

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**КАРАКАЛПАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ БЕРДАХА**

*На правах рукописи*

Нурманова Назира Кудайназаровна

**Обратная задача теории рассеяния для оператора  
дирака типа «ступеньки»**

*Специальность: 5А 460101 – «Математический анализ»*

**ДИССЕРТАЦИЯ**

*на соискание академической степени магистра*

Работа рассмотрена на кафедре  
«Математического анализа» и допущена к  
защите. Заведующей кафедрой:  
\_\_\_\_\_ к.ф. - м. н., доц. Отемуратов Б.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2010 г.

Научный руководитель: \_\_\_\_\_  
к. ф. - м. н., доц. Танирбергенов М.Б.

Нукус – 2010 г.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
<b>ГЛАВА I. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА</b>	
§ 1.1. Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака на полупрямой .....	14
§ 1.2. Обратная задача на полупрямой по спектральной функции.....	18
§ 1.3. Формулы регуляризованных следов.....	22
§ 1.4. Заключение .....	28
<b>ГЛАВА II. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ</b>	
§ 2.1. Граничная задача на полупрямой с дискретным спектром .....	30
§ 2.2. Решение Йоста и её свойства .....	32
§ 2.3. Функция рассеяния и её свойства .....	33
§ 2.4. Вывод интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко.....	41
§ 2.5. Восстановление потенциальной матрицы–функции на полупрямой $(-\infty, a]$ .....	47
§ 2.6. Заключение.....	50
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	51
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	52

## Введение

Следующие операторы называемые соответственно оператором Штурма–Лиувилля (Шредингера) и Дирака

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

широко применяются как в математике, так и в физике.

В случае оператора Штурма–Лиувилля функцию  $q(x)$ , а в случае оператора Дирака функцию  $u(x) = q(x) - ip(x)$  называют потенциалом.

Нахождение по заданному потенциалу спектральных характеристик этих операторов называют прямой задачей, восстановление потенциала по некоторым спектральным характеристикам называют обратной задачей для этих операторов.

Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля исследовалась в работах В.А.Амбарцумяна, Г.Борга, Ю.М.Березанского, А.Ш.Блоха, В.С.Буслаева, М.Г.Гасимова, И.М.Гельфанда, Ф. Гестези, М.Г.Крейна, П.П.Кулиша, И.Кея, Б.М.Левитана, Н.Левинсона, В.А.Лянце, В.А.Марченко, Ю.Мозера, В.В.Жикова, Ф.С.Роффе–Бекетова, В.А.Садовнического, Б.Саймона, А.Н.Тихонова, Л.Д.Фаддеева, В.Л.Фомина, Л.А.Чудова, В.А.Юрко и других.

В 1929 году В.А.Амбарцумян установил, что если собственные значения задачи Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля совпадают с числами  $n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то потенциал этого уравнения тождественно равен нулю.

В 1946 году Г.Борг показал, что в общем случае, один спектр оператора Штурма–Лиувилля его не определяет, так что результат Амбарцумяна является исключением из общего правила. В этой же работе Борг доказал, что два спектра оператора Штурма–Лиувилля (при различных граничных условиях) определяют его однозначно.

А.Н.Тихоновым [1] получена теорема единственности решения обратной задачи на полуоси для уравнения Штурма–Лиувилля по  $m(z)$  – функции Вейля–Титчмарша (по импедансной функции). Дальнейшие результаты в области единственности решения обратных задач принадлежат В.А.Марченко [24], Л.Д.Фаддееву [30–32], Ш.А.Алимову [1], F.Gesztesy, V.Simon и др.

Уравнение Дирака – одно из основных уравнений квантовой механики. Оно получено факторизацией уравнения Шредингера и описывает некоторые явления, не поддающиеся объяснению с помощью уравнения Шредингера. Оператор Дирака, вообще говоря, не полуограничен, и многие методы, разработанные для изучения полуограниченных операторов, к нему неприменимы.

Важным этапом в теории обратных задач и их приложений явилось перенесение методов, разработанных для уравнения Штурма–Лиувилля, на системы двух дифференциальных уравнений типа системы Дирака.

Обратная задача для системы Дирака была изучена в работах М.Г.Гасимова, Б.М.Левитана, И.С.Фролова, Л.П.Нижника, Фам Лой Ву, Ф.Г.Максудова, С.Г.Велиева, В.Е.Захарова, А.Б.Шабата, Л.А.Тахтаджяна, Л.Д.Фаддеева, М.Абловица, Х.Сегура, Д.Каупа, А.Ньюеля, А.В.Савина, А.А.Даниеляна, М.З.Замонова, А.Б.Хасанова и других.

После работы Г.Гарднера, Ж.Грина, М.Крускала и Р.Миуры [13] операторы Штурма–Лиувилля и Дирака нашли приложение при решении задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений, таких как уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t - buu_x + u_{xxx} = 0,$$

нелинейное уравнение Шредингера

$$iu_t + u_{xx} - 2|u|^2 u = 0$$

и модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t + bu^2 u_x + u_{xxx} = 0.$$

Всё это вызвало интерес к изучению операторов Штурма-Лиувилля и Дирака с потенциалами специального вида, например, с периодическими, почти-периодическими, убывающими, предельно-периодическими, суммируемыми с некоторым весом, с особенностями в некоторых точках, ступенчатыми и т.п. потенциалами, с целью возможного применения к нелинейным уравнениям математической физики.

Одними из важных равенств в теории обратных спектральных задач являются так называемые формулы регуляризованных следов. Впервые в 1953 году И.М.Гельфандом и Б.М.Левитаном [7] была получена формула для суммы разностей собственных значений двух регулярных операторов Штурма-Лиувилля. Вскоре после этого Л.А.Дикий предложил другой метод, с помощью которого ему удалось дать рекуррентные формулы для вычисления регуляризованных следов всех степеней оператора Штурма-Лиувилля. Следующий важный шаг был сделан В.Б.Лидским и В.А.Садовничим. Затем аналогичная задача была решена в работе Э.Абдукадырова для регулярного оператора Дирака.

В 1994 году П.Д.Лакс [23] предложил более элементарный метод вычисления регуляризованного следа оператора Штурма-Лиувилля. В работах А.Б.Хасанова и А.Б.Яхшимуратова [36] методом Лакса вычислен регуляризованный след для регулярного оператора Дирака.

В первой главе настоящей диссертации методом Лакса вычислен регуляризованный след для оператора Дирака с особенностью в потенциале. Первыми обратную задачу квантовой теории рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля изучали Фрэдберг и Хиллераас. Задавая  $S$ -фазу рассеяния, они получили формальное выражение для потенциала  $q(x)$ , чего, однако, как выяснилось позже, знать недостаточно.

Баргман первым нашел примеры различных потенциалов с одинаковыми  $S$ -фазами и одинаковыми дискретными спектрами. После этого Левинсон показал, что если дискретный спектр отсутствует, то по  $S$ -фазе потенциал определяется однозначно. Затем, В.А.Марченко [24]

показал, что потенциал определяется однозначно, если заданы  $S$ -фаза, собственные значения и нормировочные числа.

Исследование разрешимости обратной задачи квантовой теории рассеяния в случае уравнений типа Штурма–Лиувилля впервые было предпринято Йостом и Ньютоном в работе [12]. Эти авторы свели обратную задачу теории рассеяния к обратной задаче по спектральной матрице–функции. После этого В.А.Марченко и З.С.Агранович исследовали обратную задачу теории рассеяния, применив операторы преобразования Б.Я.Левина с условием на бесконечности, и получили более законченные результаты. Важные результаты в задаче теории рассеяния были получены также М.Г.Крейном. Подробный обзор по обратной задаче квантовой теории рассеяния дан в статье Л.Д.Фаддеева [32].

Обратная задача теории рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля в классе потенциалов, удовлетворяющих условиям

$$\int_{-\infty}^0 (1-x)|q(x)|dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} (1+x)|q(x) - c^2|dx < \infty,$$

хорошо изучена в работах В.С.Буслаева, В.Л.Фомина [4] и А.Кохена.

Следующий важный шаг в этой тематике был сделан П.П.Кулишом [15], точнее, им была решена обратная задача рассеяния для уравнения Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (3)$$

с потенциалом, удовлетворяющим следующим условиям

$$q(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow -\infty; \quad \int_0^{\infty} (1+x)|q(x)|dx < \infty. \quad (4)$$

В этом случае уравнение Штурма–Лиувилля (3) обладает решением  $u(x, k)$ , имеющее асимптотику

$$\begin{aligned} u(x, k) &= \overset{=}{o}(1), \quad x \rightarrow -\infty; \\ u(x, k) &= S(k)e^{ikx} - e^{-ikx} + \overset{=}{o}(1), \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где  $k = \sqrt{\lambda}$ .

Функция  $S(k)$  называется функцией рассеяния для задачи (3), (4). Обратная задача состоит в восстановлении  $q(x)$  по заданной функции  $S(k)$ .

Обратная задача рассеяния для оператора Дирака (2) с суммируемыми на всей прямой коэффициентами была изучена в работах М.Г.Крейна, Ф.Э.Мелик–Адамяна [14], М.Г.Гасымова, Б.М.Левитана [19] и других.

В случае оператора Дирака с массой обратная задача теории рассеяния хорошо изучена в работах И.С.Фролова [33] и М.Г.Гасымова [8].

Во второй главе настоящей диссертации изучена обратная задача рассеяния для оператора Дирака (2), коэффициенты которой удовлетворяют следующим условиям:

(а) при любых действительных конечных  $a$

$$|p(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}}, \quad |q(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}, \quad x \in [a, \infty), \quad (5)$$

где  $C > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  – постоянные числа;

(б) спектр задачи

$$\begin{cases} Dy = \lambda y, & -\infty < x < a, \\ y_1(a) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

дискретен.

### Формулировка основных результатов диссертации

**I.** В § 1.1.–1.2. приведены необходимые сведения из теории обратных задач для оператора Дирака на полупрямой. В третьем параграфе методом Лакса вычислен регуляризованный след для оператора Дирака с особенностью в потенциале.

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор

$$Dy \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & -\frac{1}{x} + q(x) \\ -\frac{1}{x} + q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad 0 < x < \pi \quad (7)$$

с граничными условиями

$$y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi) = 0, \quad (8)$$

где  $p(x)$  и  $q(x)$  – действительные функции из класса  $C^2[0, \pi]$ .

Основным результатом третьего параграфа является следующая

**Теорема 1.** (Теорема 1.3.1.) Пусть  $\lambda_n$   $_{n=-\infty}^{\infty}$  – собственные значения граничной задачи (7), (8). Тогда справедливо следующее равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \lambda_{-n}) = \frac{1}{2} [p(0) + p(\pi)].$$

**II.** Во второй главе диссертации изучается обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака на всей прямой.

Рассмотрим следующую систему уравнений Дирака на всей прямой

$$Dy \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty, \quad (9)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $p(x)$  и  $q(x)$  – действительные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям (5), (6).

В §2.1. изучается граничная задача (6) на полупрямой с дискретным спектром. Обозначим через  $\theta(x, \lambda)$  и  $\varphi(x, \lambda)$  решения уравнения (9), удовлетворяющие следующим начальным условиям  $\theta(a, \lambda) = (1, 0)^T$ ,  $\varphi(a, \lambda) = (0, -1)^T$ .

Решение Вейля  $\tilde{\psi}(x, \lambda)$  для задачи (6) однозначно определяется условием  $\tilde{\psi}(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + m_-(\lambda)\varphi(x, \lambda) \in L_2^2(-\infty, a)$ , где  $\lambda$  не принадлежит спектру задачи (6). Функция  $m_-(\lambda)$  называется функцией Вейля–Титчмарша для задачи (6). Особые точки функции  $m_-(\lambda)$  составляют спектр задачи (6), при этом собственные значения являются простыми полюсами функции  $m_-(\lambda)$ . Здесь и далее через  $L_2^2(\alpha, \beta)$  обозначается пространство вектор–

функций из двух компонент, квадрат модуля которых суммируем на интервале  $(\alpha, \beta)$ .

**Теорема 2.** (Теорема 2.1.1.) При предположении (б) существует ненулевое решение  $\psi(x, \lambda) \in L_2^2(-\infty, a)$ ,  $\lambda \in C$  уравнения (9), удовлетворяющее следующим условиям:

- 1)  $\psi(x, \lambda)$  является целой вектор-функцией относительно  $\lambda$  при каждом фиксированном  $x \in R^1$ ;
- 2) при  $\lambda \in R^1$  компоненты  $\psi(x, \lambda)$  принимают действительные значения.

В §2.2. приведены известные результаты из работ [30,31] о решении Йоста.

Решение системы (9), удовлетворяющее следующей асимптотике

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty \quad (\text{Im } \lambda = 0),$$

называется решением Йоста. При выполнении условия (а), решение Йоста существует, единственно, и представимо в виде

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + \int_x^\infty A(x, t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda t} dt, \quad (10)$$

где ядро

$$A(x, t) = \begin{pmatrix} A_{11}(x, t) & A_{12}(x, t) \\ A_{21}(x, t) & A_{22}(x, t) \end{pmatrix}$$

не зависит от  $\lambda$  и удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $BA'_x(x, t) + A'_t(x, t)B = -\Omega(x)A(x, t)$ ,
- 2)  $BA(x, x) - A(x, x)B = \Omega(x)$ ,
- 3)  $|A_{12}(x, t)| + |A_{21}(x, t)| \leq \frac{C_1}{(1+|x|)(1+|t|)^{1+\varepsilon}}$ ,  $|A_{11}(x, t)| + |A_{22}(x, t)| \leq \frac{C_1}{(1+|t|)^{1+\varepsilon}}$ ,

где  $C_1 > 0$  и  $\varepsilon > 0$  – некоторые постоянные. Кроме того, решение Йоста  $f(x, \lambda)$  аналитически продолжается по  $\lambda$  в полуплоскость  $\text{Im } \lambda > 0$ , это

аналитическое продолжение непрерывно по  $\lambda$  в  $\text{Im}\lambda \geq 0$  и справедлива следующая асимптотическая формула

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} \left( 1 + \underset{O}{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda \geq 0.$$

При действительных  $\lambda$  вектор–функций  $f(x, \lambda)$  и  $\overline{f(x, \lambda)}$  образуют фундаментальную систему решений уравнения (9).

В §2.3. вводится функция рассеяния, и изучаются её свойства.

**Лемма 1.** (Лемма 2.3.1.) Если выполняются условия (а) и (б), то при  $\lambda \in R^1$  имеет место представление

$$\psi(x, \lambda) = \frac{1}{2i} \overline{W(\lambda)} f(x, \lambda) - \frac{1}{2i} W(\lambda) \overline{f(x, \lambda)},$$

где  $W(\lambda) = W \psi(x, \lambda), f(x, \lambda)$ ,  $f(x, \lambda)$  – решение Йоста и  $\psi(x, \lambda)$  – решение уравнения (9), введенное в теореме 2.

**Определение.** Функция

$$S(\lambda) = \frac{\overline{W(\lambda)}}{W(\lambda)}, \quad \lambda \in R^1$$

называется функцией рассеяния задачи (9).

**Лемма 2.** (Лемма 2.3.2.) Пусть выполняются условия (а) и (б). Тогда

- 1)  $W(\lambda)$  является аналитической функцией в полуплоскости  $\text{Im}\lambda > 0$ ;
- 2)  $W(\lambda)$  непрерывна в полуплоскости  $\text{Im}\lambda \geq 0$ ;
- 3)  $W(\lambda)$  не имеет нулей в полуплоскости  $\text{Im}\lambda \geq 0$ .

Введём следующую функцию

$$S_0(\lambda) = e^{-2ia\lambda} \cdot \frac{\psi_1(a, \lambda) + i\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)}.$$

**Теорема 3.** (Теорема 2.3.1.) Пусть выполняется условие (б). Тогда

- 1)  $S_0(\lambda)$  является мероморфной функцией;
- 2)  $S_0(\lambda)$  не имеет полюсов и нулей на  $R^1$ ;
- 3) если  $\lambda \in R^1$ , то  $|S_0(\lambda)| = 1$ ;

- 4)  $S_0(\lambda)$  не имеет полюсов на  $\text{Im } \lambda > 0$ ;  
 5) если  $\text{Im } \lambda \geq 0$ , то  $|S_0(\lambda)| \leq e^{2a \text{Im } \lambda}$ ;  
 6) если  $\text{Im } \lambda \geq 0$ , то

$$\left| \frac{\psi_1(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)} \right| \leq 1.$$

**Теорема 4.** (Теорема 2.3.2.) Если  $\lambda \in R^1$ , то выполняется следующая асимптотика

$$S(\lambda) = S_0(\lambda) + \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

**Лемма 3.** (Лемма 2.3.3.) Вектор-функция  $\frac{\psi(x, \lambda)e^{i\lambda x}}{W(\lambda)}$  при  $x \geq a$

равномерно ограничена в  $\text{Im } \lambda \geq 0$ .

В §2.4. методом В.А.Марченко выводится линейное интегральное уравнение для  $A(x, t)$ -ядра представления (10), т.е. доказывается следующая

**Теорема 5.** (Теорема 2.4.1.) При каждом фиксированном  $x \in R^1$  функция  $A(x, t)$ -ядро представления (10) удовлетворяет интегральному уравнению Гельфанда-Левитана-Марченко

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} G(x+y) + \int_x^\infty A(x, t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} G(t+y) dt - A(x, y) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (x < y < \infty), \quad (11)$$

где

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \{S(\lambda) - S_0(\lambda)\} \bar{e}^{i\lambda t} d\lambda. \quad (12)$$

Уравнение (11) играет важную роль при решении обратной задачи теории рассеяния. Ядро  $G(t)$  интегрального уравнения (11) выражается непосредственно через функцию рассеяния  $S(\lambda)$  по формуле (12). Поэтому, решив интегральное уравнение (11), восстановим  $A(x, t)$ -ядро представления (10) и, в силу равенства  $\Omega(x) = BA(x, x) - A(x, x)B$ , построим потенциальную матрицу  $\Omega(x)$  при  $x \geq a$ .

В §2.5. приводится метод нахождения потенциальной матрицы–функции  $\Omega(x)$  при  $x \leq a$ . Рассмотрим задачу (6). Из результатов второго и третьего параграфов следует формула

$$m_-(\lambda) = -\frac{S(\lambda)f_2(a, \lambda) - \overline{f_2(a, \lambda)}}{S(\lambda)f_1(a, \lambda) - f_1(a, \lambda)}, \quad \lambda \in R^1. \quad (13)$$

Укажем процедуру восстановления задачи (6) по заданной функции Вейля–Титчмарша (13). Для этого заменой  $x = -t + a$  сведём задачу (6) к задаче следующего вида

$$\begin{cases} B \frac{dz}{dt} + \tilde{\Omega}(t)z = \mu z, & 0 \leq t < \infty \\ z_1(0) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

где

$$z(t) = y(a - t), \quad \tilde{\Omega}(t) = -\Omega(a - t), \quad \mu = -\lambda. \quad (15)$$

Тогда

$$\tilde{m}(\mu) = m_-(-\mu),$$

здесь  $\tilde{m}(\mu)$ – функция Вейля–Титчмарша задачи (14).

Теперь, вычисляя вычеты  $r_n = \underset{\mu_n}{\text{res}} \tilde{m}(\mu)$  в полюсах  $\mu_n, n \in Z$  функции  $\tilde{m}(\mu)$ , находим спектральную функцию  $\tilde{\rho}(\mu)$ :

$$\tilde{\rho}(\mu) = \begin{cases} \sum_{0 \leq \mu_n < \mu} r_n, & \mu > 0, \\ -\sum_{\mu < \mu_n \leq 0} r_n, & \mu \leq 0. \end{cases}$$

Используя процедуру Гельфанда–Левитана, по  $\tilde{\rho}(\mu)$  восстановим матрицу–функцию  $\tilde{\Omega}(t)$  (см. [22], стр. 403–422). При этом на функцию  $\tilde{\rho}(\mu)$  налагается условия, приведённые в теореме 3.1. [22] (см. стр. 412–413).

Положим

$$\Phi(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos \mu t}{\mu} \\ -\frac{\sin \mu t}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos \mu s}{\mu}, & -\frac{\sin \mu s}{\mu} \end{pmatrix} d\left(\tilde{\rho}(\mu) - \frac{1}{\pi} \mu\right),$$

$$F(t, s) = \frac{\partial^2 \Phi(t, s)}{\partial t \partial s},$$

и решаем интегральное уравнение Гельфанда–Левитана

$$F(t, s) + K(t, s) + \int_0^t K(t, z)F(z, s)dz = 0, \quad (0 \leq s \leq t)$$

относительно матрицы-функции  $K(t, s) = \mathbf{K}_{ij}(t, s)_{i,j=1,2}$ . Затем, по формуле

$$\tilde{\Omega}(t) = K(t, t)B - BK(t, t)$$

находим  $\tilde{\Omega}(t)$  при  $t \geq 0$ . Далее из равенства (15) вытекает, что

$$\Omega(x) = -\tilde{\Omega}(a - x), \quad \text{где } x \leq a.$$

**ГЛАВА I**  
**НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ**  
**ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА**

**§ 1.1. Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений**  
**Дирака на полупрямой**

В этом параграфе приводятся необходимые в дальнейшем сведения из теории обратных задач рассеяния на полупрямой [8].

Рассмотрим систему уравнений Дирака

$$B \frac{dy}{dx} + \Omega(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (1.1.1)$$

с граничным условием

$$y_1(0) = 0, \quad (1.1.2)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $p(x)$  и  $q(x)$  – действительные непрерывные функции,  $\lambda$  – комплексный параметр.

Обозначим через  $\varphi(x, \lambda)$  решение уравнения (1.1.1), удовлетворяющее начальным условиям  $\varphi_1(0, \lambda) = 0$ ,  $\varphi_2(0, \lambda) = -1$ .

Пусть при каждом значении  $x$  элементы матрицы  $\Omega(x)$  удовлетворяют неравенствам

$$|p(x)| \leq \frac{C}{(1+x)^{2+\varepsilon}}, \quad |q(x)| \leq \frac{C}{(1+x)^{1+\varepsilon}}, \quad (1.1.3)$$

где  $C > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  – постоянные числа. Легко проверить, что

$$f_0(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda x}$$

является решением уравнения (1.1.1) при  $\Omega(x) \equiv 0$ .

**Теорема 1.1.1.** Пусть  $\Omega(x)$  удовлетворяет условиям (1.1.3). Тогда

1<sup>0</sup>. Уравнение (1.1.1) имеет единственное решение  $f(x, \lambda)$ , для которой

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + o(1), \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (\text{Im} \lambda \geq 0).$$

2<sup>0</sup>. Существует матрица–функция  $A(x, t)$  такая, что

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + \int_x^\infty A(x, t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda t} dt, \quad (1.1.4)$$

где

$$|A_{jj}(x, t)| \leq \frac{C}{(1+t)^{1+\varepsilon}}, \quad j=1,2, \quad (1.1.5)$$

$$|A_{ij}(x, t)| \leq \frac{C}{(1+x)(1+t)^{1+\varepsilon}}, \quad i \neq j. \quad (1.1.6)$$

3<sup>0</sup>. Если  $\Omega(x)$  абсолютно непрерывна, то  $A(x, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$BA'_x(x, t) + A'_t(x, t)B = -\Omega(x)A(x, t), \quad (1.1.7)$$

и условию

$$BA(x, x) - A(x, x)B = \Omega(x). \quad (1.1.8)$$

И наоборот, если матрица–функция  $A(x, t)$  удовлетворяет (1.1.7) и условиям (1.1.5), (1.1.6) и (1.1.8), то функция  $f(x, \lambda)$ , определенная формулой (1.1.4), является решением уравнения

$$B \frac{dy}{dx} + \Omega(x)y = \lambda y,$$

где  $\Omega(x) = BA(x, x) - A(x, x)B$ .

При действительных  $\lambda$  вектор–функций  $f(x, \lambda)$  и  $\overline{f(x, \lambda)}$  составляют фундаментальную систему решений уравнения (1.1.1). Поэтому  $\varphi(x, \lambda)$  представляется в виде

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{2i} \left[ \overline{f_1(0, \lambda)} f(x, \lambda) - f_1(0, \lambda) \overline{f(x, \lambda)} \right], \quad \lambda \in R^1.$$

Введем функцию

$$S(\lambda) = \frac{f_1(0, \lambda)}{f_1(0, \lambda)}.$$

Функция  $S(\lambda)$  называется функцией рассеяния задачи (1.1.1.), (1.1.2).

**Лемма 1.1.1.**  $S(\lambda)$  обладает следующими свойствами:

1<sup>0</sup>. Функция  $S(\lambda)$  – отношение двух функций, числитель которого является аналитической в верхней, а знаменатель – в нижней полуплоскостях;

$$2^0. S(\lambda) = 1 + o(1), \quad \lambda \rightarrow \pm\infty;$$

$$3^0. S(\lambda) = \overline{S(-\lambda)}^{-1} = \overline{S(-\lambda)}.$$

Задача восстановления функции  $\Omega(x)$  по  $S$ -функции называется обратной задачей теории рассеяния для системы Дирака.

**Теорема 1.1.2.** Матрица-функция  $A(x, t)$  при  $t > x$  удовлетворяет линейному интегральному уравнению Гельфанда–Левитана–Марченко

$$F(x + t) + A(x, t) + \int_x^\infty A(x, s)F(s + y)ds = 0, \quad (1.1.9)$$

где

$$F(x) = \int_{-\infty}^\infty L(\lambda)e^{-i\lambda x} + \overline{L(\lambda)}e^{i\lambda x} d\lambda, \quad (1.1.10)$$

$$L(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \left[ 1 - S(\lambda) \right], \quad i \in \mathbb{R}.$$

**Теорема 1.1.3.** Для положительных значений  $x$  элементы матричной функции  $F(x) = \|F_{ij}(x)\|_{i,j=1,2}$  удовлетворяют неравенствам

$$|F_{jj}(x)| \leq \frac{C}{(1+x)^{1+\varepsilon}},$$

$$|F_{ij}(x)| \leq \frac{C}{(1+x)^{2+\varepsilon}}, \quad i \neq j,$$

где  $C, \varepsilon$  – положительные числа.

**Теорема 1.1.4.** При каждом фиксированном  $x$  уравнение (1.1.9) имеет единственное матричное решение с элементами из  $L^2(x, \infty)$ .

Уравнение (1.1.9) играет главную роль при решении обратной задачи теории рассеяния. Ядро  $F(x)$  интегрального уравнения (1.1.9) выражается непосредственно через функцию рассеяния  $S(\lambda)$  рассматриваемой граничной задачи по формуле (1.1.10). Поэтому, решая интегральное уравнение (1.1.9), восстанавливаем ядро оператора преобразования  $A(x,t)$  и вместе с ним, в силу равенства (1.1.8), т.е. равенства  $\Omega(x) = BA(x,x) - A(x,x)B$ , потенциальную матрицу  $\Omega(x)$  и, следовательно, граничную задачу (1.1.1), (1.1.2) по ее функции рассеяния  $S(\lambda)$ .

## § 1.2. Обратная задача на полупрямой по спектральной функции

В этом параграфе приводятся необходимые в дальнейшем сведения об обратной задаче на полупрямой по спектральной функции из работ [21,22].

Рассмотрим граничную задачу

$$Dy \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (1.2.1)$$

$$y_1(0) = 0, \quad (1.2.2)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что  $p(x)$  и  $q(x)$  – действительные функции, непрерывные на полупрямой  $[0, \infty)$ .

Обозначим через  $\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}^T$  решение уравнения (1.2.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = 0, \quad \varphi_2(0, \lambda) = -1. \quad (1.2.3)$$

Пусть  $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}^T$  – произвольная вектор-функция из класса  $L^2_2(0, \infty)$ . Если положим

$$F_n(\lambda) = \int_0^n [f_1(x)\varphi_1(x, \lambda) + f_2(x)\varphi_2(x, \lambda)] dx,$$

то существует не зависящая от  $f(x)$  монотонно возрастающая функция  $\rho(\lambda)$ ,  $-\infty < \lambda < \infty$ , называемая спектральной функцией задачи (1.2.1), (1.2.2), такая, что имеет место равенство Парсеваля [21, 22]

$$\int_0^\infty [f_1^2(x) + f_2^2(x)] dx = \int_{-\infty}^\infty F^2(\lambda) d\rho(\lambda),$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty F(\lambda) - F_n(\lambda) d\rho(\lambda) = 0.$$

Непосредственным вычислением легко убедиться, что функция  $\rho_0(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lambda$  является спектральной функцией задачи (1.2.1), (1.2.2) при  $\Omega(x) \equiv 0$ . Для удобства введём обозначение  $s(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix}$ .

**Лемма 1.2.1.** Если  $\varphi(x, \lambda)$  – решение уравнения (1.2.1) с начальными условиями (1.2.3), то существует матрица–функция  $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$  такая, что

$$\varphi(x, \lambda) = s(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) s(t, \lambda) dt, \quad (1.2.4)$$

при этом  $K(x, t)$  является решением задачи

$$B \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} B = -\Omega(x) K(x, t), \quad (1.2.5)$$

$$BK(x, x) - K(x, x)B = -\Omega(x), \quad (1.2.6)$$

$$K_{11}(x, 0) = K_{21}(x, 0) = 0. \quad (1.2.7)$$

И наоборот, если матрица–функция  $K(x, t)$  является решением задачи (1.2.5) – (1.2.7), то вектор–функция  $\varphi(x, \lambda)$ , определенная формулой (1.2.4), есть решение уравнения (1.2.1) с начальными условиями (1.2.3).

**Лемма 1.2.2.** Пусть  $g(x)$  – произвольная финитная вектор–функция из класса  $L_2^2(0, \infty)$ . Положим

$$G(\lambda) = \int_0^\infty g^T(x) s(x, \lambda) dx.$$

Тогда, если

$$\int_{-\infty}^\infty G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0,$$

то  $g(x) \equiv 0$ .

Пусть  $\rho(\lambda)$  – спектральная функция задачи (1.2.1), (1.2.2). Положим

$$\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{1}{\pi} \lambda,$$

$$c(x, \lambda) = \int_0^x s(x, \lambda) dx = \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda} \\ -\frac{\sin \lambda x}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

**Лемма 1.2.3.** Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(x, \lambda) c^T(y, \lambda) d\sigma(\lambda) = f(x, y)$$

существует и матрица–функция  $f(x, y)$  имеет непрерывную вторую производную  $f''_{xy}(x, y) \equiv F(x, y)$ .

**Теорема 1.2.1.** Матрица–функция  $K(x, y)$  удовлетворяет линейному интегральному уравнению Гельфанда–Левитана

$$F(x, y) + K(x, y) + \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt = 0, \quad 0 \leq y \leq x, \quad (1.2.8)$$

где

$$F(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, \lambda) c^T(y, \lambda) d\sigma(\lambda). \quad (1.2.9)$$

Ядро  $F(x, y)$  интегрального уравнения (1.2.8) выражается непосредственно через спектральную функцию  $\rho(\lambda)$  рассматриваемой граничной задачи по формуле (1.2.9). Поэтому, решив интегральное уравнение (1.2.8), восстановим ядро оператора преобразования  $K(x, t)$  и вместе с ним, в силу равенства (1.2.6), т.е. равенства  $\Omega(x) = K(x, x)B - BK(x, x)$ , потенциальную матрицу  $\Omega(x)$  и, следовательно, граничную задачу (1.2.1), (1.2.2) по её спектральной функции  $\rho(\lambda)$ .

**Теорема 1.2.2.** Пусть функция  $\rho(\lambda)$  удовлетворяет следующим условиям:

1<sup>0</sup>. Если  $g(x)$ –произвольная финитная вектор–функция из класса  $L_2^2(0, \infty)$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$ , где

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty} g^T(x) s(x, \lambda) dx, \quad s(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix},$$

то  $g(x) \equiv 0$ .

2<sup>0</sup>. Матрица–функция

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x, \lambda) c^T(y, \lambda) d\sigma(\lambda),$$

где

$$\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{1}{\pi} \lambda, \quad c(x, \lambda) = \int_0^x s(x, \lambda) dx = \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda} \\ -\frac{\sin \lambda x}{\lambda} \end{pmatrix},$$

имеет непрерывную вторую производную  $f''_{xy}(x, y) \equiv F(x, y)$ .

Тогда при каждом фиксированном  $x \geq 0$  интегральное уравнение (1.2.8) имеет единственное решение  $K(x, y)$ , непрерывное по обеим переменным.

**Теорема 1.2.3.** Для того чтобы монотонно возрастающая функция  $\rho(\lambda)$  была спектральной функцией граничной задачи вида (1.2.1), (1.2.2) с непрерывной матрицей–функцией  $\Omega(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

I. Если  $g(x)$ –произвольная действительная непрерывная финитная вектор–функция и

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0,$$

где

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty} g^T(x) s(x, \lambda) dx, \quad s(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix},$$

то  $g(x) \equiv 0$ .

II. Матрица–функция

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x, \lambda) c^T(y, \lambda) d\left\{ \rho(\lambda) - \frac{1}{\pi} \lambda \right\},$$

имеет непрерывную вторую производную  $f''_{xy} \equiv F(x, y)$ , притом

$$F_{11}(x, 0) = 0, \quad F_{21}(x, 0) = 0.$$

### § 1.3. Формулы регуляризованных следов

Одними из важных равенств в теории обратных спектральных задач являются так называемые формулы регуляризованных следов.

Впервые в 1953 году И.М.Гельфандом и Б.М.Левитаном была получена формула для суммы разностей собственных значений двух регулярных операторов Штурма–Лиувилля. Вскоре после этого Л.А.Дикий предложил другой метод, с помощью которого ему удалось дать рекуррентные формулы для вычисления регуляризованных следов всех степеней оператора Штурма–Лиувилля. Следующий важный шаг был сделан В.Б.Лидским и В.А.Садовничим. Затем аналогичная задача была решена в работе Э.Абдукадырова для регулярного оператора Дирака.

В 1994 году П.Д.Лакс [23] предложил более элементарный метод вычисления регуляризованного следа оператора Штурма–Лиувилля.

В работах А.Б.Хасанова и А.Б.Яхшимуратова [36] методом Лакса вычислен регуляризованный след для регулярного оператора Дирака.

В настоящем параграфе методом Лакса вычисляется регуляризованный след для оператора Дирака с особенностью в потенциале.

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор

$$Dy \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & -\frac{1}{x} + q(x) \\ -\frac{1}{x} + q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad 0 < x < \pi \quad (1.3.1)$$

с граничными условиями

$$y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi) = 0, \quad (1.3.2)$$

где  $p(x)$  и  $q(x)$  – действительные функции из класса  $C^2[0, \pi]$ .

**Лемма 1.3.1.** Пусть  $p(x) \equiv 0$ ,  $q(x) \equiv 0$ . Тогда

1) общее решение уравнения (1.3.1) даётся формулой

$$\begin{cases} \varphi_1(x, \lambda) = C_1 \left( \frac{\cos \lambda x}{\lambda} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin \lambda x}{\lambda^2} \right) + C_2 \left( -\sin \lambda x - \frac{1}{x} \cdot \frac{\cos \lambda x}{\lambda} \right), \\ \varphi_2(x, \lambda) = C_1 \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + C_2 \cos \lambda x, \end{cases} \quad \text{при } \lambda \neq 0,$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x, \lambda) = \frac{C_1}{x}, \\ \varphi_2(x, \lambda) = C_2 x, \end{cases} \quad \text{при } \lambda = 0;$$

2) собственные значения и ортонормированные собственные вектор–функции граничной задачи (1.3.1), (1.3.2) соответственно имеют вид:

$$\lambda_n = n, \quad n \in Z, \quad n \neq 0;$$

$$y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{n1}(x) \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \cos nx - \frac{1}{x} \frac{\sin nx}{n} \\ \sin nx \end{pmatrix}, \quad n \in Z, \quad n \neq 0;$$

3) выполняются тождества

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} y_{n,1}^2(x) + y_{-n,1}^2(x) - y_{n,2}^2(x) - y_{-n,2}^2(x) &\stackrel{=}{=} \frac{1}{2} [\delta(x) + \delta(x - \pi)], \\ \sum_{n=1}^{\infty} 2y_{n,1}(x)y_{n,2}(x) + 2y_{-n,1}(x)y_{-n,2}(x) &\stackrel{=}{=} 0, \quad (0 < x < \pi) \end{aligned}$$

где  $\delta(x)$  – «дельта»–функция Дирака.

**Доказательство.** Первая часть леммы 1.3.1 доказывается простой проверкой. Докажем вторую часть. При  $\lambda \neq 0$  для выполнения первого граничного условия необходимо, чтобы  $C_2 = 0$ . Положим  $C_1 = 1$ , тогда

$$\begin{cases} \varphi_1(x, \lambda) = \frac{\cos \lambda x}{\lambda} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin \lambda x}{\lambda^2}, \\ \varphi_2(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda}. \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Из второго граничного условия находим собственные значения задачи (1.3.1), (1.3.2):

$$\lambda_n = n, \quad n \in Z, \quad (n \neq 0).$$

Отсюда и из (1.3.3) находим собственные вектор–функции задачи (1.3.1), (1.3.2)

$$\begin{cases} \varphi_1(x, \lambda_n) = \frac{\cos nx}{n} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin nx}{n^2}, \\ \varphi_2(x, \lambda_n) = \frac{\sin nx}{n}. \end{cases}$$

Теперь, вычислим нормировочные константы собственных вектор-функций

$$\begin{aligned} \alpha_n^2 &= \int_0^\pi [\varphi_1^2(x, \lambda_n) + \varphi_2^2(x, \lambda_n)] dx = \\ &= \int_0^\pi \left\{ \frac{\cos^2 nx}{n^2} - \frac{2 \sin nx \cos nx}{xn^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\sin^2 nx}{n^4} + \frac{\sin^2 nx}{n^2} \right\} dx = \\ &= \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{n^2} + \left( -\frac{1}{x} \right)' \frac{\sin nx}{n^4} + \left( -\frac{1}{x} \right) \left( \frac{\sin^2 nx}{n^4} \right)' \right\} dx = \\ &= \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{n^2} + \left( -\frac{1}{x} \frac{\sin^2 nx}{n^4} \right)' \right\} dx = \frac{\pi}{n^2} + \left( -\frac{x}{n^2} \left( \frac{\sin nx}{nx} \right)^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi}{n^2}. \end{aligned}$$

При  $\lambda = 0$ , из второго граничного условия следует, что  $C_2 = 0$ .

Положим,  $C_1 = 1$ . Тогда

$$\varphi_1(x, 0) = \frac{1}{x}, \quad \varphi_2(x, 0) = 0.$$

Поскольку  $\varphi(x, 0) \notin L_2^2(0, \pi)$  поэтому,  $\lambda = 0$  не является собственным значением.

Значит, собственные значения и ортонормированные собственные вектор-функции задачи (1.3.1), (1.3.2) имеют вид:

$$\lambda_n = n, \quad n \in Z, \quad (n \neq 0).$$

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \cos nx - \frac{1}{x} \frac{\sin nx}{n} \\ \sin nx \end{pmatrix}, \quad n \in Z, \quad n \neq 0.$$

Теперь, перейдем к доказательству третьей части леммы 1.3.1. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} [y_{n,1}^2(x) + y_{-n,1}^2(x) - y_{n,2}^2(x) - y_{-n,2}^2(x)] = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi} \left( \cos^2 nx - \frac{1}{x} \frac{\sin 2nx}{n} + \frac{1}{\pi x^2} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \right) - \frac{2}{\pi} \sin^2 nx \right] = \\
& = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2nx - \frac{2}{\pi x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n} + \frac{1}{\pi x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{\pi x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2}.
\end{aligned}$$

Используя известные равенства

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n} = \frac{\pi - 2x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2} = x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{6}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2nx = -\frac{1}{2\pi} + \frac{\pi}{4} [\delta(x) + \delta(x - \pi)], \quad 0 < x < \pi,
\end{aligned}$$

легко получим третье утверждение леммы 1.3.1. Аналогично

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} [2y_{n,1}(x)y_{n,2}(x) + 2y_{-n,1}(x)y_{-n,2}(x)] = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 2\sin nx \left( \cos nx - \frac{1}{x} \frac{\sin nx}{n} \right) - 2\sin nx \left( \cos nx - \frac{1}{x} \frac{\sin nx}{n} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

**Лемма 1.3.1 доказана.**

**Теорема 1.3.1.** Пусть  $\lambda_n$   $\stackrel{\infty}{n=1}$  – собственные значения граничной задачи (1.3.1), (1.3.2), тогда справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \lambda_{-n}) = \frac{1}{2} [p(0) + p(\pi)]. \quad (1.3.4)$$

**Доказательство.** Рассмотрим семейство операторов

$$D(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tp(x) & -\frac{1}{x} + tq(x) \\ -\frac{1}{x} + tq(x) & -tp(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda(t) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad 0 < x < \pi$$

с граничными условиями (1.3.2). Здесь параметр  $t \in [0, 1]$ . Очевидно, что  $D(1) = D$ . Пусть  $\lambda_n(t)$ ,  $n \in Z$  – собственное значение оператора  $D(t)$ , а

$y_n(x, t)$ ,  $n \in Z$  ортонормированные собственные функции, соответствующие этим собственным значениям. Тогда

$$D(t)y_n = \lambda_n(t)y_n, \quad \mathbf{D}(t)y_n, y_n \bar{=} \lambda_n(t).$$

Отсюда дифференцируя по  $t$  последнее равенство, имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}(t)y_n, y_n \bar{+} \mathbf{D}(t)\dot{y}_n, y_n \bar{+} \mathbf{D}(t)y_n, \dot{y}_n \bar{=} \dot{\lambda}_n(t), \\ \dot{\mathbf{D}}(t)y_n, y_n \bar{+} \lambda_n(t)(\dot{y}_n, y_n) + \lambda_n(t)(y_n, \dot{y}_n) = \dot{\lambda}_n(t). \end{aligned}$$

Учитывая ортонормированность собственных функций, имеем

$$\dot{\mathbf{D}}(t)y_n, y_n \bar{=} \dot{\lambda}_n(t), \quad (1.3.5)$$

где

$$\dot{D}(t)y_n = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x)y_{n1} + q(x)y_{n2} \\ q(x)y_{n1} - p(x)y_{n2} \end{pmatrix},$$

подставляя последнее выражение в (1.3.5) получаем

$$\int_0^\pi p(x)[y_{n1}^2(x, t) - y_{n2}^2(x, t)] + 2q(x) \cdot y_{n1}(x, t)y_{n2}(x, t) dx = \dot{\lambda}_n(t). \quad (1.3.6)$$

Интегрируя равенство (1.3.6) по  $t$  на отрезке  $[0, 1]$  находим

$$\int_0^\pi p(x) \int_0^1 [y_{n1}^2(x, t) - y_{n2}^2(x, t)] dt dx + \int_0^\pi q(x) \int_0^1 2y_{n1}(x, t)y_{n2}(x, t) dt dx = \lambda_n(1) - \lambda_n(0). \quad (1.3.7)$$

Суммируя равенства (1.3.7) по всем  $n$  получим

$$\begin{aligned} \int_0^\pi p(x) \int_0^1 \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} [y_{n1}^2(x, t) - y_{n2}^2(x, t)] dt dx + \\ + \int_0^\pi q(x) \int_0^1 \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} 2y_{n1}(x, t)y_{n2}(x, t) dt dx = \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} [\lambda_n(1) - \lambda_n(0)]. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Здесь и далее суммирование  $\sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} a_n$  понимается в симметричном смысле, т.е.

$$\sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{-n}).$$

### Лемма 1.3.2. Ряды

$$\sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} [y_{n1}^2(x, t) - y_{n2}^2(x, t)], \quad \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} 2y_{n1}(x, t)y_{n2}(x, t)$$

сходятся в обобщенном смысле и их сумма не зависит от  $t$ .

**Доказательство.** Обобщенная сходимость следует из асимптотики собственных функций. Докажем независимость от  $t$  сумм этих рядов. Для чего обозначим суммы этих рядов соответственно  $S_1(x, t)$  и  $S_2(x, t)$ . Дифференцируем по  $t$   $S_1(x, t)$  и  $S_2(x, t)$

$$\dot{S}_1(x, t) = \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} [2y_{n1} \dot{y}_{n1} - 2y_{n2} \dot{y}_{n2}], \quad \dot{S}_2(x, t) = \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} [2y_{n2} \dot{y}_{n1} + 2y_{n1} \dot{y}_{n2}]. \quad (1.3.9)$$

Разложим функции  $\dot{y}_n(x, t)$  в ряд Фурье по полной ортонормированной системе  $\{y_m(x, t)\}$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_{n1} \\ \dot{y}_{n2} \end{pmatrix} = \sum_{0 \neq m = -\infty}^{\infty} a_{nm} \begin{pmatrix} y_{m1} \\ y_{m2} \end{pmatrix}, \quad (1.3.10)$$

где  $a_{nm} = (\dot{y}_n, y_m)$ . Из ортонормированности системы  $\{y_m(x, t)\}$  получим  $(\dot{y}_n, y_m) + (y_n, \dot{y}_m) = 0$ . Из действительности функций этой системы имеем

$$a_{nm} + a_{mn} = 0. \quad (1.3.11)$$

Подставляя (1.3.10) в (1.3.9) получаем

$$\dot{S}_1(x, t) = 2 \sum_{0 \neq m, n = -\infty}^{\infty} a_{nm} [y_{n1} y_{m1} - y_{n2} y_{m2}], \quad \dot{S}_2(x, t) = 2 \sum_{0 \neq m, n = -\infty}^{\infty} a_{nm} [y_{m1} y_{n2} + y_{n1} y_{m2}]. \quad (1.3.12)$$

Используя (1.3.11) легко показать антисимметричность членов рядов (1.3.12). Суммируя «по квадрату» получим  $\dot{S}_1(x, t) = 0$ ,  $\dot{S}_2(x, t) = 0$ . Это значит, что  $S_1$  и  $S_2$  не зависят от  $t$ . **Лемма 1.3.2 доказана.**

Теперь продолжим доказательство теоремы 1.3.1. Из леммы 1.3.2 следует, что

$$S_1(x, t) = S_1(x, 0), \quad S_2(x, t) = S_2(x, 0). \quad (1.3.13)$$

Подставляя (1.3.13) в (1.3.8) и используя равенство  $\lambda_n(1) = \lambda_n$ , получим

$$\int_0^{\pi} p(x) S_1(x, 0) dx + \int_0^{\pi} q(x) S_2(x, 0) dx = \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} [\lambda_n - \lambda_n(0)]. \quad (1.3.14)$$

Учитывая свойства дельта-функции Дирака из леммы 1.3.1 и равенства (1.3.14) выводим, что

$$\sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} (\lambda_n - n) = \frac{1}{2}[p(0) + p(\pi)].$$

Отсюда следует формула (1.3.4). **Теорема 1.3.1 доказана.**

## § 1.4. Заключение

В §1.1.–1.2. приведены необходимые сведения из теории обратных задач для оператора Дирака.

В §1.3. методом Лакса вычислен регуляризованный след для оператора Дирака с особенностью в потенциале.

## ГЛАВА II

### ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ

В работах [4],[31,32] хорошо изучена обратная задача теории рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля на всей прямой с потенциалом, стремящимся в бесконечностях к конечным пределам.

В 1968 году П.П.Кулиш [15] исследовал обратную задачу теории рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля на всей прямой с потенциалом, стремящимся при  $x \rightarrow \infty$  к нулю, а при  $x \rightarrow -\infty$  к бесконечности.

В этой главе изучается обратная задача теории рассеяния для оператора Дирака на всей прямой

$$Dy \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.0.1)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $p(x)$  и  $q(x)$  – действительные непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

(а) при любых действительных конечных  $a$

$$|p(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}}, \quad |q(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}, \quad x \in [a, \infty),$$

где  $C > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  – постоянные числа;

(б) спектр задачи

$$\begin{cases} Dy = \lambda y, & -\infty < x < a, \\ y_1(a) = 0 \end{cases} \quad (2.0.2)$$

дискретен.

## § 2.1. Граничная задача на полупрямой с дискретным спектром

Обозначим через  $\theta(x, \lambda)$  и  $\varphi(x, \lambda)$  решения уравнения (2.0.1), удовлетворяющие следующим начальным условиям  $\theta(a, \lambda) = (1, 0)^T$ ,  $\varphi(a, \lambda) = (0, -1)^T$ .

Решение Вейля  $\tilde{\psi}(x, \lambda)$  для задачи (2.0.2) однозначно определяется условием  $\tilde{\psi}(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + m_-(\lambda)\varphi(x, \lambda) \in L_2^2(-\infty, a)$ , где  $\lambda$  не принадлежит спектру задачи (2.0.2). Функция  $m_-(\lambda)$  называется функцией Вейля–Титчмарша для задачи (2.0.2). Особые точки функции  $m_-(\lambda)$  составляют спектр задачи (2.0.2), при этом собственные значения являются простыми полюсами функции  $m_-(\lambda)$ . Здесь и далее через  $L_2^2(\alpha, \beta)$  обозначается пространство вектор–функций из двух компонент, квадрат модуля которых суммируем на интервале  $(\alpha, \beta)$ .

**Лемма 2.1.1.** При предположении (б) функция Вейля–Титчмарша  $m_-(\lambda)$  представима в следующем виде

$$m_-(\lambda) = \frac{a_1(\lambda)}{a_2(\lambda)}, \quad (2.1.1)$$

где  $a_1(\lambda)$  и  $a_2(\lambda)$  целые функции, не имеющие общих нулей (нули  $a_1(\lambda)$  и  $a_2(\lambda)$  чередуются) и принимающие действительные значения при  $\lambda \in \mathbb{R}^1$ , кроме того, нули  $a_2(\lambda)$  простые и совпадают с собственными значениями задачи (2.0.2).

**Доказательство.** По предположению (б) спектр задачи (2.0.2) дискретен. Значит, особые точки функции Вейля–Титчмарша  $m_-(\lambda)$  состоят только из простых полюсов. Тогда  $m_-(\lambda)$  представляется в виде (2.1.1). Причём нули  $a_2(\lambda)$  простые и совпадают с собственными значениями  $\lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  задачи (2.0.2).

$a_1(\lambda)$  и  $a_2(\lambda)$  принимают действительные значения при  $\lambda \in R^1$ . Это утверждение следует, из того, что функция  $m_-(\lambda)$  в действительных точках непрерывности принимает действительные значения. **Лемма 2.1.1 доказана.**

**Теорема 2.1.1.** При предположении (б) существует ненулевое решение  $\psi(x, \lambda) \in L_2^2(-\infty, a)$ ,  $\lambda \in C$  уравнения (2.0.1), удовлетворяющее следующим условиям:

- 1)  $\psi(x, \lambda)$  является целой вектор–функцией относительно  $\lambda$  при каждом фиксированном  $x \in R^1$ ;
- 2) при  $\lambda \in R^1$  компоненты  $\psi(x, \lambda)$  принимают действительные значения.

**Доказательство.** Пусть  $m_-(\lambda) = \frac{a_1(\lambda)}{a_2(\lambda)}$  и  $\tilde{\psi}(x, \lambda)$  соответственно функция Вейля–Титчмарша и решение Вейля для задачи (2.0.2). Положим  $\psi(x, \lambda) = a_2(\lambda)\tilde{\psi}(x, \lambda)$ . Очевидно, что  $\psi(x, \lambda) \in L_2^2(-\infty, a)$  при  $\lambda \neq \lambda_k$ ,  $k \in Z$ . Из определения решения Вейля  $\tilde{\psi}(x, \lambda)$  находим

$$\psi(x, \lambda) = a_2(\lambda)\theta(x, \lambda) + a_1(\lambda)\varphi(x, \lambda). \quad (2.1.2)$$

Отсюда следует, что  $\psi(x, \lambda)$  является целой вектор–функцией относительно  $\lambda$  при фиксированных  $x \in R^1$ .

Так как  $\varphi(x, \lambda_k)$  является собственной вектор–функцией задачи (2.0.2), то согласно (2.1.2) имеем  $\psi(x, \lambda_k) = a_1(\lambda_k)\varphi(x, \lambda_k) \in L_2^2(-\infty, a)$ ,  $k \in Z$ . Значит,  $\psi(x, \lambda) \in L_2^2(-\infty, a)$  при любых  $\lambda \in C$ .

С другой стороны учитывая

$$\psi(a, \lambda) = a_2(\lambda)\theta(a, \lambda) + a_1(\lambda)\varphi(a, \lambda) = \mathbf{a}_2(\lambda), \quad -a_1(\lambda) \underset{-}{\top} \neq 0,$$

получим  $\psi(x, \lambda) \neq 0$ . **Теорема 2.1.1 доказана.**

## § 2.2. Решение Йоста и её свойства

Решение системы (2.0.1), удовлетворяющее следующему условию

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty \quad (\text{Im } \lambda = 0),$$

называется решением Йоста.

**Теорема 2.2.1.** При выполнении условия (а), решение Йоста существует, единственно, и представимо в виде

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + \int_x^\infty A(x, t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda t} dt, \quad (2.2.1)$$

где ядро  $A(x, t) = \begin{pmatrix} A_{11}(x, t) & A_{12}(x, t) \\ A_{21}(x, t) & A_{22}(x, t) \end{pmatrix}$  не зависит от  $\lambda$  и удовлетворяет

следующим условиям:

$$1) \quad BA'_x(x, t) + A'_t(x, t)B = -\Omega(x)A(x, t),$$

$$2) \quad BA(x, x) - A(x, x)B = \Omega(x),$$

$$3) \quad |A_{12}(x, t)| + |A_{21}(x, t)| \leq \frac{C_1}{(1+|x|)(1+|t|)^{1+\varepsilon}}, \quad |A_{11}(x, t)| + |A_{22}(x, t)| \leq \frac{C_1}{(1+|t|)^{1+\varepsilon}},$$

где  $C_1 > 0$  и  $\varepsilon > 0$  – некоторые постоянные.

Легко доказываются следующие леммы (см. например [30–32]).

**Лемма 2.2.2.** Решение  $f(x, \lambda)$  аналитически продолжается по  $\lambda$  в полуплоскость  $\text{Im } \lambda > 0$  и это аналитическое продолжение непрерывно по  $\lambda$  в  $\text{Im } \lambda \geq 0$ , кроме того, выполняется следующая асимптотическая формула

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} \left( 1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda \geq 0. \quad (2.2.2)$$

**Лемма 2.2.3.** При  $\lambda \in R^1$  вектор-функция  $\overline{f(x, \lambda)}$  является решением системы (2.0.1) и выполняется равенство  $W f(x, \lambda), \overline{f(x, \lambda)} = 2i$ , т.е.  $f(x, \lambda)$  и  $\overline{f(x, \lambda)}$  составляют фундаментальную систему решений уравнения (2.0.1).

Здесь и далее через  $W\{f, g\} = f_1 g_2 - f_2 g_1$  обозначается вронсиан вектор-функций  $f$  и  $g$ .

### § 2.3. Функция рассеяния и её свойства

В этом параграфе вводится функция рассеяния и изучаются её свойства.

**Лемма 2.3.1.** Если выполняются условия (а) и (б), то при  $\lambda \in R^1$  справедливо разложение

$$\psi(x, \lambda) = \frac{1}{2i} \overline{W(\lambda)} f(x, \lambda) - \frac{1}{2i} W(\lambda) \overline{f(x, \lambda)}, \quad (2.3.1)$$

где  $W(\lambda) = W \psi(x, \lambda), f(x, \lambda)$ ,  $f(x, \lambda)$  – решение Йоста уравнения (2.0.1) и  $\psi(x, \lambda)$  – решение уравнения (2.0.1), введенное в теореме 2.1.1.

**Доказательство.** Так как при  $\lambda \in R^1$  функций  $f(x, \lambda)$  и  $\overline{f(x, \lambda)}$  составляют фундаментальную систему решений уравнения (2.0.1), то имеет место разложение

$$\psi(x, \lambda) = a(\lambda) f(x, \lambda) + b(\lambda) \overline{f(x, \lambda)}. \quad (2.3.2)$$

Используя это разложение, имеем

$$\begin{aligned} W(\lambda) = W \psi(x, \lambda), f(x, \lambda) &= W a(\lambda) f(x, \lambda) + b(\lambda) \overline{f(x, \lambda)}, f(x, \lambda) \\ &= a(\lambda) W f(x, \lambda), f(x, \lambda) + b(\lambda) W \overline{f(x, \lambda)}, f(x, \lambda) = -2ib(\lambda), \end{aligned}$$

отсюда получим  $b(\lambda) = -\frac{1}{2i} W(\lambda)$ . Воспользовавшись действительностью  $\psi(x, \lambda)$  при  $\lambda \in R^1$  находим

$$\begin{aligned} \overline{W(\lambda)} = W \overline{\psi(x, \lambda)}, \overline{f(x, \lambda)} &= W \overline{\psi(x, \lambda)}, \overline{f(x, \lambda)} \\ &= W a(\lambda) f(x, \lambda) + b(\lambda) \overline{f(x, \lambda)}, \overline{f(x, \lambda)} = 2ia(\lambda), \end{aligned}$$

$$a(\lambda) = \frac{1}{2i} \overline{W(\lambda)}.$$

Подставляя в равенство (2.3.2), полученные выражения для  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  выводим разложение (2.3.1). **Лемма 2.3.1 доказана.**

**Лемма 2.3.2.** Пусть выполняются условия (а) и (б). Тогда

- 1)  $W(\lambda)$  является аналитической функцией в полуплоскости  $\text{Im } \lambda > 0$ ;
- 2)  $W(\lambda)$  непрерывна в полуплоскости  $\text{Im } \lambda \geq 0$ ;
- 3)  $W(\lambda)$  не имеет нулей в полуплоскости  $\text{Im } \lambda \geq 0$ .

**Доказательство.** Первое утверждение этой леммы следует, из аналитичности по  $\lambda$  функций  $\psi(x, \lambda)$  и  $f(x, \lambda)$  соответственно на всей плоскости  $C$  и на  $\text{Im } \lambda > 0$ . Второе утверждение следует из непрерывности  $f(x, \lambda)$  в полуплоскости  $\text{Im } \lambda \geq 0$ .

Предположим, что  $\text{Im } \lambda_0 > 0$  и  $W(\lambda_0) = 0$ . Тогда  $\psi(x, \lambda_0) = \text{const} \cdot f(x, \lambda_0) \in L_2^2(a, \infty)$ . В силу  $\psi(x, \lambda_0) \in L_2^2(-\infty, a)$  получим, что  $\psi(x, \lambda_0) \in L_2^2(-\infty, \infty)$ . Так как  $\psi(x, \lambda_0) \neq 0$ , то  $\psi(x, \lambda_0)$  является собственной вектор–функцией задачи (2.0.1). Это утверждение противоречит самосопряжённости задачи (2.0.1) (см. [22], стр. 297).

В  $R^1$  функция  $W(\lambda)$  не обращается в нуль, так как задача (2.0.1) не имеет собственных значений. **Лемма 2.3.2 доказана.**

Пусть  $\lambda \in R^1$  и выполняются условия (а) и (б). Разделим обе части равенства (2.3.1) на  $\frac{1}{2i}W(\lambda)$ . Тогда

$$u(x, \lambda) = S(\lambda)f(x, \lambda) - \overline{f(x, \lambda)}, \quad (2.3.3)$$

где

$$u(x, \lambda) = \frac{2i}{W(\lambda)}\psi(x, \lambda), \quad S(\lambda) = \frac{\overline{W(\lambda)}}{W(\lambda)}.$$

Функция  $S(\lambda)$  называется функцией рассеяния задачи (2.0.1). Нетрудно видеть, что  $|S(\lambda)| = 1$ .

Введём следующую функцию

$$S_0(\lambda) = e^{-2ia\lambda} \cdot \frac{\psi_1(a, \lambda) + i\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)}. \quad (2.3.4)$$

**Теорема 2.3.1.** Пусть выполняется условие (б). Тогда

- 1)  $S_0(\lambda)$  является мероморфной функцией;
- 2)  $S_0(\lambda)$  не имеет полюсов и нулей на  $R^1$ ;
- 3) если  $\lambda \in R^1$ , то  $|S_0(\lambda)| = 1$ ;
- 4)  $S_0(\lambda)$  не имеет полюсов на  $\text{Im } \lambda > 0$ ;
- 5) если  $\text{Im } \lambda \geq 0$ , то  $|S_0(\lambda)| \leq e^{2a \text{Im } \lambda}$ ;
- 6) если  $\text{Im } \lambda \geq 0$ , то

$$\left| \frac{\psi_1(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)} \right| \leq 1.$$

**Доказательство.** 1) мероморфность функции  $S_0(\lambda)$  следует из аналитичности по  $\lambda$  на всей плоскости  $C$  функции  $\psi(x, \lambda)$ .

2) если точка  $\lambda_0 \in R^1$  является полюсом (или нулём) функции  $S_0(\lambda)$ , то в силу действительности  $\psi(a, \lambda_0)$  имеем  $\psi_1(a, \lambda_0) = 0$ ,  $\psi_2(a, \lambda_0) = 0$ . Согласно теореме единственности решения задачи Коши  $\psi(x, \lambda_0) \equiv 0$ , что противоречит тому, что решение  $\psi(x, \lambda)$  ненулевое.

- 3) если  $\lambda \in R^1$ , то

$$|S_0(\lambda)| = |e^{-2ia\lambda}| \cdot \left| \frac{\psi_1(a, \lambda) + i\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)} \right| = \frac{\sqrt{\psi_1^2(a, \lambda) + \psi_2^2(a, \lambda)}}{\sqrt{\psi_1^2(a, \lambda) + \psi_2^2(a, \lambda)}} = 1.$$

- 4) положим

$$p_0(x) = \begin{cases} p(x), & x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}, \quad q_0(x) = \begin{cases} q(x), & x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

и рассмотрим систему (2.0.1) с коэффициентами  $p_0(x)$ ,  $q_0(x)$ . Очевидно, что для такой системы условия (а) и (б) выполняются. В этом случае

$$f^0(x, \lambda) = \begin{cases} e^{i\lambda a} \cdot \frac{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)}{W(\lambda)} \cdot f(x, \lambda) - e^{i\lambda a} \cdot \frac{f_1(a, \lambda) - if_2(a, \lambda)}{W(\lambda)} \cdot \psi(x, \lambda), & x \leq a \\ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x}, & x > a \end{cases}$$

и

$$\psi^0(x, \lambda) = \begin{cases} \psi(x, \lambda), & x \leq a \\ \begin{pmatrix} \cos \lambda(x-a) \\ \sin \lambda(x-a) \end{pmatrix} \cdot \psi_1(a, \lambda) + \begin{pmatrix} -\sin \lambda(x-a) \\ \cos \lambda(x-a) \end{pmatrix} \cdot \psi_2(a, \lambda), & x > a. \end{cases}$$

Допустим, что функция  $S_0(\lambda)$  имеет полюс в точке  $\lambda_0$ , где  $\text{Im} \lambda_0 > 0$ . Тогда знаменатель  $S_0(\lambda)$  обращается в нуль, т.е.  $\psi_1(a, \lambda_0) - i\psi_2(a, \lambda_0) = 0$ . Тогда  $\psi_2(a, \lambda_0)e^{-i\lambda_0 a} f^0(x, \lambda_0) = \psi^0(x, \lambda_0)$ . Отсюда следует, что  $\psi^0(x, \lambda_0) \in L_2^2(-\infty, \infty)$ , т.е.  $\lambda_0$  ( $\text{Im} \lambda_0 > 0$ ) – собственное значение задачи (2.0.1) с потенциалом  $p_0(x)$  и  $q_0(x)$ . Противоречие, так как оператор Дирака симметрический.

Значит,  $S_0(\lambda)$  не имеет полюсов в  $\text{Im} \lambda > 0$ .

5) рассмотрим аналитическую в  $\text{Im} \lambda > 0$  и непрерывную на  $\text{Im} \lambda \geq 0$  функцию

$$g(\lambda) = \frac{\psi_1(a, \lambda) + i\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)}.$$

Используя равенство

$$m_-(\lambda) = -\frac{\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda)}$$

имеем

$$g(\lambda) = \frac{1 - im_-(\lambda)}{1 + im_-(\lambda)}.$$

Из асимптотической формулы

$$m_-(\lambda) = -i + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \delta < \arg \lambda < \pi - \delta,$$

где  $\delta > 0$  – любое достаточно малое число, следует, что

$$g(\lambda) = \frac{1 - im_-(\lambda)}{1 + im_-(\lambda)} = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \delta < \arg \lambda < \pi - \delta.$$

Из последнего представления в силу произвольности  $\delta > 0$  и равенства  $|g(\lambda)| = 1$  при  $\text{Im} \lambda = 0$  выводим ограниченность  $g(\lambda)$  в  $\text{Im} \lambda \geq 0$ .

В силу принципа максимума для голоморфных функций [62]  $|g(\lambda)|$  принимает своё наибольшее значение на границе области  $\text{Im} \lambda > 0$ , т.е. на

$\text{Im } \lambda = 0$ . Значит,  $|g(\lambda)| \leq 1$  при  $\text{Im } \lambda \geq 0$ , более точно  $|g(\lambda)| < 1$  при  $\text{Im } \lambda > 0$ .

В силу этого неравенства из (2.3.4) получим  $|S_0(\lambda)| \leq e^{2a \text{Im } \lambda}$ .

б) аналогично, рассматривая функции

$$g_1(\lambda) = \frac{\psi_1(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)}, \quad g_2(\lambda) = \frac{\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)}$$

находим

$$g_1(\lambda) = \frac{1}{1 + im_-(\lambda)} = \frac{1}{2 + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{2} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \delta < \arg \lambda < \pi - \delta,$$

$$g_2(\lambda) = \frac{-m_-(\lambda)}{1 + im_-(\lambda)} = \frac{i + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{2 + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{i}{2} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \delta < \arg \lambda < \pi - \delta.$$

Используя принцип максимума, получим  $|g_1(\lambda)| \leq 1$ ,  $|g_2(\lambda)| \leq 1$  при  $\text{Im } \lambda \geq 0$ .

**Теорема 2.3.1 доказана.**

**Теорема 2.3.2.** Если  $\lambda \in R^1$ , то выполняется следующая асимптотика

$$S(\lambda) = S_0(\lambda) + \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Изучим асимптотику функции  $W(\lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } \lambda \geq 0$ . Используя асимптотику (2.2.2) для решения Йоста, получим

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \begin{vmatrix} \psi_1(a, \lambda) & f_1(a, \lambda) \\ \psi_2(a, \lambda) & f_2(a, \lambda) \end{vmatrix} = \psi_1(a, \lambda)f_2(a, \lambda) - \psi_2(a, \lambda)f_1(a, \lambda) = \\ &= e^{i\lambda a} \psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda) \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{\psi_1(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)} \cdot \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) - \frac{i\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)} \cdot \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Используя теорему 2.3.1 из (2.3.5) выводим следующую асимптотику

$$W(\lambda) = e^{i\lambda a} \psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda) \times \left\{ 1 + \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right\}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda \geq 0.$$

Отсюда, при  $\lambda \in R^1$  получим, что

$$\overline{W(\lambda)} = e^{-i\lambda a} \psi_1(a, \lambda) + i\psi_2(a, \lambda) \cdot \left\{ 1 + \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right\}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda = 0.$$

Значит,

$$S(\lambda) = \frac{\overline{W(\lambda)}}{W(\lambda)} = e^{-2i\lambda a} \cdot \frac{\psi_1(a, \lambda) + i\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)} \left\{ 1 + \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right\}, \quad \lambda \rightarrow \pm\infty.$$

Учитывая ограниченность при  $\lambda \in R^1$  функции  $S_0(\lambda)$  имеем

$$S(\lambda) = S_0(\lambda) + \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad \lambda \rightarrow \pm\infty.$$

**Теорема 2.3.2 доказана.**

**Лемма 2.3.3.** Вектор–функция  $\frac{\psi(x, \lambda)e^{i\lambda x}}{W(\lambda)}$  при  $x \geq a$  равномерно ограничена в  $\text{Im } \lambda \geq 0$ .

**Доказательство.** Покажем в начале ограниченность вектор–функции  $\frac{\psi(a, \lambda)e^{i\lambda a}}{W(\lambda)}$  в верхней полуплоскости  $\text{Im } \lambda \geq 0$ . Для этого используем асимптотику

$$W(\lambda) = e^{i\lambda a} \psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda) \cdot \left\{ 1 + \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right\}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda \geq 0$$

и теорему 2.3.1. Тогда

$$\left| \frac{\psi_1(a, \lambda)e^{i\lambda a}}{W(\lambda)} \right| = \left| \frac{\psi_1(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)} \right| \cdot \left\{ 1 + \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right\} \leq \text{const},$$

аналогично

$$\left| \frac{\psi_2(a, \lambda)e^{i\lambda a}}{W(\lambda)} \right| \leq \text{const}.$$

Пусть теперь  $x > a$ . Тогда

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\psi_1(x, \lambda) e^{i\lambda x}}{W(\lambda)} \right| &= \left| \frac{\psi_1(x, \lambda) e^{i\lambda x}}{e^{i\lambda a} \psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda) \cdot \left\{ 1 + \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right\}} \right| = \\
&= \left| \frac{\frac{\psi_1(x, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda)} e^{i\lambda(x-a)}}{1 - i \frac{\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda)}} \right| \cdot \left\{ 1 + \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right\} = \\
&= \frac{\left| \frac{\psi_1(a, \lambda)\theta_1(x, \lambda) - \psi_2(a, \lambda)\varphi_1(x, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda)} \right| |e^{i\lambda(x-a)}|}{|1 + im_-(\lambda)|} \cdot \left\{ 1 + \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right\} = \\
&= \frac{\left| \theta_1(x, \lambda) - \frac{\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda)} \varphi_1(x, \lambda) \right| |e^{i\lambda(x-a)}|}{|1 + im_-(\lambda)|} \cdot \left\{ 1 + \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right\} = \\
&= \frac{|\theta_1(x, \lambda) + m_-(\lambda)\varphi_1(x, \lambda)|}{|1 + im_-(\lambda)|} |e^{i\lambda(x-a)}| \cdot \left\{ 1 + \underline{O}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right\}. \quad (2.3.6)
\end{aligned}$$

Из асимптотики

$$m_-(\lambda) = -i + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \delta < \arg \lambda < \pi - \delta \quad (2.3.7)$$

следует, что

$$1 + im_-(\lambda) = 2 + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \delta < \arg \lambda < \pi - \delta. \quad (2.3.8)$$

Используя асимптотики

$$\theta_1(x, \lambda) = \cos \lambda(x-a) + \underline{O}\left(\frac{e^{(x-a)\operatorname{Im}\lambda}}{|\lambda|}\right), \quad \varphi_1(x, \lambda) = \sin \lambda(x-a) + \underline{O}\left(\frac{e^{(x-a)\operatorname{Im}\lambda}}{|\lambda|}\right)$$

находим

$$\theta_1(x, \lambda) + m_-(\lambda)\varphi_1(x, \lambda) = \cos \lambda(x-a) + \underline{O}\left(\frac{e^{(x-a)\operatorname{Im}\lambda}}{|\lambda|}\right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ -i + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right\} \cdot \left\{ \sin \lambda(x-a) + \underline{\underline{O}}\left(\frac{e^{(x-a)\operatorname{Im}\lambda}}{|\lambda|}\right) \right\} = \\
& = \cos \lambda(x-a) - i \sin \lambda(x-a) + \underline{\underline{O}}\left(\frac{e^{(x-a)\operatorname{Im}\lambda}}{|\lambda|}\right). \tag{2.3.9}
\end{aligned}$$

Подставляя (2.3.8) и (2.3.9) в (2.3.6), имеем

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\psi_1(x, \lambda) e^{i\lambda x}}{W(\lambda)} \right| &= \frac{\left| 1 + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right|}{2 + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)} \cdot \left\{ 1 + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right\} = \\
&= \frac{1}{2} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \delta < \arg \lambda < \pi - \delta. \tag{2.3.10}
\end{aligned}$$

Пусть теперь  $x > a$  и  $\lambda \in R^l$ . Тогда

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2i\psi_1(x, \lambda)}{W(\lambda)} \right| = \left| S(\lambda) f_1(x, \lambda) - \overline{f_1(x, \lambda)} \right| = \\
& = \left| S(\lambda) i e^{i\lambda x} \left( 1 + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right) + i e^{-i\lambda x} \left( 1 + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right) \right| \leq 1 + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \tag{2.3.11}
\end{aligned}$$

Из (2.3.10) и (2.3.11) в силу произвольности  $\delta > 0$ , имеем

$$\left| \frac{2i\psi_1(x, \lambda)}{W(\lambda)} \right| \leq \text{const}. \quad \text{Аналогично} \quad \left| \frac{2i\psi_2(x, \lambda)}{W(\lambda)} \right| \leq \text{const}.$$

**Лемма 2.3.3 доказана.**

## § 2.4. Вывод интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко

В этом параграфе методом В.А.Марченко выводится линейное интегральное уравнение для  $A(x, t)$ – ядра представления (2.2.1)

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + \int_x^\infty A(x, t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda t} dt,$$

т.е. доказывается следующая теорема

**Теорема 2.4.1.** При каждом фиксированном  $x \in R^1$  функция  $A(x, t)$ – ядро представления (2.2.1) удовлетворяет интегральному уравнению Гельфанда–Левитана–Марченко

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} G(x + y) + \int_x^\infty A(x, t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} G(t + y) dt - A(x, y) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (x < y < \infty), \quad (2.4.1)$$

где

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{S}(\lambda) - S_0(\lambda) \bar{e}^{-i\lambda t} d\lambda. \quad (2.4.2)$$

**Доказательство.** Для вывода интегрального уравнения (2.4.1) равенство (2.3.3)

$$u(x, \lambda) = S(\lambda) f(x, \lambda) - \overline{f(x, \lambda)}$$

перепишем в виде

$$\begin{aligned} & u(x, \lambda) - S_0(\lambda) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} = \\ & = \mathcal{S}(\lambda) - S_0(\lambda) \bar{f}(x, \lambda) + S_0(\lambda) \left[ f(x, \lambda) - \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} \right] - \left[ \overline{f(x, \lambda)} - \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} \right]. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Подставляя в (2.4.3) выражение (2.2.1) имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ u(x, \lambda) e^{i\lambda x} - S_0(\lambda) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{2i\lambda x} + \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{-i\lambda x} = \\ & = \mathcal{S}(\lambda) - S_0(\lambda) \bar{\left[ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + \int_x^\infty A(x, t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda t} dt + \right.} \end{aligned}$$

$$+ \int_x^\infty A(x,t) S_0(\lambda) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda t} dt - \int_x^\infty A(x,t) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\lambda t} dt. \quad (2.4.4)$$

Умножим обе части равенства (2.4.4) на  $\frac{1}{2\pi} e^{i\lambda y}$  ( $x < y$ ), и проинтегрируем полученное равенство по  $\lambda$  на интервале  $(-\infty, \infty)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left\{ u(x, \lambda) e^{i\lambda x} - S_0(\lambda) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{2i\lambda x} + \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{i\lambda(y-x)} d\lambda = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left\{ \mathcal{F}(\lambda) - S_0(\lambda) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{i\lambda(x+y)} d\lambda + \\ & + \int_x^\infty A(x,t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left\{ \mathcal{F}(\lambda) - S_0(\lambda) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{i\lambda(t+y)} d\lambda \right\} dt + \\ & + \int_x^\infty A(x,t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty S_0(\lambda) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda(t+y)} d\lambda \right\} dt - \\ & - \int_x^\infty A(x,t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda(y-t)} d\lambda \right\} dt. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Введём следующую функцию

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left\{ u(x, \lambda) e^{i\lambda x} - S_0(\lambda) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{2i\lambda x} + \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.4.6)$$

Покажем, что функция  $F(\lambda)$  равномерно ограничена в полуплоскости  $\text{Im } \lambda \geq 0$  при  $x \geq a$ . Из леммы 2.3.3 следует равномерная ограниченность в  $\text{Im } \lambda \geq 0$  функции

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ u(x, \lambda) e^{i\lambda x} + \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\left| S_0(\lambda) e^{2i\lambda x} \right| = \left| e^{2i\lambda(x-a)} \cdot \frac{\psi_1(a, \lambda) + i\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)} \right| \leq e^{-2(x-a)\text{Im } \lambda} \leq 1.$$

Значит,  $F(\lambda)$  равномерно ограничена в  $\text{Im } \lambda \geq 0$  при  $x \geq a$ .

Теперь рассмотрим функцию  $F(\lambda)$  при  $\lambda \in R^l$ :

$$\begin{aligned} F(\lambda) &\equiv \frac{1}{2\pi} \left\{ S(\lambda) f(x, \lambda) - \overline{f(x, \lambda)} e^{i\lambda x} - S_0(\lambda) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{2i\lambda x} + \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ S(\lambda) f(x, \lambda) - S_0(\lambda) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} \right\} e^{i\lambda x} - \frac{1}{2\pi} \left\{ \overline{f(x, \lambda)} - \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} \right\} e^{i\lambda x} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ S(\lambda) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right] - S_0(\lambda) \right\} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{2i\lambda x} - \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[ 1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right] - 1 \right\} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \end{aligned}$$

Значит, функция  $\lambda F(\lambda)$  ограничена на всей прямой и  $\lambda F(\lambda) = O(1)$ ,  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im} \lambda > 0$ . В силу теоремы Фрагмена–Линделефа ([10], стр. 357)  $\lambda F(\lambda)$  ограничена и в  $\text{Im} \lambda \geq 0$ . Отсюда следует, что равномерно при  $x \in \mathbb{R}$ ,  $+\infty$  выполняется оценка

$$F(\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im} \lambda \geq 0.$$

Возьмём контур  $\gamma_R = I_R \cup C_R^+$ , где  $I_R = [-R, R]$  и  $C_R^+$  полуокружность радиуса  $R$  на верхней полуплоскости с диаметром  $I_R = [-R, R]$ . В силу теоремы Коши о вычетах имеем

$$\int_{I_R} F(\lambda) e^{i\lambda(y-x)} d\lambda + \int_{C_R^+} F(\lambda) e^{i\lambda(y-x)} d\lambda = 0. \quad (2.4.7)$$

Используя лемму Жордана из (2.4.7) получим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda(y-x)} d\lambda = 0. \quad (2.4.8)$$

Учитывая тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(y-t)} d\lambda = \delta(y-t),$$

равенство (2.4.8) и обозначения (2.4.2), (2.4.6), тождество (2.4.5) перепишем в следующем виде

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} G(x+y) + \int_x^{\infty} A(x,t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} G(t+y) dt +$$

$$+ \int_x^\infty A(x, t) \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty S_0(\lambda) e^{i\lambda(t+y)} d\lambda \right\} dt - A(x, y) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.4.9)$$

**Лемма 2.4.1.** При  $t + y - 2a > 0$  имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^\infty S_0(\lambda) e^{i\lambda(t+y)} d\lambda = 0. \quad (2.4.10)$$

**Доказательство.** Интегрируем по следующему контуру (см. рис.1)

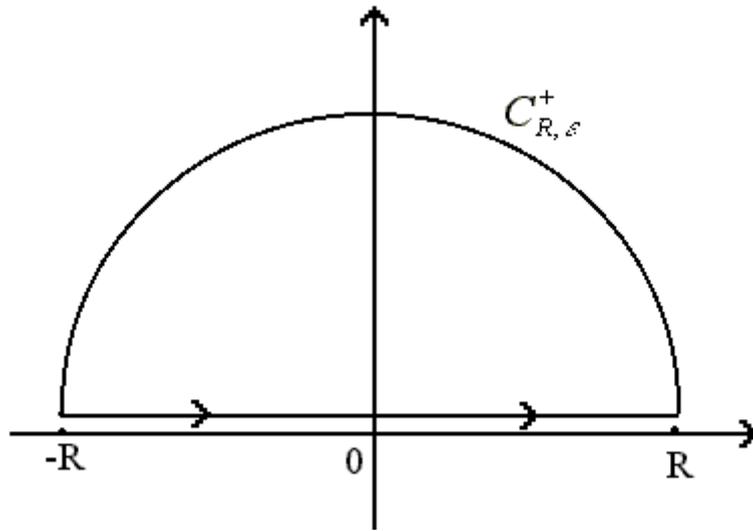


рис. 1.

функцию  $g(\lambda) e^{i\lambda(t+y-2a)}$ , где

$$g(\lambda) = \frac{\psi_1(a, \lambda) + i\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda) - i\psi_2(a, \lambda)}, \quad t + y - 2a > 0.$$

Тогда из теоремы Коши о вычетах находим

$$\int_{C_{R, \epsilon}^+} g(\lambda) e^{i\lambda(t+y-2a)} d\lambda + \int_{-\sqrt{R^2 - \epsilon^2 + i\epsilon}}^{\sqrt{R^2 - \epsilon^2 + i\epsilon}} g(\lambda) e^{i\lambda(t+y-2a)} d\lambda = 0. \quad (2.4.11)$$

Так как при  $\delta < \arg \lambda < \pi - \delta$ ,  $|\lambda| \rightarrow \infty$   $\left( \delta = \arcsin \frac{\epsilon}{R} \right)$  выполняется

асимптотика

$$g(\lambda) = \frac{1 - im_-(\lambda)}{1 + im_-(\lambda)} = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right),$$

то используя лемму Жордана, имеем

$$\int_{C_{R,\varepsilon}^+} g(\lambda) e^{i\lambda(t+y-2a)} d\lambda \rightarrow 0, \text{ при } R \rightarrow \infty.$$

Переходя к пределу при  $R \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon \rightarrow +0$  в равенстве (2.4.11), находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda(t+y-2a)} d\lambda = 0.$$

Значит, равенство (2.4.10) выполняется. **Лемма 2.4.1 доказана.**

Пользуясь равенством (2.4.9) и (2.4.10), выводим интегральное уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко (2.4.1).

Уравнение (2.4.1) эквивалентно системе из четырёх интегральных уравнений с действительными коэффициентами:

$$\begin{pmatrix} iG(x+y) \\ G(x+y) \end{pmatrix} + \int_x^\infty \begin{pmatrix} A_{11}(x,t) & A_{12}(x,t) \\ A_{21}(x,t) & A_{22}(x,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} G(t+y) dt - \begin{pmatrix} A_{11}(x,y) & A_{12}(x,y) \\ A_{21}(x,y) & A_{22}(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} iG(x+y) \\ G(x+y) \end{pmatrix} + \int_x^\infty \begin{pmatrix} iA_{11}(x,t) + A_{12}(x,t) \\ iA_{21}(x,t) + A_{22}(x,t) \end{pmatrix} G(t+y) dt + \begin{pmatrix} iA_{11}(x,y) - A_{12}(x,y) \\ iA_{21}(x,y) - A_{22}(x,y) \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} iG(x+y) + \int_x^\infty [iA_{11}(x,t) + A_{12}(x,t)] G(t+y) dt + iA_{11}(x,y) - A_{12}(x,y) = 0 \\ G(x+y) + \int_x^\infty [iA_{21}(x,t) + A_{22}(x,t)] G(t+y) dt + iA_{21}(x,y) - A_{22}(x,y) = 0, \end{cases}$$

Пусть  $G(x) = G_1(x) + iG_2(x)$ , где  $G_1(x)$  и  $G_2(x)$  действительные функции. Тогда

$$\begin{aligned} & iG_1(x+y) - G_2(x+y) + iA_{11}(x,y) - A_{12}(x,y) + \\ & + \int_x^\infty \{A_{11}(x,t)[iG_1(t+y) - G_2(t+y)] + A_{12}(x,t)[G_1(t+y) + iG_2(t+y)]\} dt = 0, \\ & G_1(x+y) + iG_2(x+y) + iA_{21}(x,y) - A_{22}(x,y) + \\ & + \int_x^\infty \{A_{21}(x,t)[iG_1(t+y) - G_2(t+y)] + A_{22}(x,t)[G_1(t+y) + iG_2(t+y)]\} dt = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$G_1(x+y) + A_{11}(x,y) + \int_x^\infty \{A_{11}(x,t)G_1(t+y) + A_{12}(x,t)G_2(t+y)\} dt = 0,$$

$$G_2(x+y) + A_{12}(x,y) + \int_x^\infty \{A_{11}(x,t)G_2(t+y) - A_{12}(x,t)G_1(t+y)\}dt = 0,$$

$$-G_1(x+y) + A_{22}(x,y) + \int_x^\infty \{A_{21}(x,t)G_2(t+y) - A_{22}(x,t)G_1(t+y)\}dt = 0,$$

$$G_2(x+y) + A_{21}(x,y) + \int_x^\infty \{A_{21}(x,t)G_1(t+y) + A_{22}(x,t)G_2(t+y)\}dt = 0.$$

## § 2.5. Восстановление потенциальной матрицы – функции на полупрямой $(-\infty, a]$

Рассмотрим задачу (2.0.2). Как было доказано во втором параграфе,

$$m_-(\lambda) = \frac{a_1(\lambda)}{a_2(\lambda)} \quad \text{и} \quad \psi(a, \lambda) = \begin{pmatrix} a_2(\lambda) \\ -a_1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим, что

$$m_-(\lambda) = -\frac{\psi_2(a, \lambda)}{\psi_1(a, \lambda)}. \quad (2.5.1)$$

Используя разложение

$$\frac{2i}{W(\lambda)} \psi(a, \lambda) = S(\lambda) f(a, \lambda) - \overline{f(a, \lambda)}, \quad \lambda \in R^1,$$

формулу (2.5.1) перепишем в виде

$$m_-(\lambda) = -\frac{S(\lambda) f_2(a, \lambda) - \overline{f_2(a, \lambda)}}{S(\lambda) f_1(a, \lambda) - \overline{f_1(a, \lambda)}}, \quad \lambda \in R^1. \quad (2.5.2)$$

Требуется указать процедуру восстановления задачи (2.0.2) по заданной функции Вейля–Титчмарша (2.5.2).

Для этого сведём задачу (2.0.2) к задаче следующего вида

$$\begin{cases} B \frac{dz}{dt} + \tilde{\Omega}(t) z = \mu z, & 0 \leq t < \infty \\ z_1(0) = 0. \end{cases} \quad (2.5.3)$$

С этой целью в задаче (2.0.2) сделаем замену  $x = -t + a$ . Тогда задача (2.0.2) примет вид

$$\begin{cases} B \left( -\frac{dy}{dt} \right) + \Omega(-t + a) y = \lambda y, & -\infty \leq -t + a \leq a \\ y_1|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} B \frac{dy}{dt} + \Omega(a - t) \bar{y} = (-\lambda) y, & 0 \leq t < \infty \\ y_1|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (2.5.4)$$

Для удобства введём обозначения

$$z(t) = y(a-t), \quad \tilde{\Omega}(t) = -\Omega(a-t), \quad \mu = -\lambda. \quad (2.5.5)$$

Тогда задача (2.5.4) примет вид (2.5.3).

В этом случае решение  $\psi(x, \lambda) \in L_2^2(-\infty, a)$  перейдёт в  $\tilde{\psi}(t, \mu) = \psi(a-t, -\mu) \in L_2^2(0, \infty)$ , действительно

$$\int_{-\infty}^a [\psi_1^2(x, \lambda) + \psi_2^2(x, \lambda)] dx < \infty,$$

$$\int_{\infty}^0 [\psi_1^2(a-t, \mu) + \psi_2^2(a-t, \mu)](-dt) < \infty,$$

т. е.

$$\int_0^{\infty} [\tilde{\psi}_1^2(t, \mu) + \tilde{\psi}_2^2(t, \mu)] dt < \infty.$$

Если  $\tilde{\theta}(t, \mu) = \theta(a-t, -\mu)$ ,  $\tilde{\varphi}(t, \mu) = \varphi(a-t, -\mu)$ , то

$$\tilde{\theta}(0, \mu) = \theta(a, -\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi}(0, \mu) = \varphi(a, -\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\tilde{\psi}(t, \mu) = C(\mu)[\tilde{\theta}(t, \mu) + \tilde{m}(\mu)\tilde{\varphi}(t, \mu)]$ , то

$$\tilde{\psi}(0, \mu) = C(\mu) \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{m} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} C(\mu) \\ -C(\mu)\tilde{m}(\mu) \end{pmatrix},$$

отсюда

$$\tilde{m}(\mu) = -\frac{\tilde{\psi}_2(0, \mu)}{\tilde{\psi}_1(0, \mu)}. \quad (2.5.6)$$

В силу (2.5.6) и (2.5.1) имеем

$$\tilde{m}(\mu) = -\frac{\psi_2(a, -\mu)}{\psi_1(a, -\mu)} = m_-(-\mu).$$

Теперь, зная функцию Вейля–Титчмарша  $\tilde{m}(\mu)$  задачи (2.5.3), находим спектральную функцию  $\tilde{\rho}(\mu)$ . Для этого находим полюсы  $\mu_n$ ,  $n \in Z$  функции  $\tilde{m}(\mu)$  и вычеты  $r_n = \underset{\mu_n}{\text{res}} \tilde{m}(\mu)$  в этих полюсах. Тогда

$$\tilde{\rho}(\mu) = \begin{cases} \sum_{0 \leq \mu_n < \mu} r_n, & \mu > 0, \\ - \sum_{\mu < \mu_n \leq 0} r_n, & \mu \leq 0. \end{cases}$$

По  $\tilde{\rho}(\mu)$  восстановим матрицу–функцию  $\tilde{\Omega}(t)$  используя процедуру Гельфанда–Левитана [21,22]. При этом на функцию  $\tilde{\rho}(\mu)$  налагается условия, приведённые в теореме 3.1. монографии [22].

Положим

$$\Phi(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos \mu t}{\mu} \\ \frac{\sin \mu t}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos \mu s}{\mu} & -\frac{\sin \mu s}{\mu} \end{pmatrix} d \left( \tilde{\rho}(\mu) - \frac{1}{\pi} \mu \right),$$

$$F(t, s) = \frac{\partial^2 \Phi(t, s)}{\partial t \partial s},$$

и решаем интегральное уравнение Гельфанда–Левитана

$$F(t, s) + K(t, s) + \int_0^t K(t, z) F(z, s) dz = 0, \quad (0 \leq s \leq t)$$

относительно матрицы–функции  $K(t, s) = \mathbf{K}_{ij}(t, s)_{i,j=1,2}$ . Затем, по формуле

$$\tilde{\Omega}(t) = K(t, t)B - BK(t, t)$$

находим  $\tilde{\Omega}(t)$ , при  $t \geq 0$ . Далее из равенства (2.5.5) вытекает, что  $\Omega(x) = -\tilde{\Omega}(a - x)$ , где  $x \leq a$ .

## § 2.6. Заключение

В этой главе изучена обратная задача теории рассеяния для оператора Дирака на всей прямой с действительными непрерывными коэффициентами  $p(x)$  и  $q(x)$ , которые стремятся достаточно быстро к нулю при  $x \rightarrow \infty$  и оператор Дирака с этими коэффициентами, рассматриваемая на полуоси  $(-\infty, a]$  имеет чисто дискретный спектр. Для рассматриваемого оператора Дирака вводится  $S$ -функция, изучаются её свойства, выводится интегральное уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко, даётся процедура восстановления коэффициентов  $p(x)$  и  $q(x)$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению обратной задачи по  $S$ -функции теории рассеяния и по спектральной функции для оператора Дирака на всей и на полупрямой. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоять в следующем:

1) вычислен методом Лакса регуляризованный след для оператора Дирака с особенностью в потенциале;

2) изучена обратная задача теории рассеяния для оператора Дирака на всей прямой с действительными непрерывными коэффициентами  $p(x)$  и  $q(x)$ , которые достаточно быстро стремятся к нулю при  $x \rightarrow \infty$  и рассматриваемый с этими коэффициентами оператор Дирака имеет чисто дискретный спектр на полуоси  $(-\infty, a]$ ;

Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в математической физике при интегрировании нелинейных уравнений, а также квантовой механике и в других областях естествознания.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алимов Ш.А. О работах А.Н.Тихонова по обратным задачам для уравнения Штурма–Лиувилля //Успехи матем. наук. –Москва, 1976. – т. 31, № 6.
2. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.:«Мир»,1987.
3. Ablowitz M.J., Fokas A.S. Forced Nonlinear Evolution Equation and the Inverse Scattering Transform //Studies in Appl.Math. – 1989 (80). – p.253-272.
4. Буслаев В.С., Фомин В.Л. К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси //Вестник ЛГУ. –1962.–№ 1. – С. 56-64.
5. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: «Науково думка», 1965.
6. Gardner G., Green I., Kruskal M., Miura R. Method for solving the Korteweg-de Vries equation //Phys. Rev. Lett. –1967. – v.19. – p. 1095-1097.
7. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. – Москва, 1951.– т.15. – С. 309-360.
8. Гасымов М.Г. Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка  $2n$  // Труды ММО. –Москва, 1968. –т. 19. –С. 41-112.
9. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: «Мир», 1988.
10. Евграфов М.А. Аналитические функции. –М.: «Наука», 1968.
11. Eastham M.S., Mcleod I.B. The existence of eigenvalues embedded in the continuous spectrum of ordinary differential operators // University of Wisconsin. – Math. Research center, USA, 1976.
12. Jost R., Kohn W. On the relation between phase shift, energy levels and the potential.//Kgl. Danske Videnskab.Selskab.,Mat.-Fys.Medd.,1953, v. 27, № 9.
13. Castillo Rio. Embedded Eigenvalues of Sturm – Liouville Operators //Commun. Math. Phys. – 1991. – v. 142. – p. 421-431.
14. Крейн М.Г., Мелик–Адамян Ф.Э. К теории  $S$ –матриц канонических дифференциальных уравнений с суммируемым потенциалом //Докл. АН Армении. – 1968. – т. 46, № 4. – С. 150-155.

15. Кулиш П.П. Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера на оси // Матем. заметки. – Москва, 1968. – т.4, № 6. – С. 677-684.
16. Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений. – М.: «Наука», 1979.
17. Levinson N. On the uniqueness of the potential in Schrodinger equation for a given asymptotic Phase // Dans. Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd.–1949, № 9, p.25-30.
18. Левин Б.Я. Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. – Москва, 1956. – т. 106, № 2. – С. 187-190.
19. Левитан Б.М., Гасымов М.Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам // УМН. – 1964.– т. 19 (116), № 2. – С. 3-63.
20. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. – М.: «Наука», 1984.
21. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. – М.: «Наука», 1970.
22. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. – М.: «Наука», 1988 .
23. Lax P. D. Trace Formulas for the Schroedinger operator // Comm. Pure and Appl. Math. – 1994. – vol. XLVII. – p. 503-512.
24. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: «Наукова думка» , 1977.
25. Молчанов А.М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка // Труды Московского Математического общества. – 1953. – т.2. – С. 169-199.
26. Мартынов В.В. Условия дискретности и непрерывности спектра в случае самосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка // Докл. АН СССР. – 1965. – т.165, № 5. – С. 996-999.
27. Ньюэлл А. Обратное преобразование рассеяния / В книге «Солитоны» под редак. Буллаф Р., Кодри Ф. – М.: «Мир» , 1983.
28. Титчмарш Э.Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. том I. – М.: ИЛ , 1961.

29. Frodberg C.E. Calculation of the interaction between two particles from the asymptotic phase // *Phys. Rev.* – 1947. – v. 72. – p. 519.
30. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния // *Успехи математических наук.* – 1959. – т. 14, № 4 (88). – С. 57-119.
31. Фаддеев Л.Д. Свойства  $S$ –матрицы одномерного уравнения Шредингера // *Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова.* – 1964. – т. 73. –С. 314-336.
32. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. – М.: РЖ мат. «Современные проблемы математики». – 1974. – т. 3. – С. 93-180.
33. Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси // *Докл. АН СССР.* – 1972. – т. 207, № 1. – С. 44-47.
34. Хасанов А.Б. О вложенных собственных значениях оператора Шредингера // *Докл. АН РУз.* – Ташкент, 1990. – № 3. – С. 9-12.
35. Хасанов А.Б. О собственных значениях оператора Дирака, расположенных на непрерывном спектре // *ТМФ.* – Москва, 1994. – т. 99, №.1. – С. 20-26.
36. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об одном способе вычисления регуляризованного следа для оператора Дирака//*УзМЖ.*–1999, № 4, с.77-82.
37. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния.– М.: «Мир», 1980.
38. Яхшимуратов А.Б. Вычисление регуляризованного следа оператора Дирака методом П.Д. Лакса // *УзМЖ.* – Ташкент, 1998. – № 6. –С. 76-80.
39. Яхшимуратов А.Б., Танирбергенов М.Б. Об одном способе вычисления регуляризованного следа оператора Дирака с особенностью в потенциале // *Доклады АН Республики Узбекистан.* – Ташкент, 1999.– № 11.– С. 15-18.
40. Яхшимуратов А.Б., Танирбергенов М.Б. Об обратной задаче рассеяния для системы уравнений Дирака на всей прямой // *Узбекский матем. журнал.* – Ташкент, 2004. – № 4. – С. 90-98.
41. Яхшимуратов А.Б., Танирбергенов М.Б. Об обратной задаче рассеяния для системы уравнений Дирака на всей прямой // *Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной научной конференции 16-19 ноября*

2004.– Ташкент, 2004. – т. I, С. 303-305.

42. Танирбергенов М.Б. О вложенных собственных значениях оператора Дирака с массой //Доклады АН Республики Узбекистан. – Ташкент, 1999.– № 10. – С. 16-19.
43. Танирбергенов М.Б. О собственных значениях оператора Дирака с массой, расположенных на непрерывном спектре //Многомерный комплексный анализ: Тезисы докладов международной конференции 5-10 августа 2002. – Красноярск, Россия, 2002. – С. 43-44.