Прямые и обратные динамические задачи для уравнения SH волн в пористой среде

Имомназаров Х. Х.
Институт вычислительной математики и
математической геофизики СО РАН, Новосибирск,
Холмуродов А. Э.
Каршинской государственный университет, Карши

Аннотация – Рассмотрены прямые и обратные динамические задачи для уравнения SH волн пористой среде. Построено сингулярное решение прямой динамической задачи. Получена система нелинейных вольтерровых интегральных уравнений второго рода для рассмотренных динамических обратных задач. Доказаны теоремы единственности и в малом теоремы существования рассмотренных задач. Также доказаны теоремы непрерывной зависимости решений обратных динамических задач от входных данных.

1.Введение

В прикладных задачах распространения упругих волн часто возникает потребность учесть пористость, флюидонасыщенность среды и гидродинамический фон. В частности, эти вопросы возникают в разведочной геофизике при поиске нефтяных слоев и при выборе параметров волнового воздействия на месторождения нефти и газа с целью интенсификации добычи. Аналогичные вопросы имеются и в сейсмологии при геофизическом мониторинге свойств очаговой зоны с целью прогноза землетрясений [1]. Реальные среды являются пористыми, трещиноватыми и поглощающими.

Физической основной сейсмических методов исследования является идея о существовании тесной количественной связи режима колебаний поверхности Земли при взрывах, землетрясениях и механических воздействиях с внутренним геологическим строением Земли. Рассматривая связь между режимом колебаний и строением колеблющейся среды, следует иметь в виду двусторонний характер этой связи. При этом возникают задачи двух типов: 1) прямая задача – заданы источники физического поля и характеристики среды, определяющей взаимодействие этой среды и поля: требуется определить поле; 2) обратная задача – задано поле вне среды или на некоторой части среды: требуется определить характеристики среды.

При интерпретации сейсмических наблюдений такие задачи не всегда встречаются в чистом виде. Задача интерпретации сейсмических данных часто состоит в последовательном решении серии связанных друг с другом задач обоих типов. В теоретической сейсмике и сейсмологии, однако, целесообразно рассматривать их отдельно, так как каждый из этих вопросов требует привлечения различных математических средств для количественного анализа [2].

В 1962 году впервые Алексеевым А. С. были рассмотрены ряд математических постановок обратных задач теории распространения волн для модели упругих сред [3]. Обнаружилась их связь с одномерными обратными спектральными задачами, рассмотренными И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [4], а также М. Г. Крейном [5,6] . В [7] установлена связь метода Баранова – Кюнетца с дискретным аналогом метода Гельфанда – Левитана. При этом условия разрешимости уравнений Гельфанда – Левитана фактически приводили к возможности коррекции неточно заданных сейсмограмм. В [8,9] исследованы сингулярности решений уравнений гиперболического типа. Достаточно полную библиографию по теории обратных задач можно найти в [8-10].

В данной работе, используя идеи [8,9], исследуются сингулярности решения одномерного уравнения SH волн для насыщенных жидкостью пористых сред, в которых происходит потеря энергии при межкомпонентном трении.

2.Постановка задачи

Уравнение движения распространения сейсмических SH волн с учетом поглощения энергии, обусловленной коэффициентом межкомпонентного трения $\chi(z)$, имеет вид [11-14]

$$\rho_s(z)U_{tt} = (\mu(z)U_z)_z - \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t), \tag{1}$$

$$\rho_l^2(z)V_{tt} = \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t), \tag{2}$$

Здесь U и V – компоненты вектора смещений частиц упругого пористого тела и жидкости с парциальными плотностями $\rho_s(z)$ и $\rho_l(z)$ соответственно. Пусть система (1), (2) справедлива при $z > 0$. Предложим, что пористая среда покоится при $t <$ 0:

$$U\big|_{t=0} = U_t\big|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

$$V\big|_{t=0} = V_t\big|_{t=0} = 0. \tag{4}$$

Пусть на границе z = 0 приложена сила:

$$\mu U_z\big|_{z=0} = F(t)$$

Требуется по этой информации и заданным функциям дважды непрерывно дифференцируемым $\rho_s(z), \mu(z)$, непрерывным $\rho_l(z), \chi(z)$ определить волновое поля *U(t,z)* , *V(t ,z)* из (1)-(4). Следуя [8-10], такую задачу будем называть прямой динамической задачей для уравнения SH волн в пористой среде.

В приложениях наибольший интерес представляет задачи об определении переменных коэффициентов дифференциального уравнения. Это связано с тем, что дифференциального уравнения, как правило, описывают физические процессы, а коэффициенты уравнения связаны с физическими характеристиками среды, в которой протекают эти процессы. Так как непосредственно эти коэффициенты измерить невозможно, то задача об определения свойств вещества является, по существу, обратной [8] .

В данной работе, используя методику предложенную в [8,9] , докажем локальные теоремы разрешимости следующих обратных задач:

Задача 1. Требуется по информации

$$U\Big|_{z=0} = G(t).$$

восстановить $\mu(z)$ из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z), \rho_l(z), \chi(z)$).

Задача 2. Требуется по информацию (6) восстановить $\chi(z)$ из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z), \rho_l(z), \mu(z)$).

Задача 3. Требуется по информацию (6) восстановить $\rho_s(z)$ из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_l(z), \mu(z), \chi(z)$).

Задача 4. Требуется по информацию (6) восстановить $\rho_l(z)$ из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z), \mu(z), \chi(z)$).

3. Сведение задачи (1)-(6) к гиперболической системе

Введем вместо z координату *x*:

$$x = \int_0^z \frac{d\xi}{c_t(\xi)},$$

где $c_t(z) = \sqrt{\dfrac{\mu(z)}{\rho_s(z)}}$ есть скорость распространения поперечных сейсмических волн в пористой среде.

После перехода к координате *x*, скорость распространения сейсмических волн в пористой среде становится равной единице. Так как [9]

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{c_t}\frac{\partial}{\partial x},$$

то уравнение (1) имеет вид

$$U_{tt} = \frac{1}{\sigma}(\sigma U_x)_x - \chi(x)\frac{\rho_l^2(x)}{\rho_s(x)}(U_t - V_t).$$

Граничное условие (5) после замены приобретает вид

$$\sigma U_x\big|_{x=0} = F(t).$$

В (7) и (8) $\sigma = \sqrt{\mu\rho_s}$.

Положим

$$\tilde{\Psi}_1 = U_t - U_x,\ \tilde{\Psi}_2 = U_t + U_x,\ \ \Phi = V_t.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\Psi}_1}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{\Psi}_1}{\partial z} = \frac{\partial\tilde{\Psi}_2}{\partial t} - \frac{\partial\tilde{\Psi}_2}{\partial z} &= \frac{\sigma'_x}{\sigma}U_x - \chi\frac{\rho_l^2}{\rho_s}(U_t - \Phi) = \\ &= \frac{\sigma'_x}{2\sigma}(\tilde{\Psi}_2 - \tilde{\Psi}_1) - \frac{\chi}{2}\frac{\rho_l^2}{\rho_s}\left(\tilde{\Psi}_1 + \tilde{\Psi}_2\right) + \chi\frac{\rho_l^2}{\rho_s}\Phi,\end{aligned} \qquad (9)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\chi}{2}\rho_l(\tilde{\Psi}_1 + \tilde{\Psi}_2) - \chi\rho_l\Phi. \qquad (10)$$

Введем вектор-функцию Ψ с помощью формулы

$$\tilde{\Psi} = K\Psi,$$

где $\tilde{\Psi}$ – вектор с компонентами $\left(\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2\right)$,

$$K = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

После простых преобразований получим уравнения в терминах функции

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \begin{pmatrix}\dfrac{x}{2}\dfrac{\rho_l^2}{p_s} & \dfrac{x}{2}\dfrac{\rho_l^2}{p_s} + q\\ \dfrac{x}{2}\dfrac{\rho_l^2}{p_s} - q & \dfrac{x}{2}\dfrac{\rho_l^2}{p_s}\end{pmatrix}\Psi + \chi\sqrt{\sigma}\frac{\rho_l^2}{p_s}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Phi\ , \qquad (11)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\chi}{2\sqrt{\sigma}} p_l \left(\Psi_1 + \Psi_2\right) - \chi\, p_l \Phi. \qquad (12)$$

$$\Psi\big|_{t\langle 0} = 0, \qquad (13)$$

$$\Phi\big|_{t\langle 0} = 0, \qquad (14)$$

Условия (5), (6) переписываются в виде

$$\Psi\big|_{x=0} = s(t). \qquad (15)$$

В формулах (11), (15)

$s(t) = (s_1(t),\, s_2(t)) = \left(\sqrt{\sigma(0)G} - \frac{1}{\sqrt{\sigma(0)}} F, \sqrt{\sigma(0)}G + \frac{1}{\sqrt{\sigma(0)}} F\right),\ q = \frac{\sigma'_x}{2\sigma},$ точка над переменной означает производную по времени.

4. Формулировка прямой задачи для системы (11), (12)

Рассмотрим ситуацию, когда источник, порождающий волны в пористой среде таков, что соответствующее ему решение системы (11), (12) имеет вид

$$\Psi(t,x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t-x) + \begin{pmatrix} \psi_1(t,x) \\ \psi_2(t,x) \end{pmatrix},$$
$$\Phi(t,x) = \psi_3(t,x),$$

где δ – дельта-функция Дирака, $\psi_i\ (i=1,2,3)$ – непрерывные при $t \ge x$ функции, имеющие, возможно, разрывы при $t = x, suup\psi_i(t,x) \subseteq \{t,x : t \ge x\}$.

Пусть компоненты $\Psi_1(t,x), \Psi_2(t,x)$ связаны при $x=0$ соотношением

$$\Psi_1(t,0) = \alpha\,\Psi_2(t,0) + M(t), \qquad (18)$$

где $\alpha = const,\ M(t)$-заданная функция вида

$$M(t) = \delta(t) + m(t).$$

Решение прямой задачи (11), (12) ищем в виде (16), (17). Положим по определению, что

$$\Psi(t,x)\big|_{t\langle x} \equiv 0, \qquad \Phi(t,x)\big|_{t\langle x} \equiv 0.$$

Обозначим независимые переменные вместо t,x через τ,η. Проинтегрируем первое уравнение системы (11)

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta} = \frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}\Psi_1(\tau,\eta) + \left(\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)} + q(\eta)\right)\Psi_2(\tau,\eta) + \chi(\eta)\sqrt{\sigma(\eta)}\,\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}\Phi(\tau,\eta),$$

вдоль характеристики $\tau - \eta = t - x,$ проходящей через фиксированную точку (t,x):

$$\Psi_1(t,x) = \int_{t-x}^{t} \frac{\chi(\tau-t+x)}{2}\frac{p_l^2(\tau-t+x)}{p_s(\tau-t+x)}\Psi_1(\tau,\tau-t+x)d\tau +$$
$$+ \int_{t-x}^{t} \left(\frac{\chi(\tau-t+x)}{2}\frac{p_l^2(\tau-t+x)}{p_s(\tau-t+x)} + q(\tau-t+x)\right)\Psi_2(\tau,\tau-t+x)d\tau +$$
$$+ \int_{t-x}^{t} \chi(\tau-t+x)\sqrt{\sigma(\tau-t+x)}\,\frac{p_l^2(\tau-t+x)}{p_s(\tau-t+x)}\,\Phi(\tau,\ \tau-t+x)d\tau + \Psi_1(t-x,0) \qquad (19)$$

Второе уравнение системы (11)

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \tau} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \eta} = \left(\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{p_l^2(\eta)}{p_s(\eta)} - q(\eta)\right)\Psi_1(\tau,\eta) + \frac{\chi(\eta)p_l^2(\eta)}{p_s(\eta)}\Psi_2(\tau,\eta) + \chi(\eta)\sqrt{\sigma(\eta)}\,\frac{p_l^2(\eta)}{p_s(\eta)}\Phi(\tau,\eta),$$

проинтегрируем вдоль характеристики $\tau+\eta=t+x$:

$$\Psi_2(t,x)=\int_0^t\left(q(t-\tau+x)-\frac{\chi(t-\tau+x)}{2}\frac{p_l^2(t-\tau+x)}{p_s(t-\tau+x)}\right)\Psi_1(\tau,t-\tau+x)d\tau-$$

$$-\int_0^t\frac{\chi(t-\tau+x)}{2}\frac{p_l^2(t-\tau+x)}{p_s(t-\tau+x)}\Psi_2(\tau,\,t-\tau+x)d\tau-$$

$$-\int_0^t\chi(t-\tau+x)\sqrt{\sigma(t-\tau+x)}\frac{p_l^2(t-\tau+x)}{p_s(t-\tau+x)}\Phi(\tau,t-\tau+x)d\tau. \qquad (20)$$

Здесь мы воспользовались условием $\Psi_2(0,x)=0.$

Интегрируя уравнение (12) от 0 до t и учитывая (14), получим

$$\Phi(t,x)=\frac{\chi(x)}{2\sqrt{\sigma(x)}}p_l(x)\int_0^t(\Psi_1(\tau,x)+\Psi_2(\tau,x))d\tau-\chi(x)p_l(x)\int_0^t\Phi(\tau,x)d\tau. \qquad (21)$$

Учитывая, что

1) $\Psi\big|_{t\langle 0}=0,$

2) Ψ_1 имеет $\delta-$образную особенность при $t=x,$

3) при $t\rangle x\,\Psi_i(t,x)=\psi_i(t,x)(i=1,2),\ \Phi(t,x)=\psi_3(t,x),$ получим из (19)-(21) при $t\rangle x$:

$$\psi_1(t,x)=\int_{t-x}^t\frac{\chi(\tau-t+x)}{2}\frac{p_l^2(\tau-t+x)}{p_s(\tau-t+x)}\psi_1(\tau,\tau-t+x)\,d\tau+$$

$$+\int_{t-x}^t\left(\frac{\chi(\tau-t+x)}{2}\frac{p_l^2(\tau-t+x)}{p_s(\tau-t+x)}+q(\tau-t+x)\right)\psi_2(\tau,\tau-t+x)d\tau+$$

$$+\int_{t-x}^t\chi(\tau-t+x)\sqrt{\sigma(\tau-t+x)}\frac{p_l^2(\tau-t+x)}{p_s(\tau-t+x)}\psi_3(\tau,\tau-t+x)d\tau+\psi_1(t-x,0). \qquad (22)$$

$$\psi_2(t,x)=\int_{(t+x)/2}^t\left(q(t-\tau+x)-\frac{\chi(t-\tau+x)}{2}\frac{p_l^2(t-\tau+x)}{p_s(t-\tau+x)}\right)\psi_1(\tau,\,t-\tau+x)d\tau-$$

$$-\int_{(t+x)/2}^t\frac{\chi(t-\tau+x)}{2}\frac{p_l^2(t-\tau+x)}{p_s(t-\tau+x)}\psi_2(\tau,t-\tau+x)d\tau-$$

$$-\int_{(t+x)/2}^t\chi(t-\tau+x)\sqrt{\sigma(t-\tau+x)}\frac{p_l^2(t-\tau+x)}{p_s(t-\tau+x)}\psi_3(\tau,\,t-\tau+x)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}q\left(\frac{t+x}{2}\right)-\frac{\chi\left(\frac{t+x}{2}\right)}{4}\frac{p_l^2\left(\frac{t+x}{2}\right)}{p_s\left(\frac{t+x}{2}\right)}. \qquad (23)$$

$$\psi_3(t,x)=\frac{\chi(x)}{2\sqrt{\sigma(x)}}p_l(x)\int_0^t(\psi_1(\tau,x)+\psi_2(\tau,x))d\tau-\chi(x)p_l(x)\int_0^t\psi_3(\tau,x)d\tau. \qquad (24)$$

Поставив в (22) вместо $\psi_1(t-x,0)$ его выражение из граничного условия (18), получим с учетом (23):

$$\psi_1(t,x)=\int_{t-x}^t\frac{\chi(\tau-t+x)}{2}\frac{p_l^2(\tau-t+x)}{p_s(\tau-t+x)}\psi_1(\tau,\,\tau-t+x)d\tau+$$

$$+\int_{t-x}^t\left(\frac{\chi(\tau-t+x)}{2}\frac{p_l^2(\tau-t+x)}{p_s(\tau-t+x)}+q(\tau-t+x)\right)\psi_2(\tau,\tau-t+x)d\tau+$$

$$+\int_{t-x}^t\chi(\tau-t+x)\sqrt{\sigma(\tau-t+x)}\frac{p_l^2(\tau-t+x)}{p_s(\tau-t+x)}\psi_3(\tau,\tau-t+x)d\tau+$$

$$+\alpha\int_{(t-x)/2}^{t-x}\left(q(t-\tau-x)-\frac{\chi(t-\tau-x)}{2}\frac{p_l^2(t-\tau-x)}{p_s(t-\tau-x)}\right)\psi_1(\tau,t-\tau-x)d\tau-$$

$$-\alpha\int_{(t-x)/2}^{t-x}\frac{\chi(t-\tau-x)}{2}\frac{p_l^2(t-\tau-x)}{p_s(t-\tau-x)}\psi_2(\tau,t-\tau-x)d\tau-$$

$$-\alpha\int_{(t-x)/2}^{t-x}\chi(t-\tau-x)\sqrt{\sigma(t-\tau-x)}\frac{p_l^2(t-\tau-x)}{p_s(t-\tau-x)}\psi_3(\tau,t-\tau-x)d\tau+$$

$$+\frac{\alpha}{2}q\left(\frac{t-x}{2}\right)-\alpha\frac{\chi\left(\frac{t-x}{2}\right)}{4}\frac{p_l^2\left(\frac{t-x}{2}\right)}{p_s\left(\frac{t-x}{2}\right)}+m(t-x). \qquad (25)$$

Соотношения (23)-(25) при известных q,m,p_l,p_s,χ и α представляют собой относительно $\psi_j,(j=1,2,3)$ замкнутую систему вольтерровых интегральных уравнений второго рода. Как известно, такая система всегда разрешима. Решением является непрерывная функция от (t,x).

Определение. Будем называть решением задачи для системы (11), (12) с нулевым начальным условием и граничным условием (18) обобщенную функцию от t вида (16), зависящего от параметра x, равную нулю при $t\langle x;\psi_1(t,x),\psi_2(t,x),\psi_3(t,x)$ являются непрерывными при $t\ge x$ функциями, удовлетворяющими системе интегральных уравнений (23)-(25).

5. Сингулярности решения системы (11), (12).

Для достаточно гладких $\sigma(x),m(t),\chi(t),p_l(x),p_s(x)$ решение системы (11), (12), удовлетворяющее граничному условию (18), имеет вид

$$\Psi(t,x)=\begin{pmatrix}a(x)\\0\end{pmatrix}\delta(t-x)+\begin{pmatrix}b_1(x)\\b_2(x)\end{pmatrix}\varepsilon(t-x)+\begin{pmatrix}c_1(x)\\c_2(x)\end{pmatrix}(t-x)_++\ldots, \qquad (26)$$

$$\Phi(t,x)=d_1(x)\varepsilon(t-x)+d_2(x)(t-x)_++\ldots, \qquad (27)$$

В (26) и (27) $\varepsilon(t)-$функция Хевисайда, многоточием обозначено более гладкое при $t=\tau(z)$, по сравнению с выписанными слагаемое,

$$x_+^n=\begin{cases}x^n, & x\rangle 0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

Найдем коэффициенты $a(x),b_1(x),b_2(x),c_1(x),c_2(x),d_1(x),d_2(x)$. Для этого подставим разложение (26), (27) в (11), (12) и приравняем коэффициенты при одинаковых сингулярностях. При этом учтем, что для любой функции k (9)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)k(t-x)=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\varepsilon(t-x)=2\delta(t-x),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)(t-x)_+=2\varepsilon(t-x).$$

Тогда получим

$$\begin{pmatrix}a'\\0\end{pmatrix}\delta(t-x)+2\begin{pmatrix}0\\b_2\end{pmatrix}\delta(t-x)+\begin{pmatrix}b_1'\\-b_2'\end{pmatrix}\varepsilon(t-x)+2\begin{pmatrix}0\\c_2\end{pmatrix}\varepsilon(t-x)+\begin{pmatrix}c_1'\\-c_2'\end{pmatrix}(t-x)_++\ldots=$$

$$
= a\begin{pmatrix} \frac{x}{2}\frac{p_l^2}{p_s} \\ \frac{x}{2}\frac{p_l^2}{p_s} - q \end{pmatrix}\delta(t-x) + \begin{pmatrix} \frac{x}{2}\frac{p_l^2}{p_s}b_1 + \left(\frac{x}{2}\frac{p_l^2}{p_s} + q\right)b_2 \\ \left(\frac{x}{2}\frac{p_l^2}{p_s} - q\right)b_1 + \frac{x}{2}\frac{p_l^2}{p_s}b_2 \end{pmatrix}\varepsilon(t-x) + \begin{pmatrix} \frac{x}{2}\frac{p_l^2}{p_s}c_1 + \left(\frac{x}{2}\frac{p_l^2}{p_s} + q\right)c_2 \\ \left(\frac{x}{2}\frac{p_l^2}{p_s} - q\right)c_1 + \frac{x}{2}\frac{p_l^2}{p_s}c_2 \end{pmatrix}(t-x)_+ +
$$

$$
+ \chi\frac{p_l^2}{p_s}\sqrt{\sigma}\,d_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\varepsilon(t-x) + \chi\frac{p_l^2}{p_s}\sqrt{\sigma}\,d_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(t-x)_+ + \ldots,
$$

$$
d_1\sigma(t-x) + d_2\varepsilon(t-x) + \ldots =
$$

$$
= \frac{\chi}{2\sqrt{\sigma}}p_l\left(a\delta(t-x) + (b_1+b_2)\varepsilon(t-x) + (c_1+c_2)(t-x)_+ + \ldots\right) -
$$

$$
- \chi p_l d_1\varepsilon(t-x) - \chi p_l d_2 (t-x)_+ + \ldots,
$$

Приравняв здесь члены с одинаковой сингулярностью, находим:

$$
a' = \frac{\chi}{2}\frac{p_l^2}{p_s}a,
$$

$$
b_1' = \frac{\chi}{2}\frac{p_l^2}{p_s}b_1 + \frac{a}{2}\left(\frac{\chi^2}{4}\frac{p_l^2}{p_s^2} + \chi\frac{p_l^2}{p_s}\sqrt{\sigma + q^2}\right),
$$

$$
b_2 = \frac{a}{2}\left(\frac{\chi}{2}\frac{p_l^2}{p_s} - q\right),
$$

$$
c_2 = \frac{b_1}{2}\left(\frac{p_l^2}{p_s}\chi - q\right) + \frac{a}{4}\left(\frac{\chi^2}{4}\frac{p_l^4}{p_s^2} + \chi\frac{p_l^2}{p_s}\sqrt{\sigma - q^2}\right) + \frac{\chi}{4}\frac{p_l^2}{p_s}b_2 + \frac{\chi}{2}\frac{p_l^2}{p_s}\sqrt{\sigma a}\,,
$$

$$
d_1 = a,
$$

$$
d_2 = \frac{\chi}{2\sqrt{\sigma}}(b_1+b_2)p_l - \chi p_l a.
$$

Откуда

$$
a = a_0 Exp\left(\int_0^x \frac{\chi(y)}{2}\frac{p_l^2(y)}{p_s(y)}dy\right),
$$

$$
b_1 = b_1^0 Exp\left(\int_0^x \frac{\chi(y)}{2}\frac{p_l^2(y)}{p_s(y)}dy\right) + \frac{a_0}{2}Exp\left(\int_0^x \frac{\chi(y)}{2}\frac{p_l^2(y)}{p_s(y)}dy\right)\times
$$

$$
\times\int_0^x\left(\frac{\chi^2\xi}{4}\frac{p_l^4(\xi)}{p_s^2(\xi)} + \chi(\varepsilon)\frac{p_l^2(\xi)}{p_s(\xi)}\sqrt{\sigma(\xi) - q^2(\xi)}\right)Exp\left(\int_0^\xi \frac{\chi(y)}{2}\frac{p_l^2(y)}{p_s(y)}dy\right)d\xi \qquad (28)
$$

Разумеется, так можно получить сколько угодно членов разложения $\psi(t,x), \Phi(t,x)$, точнее столько, сколько допускает гладкость коэффициентов σ, χ, p_l, p_s.

Найдем постоянные a_0 и b_1^0, поставив разложение (16) в граничное условие (18):

$$
a_0\delta(t) + (b_1 - \alpha b_2)\big|_{x=0}\varepsilon(t) + (c_1 - \alpha c_2)\big|_{x=0}t_+ + \ldots = \delta(t) + m(0)\varepsilon(t) + m'(0)t_+ + \ldots
$$

Отсюда

$$
a_0 = 1, \qquad b_1^0 = m(0) + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\chi(0)}{2}\frac{p_l^2(0)}{p_s(0)}\chi - \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)}\right). \qquad (29)
$$

И так, первые два члена разложения вектор-функции $\Psi(t,x)$и функции $\Phi(t,x)$записывается как

$$\Psi\left(t,x\right)=\left[Exp\left(\int_0^x \frac{\chi(y)}{2}\frac{p_l^2(y)}{p_s(y)}dy\right)\right]\delta(t-x)+\left[\left(\frac{\chi}{4}\frac{p_l^2}{p_s}-\frac{q}{2}\right)Exp^{b_1(x)}\left(\int_0^x \frac{\chi(y)}{2}\frac{p_l^2(y)}{p_s(y)}dy\right)\right]\varepsilon(t-x), \qquad (30)$$

$$\Phi(t,x)=\varepsilon(t-x)Exp\left(\int_0^x \frac{\chi(y)}{2}\frac{p_l^2(y)}{p_s(y)}dy\right). \qquad (31)$$

Здесь функция $b_1(x)$ определяется с помощью формул (28), (29).

В частности, из (30), (31) вытекают соотношения

$$\Psi_2(x+0,x)=\left(\frac{\chi(x)}{4}\frac{p_l^2(x)}{p_s(x)}-\frac{1}{4}\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}\right)Exp\left(\int_0^x \frac{\chi(y)}{2}\frac{p_l^2(y)}{p_s(y)}dy\right), \qquad (32)$$

$$\Phi(x+0,x)=Exp\left(\int_0^x \frac{\chi(y)}{2}\frac{p_l^2(y)}{p_s(y)}dy\right).$$

Из этих равенств получим

$$\frac{\Psi_2(x+0,x)}{\Phi(x+0,x)}=\frac{\chi(x)}{4}\frac{p_l^2(x)}{p_s(x)}-\frac{1}{4}\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}.$$

6 Метод решения обратных задач

Решение уравнения (12) с нулевыми данными (14) имеет вид

$$\Phi(t,x)=\frac{\chi(x)\rho_l(x)}{2\sqrt{\sigma(x)}}\int_0^t\left(\Psi_1(\tau,x)+\Psi_2(\tau,x)\right)e^{-\chi(x)p_l(x)(t-\tau)}d\tau.$$

Поставляя эту формулу в систему (11) получим относительно вектор-функции $\Psi(t,x)$ систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial\Psi}{\partial z}=\begin{pmatrix}\frac{\chi}{2}\frac{\rho_l^2}{\rho_s} & \frac{\chi}{2}\frac{\rho_l^2}{\rho_s}+q\\ \frac{\chi}{2}\frac{\rho_l^2}{\rho_s}-q & \frac{\chi}{2}\frac{\rho_l^2}{\rho_s}\end{pmatrix}\Psi+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{\chi^2\rho_l^3}{2\rho_s}\int_0^t\left(\Psi_1(\tau,x)+\Psi_2(\tau,x)\right)e^{-\chi(x)p_l(x)(t-\tau)}d\tau \qquad (33)$$

Назовем характеристиками системы (33) прямые $t=\pm x+t_0$. Выражения, стоящие в левой части системы (33), представляют собой производные от Ψ_1 или Ψ_2, взятые вдоль соответствующей характеристики: если подставить в первой аргумент $\Psi_1(t,x)$ вместо $t\,t=x=t_0$, то

$$\frac{d}{dx}\Psi_1(x+t_0,x)=\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\Big|_{t=x+t_0}.$$

Аналогично

$$\frac{d}{d\,x}\Psi_1(-x+t_0,x)=\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}\Big|_{t=-x+t_0}.$$

Поэтому, интегрируя уравнения, входящие в систему (33), вдоль соответствующих характеристик, получим при $t>x$

$$\Psi_1(t,x)=\int_0^x\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}\Psi_1(t+\eta-x,\eta)d\eta+\int_0^x\left[\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}+q(\eta)\right]\Psi_2(t+\eta-x,\eta)d\eta+$$

$$\int_0^x\frac{\chi^2(\eta)}{2}\frac{\rho_l^3(\eta)}{\rho_s(\eta)}\int_0^{t+\eta-x}(\Psi_1(\tau,\eta)+\Psi_2(\tau,\eta))\,e^{-\chi(\eta)\,pl(\eta)(t+\eta-x-\tau)}d\tau\,d\eta+\Psi_1(t-x,0),$$

$$\Psi_2(t,x)=\int_0^x\left[\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}-q(\eta)\right]\Psi_1(t-\eta+x,\eta)d\eta+\int_0^x\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}\Psi_2(t-\eta+x,\eta)d\eta+$$
$$+\int_0^x\frac{\chi^2(\eta)\rho_l^3(\eta)}{2\rho_s(\eta)}\int_0^{t-\eta+x}(\Psi_1(\tau,\eta)+\Psi_2(\tau,\eta))e^{-\chi(\eta)pl(\eta)(t+\eta-x-\tau)}d\tau\,d\eta+\Psi_2(t+x,0),$$

Поставляя вместо функций $\Psi_i(t\pm x,0)$ их значения $s_i(t\pm x)$, получим

$$\Psi_1(t,x)=\int_0^x\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}\Psi_1(t+\eta-x,\eta)d\eta+\int_0^x\left[\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}+q(\eta)\right]\Psi_2(t+\eta-x,\eta)\,d\eta+$$
$$+\int_0^x\frac{\chi^2(\eta)\rho_l^3(\eta)}{2\rho_s(\eta)}\int_0^{t-\eta+x}(\Psi_1(\tau,\eta)+\Psi_2(\tau,\eta))e^{-\chi(\eta)pl(\eta)(t+\eta-x-\tau)}d\tau\,d\eta+s_1(t-x), \qquad (34)$$

$$\Psi_2(t,x)=\int_0^x\left[\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}-q(\eta)\right]\Psi_1(t-\eta+x,\eta)\,d\eta+\int_0^x\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}\Psi_2(t-\eta+x,\eta)\,d\eta+$$
$$+\int_0^x\frac{\chi^2(\eta)\rho_l^3(\eta)}{2\rho_s(\eta)}\int_0^{t-\eta+x}(\Psi_1(\tau,\eta)+\Psi_2(\tau,\eta))e^{-\chi(\eta)pl(\eta)(t-\eta+x-\tau)}d\tau\,d\eta+s_2(t+x). \qquad (35)$$

Далее рассмотрим обратную задачу 1. Вместо функцию $\mu(x)$ будем определят функцию $q(x)$, считая остальные коэффициенты известными.

В уравнения (34), (35) входят три неизвестных функции: $\Psi_1(t,x)$, $\Psi_2(t,x)$ и $q(x)$. Поэтому нужно еще одно уравнение. Вспоминая, что при особенности (16) функции $\Psi_2(t,x)$ справедлива формула (32). По определению положим

$$\Psi_2(x,x)=\left(\frac{\chi(x)}{4}\frac{\rho_l^2(x)}{\rho_s(x)}-\frac{1\sigma'(x)}{4\sigma(x)}\right)Exp\left(\int_0^x\frac{\chi(y)}{2}\frac{\rho_l^2(y)}{\rho_s(y)}d\,y\right),$$

Отсюда и из (35), получим

$$q(x)=-2Exp\left(-\int_0^x\frac{\chi(y)}{2}\frac{\rho_l^2(y)}{\rho_s(y)}d\,y\right)\int_0^x\left[\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}-q(\eta)\right]\Psi_1(2x-\eta,\eta)\,d\eta-$$
$$-2Exp\left(-\int_0^x\frac{\chi(y)}{2}\frac{\rho_l^2(y)}{\rho_s(y)}d\,y\right)\int_0^x\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}\Psi_2(2x-\eta,\eta)d\eta-$$
$$-2Exp\left(-\int_0^x\frac{\chi(y)}{2}\frac{\rho_l^2(y)}{\rho_s(y)}d\,y\right)\int_0^x\frac{\chi^2(\eta)\rho_l^3(\eta)}{2\rho_s(\eta)}\int_0^{2x-\eta}\Psi_1(\tau,\eta)e^{-\chi(\eta)pl(\eta)(t-\eta+x-\tau)}d\tau\,d\eta- \qquad (36)$$
$$-2Exp\left(-\int_0^x\frac{\chi(y)}{2}\frac{\rho_l^2(y)}{\rho_s(y)}d\,y\right)\int_0^x\frac{\chi^2(\eta)\rho_l^3(\eta)}{2\rho_s(\eta)}\int_0^{2x-\eta}\Psi_2(\tau,\eta)e^{-\chi(\eta)pl(\eta)(t-\eta+x-\tau)}d\tau\,d\eta-$$
$$-2Exp\left(-\int_0^x\frac{\chi(y)}{2}\frac{\rho_l^2(y)}{\rho_s(y)}d\,y\right)s_2(2x)+\frac{\chi(x)}{2}\frac{\rho_l^2(x)}{\rho_s(x)}$$

Уравнение (36) и есть недостающее. Уравнения (34)-(36)образуют замкнутую систему нелинейных вольтерровых интегральных уравнений второго рода.

7 Исследование системы интегральных уравнений

Система уравнений (34)-(36) обладает малым параметром, роль которого играет мера области интегрирования в этих уравнениях. Благодаря наличию этого малого параметра к системе уравнений оказывается применим в области принцип сжатых отображений.

Рассмотрим множество троек функций

$$X=\{\Psi_1(t,z),\,\Psi_2(t,z),\,q(z)\}.$$

Функции, входящие в тройку X, будем обозначать также $X_1(t,x), X_2(t,x), X_3(x)$; $X_3(x)=q(x)$ определена и непрерывна на интервале $[0,x_0]$ при некотором $x_0>0$, функции $X_i(t,x)=\Psi_i(t,x)$ при $i=1{,}2$ определены и непрерывна на треугольнике $\Delta(x_0)=\{t,x: x\le x_0,\ x\le t\le 2x_0-x\}$.

Обозначаем через $B(M,x_0)$ множество функций $\{\,X\,\}$ таких, что

$$\max\{|X_1(t,x)|, |X_2(t,x)|, |X_3(x)|\}=M,$$

где $M>0-$ некоторая постоянная.

Запишем систему уравнений (34)-(36) в виде операторного уравнения

$$X = AX, \qquad (37)$$

где оператор A определен на множестве функций $X\in C(\Delta(x_0))$ и в соответствие с равенствами (34)-(36) имеет вид $A=(A_1, A_2, A_3)$:

$$A_1X=\int_0^x \frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}X_1(t+\eta-x,\eta)d\eta+\int_0^x\left[\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}+X_3(\eta)\right]X_2(t+\eta-x,\eta)\,d\eta+$$
$$\int_0^x\frac{\chi(\eta)\rho_l^3(\eta)}{2\rho_s(\eta)}\int_0^{t+\eta-x}(X_1(\tau,\eta)+X_2(\tau,\eta))e^{-\chi(\eta)\,pl(\eta)(t+\eta-x-\tau)}d\tau\,d\eta+s_1(t-x),$$

$$A_2X=\int_0^x\left[\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}-X_3(\eta)\right]X_1(t-\eta+x,\eta)d\eta+\int_0^x\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}+X_2(t-\eta+x,\eta)\,d\eta+$$
$$\int_0^x\frac{\chi^2(\eta)\rho_l^3(\eta)}{2\rho_s(\eta)}\int_0^{t+\eta-x}(X_1(\tau,\eta)+X_2(\tau,\eta))e^{-\chi(\eta)\,pl(\eta)(t-\eta+x-\tau)}d\tau\,d\eta+s_2(t+x).$$

$$A_3X=-2Exp\left(\int_0^x\frac{\chi(y)}{2}\frac{\rho_l^2(y)}{\rho_s(y)}dy\right)\int_0^x\left[\frac{\chi(\eta)}{2}\frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)}-X_3(\eta)\right]X_1(2x-\eta,\eta)d\eta-$$
$$-2Exp\left(-\int_0^x\frac{\chi(y)}{2}\frac{\rho_l^2(y)}{\rho_s(y)}dy\right)\int_0^x\frac{\chi(\eta)\rho_l^3(\eta)}{2\rho_s(\eta)}X_2(2x-\eta,\eta)d\eta-$$
$$-2Exp\left(-\int_0^x\frac{\chi(y)}{2}\frac{\rho_l^2(y)}{\rho_s(y)}dy\right)\int_0^x\frac{\chi(\eta)\rho_l^3(\eta)}{2\rho_s(\eta)}\int_0^{2x-\eta}X_1(\tau,\eta)e^{-\chi(\eta)\,pl(\eta)(t-\eta+x-\tau)}d\tau\,d\eta-$$
$$-2Exp\left(-\int_0^x\frac{\chi(y)\rho_l^2(y)}{2\rho_s(y)}dy\right)\int_0^x\frac{\chi^2(\eta)\rho_l^3(\eta)}{2\rho_s(\eta)}\int_0^{2x-\eta}X_2(\tau,\eta)e^{-\chi(\eta)\,pl(\eta)(t-\eta+x-\tau)}d\tau\,d\eta-$$
$$-2Exp\left(-\int_0^x\frac{\chi(y)}{2}\frac{\rho_l^2(y)}{\rho_s(y)}dy\right)s_2(2x)+\frac{\chi(x)}{2}\frac{\rho_l^2(x)}{\rho_s(x)}.$$

Если функция $s_1(t), s_2(t)$ непрерывны при $0\le t\le 2x_0$, $a\chi(x), \rho l(x), \rho_s(x)$ непрерывны при $0\le t\le x_0$, то очевидно, что тройка AX принадлежит множеству $B(M',x_0)$ с другой, вообще говоря, константой M'. Как было отмечено, система обладает малым параметром x_0. Поэтому оператор A осуществляет для малых x_0 сжатое отображение множества $B(M,x_0)$ на себя. Тогда в силу теоремы С. Банаха (см.например, (15)) на множества $B(M,x_0)$ существует притом только одна неподвижная точка отображения, т.е. существует только одно решение уравнения (37). Следовательно, решая систему уравнений (34)-(36) например, методом последовательных приближений (из теоремы С. Банаха следует его сходимость к решению), мы однозначно построим в области $B(M,x')$ для $x' \in (0,x_0)$ функции X_1, X_2, X_3. Тем самым определяется решение обратной задачи 1. Аналогичным образом доказывается единственность и существование обратных задач 2, 3, 4.

8 Непрерывная зависимость решений обратных задач от входных данных

Определенный ранее оператор A зависит от функций $s_1(t), s_2(t)$, входящих в постановку обратных задач. Пусть заданы две пары функций: $s_1(t), s_2(t)$ и $\tilde{s}_1(t), \tilde{s}_2(t)$ **.** Операторы A и $\tilde{A}$ построены **с** помощью функций $s_1(t)$ и $\tilde{s}_1(t)$ соответственно. Разность $AX - \tilde{A}X$ для любого X есть тройка.

$$s_1(t-x)-\tilde{s}_1(t-x), \quad s_2(t+x)-\tilde{s}_2(t+x), \quad s_2(2x-\tilde{s}_2(2x).$$

Далее рассуждая как в (8,9), можно доказать следующие

Теорема. Пусть

$$\max_{t\in[0,2x_0]} (|s_1(t)-\tilde{s}_1(t)|, |s_2(t)-\tilde{s}_2(t)|) \le \delta.$$

Тогда имеет место оценка

$$|q(x)-\tilde{q}(x)| \le C\delta,$$

где $C = C(x_0, M) < 0 -$ постоянная.

Замечание. Соответствующие теоремы непрерывной зависимости решения от входных данных имеют место для обратных задач 2, 3 и 4.

Список литературы

(1) Алексеев А. С., Имомназаров Х. Х., Грачев Е. В, Рахмонов Т. Т., Имомназаров Б. Х. Прямые и обратные динамические задачи для системы уравнений континуальной теории фильтрации // Сиб. ЖИМ. – 2004, т. VII, No 1 (17), с. 3-8.

(2) Алексеев А. С. Обратные динамические задачи сейсмики // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных, Москва Наука, 1967. с. 9-84.

(3) Алексеев А. С. Некоторые обратные задачи теории распространения волн // Изв. АН СССР. Сер. Геофиз. – 1962. – № 11-12. с. 1514-1531.

(4) Гельфанд И. М., Левитан Б. М. об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1951. т. 15, № 4. с. 309-360.

(5) Крейн М. Г. Решение обратной задачи Штурма – Лиувилля // Доклады АН СССР, 1951. т. 76, № 1, с. 21-24.

(6) Крейн М. Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // Доклады АН СССР, 1954. т. 94, № 6, с. 987-990.

(7) Алексеев А. С., Добринский В. И. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмики // Математические проблемы геофизики. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, -1975. – Вып. , ч. 2. – с.

(8) Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.

(9) Белишев М. И., Благовещинский А. С. Динамические обратные задачи теории волн. СПб.: Изд-во СПб. Ун-та, 1999.

(10) Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. – 286 с.

(11) Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И. Волновые процессы в насыщенных пористых упруго деформируемых средах // ФГВ. 1993, №. 1. с. 100-111.

(12) Blokhin A. M., Dorovsky V. N., Mathematical modeling in the theory of multivelocity continuum, *Nova Science Publishers, Ins, New York.* 1995, 192 p.

(13) Imomnazarov Kh. Kh. Estimates of conditional stability of some combined problems for Maxwell’s equations of porous media // Comp. Appl. Math., v. 20, 2001, pp. 20-34.

(14) Имомназаров Х. Х. Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб. ЖИМ, 2001, т.IV, No.2(8). С.154-165.

(15) Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.