УДК 550.344

Сингулярное решение одномерного уравнения SH волн в пористых средах.

Холмуродов А.Э.
730019, Республика Узбекистан, Кашкадарьинская область, город Карши, улица Кучабаг 17, Каршинский Государственный университет, Компьютерный центр.

Аннотация- получены сингулярное решения одномерного уравнение SH волн в упруго-пористых средах. Для коэффициентов разложения волновых полей получения вольтерровых интегральных уравнений второго рода. Показано, что при исчезновении пористости эти коэффициенты переходят к известным выражениям для коэффициентов разложения волновых полей для упругой модели.

Singular solitions for ID for SH waves for porous medium

Kholmurodov A.E.
Karshi State University
Computing Center.
Kuchabag street, 17, Karshi,
Kashkadarya region, Uzbekistan

Abstract-singular solutions of the IS equation for SH waves in an elasticporous medium are abtained. For expansion coefficients of wave fields a system of Volterra integral equations of the second kind are obtained. It is shwn that at vanishing of proposity these coefficients are transformed into well known expressions for the coefficients of expansion of wave fields for an elastic model.

1. Введение.

В прикладных задачах распространение упругих волн часто возникает потребность учесть пористость, флюидонасыщенность среды и гидродинамический фон. В частности, эти вопросы возникают в разведочной геофизике при поиске нефтяных слоев и при выборе параметров волнового воздействия на месторождения нефти и газа с целью интенсификации добычи. Аналогичные вопросы имеются в сейсмологии при геофизическом мониторинге свойств очаговой зоны с целью прогноза землетрясений [1]. Реальные средства являются пористыми, трещиноватыми и поглощающими. (в система происходит потеря энергии).

В [2, 3] исследованы сингулярности решения уравнений гиперболического типа. В данной работе, используя идеи [2, 3], исследуются сингулярности решения одномерного уравнения SH волн для насыщенных жидкостью пористых сред при потери энергии за счёт межкомпонентного трения.

2. Постановка задачи.

Уравнения движения распространения сейсмических SH волн в среде с поглощением имеет вид [4, 5, 6]

$$\rho_s(z)U_{tt} = (\mu(z)U_z)_z - \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t), \qquad (1)$$

$$\rho_l(z)V_{tt} = \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t), \qquad (2)$$

Здесь U и V – компоненты вектора смещений частиц упругого пористого тела и жидкости с парциальным плотностями $\rho_s(z)$ и $\rho_l(z)$ соответственно, $\chi(z)$.- коэффициент трения.

Пусть система (1), (2) справедлива при z>0. Предположим, что пористая среда покоится при t<0:

$$U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0 \qquad (3)$$

$$V|_{t=0} = V_t|_{t=0} = 0 \qquad (4)$$

Пусть на границе z=0 приложена сила [7]:

$$\mu U_z|_{z=0} = F(t) \qquad (5)$$

Требуется по этой информации и заданным функциям – дважды непрерывно дифференцируемым $\rho_s(z)$ и $\mu(z)$ и непрерывным $\rho_l(z)$, $\chi(z)$ - определить волновое поля U(t,z), V(t,z).

3. Алгоритм решения.

Решение задачи (1)-(5) ищем следуя [3] в виде

$$U(t,z)=\alpha^s(z)\varepsilon(t-\tau(z))+\beta^s(z)(t-\tau(z))_+ +\frac{1}{2}\gamma^s(z)(t-\tau(z))_+^2+\dots . \qquad (6)$$

$$V(t,z)=\alpha^t(z)\varepsilon(t-\tau(z))+\beta^l(z)(t-\tau(z))_+ +\frac{1}{2}\gamma^l(z)(t-\tau(z))_+^2+\dots . \qquad (7)$$

В (6) и (7) ε(t)- функция Хевисайда, многоточием обозначено более гладкое при t=τ(z)…., по сравнению с выписанным слагаемое.

$$x_+^n=\begin{cases}x^n, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

Найдем коэффициенты $\alpha^s(z),\alpha^l(z),\beta^s(z),\beta^l(z),\gamma^s(z),\ \gamma^l(z).$ Подставляя разложений (6), (7) в систему (1), (2), получим

$$p_s(z)\alpha^s(z)\delta'(t-\tau)+p_s(z)\beta^s(z)\delta(t-\tau)+p_s(z)\gamma^s(z)\varepsilon(t-\tau)+\ldots=$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}\Big(\mu(\alpha^s)_z\,\varepsilon(t-\tau)-\mu\alpha^s\tau'_z\delta(t-\tau)-\mu\beta^s\tau'_z\varepsilon(t-\tau)+\mu(\beta^s)_z(t-\tau)_+-\mu\gamma^s\tau'_z(t-\tau)_+ +\ldots\Big)-$$
$$-\chi(z)p_l^2(z)\Big((\alpha^s(z)-\alpha^l(z))\delta(t-\tau)+(\beta^s(z)-\beta^l(z))\varepsilon(t-\tau)+(\gamma^s(z)-\gamma^l(z))(t-\tau)_+ +\ldots\Big)=$$
$$=\mu\alpha^s(\tau'_z)^2\delta'(t-\tau)-(\mu\alpha^s\tau'_z)'_z\delta(t-\tau)-\mu(\alpha^s)'_z\tau'_z\delta(t-\tau)+\mu\beta^s(\tau'_z)^2\delta(t-\tau)+$$
$$+\Big(\mu(\alpha^s)'_z\Big)'_z\varepsilon(t-\tau)-(\mu\beta^s\tau'_z)'_z\varepsilon(t-\tau)-\mu(\beta^s)'_z\tau'_z\varepsilon(t-\tau)+\mu\gamma^s(\tau'_z)^2\varepsilon(t-\tau)-$$
$$-\chi(z)p_l^2(z)\Big(\alpha^s(z)-\alpha^l(z)\Big)\delta(t-\tau)-\chi(z)p_l^2(z)\Big(\beta^s(z)-\beta^l(z)\Big)\varepsilon(t-\tau)-$$
$$-\chi(z)p_l^2(z)\Big(\gamma^s(z)-\gamma^l(z)\Big)(t-\tau)_+ +\ldots \qquad (8)$$

$$\alpha^l(z)\delta(t-\tau)+\beta^l(z)\delta(t-\tau)+\gamma^l(z)\delta(t-\tau)_+ +\ldots=\chi(z)p_l(z)\Big(\alpha^s(z)-\alpha^l(z)\Big)\varepsilon(t-\tau)+$$
$$+\chi(z)p_l(z)\Big(\beta^s(z)-\beta^l(z)\Big)(t-\tau)_+ +\frac{\gamma^s(z)-\gamma^l(z)}{2}\chi(z)p_l(z)(t-\tau)_+^2+\ldots \qquad (9)$$

При выводе этих равенств мы воспользовались свойством функции Дирака. [8]

$$\delta(t)=\varepsilon'(t).$$

Приравнивая коэффициенты при $\delta'(t-\tau)$ в (8), находим что функция $\tau(z)$ удовлетворят уравнению эйконала

$$(\tau'_z)=\frac{\rho_s}{\mu},$$

откуда

$$\tau(z)=\int_0^z\frac{d\xi}{c_t(\xi)},$$

где $c_t(z)=\sqrt{\dfrac{\mu(z)}{\rho_s(z)}}$ есть скорость распространения поперечных сейсмических волн в пористой среде.

Приравнивание коэффициентов при $\delta(t-\tau)$ в (8) и (9) дает

$$(\mu\alpha^s\tau_z')_z'+\mu(\alpha^s)_z'\tau_z'+\chi(z)\rho_l^2(z)\alpha^s(z)=0,$$

$$\alpha^l(z)=0.$$

Отсюда с учетом найденного значения функции $\tau(z)$, получим

$$(\sigma\alpha^s)_z'+\sigma(\alpha^s)_z'+\chi(z)\rho_l^2(z)\alpha^s(z)=0. \qquad (10)$$

Здесь $\sigma(z)=\sqrt{\mu(z)\rho_s(z)}.$

В эквивалентном виде уравнения (10) имеет вид

$$2\sqrt{\sigma}\left(\sqrt{\sigma}\alpha^s\right)_z'+\chi(z)\rho_l^2(z)\alpha^s(z)=0,$$

откуда

$$\sqrt{\sigma(z)}\alpha^s(z)=const-\frac{1}{2}\int_0^z\frac{\chi(x)\rho_l^2(x)\alpha^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}}dx,$$

или

$$\alpha^s(z)=\frac{const}{\sqrt{\sigma(z)}}-\frac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z\frac{\chi(x)\rho_l^2(x)\alpha^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}}dx \qquad (11)$$

Используя граничное условие (5) и разложение функции F(t)|3|

$$F(t)=\delta(t)+f(0)\varepsilon(t)+\ldots$$

Получим формулу для определения постоянной интегрирования

$$const=-\frac{1}{\sqrt{\sigma(0)}}$$

Поставляя это значение в (11), получим

$$\alpha^s(z)=-\frac{1}{\sqrt{\sigma(0)\sigma(z)}}-\frac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z\frac{\chi(x)\rho_l^2(x)\alpha^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}}dx \qquad (12)$$

Наконец, приравняв коэффициенты при ε(t-τ) в (8), (9) находим

$$(\mu(\alpha^s)_z')_z'-(\mu\beta^s\tau_z')_z'-\mu(\beta^s)_z'\tau_z'-\chi(z)\rho_l^2(z)(\beta^s(z)-\beta^l(z))=0,$$

$$\beta^l(z)=\chi(z)\rho_l(z)\alpha^s(z).$$

или

$$2\sqrt{\sigma}\left(\sqrt{\sigma}\beta^s\right)_z'=(\mu(\alpha^s)_z')_z'-\chi(z)\rho_l^2(z)(\beta^s(z)-\beta^l(z)),$$

откуда

$$\sqrt{\sigma(z)}\beta^s(z) = const - \frac{1}{2}\int_0^z \frac{\chi(x)\rho_l^2(x)\beta^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}}dx + \frac{1}{2}\int_0^z \frac{\chi(x)\rho_l^2(x)\alpha^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}}dx + $$
$$+\frac{1}{2}\int_0^z \frac{1}{\sqrt{\sigma(x)}}\left(\mu(x)(\alpha^s(x))'_x\right)'_x dx$$

Для обе части этого равенства на $\sqrt{\sigma(z)}$ получим

$$\beta^s(z) = -\frac{const1}{\sqrt{\sigma(z)}} - \frac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z \frac{\chi(x)\rho_l^2(x)\beta^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}}dx + \frac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z \frac{\chi^2(x)\rho_l^3(x)\alpha^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}}dx +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z \frac{1}{\sqrt{\sigma(x)}}\left(\mu(x)(\alpha^s(x))'_x\right)'_x dx = \frac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(x)}}\right)^{/}_x \mu(x)\right]dx -$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z \frac{\chi(x)\rho_l^2(x)\beta^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}}dx + \frac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z \frac{\chi^2(x)\rho_l^3(x)\alpha^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}}dx -$$
$$-\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(z)}}\right)^{/}_z \frac{\mu(z)}{2\sigma(z)\sqrt{\sigma(0)}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma(z)\sigma(0)}}\left(\frac{\sigma'(0)}{\rho_s(0)} - f(0)\right). \qquad (13)$$

При выводе этой формулы мы воспользовались формулой интегрирования по частям и граничным условием (5). Можно получить сколько угодно членов разложения волновых полей $U(t,z)$ и $V(t,z)$, точнее столько, сколько допускает гладкость коэффициента $\sigma(z)$.

Соотношения (12), (13) при заданных $\rho_s(z), \mu(z), \rho_l(z), \chi(z)$ представляет собой относительно $\alpha^s(z), \beta^s(z)$ систему вольтерровых интегральных уравнений второго рода. Как известно, такая система всегда разрешима. Зная функцию $\alpha^s(z)$, по явной формуле находим функцию $\beta^l(z) = \chi(z)\rho_l(z)\alpha^s(z)$.

В частном случае, когда $\sigma(z) = 1$, выражения для $\alpha^s(z), \beta^s(z)$ существенно упростятся

$$U|_{t=\tau(z)+0} = -1 - \frac{1}{2}\int_0^z \chi(x)\rho_l^2(x)U|_{t=\tau(x)+0}\,dx,$$

$$U|_{t=\tau(z)+0} = -\frac{1}{2}\int_0^z \chi(x)\rho_l^2(x)U_t|_{t=\tau(x)+0}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^z \chi^2(x)\rho_l^3(x)U|_{t=\tau(x)+0}\,dx + f(0).$$

При исчезновении пористости парциальные плотности ρ_s и ρ_l стремится к ρ_s^f и 0 соответственно. [4,5,9]. Здесь ρ_s^f -плотность упругой среды. Поэтому устремляя пористость к нулю в (12), (13) получим известные формулы, приведенные в [3] для коэффициентов разложения волнового поля для упругой среды.

Таким образом, получили сингулярные решение для одномерного уравнения SH волн для пористой среде с учетом потери энергии на межкомпонентное трение.

Автор выражает искреннюю благодарность д.ф.-м.н. Имомназарову Х.Х. за постановку задачи и полезные советы.

Список литературы.

|1| Алексеев А.С., Имомназаров Х.Х., Грачев Е.В., Рахмонов Т.Т., Имомназаров Б.Х. Прямые и обратные динамические задачи для системы уравнений однородных упруго-пористых сред. //Труды Международной конференции «Математические методы в геофизике», ч.1.- Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 2003, с 99-106.

|2| Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.

|3| Белишев М.И., Благовещинский А.С. Динамические обратные задачи теории волн. СПб: Изд-во СПб. Университета, 1999

|4| Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах. //ФГВ. 1993, No 1. с. 100-111.

|5| Blokhin A.M., Dorovsky V.N., mathematical modeling in the theory of multi velocity continuum, nova science publishers, Inc, New York, 1995, 192 p

|6| Imomnazarov Kh.Kh. Estimates of conditional stability of some combined inverse problems for Maxwell's equations and equations of porous media //Comp. Appl. Math., v.20, 2001, pp. 20-34.

|7| Имомназаров Х.Х. Численное моделирования некоторых задач теории фильтрации для пористых сред. // Сиб. ЖИМ, 2001, Т. 4, No. 2(8), с 154-165

|8| Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

|9| Имомназаров Х.Х. Несколько замечаний о системе уравнений Био //Доклады РАН. 2000, Т. 373, No.4, с.536-537.