \int_a^b f(x) d\varphi(x) \right| \le M_f V_a^b(\varphi);$$

онда

$$\left| \int_a^b f_n(x) d\varphi(x) - \int_a^b f(x) d\varphi(x) \right| \le M_{f_n - f} V_a^b(\varphi).$$

Теорема шәртине көре $n \to \infty$ де $\{f_n(x)\}$ избе-излиги $f(x)$ функцияға тең өлшеўли жыйнақлы болатуғынлығы, себепли

$$M_{f_n - f} \to 0 .$$

Буннан (1) қатнасқа ийе боламыз.

2-теорема (Хелли). $[a,b]$ кесиндиде анықланған үзликсиз $f(x)$ функция хәм бул кесиндиниң хәр бир ноқатында $\varphi(x)$ функцияға жыйнақлы өзгериси шегараланған $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар избе-излиги берилген болсын. Егер n натурал санның барлық мәнислери ушын

$$V_a^b(\varphi_n) \le M \tag{2}$$

теңсизлиги орынлы болса(M турақлы хәм n ге ғәрезли болмаған сан), онда $\varphi(x)$ функцияның хәм өзгериўи шегараланған болады хәм

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) d\varphi_n(x) = \int_a^b f(x) d\varphi(x). \tag{3}$$

Дәлиллениўи. $[a,b]$ кесиндиниң қәлеген $a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < .... < a_m = b$ бөлиниўин аламыз. Теорема шәртине көре хәр бир $x \in [a,b]$ ушын

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

болғанлығы себепли «төртмүйешлик теңсизлиги» деп аталыўшы

$$\left| \, | \varphi(a_k) - \varphi(a_{k-1}) | - | \varphi_n(a_k) - \varphi_n(a_{k-1}) | \, \right| \le$$
$$\le | \varphi(a_k) - \varphi_n(a_k) | + | \varphi(a_{k-1}) - \varphi_n(a_{k-1}) |$$

теңсизликтен

$$\left|\sum_{k=1}^{m} |\ \varphi(a_k)-\varphi(a_{k-1})\ | - \sum_{k=1}^{m} |\varphi_n(a_k)-\varphi_n(a_{k-1})|\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} |\ \varphi(a_k)-\varphi_n(a_k)\ | + \sum_{k=1}^{m} |\varphi(a_{k-1})-\varphi_n(a_{k-1})|$$

теңсизлигин аламыз.Буған көре

$$\sum_{k=1}^{m} |\ \varphi(a_k)-\varphi(a_{k-1})\ | = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} |\varphi_n(a_k)-\varphi_n(a_{k-1})|. \qquad (4)$$

$\varphi_n(x)$ функциялар өзгериўи шегараланған болғанлығы ушын

$$\sum_{k=1}^{m} |\ \varphi_n(a_k)-\varphi_n(a_{k-1})| \le V_a^b(\varphi_n)\ .$$

Буннан ҳәм (2) теңсизликтен (4) ке көре

$$\sum_{k=1}^{m} |\ \varphi(a_k)-\varphi(a_{k-1})| \le M$$

теңсизлик келип шығады. Бул қатнастан ҳәм $[a,b]$ кесиндиниң бөлиниўи қәлеген қылып таңлап алынғанлықтан

$$V_a^b(\varphi) \le M$$

теңсизликтен келип шығады. Демек, $\varphi(x)$ функцияның өзгериўи шегаралаған екен.

Енди қәлеген $\varepsilon > 0$ сан ушын $[a,b]$ кесиндини сондай mта $[a_{i-1}, a_i]$, $i = 1,2,.....,m$ бөлеклерге бөлип, усы бөлеклердиң ҳәр биринде үзликсиз $f(x)$ функцияның тербилиси $\frac{\varepsilon}{3M}$ ден киши болсын, яғный

$$\sup_{a_{i-1}\le x \le a_i} f(x) - \inf_{a_{i-1}\le x \le a_i} f(x) < \frac{\varepsilon}{3M} \qquad (5)$$

теңсизлик орынлы болсын. Онда

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)d\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \int_{a_{i-1}}^{a_i} [f(x)-f(a_{i-1})]d\varphi(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} f(a_{i-1}) \int_{a_{i-1}}^{a_i} d\varphi(x).$$

(5) ке көре

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \int_{a_{i-1}}^{a_i} [\ f(x)-f(a_{i-1})]d\varphi(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M} V_{a_{i-1}}^{a_i}(\varphi)$$

теңсизликке ийе боламыз. Буннан

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \int_{a_{i-1}}^{a_i} [\ f(x)-f(a_{i-1})]d\varphi(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M} \sum_{i=1}^{m} V_{a_{i-1}}^{a_i}(\varphi) = \frac{\varepsilon}{3M} V_a^b(\varphi) \le \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Демек,

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)=\sum_{i=1}^m f(a_{i-1})[\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})]+\alpha\frac{\varepsilon}{3} \quad (|\alpha|\le 1).$$

Усыған уқсас

$$\int_a^b f(x)d\varphi_n(x)=\sum_{i=1}^m f(a_{i-1})[\varphi_n(a_i)-\varphi_n(a_{i-1})]+\alpha_n\frac{\varepsilon}{3} \quad (|\alpha_n|\le 1).$$

$[a,b]$ кесиндиниң ҳәр бир ноқатында $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар избе-излигиниң $\varphi(x)$ функцияға жыйнақлығынан ҳәм усы кесиндиде $f(x)$ функцияның үзликсизлигинен сондай n_0 натурал сан бар болып, $n>n_0$ болғанда

$$\left|\sum_{i=1}^m f(a_{i-1})[\varphi_n(a_i)-\varphi_n(a_{i-1})]-\sum_{i=1}^m f(a_{i-1})[\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})]\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

теңсизлик орынлы болады. Демек, $n>n_0$ болғанда, бул теңсизликке көре төмендеги теңсизликти ҳәм жазыў мүмкин:

$$\left|\int_a^b f(x)d\varphi_n(x)-\int_a^b f(x)d\varphi(x)\right|<\varepsilon$$

ε ниң қәлегенлигинен ҳәм бул теңсизликтен биз дәлиллемекши болған (3) қатнас келип шығады.

Оқыўлық ҳәм оқыў қолланбалар дизими

Тийкарғы

1. Саримсоқов Т.А. Функционал анализ курси. «Ўқитувчи» Т., 1986
2. Саримсоқов Т.А. «Ҳақиқий ўзгарувчили функциялар назарияси» Т. 1993
3. Колмогоров А.Н, Фомин С.В.. Элементы теории функций и функционального анализа. М. «Наука». 1972
4. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Из-во «Наука». М. 1984
5. Очан Ю.С.Сборник задач по математическому анализу.М.Просвещение.1981.

Қосымша

1. Соболев В.И лекция по дополнительным главам математического анализа 1968
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. Из-во «Наука». М. 1980
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Изд-во «Наука» М. 1977
4. Люстерник Л. А. Соболев В. И. Краткий курс функциональнлго анализа Изд-во «Наука» М. 1982