МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА имени МИРЗО УЛУГБЕКА

На правах рукописи
УДК 517.98

САДАДДИНОВА САНОБАР САБИРОВНА

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА – КАНТОРОВИЧА

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ташкент – 2010

Работа выполнена на кафедре «Алгебра и функциональный анализ» Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Научный руководитель: доктор физико - математических наук, профессор **Ганиев Иномжон Гуломджанович.**

Официальные оппоненты: доктор физико - математических наук, профессор **Абдуллаев Рустамбой Зайирович,**

кандидат физико – математических наук **Арзикулов Фарход Нематжанович.**

Ведущая организация: Каракалпакский государственный университет.

Защита диссертации состоится «___»__________2011 г. в ____ часов на заседании специализированного совета Д 067.02.03 при Национальном Университете Узбекистана по адресу:

700174, Ташкент, Вузгородок, НУУз, механико-математический факультет, ауд. - 303.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке НУУз.

Автореферат разослан «___»__________2011 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
кандидат физико-математических наук Ю. Х. Эшкабилов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Одним из важных разделов в теории ограниченных линейных операторов является теория однопараметрических полугрупп линейных операторов в банаховых и локально выпуклых пространствах, использующаяся при решении важных задач теории вероятности, эргодической теории и дифференциальных уравнений. Изучение однопараметрических полугрупп линейных операторов было начато Э. Хилле и К. Иосидой в 40-х годах XX столетия. Аналитическая теория полугрупп операторов, действующих в банаховых и локально выпуклых пространствах, подробно изложена в монографиях Н. Данфорда, Дж. Шварца, К. Иосиды, У. Рудина, Э. Хилле, Р. С. Филлипса и др.

С последними достижениями теории однопараметрических полугрупп операторов в банаховых и локально выпуклых пространствах можно ознакомиться в монографии К. Ж. Энгеля и Р. Нагеля.

В последнее время исследованиям различных вопросов теории полугрупп операторов посвящены работы А. С. Загорского, С. В. Ясколко, С. Мюллера, В. А. Золотарева и др.

В 60-годах прошлого века Т.А. Сарымсаковым введено понятие полуполнозначной нормы для линейных операторов, действующих в локально выпуклых пространствах. Используя эти понятия Х. Махмудовым предложен новый метод исследования теории полугрупп линейных операторов в локально выпуклых пространствах.

В 30-х годах XX века в работах Л.В. Канторовича были рассмотрены решеточно-нормированные пространства и введено понятие мажорируемого оператора в этих пространствах. Дальнейшему существенному развитию теории мажорируемых операторов посвящены работы А.Г. Кусраева и др.

В начале 90-х годов прошлого века А.Е. Гутманом впервые была дана аксиоматика измеримых банаховых расслоений с лифтингом. Им же установлено, что всякое пространство Банаха–Канторовича над кольцом измеримых функций можно представить в виде измеримого расслоения банаховых пространств. В исследованиях О.Я. Бендерского и М.В. Подорожного рассмотрена техника теории измеримых расслоений на отрезке $[0,1]$.

В работах И. Г. Ганиева, К. К. Кудайбергенова было доказано, что всякий линейный циклически компактный оператор можно представить как измеримое расслоение линейных компактных операторов и получен векторный аналог теоремы Банаха об обратном операторе для операторов, действующих в пространствах Банаха – Канторовича над кольцом измеримых функций. И.Г. Ганиевым и К.К. Кудайбергеновым был получен векторный вариант принципа равномерной ограниченности Банаха – Штейнгауза для операторов в пространствах Банаха – Канторовича.

Полугруппы, порожденные марковскими процессами в функциональных пространствах, играют важную роль в теории вероятности, экономике, математической биологии, молекулярной физике, квантовой механике и т. д.

Полугруппы, порожденные марковскими процессами в пространствах L_p и пространствах непрерывных функций, эргодические теоремы для таких полугрупп, подробно изучены в монографиях и учебниках И.И. Гихмана и А.В. Скорохода, Е.Б. Дынкина, К. Иосиды, М. Лоэва, В. Феллера и др.

А.И. Жданок в своих работах разработал новый метод исследования марковских операторов, базирующийся на общей теории конечно аддитивных мер. В работе А. Е. Гутмана, А. И. Сотникова исследованы порядковые свойства пространства конечно-аддитивных переходных функций и изучены пространства линейных операторов, порожденные конечно-аддитивными переходными функциями.

Степень изученности проблемы. Г.П. Буцаном изучались полугруппы операторов в гильбертовом пространстве, зависящие от измеримого параметра. Случайные интегральные операторы в идеальных пространствах измеримых функции рассмотрены в работах J. Appell, А.С.Калитвина и П.П. Забрейко. Полугруппы операторов в банаховых и локально выпуклых пространствах достаточно хорошо изучены, но в пространствах Банаха - Канторовича до сих пор не рассматривались.

В связи с развитием общей теории мажорируемых операторов в пространствах Банаха – Канторовича над кольцом измеримых функций, естественно возникают задачи теории полугрупп операторов в этих пространствах, которые разумно решать, используя метод измеримых расслоений.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тема диссертационной работы «Марковские процессы и полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича» утверждена на Ученом совете механико-математического факультета НУУз 27 августа 2009 года (протокол № 1) и входит в тематику НИР, проводимых на кафедре НУУз «Алгебра и функциональный анализ».

Цель исследования. Целью диссертационной работы является развитие теории полугрупп линейных операторов для пространств Банаха – Канторовича.

Задачи исследования.

- описание полугруппы L_0-ограниченных L_0-линейных операторов в пространствах Банаха – Канторовича;

- исследование инфинитезимальных операторов полугрупп L_0-ограниченных L_0-линейных операторов, действующих в пространствах Банаха – Канторовича;

- установление связи между свойством сильной непрерывности полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича и свойством сильной непрерывности полугруппы операторов в слоях;

- описание полугрупп операторов, порожденные марковскими процессами в пространствах Банаха – Канторовича $E[L_p]$.

Объекты и предмет исследования. Полугруппы L_0-ограниченных L_0-линейных операторов в пространствах Банаха–Канторовича и марковские процессы в пространствах Банаха – Канторовича $E[L_p]$.

Методы исследований. Применены общие методы измеримых банаховых расслоений, функционального анализа, теории пространств Банаха – Канторовича, марковских процессов.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

- представление L_0- ограниченных полугруппы L_0- ограниченных L_0- линейных операторов в пространствах Банаха – Канторовича в виде измеримых расслоений полугрупп операторов в банаховых пространствах;
- представление сильно непрерывных полугрупп операторов в пространствах Банаха – Канторовича;
- представление инфинитезимального производящего оператора при помощи измеримых расслоений полугрупп операторов;
- описание полугрупп операторов, порожденные марковскими процессами в пространствах Банаха – Канторовича $E[L_p]$.

Научная новизна.

– получено представление полугруппы L_0-ограниченных L_0-линейных операторов в пространстве Банаха – Канторовича в виде измеримых расслоений полугрупп ограниченных операторов;

– исследованы связи между свойствами сильной непрерывности полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича и сильной непрерывности полугруппы операторов в слоях;

– доказана $(bo)-$замкнутость инфинитезимального производящего оператора полугруппы L_0- ограниченных L_0- линейных операторов в пространствах Банаха – Канторовича;

– получено представление полугрупп операторов, порожденные марковскими процессами в пространствах Банаха – Канторовича $E[L_p]$;

– доказаны аналоги статистической и индивидуальной эргодических теорем для полугруппы операторов, порожденной марковским процессом с инвариантной мерой в пространстве Банаха – Канторовича $E[L_p]$.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Результаты диссертации являются новыми и могут применяться в теории можарируемых операторов в пространствах Банаха – Канторовича, в эргодической теории и их приложениях.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на международной конференции «Теория операторов. Комплексный анализ. Математическое моделирование» в городе Волгодонске Ростовской области (2007 г.), на научной конференции, посвященной 90-летнему юбилею НУУз (2008 г.), на городском семинаре по функциональному анализу НУУз под руководством профессора В.И. Чилина (2007-2010 гг.), на семинаре «Операторные алгебры и их приложения» Институт Математики и информационных технологий АН РУз под руководством академика Ш.А. Аюпова и на кафедре НУУз «Алгебра и функциональный анализ» (2007-2009 гг.) и на научном семинаре специализированного совета Д 067.02.03 при НУУз под руководством академика А.С.Садуллаева.

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[7] в виде статьей и тезисов конференций. В работах [1], [4]-[6] постановка задачи принадлежат И.Г.Ганиеву. Доказательства всех основных результатов принадлежат диссертанту.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и 47 наименований использованной литературы. Объём диссертации 88 страниц. Нумерация определений, теорем, предложений, лемм и следствий самостоятельная в каждой главе: первая цифра означает номер главы, вторая – номер параграфа, третья – номер соответствующего утверждения. Формулы нумеруются в пределах главы: номер формулы состоит из номера главы и порядкового номера формулы в главе.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дан обзор работ, относящихся к теме диссертации, а также приведено краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации состоит из двух параграфов. В первом параграфе приводятся необходимые определения и факты из теории полугрупп ограниченных линейных операторов банаховых пространств и из теории полугрупп, порожденные марковскими процессами в L_p-пространствах. Во втором параграфе приводятся сведения о структуре пространства Банаха –Канторовича над кольцом измеримых функций.

Пусть (Ω,Σ,μ) – измеримое пространство с полной конечной мерой, L_0 – алгебра всех комплексных измеримых функций на (Ω,Σ,μ) (равные почти всюду функции отождествляются).

Рассмотрим векторное пространство U над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Определение 1.2.4. Отображение $\|\cdot\|: U \to L_0$ называют L_0-значной нормой, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (x \in U)$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (\lambda \in \mathbb{C},\ x \in U)$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in U)$.

Отображение $\|\cdot\|$ называют *разложимой нормой*, если кроме 1), 2), 3) выполнена *аксиома разложимости*:

4) для любых $x \in U$ и $e_1, e_2 \in L_0$, удовлетворяющих соотношению $\|x\| = e_1 + e_2$, существуют $x_1,\ x_2 \in U$ такие, что $x = x_1 + x_2$ и $\|x_k\| = e_k$ $(k = 1, 2)$. В том случае, когда условие 4) справедливо лишь для дизъюнктных $e_1, e_2 \in L_0$, норму называют *дизъюнктно разложимой*.

Тройку $\left(U, \|\cdot\|, L_0\right)$ называют *решеточно-нормированным пространством* над L_0.

Сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset U$ называют (bo)*-сходящейся* к элементу $x \in U$ и пишут $x = (bo) - \lim x_\alpha$, если сеть $\left(\|x_\alpha - x\|\right)_{\alpha \in A}$ *(o)*-сходится к нулю в L_0. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ называют (bo)*-фундаментальной*, если сеть $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\beta) \in A \times A}$ (bo)-сходится к нулю. Говорят, что решеточно-нормированное пространство (bo)*-полно*, если любая (bo)-фундаментальная сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ в нем (bo)-сходится к некоторому элементу этого пространства.

Определение 1.2.5. Разложимое (bo)-полное решеточно-нормированное пространство над L_0 называется пространством Банаха–Канторовича над L_0.

Пусть X – отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ некоторое банахово пространство $\left(X(\omega), \|\cdot\|_{X(\omega)}\right)$, где $X(\omega) \neq \{0\}$ для всех $\omega \in \Omega$. Сечением X называется функция u, определенная почти всюду в Ω и принимающая значение $u(\omega) \in X(\omega)$ для всех $\omega \in \mathrm{dom}(u)$, где $\mathrm{dom}(u)$ есть область определения u.

Пусть L – некоторое множество сечений.

Определение 1.2.6. Пара (X, L) называется измеримым банаховым расслоением над Ω, если

1) $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in L$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ и $c_1, c_2 \in L$, где
$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 : \omega \in \mathrm{dom}(c_1) \cap \mathrm{dom}(c_2) \to \lambda_1 c_1(\omega) + \lambda_2 c_2(\omega)$;

2) функция $\|c\| : \omega \in \mathrm{dom}(c) \to \|c(\omega)\|_{X(\omega)}$ измерима при всех $c \in L$;

3) для каждой точки $\omega \in \Omega$ множество $\{c(\omega) : c \in L,\ \omega \in \mathrm{dom}(c)\}$ плотно в $X(\omega)$.

Вместо (X, L) будем писать просто X.

Сечение s называется ступенчатым, если $s(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(\omega)c_i(\omega)$, где $c_i\in L,\ A_i\in\Sigma, i=\overline{1,n},$ χ_{A_i} – характеристическая функция. Сечение u называется измеримым, если для каждого $A\in\Sigma,\ \mu(A)<+\infty$ найдется такая последовательность $(s_n)_{n\in N}$ ступенчатых сечений, что $\| s_n(\omega)-u(\omega)\|_{X(\omega)}\to 0$ для почти всех $\omega\in A.$

Пусть $M(\Omega, X)$ – множество всех измеримых сечений. Символом $L_0(\Omega, X)$ обозначим факторизацию $M(\Omega, X)$ по отношению равенства почти всюду. Через $\hat{u}$ обозначим класс из $L_0(\Omega, X)$, содержащий измеримое сечение $u\in M(\Omega, X)$. Далее, для каждого элемента $\hat{u}\in L_0(\Omega, X)$ вводится векторная норма $\|\hat{u}\|=\widehat{\|u(\omega)\|}\in L_0$. Пара $\left(L_0(\Omega, X),\|\cdot\|\right)$ является пространством Банаха – Канторовича над L_0.

Пусть $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ – множество всех комплексных существенно ограниченных измеримых функций на (Ω,Σ,μ). $L^\infty(\Omega)$ – факторизация $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ по отношению равенства почти всюду. Обозначим

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, X)=\{u\in M(\Omega, X):\|u(\omega)\|_{X(\omega)}\in\mathcal{L}^\infty(\Omega)\}.$$

Элементы $\mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ называются *существенно ограниченными измеримыми сечениями* расслоения X. Через $L^\infty(\Omega, X)$ обозначается множество, состоящее из классов эквивалентности существенно ограниченных измеримых сечений. Известно, что $L^\infty(\Omega, X)$ пространство Банаха – Канторовича над $L^\infty(\Omega)$.

Пусть X – измеримое банахово расслоение над Ω. Рассмотрим произвольный числовой лифтинг $p: L^\infty(\Omega)\to\mathcal{L}^\infty(\Omega)$.

Определение 1.2.7. Отображение $\rho_X: L^\infty(\Omega, X)\to\mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ называется векторнозначным лифтингом, ассоциированным с числовым лифтингом p, если выполняются следующие условия:

а) для всех $\hat{u}\in L^\infty(\Omega, X)$ выполнено $\rho_X(\hat{u})\in\hat{u}$, и $\mathrm{dom}(\rho_X(\hat{u}))=\Omega$;

б) $\left\|\rho_X(\hat{u})(\omega)\right\|_{X(\omega)}=p\left(\left\|\hat{u}\right\|\right)(\omega)$ для всех $\hat{u}\in L^\infty(\Omega, X)$ и $\omega\in\Omega$;

в) Если $\hat{u},\hat{v}\in L^\infty(\Omega, X)$, то $\rho_X(\hat{u}+\hat{v})=\rho_X(\hat{u})+\rho_X(\hat{v})$;

г) Если $\hat{u}\in L^\infty(\Omega, X)$ и $e\in L^\infty(\Omega)$, то $\rho_X(e\hat{u})=p(e)\rho_X(\hat{u})$;

д) Множество $\left\{\rho_X(\hat{u})(\omega) : \hat{u} \in L^\infty(\Omega, X)\right\}$ плотно в $X(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Пусть X – измеримое банахово расслоение над Ω.

Оператор $T : L_0(\Omega, \mathrm{X}) \to L_0(\Omega, \mathrm{X})$ называется L_0-линейным, если $T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1(Tx_1) + \lambda_2(Tx_2)$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in L_0$, $x_1, x_2 \in L_0(\Omega, X)$. L_0-линейный оператор $T : L_0(\Omega, \mathrm{X}) \to L_0(\Omega, \mathrm{X})$ называется L_0-ограниченным, если существует такой $C \in L_0$, что $\|T(x)\| \le C\|x\|$ при всех $x \in L_0(\Omega, X)$. Для L_0-ограниченного L_0- линейного оператора T L_0-значная норма задается по правилу $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \le \mathbf{1}\}$, и относительно такой нормы пространство всех L_0- ограниченных L_0- линейных операторов является пространством Банаха – Канторовича.

Во второй главе диссертации изучаются полугруппы L_0- ограниченных L_0- линейных операторов и доказывается вариант классической теоремы о полугруппах в пространстве Банаха – Канторовича.

В первом параграфе второй главы изучаются полугруппы операторов и доказывается, что L_0- ограниченная полугруппа L_0- ограниченных L_0-линейных операторов в пространстве Банаха – Канторовича разлагается измеримое расслоение полугрупп ограниченных операторов.

Пусть $T_t : L_0(\Omega, \mathrm{X}) \to L_0(\Omega, \mathrm{X})$ семейство L_0- ограниченных L_0-линейных операторов, $t \in [0; +\infty)$.

Определение 2.1.1. Семейство $\{T_t\}_{t \in [0;+\infty)}$ назовем полугруппой операторов в пространстве Банаха – Канторовича $L_0(\Omega, \mathrm{X})$, если выполняются $T_0 = I$ и $T_{t+s} = T_t T_s$, при всех $t, s \in [0; +\infty)$, где I – тождественный оператор в $L_0(\Omega, \mathrm{X})$.

Если существует $C \in L_0$, такое, что $\|T_t\| \le C$ при всех $t \in [0; +\infty)$, то полугруппу назовем L_0- ограниченной полугруппой.

Соответственно, если существует $C \in L^\infty(\Omega)$ такое, что $\|T_t\| \le C$ при всех $t \in [0; +\infty)$, то полугруппу назовем $L^\infty(\Omega)$ - ограниченной полугруппой.

Пусть $T_t(\omega) : \mathrm{X}(\omega) \to \mathrm{X}(\omega)$ полугруппа ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве $\mathrm{X}(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$, $t \in [0; +\infty)$.

Определение 2.1.2. Семейство $\{T_t(\omega)\}_{t \in [0;+\infty)}$ назовем измеримым расслоением полугрупп операторов, если для каждого $t \in [0; +\infty)$ имеет место $T_t(\omega)x(\omega) \in M(\Omega, \mathrm{X})$ при всех $x \in M(\Omega, \mathrm{X})$.

Если $\{T_t(\omega)\}_{t \in [0;+\infty)}$ – измеримое расслоение ограниченных линейных операторов, то линейный оператор $T_t : L_0(\Omega, \mathrm{X}) \to L_0(\Omega, \mathrm{X}),$ определенный равенством $T_t x = \widehat{T_t(\omega) x(\omega)},$ служит L_0-ограниченным L_0-линейным оператором.

Основным результатом первого параграфа второй главы является следующая теорема.

Теорема 2.1.2. Если $\{T_t : L_0(\Omega, \mathrm{X}) \to L_0(\Omega, \mathrm{X})\}_{t \in [0;+\infty)}$ – L_0-ограниченная полугруппа L_0- ограниченных L_0- линейных операторов, то существует измеримое расслоение ограниченных полугрупп линейных операторов $T_t(\omega) : \mathrm{X}(\omega) \to \mathrm{X}(\omega)$ такое, что $\rho_{\mathrm{X}}(T_t x)(\omega) = T_t(\omega) \rho_{\mathrm{X}}(x)(\omega)$ для всех $x \in L^\infty(\Omega, \mathrm{X})$ и $\omega \in \Omega.$

Во втором параграфе второй главы определяются сильно непрерывные полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича и исследуются связи между свойствами сильной непрерывности полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича и сильной непрерывности полугруппы операторов в слоях.

Определение 2.2.1. Полугруппу L_0- ограниченных L_0- линейных операторов $\{T_t\}_{t \in [0;+\infty)}$ в $L_0(\Omega, \mathrm{X})$ назовем сильно непрерывной, если $\|T_t x - x\|$ (o)-сходится к нулю в L_0 при $t \to 0$ для каждого $x \in L_0(\Omega, \mathrm{X}).$

Следующая теорема является основным результатом второго параграфа второй главы:

Пусть $\{T_t\}_{t \in [0;+\infty)}$ – $L^\infty(\Omega)$ - ограниченная полугруппа операторов.

Теорема 2.2.1. Если измеримое расслоение полугруппы $\{T_t(\omega)\}_{t \in [0;+\infty)}$ сильно непрерывно в $\mathrm{X}(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega,$ то $\{T_t\}_{t \in [0;+\infty)}$ сильно непрерывная полугруппа операторов в $L_0(\Omega, \mathrm{X}).$

В третьем параграфе второй главы изучаются измеримые расслоения замкнутых операторов.

Пусть $A : L_0(\Omega, \mathrm{X}) \to L_0(\Omega, \mathrm{X})$ – L_0- линейный оператор, с областью определения $D(A) \subset L_0(\Omega, X)$ и пусть $A(\omega)$ – линейный замкнутый оператор из $X(\omega)$ в $X(\omega)$ с областью определения $D(A(\omega))$ для почти всех $\omega \in \Omega.$

Определение 2.3.2. Семейство $\{A(\omega), \omega \in \Omega\}$ назовем измеримым расслоением замкнутых операторов, если $A(\omega) x(\omega) \in M(\Omega, \mathrm{X})$ для любого $x \in M(\Omega, \mathrm{X}), x(\omega) \in D(A(\omega)).$

Если $\{A(\omega), \omega \in \Omega\}$ – измеримые расслоения замкнутых операторов, то линейный оператор определенный равенством $\hat{A} x = \widehat{A(\omega) x(\omega)},$ (1)

является L_0-линейным оператором из $L_0(\Omega,\mathrm{X})$ в $L_0(\Omega,\mathrm{X})$ с областью определения

$$D(A)=\left\{\hat{x}\in L_0(\Omega,X):x(\omega)\in D(A(\omega))\quad \text{для почти всех } \omega\in\Omega\right\}.$$

Теорема 2.3.2. Если $\{A(\omega),\omega\in\Omega\}$ – измеримые расслоения замкнутых операторов, то L_0-линейный оператор $A:L_0(\Omega,\mathrm{X})\to L_0(\Omega,\mathrm{X})$ определенный равенством (1), является (bo)-замкнутым оператором.

В четвертом параграфе второй главы изучается инфинитезимальный производящий оператор полугрупп операторов в пространствах Банаха – Канторовича и доказывается (bo)-замкнутость такого оператора.

Пусть $T_t:L_0(\Omega,\mathrm{X})\to L_0(\Omega,\mathrm{X})$ – L_0- ограниченная полугруппа L_0-ограниченных L_0- линейных операторов, $T_t(\omega):\mathrm{X}(\omega)\to\mathrm{X}(\omega)$ соответствующее измеримое расслоение полугрупп операторов и $\{T_t(\omega)\}_{t\in[0;+\infty)}$ – сильно непрерывно для почти всех $\omega\in\Omega$ и $A(\omega)$ – инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\{T_t(\omega)\}_{t\in[0;+\infty)}$ для почти всех $\omega\in\Omega$.

Определим линейный оператор $A:D(A)\to L_0(\Omega,X)$ равенством (1).

Определение 2.4.1. Если $\{A(\omega),\omega\in\Omega\}$ – измеримые расслоения замкнутых операторов, то L_0-линейный оператор A, определенный равенством (1), назовем инфинитезимальным производящим оператором L_0-ограниченной полугруппы $\{T_t\}_{t\in[0;+\infty)}$.

Следующий результат является основным результатом второй главы:

Теорема 2.4.1. Пусть $\{T_t\}_{t\in[0;+\infty)}$ – L_0-ограниченная полугруппа операторов, причем соответствующее измеримое расслоение полугрупп $\{T_t(\omega)\}_{t\in[0;+\infty)}$ – сильно непрерывна для почти всех $\omega\in\Omega$. Тогда

1) A является (bo)- плотно определенным и (bo)-замкнутым оператором;

2) $T_t x=(bo)-\lim\limits_{\varepsilon_n\to 0}e^{tA_{\varepsilon_n}}x$, где $A_\varepsilon=\dfrac{1}{\varepsilon}\left(T_\varepsilon-I\right)$;

3) для любого $x\in L_0(\Omega,\mathrm{X})$ вектор-функция $t\to T_t x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dfrac{dT_t}{dt}x=AT_t x=T_t Ax.$

В третьей главе диссертации описываются полугруппы операторов, порожденные марковскими процессами в пространствах Банаха – Канторовича $E[F]$ и доказываются аналоги статистической и индивидуальной эргодических теорем для таких полугрупп.

В первом параграфе третьей главы рассматриваются полугруппы операторов, порожденные марковскими процессами в пространствах Банаха – Канторовича $E[L_p]$.

Пусть E – идеальное пространство измеримых функций на $(\Omega, \sum, \mu)$, $(\mathrm{S}, \mathcal{B}, m)$ – пространство с мерой m, $L_p(\mathrm{S}, \mathcal{B}, m)$ – банахово пространство всех измеримых по Лебегу функций на $(\mathrm{S}, \mathcal{B}, m)$. Обозначим символом $E[L_p]$ – пространство всех измеримых функций K на $\Omega \times S$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

а) класс эквивалентности функции $x \mapsto K(\omega, x)$ входит в $L_p(S, m)$ для почти всех $\omega \in \Omega$;

б) функция $\omega \mapsto \|K(\omega, \cdot)\|_{L_p}$ измерима и ее класс эквивалентности $\|K\|$ входит в E.

Тогда $\left(E[L_p], \|\cdot\|\right)$ – пространство Банаха – Канторовича над E и является идеальным пространством измеримых функций на $\Omega \times S$.

Основным результатом первого параграфа треьей главы является следующая теорема.

Теорема 3.1.1. Пусть $P(t, x, B)$ – марковский процесс с инвариантной мерой m, $t > 0$. Тогда

$$T_t(K)(\omega, x) = \int_S K(\omega, y) P(t, x, dy)$$

определяет L_0 - ограниченный L_0- линейный положительный оператор в $L_0[L_p]$, такой, что $T_{t+s} = T_t T_s$, при этом $T_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$ и $\|T_t K\| \le \|K\|$ при всех $t \in (0; +\infty)$.

Во втором параграфе третьей главы доказывается статистическая эргодическая теорема для полугрупп операторов, порожденных марковским процессом с инвариантной мерой, в пространствах Банаха – Канторовича $E[L_p]$. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.2.2. Для любой функции $K \in E[L_p]$, $p \ge 1$, существует предел

$$(bo) - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T_k K = K^*$$

в $E[L_p]$, при этом $T_1 K^* = K^*$.

В третьем параграфе третьей главы доказывается индивидуальная эргодическая теорема для полугрупп операторов, порожденных марковским процессом с инвариантной мерой, в пространствах Банаха – Канторовича

$E[L_p]$. Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 3.3.2. Для любой функции $K \in L_0[L_p]$ последовательность $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k K$ (o) – сходится к K^* в $L_0[L_p]$ для любого $p > 1$.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Иномжану Гуломджановичу Ганиеву за помощь при работе над диссертацией и профессору Владимиру Ивановичу Чилину за советы и полезные обсуждения результатов работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена развитию теории полугрупп линейных операторов для пространств Банаха – Канторовича.

Получены следующие результаты:

Доказано, что L_0- ограниченная полугруппа L_0- ограниченных L_0- линейных операторов в пространстве Банаха – Канторовича разлагается в измеримое расслоение полугрупп ограниченных операторов;

Исследованы связи между свойствами сильной непрерывности полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича и сильной непрерывности полугруппы операторов в слоях;

Доказана $(bo)-$замкнутость инфинитезимального производящего оператора полугруппы L_0- ограниченных L_0- линейных операторов в пространствах Банаха – Канторовича;

Дано представление полугруппы в пространствах Банаха – Канторовича с помощью инфинитезимального производящего оператора.

Получены представления полугрупп операторов, порожденные марковскими процессами в пространствах Банаха – Канторовича $E[L_p]$;

Доказаны аналоги статистической и индивидуальной эргодических теорем для полугруппы операторов, порожденной марковским процессом с инвариантной мерой в пространстве Банаха – Канторовича $E[L_p]$.

Все результаты являются новыми.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Ганиев И.Г., Сададдинова С.С. Сильно и равномерно непрерывные полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича// Исследования по современному анализу и математическому моделированию. –Владикавказ, 2008. – С. 175-185.
2. Сададдинова С.С. Измеримые расслоения замкнутых операторов // Современные проблемы математики, механики и информационных технологий. Материалы Республиканской научной конференции. – Ташкент, 2008. – С. 241–243.
3. Сададдинова С.С. Инфинитезимальный производящий оператор полугрупп операторов в пространствах Банаха-Канторовича // Вестник НУУз. – Ташкент, 2009. – № 1. – С. 63-67.
4. Ганиев И.Г., Сададдинова С.С. Полугруппа операторов в пространствах Банаха-Канторовича// Узб. Мат. Жур. – Ташкент, 2009. – № 2. – С. 42-48.
5. Ганиев И.Г., Сададдинова С.С. Индивидуальная эргодическая теорема для полугрупп операторов в пространствах Банаха – Канторовича $E[L_p]$// Дифференциальные уравнения и их приложения. Материалы Республиканской научной конференции. – Нукус, 2009. – С. 78-82.
6. Ганиев И.Г., Сададдинова С.С. Марковские процессы и полугруппы в пространствах Банаха – Канторовича $E[L_p]$// – Киев, Украинский математический конгресс. http://imath.kiev.ua/~congress 2009/Abstracts.
7. Сададдинова С.С. Об одной полугруппе операторов в пространствах измеримых по Бохнеру функций // Вестник НУУз. – Ташкент, 2010. – № 3. – С. 169-172.

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор
Сададдинова Санобар Сабировнанинг
01.01.01 – математик анализ ихтисослиги бўйича
«Марков жараёнлари ва Банах - Канторович фазоларидаги операторлар ярим группалари» мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: вектор қийматли лифтинг, Банах – Канторович фазоси, ўлчовли банах тахламалари, операторлар ярим группалари, ҳосилавий оператор, Марков жараёнлари.

Тадқиқот объектлари: Банах – Канторович фазоларида операторлар ярим группалари ва $E[L_p]$ Банах – Канторович фазоларида Марков жараёнлари.

Ишнинг мақсади: Операторлар ярим группалари назариясини Банах – Канторович фазолари учун умумлаштириш.

Тадқиқот методлари: ўлчовли банах тахламалари, функционал анализ, Банах – Канторович фазолари ва марков жараёнлари назариялари методлари.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: Олинган натижалар янги ва қуйидагилардан иборат:

- Банах – Канторович фазоларида L_0-чегараланган L_0-чизиқли операторлар ярим группаларининг чегараланган операторлар ярим группалари ўлчовли тахламалари кўринишидаги тасвири;
- Банах – Канторович фазоларида операторлар ярим группаларининг кучли узлуксизлиги билан қатламлардаги операторлар ярим группаларининг кучли узлуксизлиги хоссалари орасидаги богланиш;
- Банах – Канторович фазоларида L_0-чегараланган L_0-чизиқли операторлар ярим группалари ҳосилавий операторининг операторлар ярим группалари ўлчовли тахламалари кўринишидаги тасвири;
- $E[L_p]$ Банах – Канторович фазоларида Марков жараёнлари вужудга келтирадиган операторлар ярим группалари тасвири ва шундай ярим группалар учун статистик ва индивидуал эргодик теоремалар вариантлари.

Амалий аҳамияти: диссертация натижалари назарий характерга эга.

Тадбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: Ишда келтирилган натижалар ва методлар функционал анализнинг Банах – Канторович фазоларида операторлар назарияси ва эргодик назария ҳамда унинг тадбиқларидан махсус курслар ўқишда қўлланилиши мумкин.

Фойдаланиш соҳаси: Банах – Канторович фазолари назарияси, эргодик назария ва унинг амалий тадбиқлари.

РЕЗЮМЕ

Диссертации **Сададдиновой Санобар Сабировны** на тему:
«Марковские процессы и полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича»
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ

Ключевые слова: векторнозначный лифтинг, пространство Банаха – Канторовича, измеримое банахово расслоение, полугруппы операторов, инфинитезимальный оператор, марковские процессы.

Объекты исследования: полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича и марковские процессы в пространствах Банаха – Канторовича $E[L_p]$.

Цель работы: Целью диссертационной работы является развитие теории полугрупп операторов для пространств Банаха – Канторовича.

Методы исследования: Применены общие методы измеримых банаховых расслоений, функционального анализа, теории пространств Банаха-Канторовича, марковских процессов.

Полученные результаты и их новизна: Все полученные результаты являются новыми и состоит из следующих:

– получено представление полугруппы L_0-ограниченных L_0-линейных операторов в пространстве Банаха – Канторовича в виде измеримых расслоений полугрупп ограниченных операторов;

– исследованы связи между свойствами сильной непрерывности полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича и сильной непрерывности полугруппы операторов в слоях;

– представление инфинитезимального производящего оператора полугруппы L_0-ограниченных L_0-линейных операторов при помощи измеримых расслоений полугрупп операторов;

– получено представление полугрупп операторов, порожденные марковскими процессами и доказаны аналоги статистической и индивидуальной эргодических теорем для таких полугрупп в пространствах Банаха – Канторовича $E[L_p]$.

Практическая значимость: работа носит теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: Результаты и методы диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов по функциональному анализу и теории мажорируемых операторов в пространствах Банаха – Канторовича, в эргодической теории и их приложениях.

Область применения: Теория пространств Банаха – Канторовича, эргодическая теория и их приложения.

RESUME

Thesis of **Sadaddinova Sanobar Sabirovna**
on the scientific degree competition of the doctor of philosophy in physics and mathematics on speciality 01.01.01 –mathematical analysis,
subject:
«Markov processes and semigroup operators in Banach – Kantorovich spaces»

Key words: vector valued lifting, Banach – Kantorovich space, measurable Banach bundles, semigroup operators, Markov processes.

Subject of the inquiry: semigroup operators in Banach – Kantorovich spaces and Markov processes in Banach – Kantorovich spaces $E[L_p]$.

Aim of the inquiry: The aim of the thesis is generalization of the theory of semigroup operators for Banach – Kantorovich spaces.

Methods of inquiry: In the work methods of measurable Banach bundles, of functional analysis, of the theory of Banach – Kantorovich spaces, of Markov processes are used.

The results obtained and their novelty: All obtained results of the thesis are new and consist of the following:

- representation of the L_0-bounded semigroup of L_0-bounded L_0-linear operators in Banach – Kantorovich spaces in the form of a measurable bundle of semigroups of bounded operators;

- representation of strongly continuous semigroups of operators in Banach – Kantorovich spaces with of strongly continuous semigroups of operators of bundles is discribed;

- representation of infinitezimial operators of the semigroup of L_0-bounded L_0-linear operators with the help of measurable bundle of semigroups of operator is given;

- description of the semigroup operators appeared in the result of Markov processes in Banach – Kantorovich spaces $E[L_p]$ and the variants of the static and individual ergodic theorem for all.

Practical value: The work has a theoretical character.

Degree of embed and economic effectivity: The results and methods introduced in the work can be used in special courses on functional analysis, of the theory of Banach – Kantorovich spaces and the of ergodic theory.

Field of application: The theory of Banach – Kantorovich spaces, the ergodic theory.