

НАВОЙСКИЙ ГОРНО-МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИЙ КОМБИНАТ

НАВОЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ

ГОРНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА «ГОРНАЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА»

ЛЕКЦИИ

по курсу «Теоретическая механика»
СТАТИКА, КИНЕМАТИКА

Составители:

доц. Тошов Б.Р.
ст. пр. Мухаммедов Ш.
асс. Мирзаев М. Ш.

Рецензенты:

ст. пр. Култоев Э.
доц. Нематов Б.

Утверждено на заседании кафедры «Горной электромеханики»

Протокол № _____ от «__» «_____» 200- г.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной техники ставит перед инженерами самые разнообразные задачи, связанные с расчетом различных сооружений (зданий, мостов, каналов плотин и т.п.), с проектированием производством и эксплуатацией всевозможных машин, механизмов двигателей и, в частности, таких объектов, как автомобили, тепловозы, морские и речные суда, самолеты, ракеты, космические корабли и т.п. Несмотря на многообразие на всех этих проблем, решение их в определенной части основываются на некоторых общих принципах и имеют общую научную базу. Объясняется это тем, что в названных задачах значительное место занимают вопросы, требующие изучения законов движения или равновесия тех или иных материальных тел.

Наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и о возникающих при этом взаимодействиях между телами называется *теоретической (или общей) механикой*. Теоретическая механика представляет собой одну из научных основ современных технических дисциплин.

Под движением в механике мы понимаем механическое движение, т.е. происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве. Механическим взаимодействием между телами называется тот вид взаимодействия, в результате которого происходит изменение движения этих тел или изменения их формы (деформация). Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия тел, называется в механике *силой*.

Основной задачей теоретической механики является изучение общих законов движения и равновесия материальных тел под действием приложенных к ним сил.

По характеру рассматриваемых задач механику принято разделять на *статику, кинематику и динамику*. В статике излагается учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил. В кинематике рассматриваются общие геометрические свойства движения тел. Наконец, в динамике изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

В динамике механические движения рассматривают с самой общей точки зрения не только со стороны внешних геометрических форм движения, но и выясняют факторы вызывающие те или иные виды движений.

Динамика, являясь наиболее общей частью теоретической механики, представляет собой экспериментально – теоретическую дисциплину. Содержание динамики развивается так же, как другие предметы пользующиеся математическими методами. В основу динамики положены некоторые исходные положения, законы аксиомы, проверяемые на опыте.

На основании этих положений логическим путём с применением математических методов, выводят различные положения механики. Эти положения с одной стороны, выражают некоторые общие законы движения материальных объектов, с другой стороны они представляют собой методы решения различных задач динамики.

Исходные положения, законы динамики, впервые были высказаны Ньютоном и Галилеем в 17 веке.

Достоверность положений динамики, лежащих в основе создания методов изучения механических движений материи, проверяется в практической деятельности людей, в развитии техники. Критерий практики является основой при проверке любой теории.

Лекция №1

Тема: **ВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ. АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО, СИЛА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАДАЧИ СТАТИКИ.**

План:

1. Введение в механику.
2. Предмет статики и его роль в науке и технике.
3. Сила, твердое тело.

Предмет статики. *Статикой* называется раздел механики, в котором излагается общее учение о силах, а также изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Под равновесием мы будем понимать состояние покоя тела по отношению к другим материальным телам. Если движение тела, по отношению которого изучается равновесие, можно пренебречь, то равновесие условно называют абсолютным, а в противном случае - относительным. В статике мы будем изучать только так называемое абсолютное равновесие тел. Практически при инженерных расчетах абсолютным можно считать равновесие по отношению к Земле или к телам жестко связанным с Землей. Справедливость этого утверждения будет обоснована в динамике, где понятие об абсолютном равновесии можно определить очень строго. Там же будет рассмотрен и вопросы об относительном равновесии тел.

Все встречающиеся в природе твердые тела под влиянием внешних воздействий в той или иной мере изменяют свою форму (деформируются). Величины этих деформаций зависят от материала тел, их геометрической формы и размеров и от действующих нагрузок. Для обеспечения прочности различных инженерных сооружений и конструкций материал и размеры их частей подбирают так, чтобы деформации при действующих нагрузках были достаточно малы. Вследствие этого при изучении условий равновесия вполне допустимо пренебрегать малыми деформациями соответствующих твердых тел и рассматривать их как недеформированные или абсолютно твердые. *Абсолютно твердым телом* будет называть такое тело, расстояние между двумя другими точками которого всегда остается постоянным.

В дальнейшем при решении задач статики все тела будем рассматривать как абсолютно твердые, хотя часто для краткости будем называть их просто твердыми телами.

Чтобы твердое тело под действием некоторой системы сил находилось в равновесии (в покое), необходимо, чтобы эти силы удовлетворяли определенным *условиям равновесия* данной системы сил. Нахождение этих условий является одной из основных задач статики. Но для отыскания условий равновесия различных систем сил, а так же для решения ряда других задач механики оказывается необходимым уметь складывать силы, действующие на твердое тело, заменять действия одной системы сил другой системой и, в частности, приводить данную систему сил к простейшему виду. По этому в статике твердого тела рассматриваются следующие две основные проблемы:

1) сложение сил и приведение систем сил, действующих на твердое тело, к простейшему виду;

2) определение условий равновесия действующих на твердое тело систем сил.

Задачи статики могут решаться или путем соответствующих геометрических построений (геометрический и графический методы), или с помощью численных расчетов (аналитический метод).

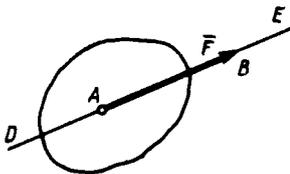
Сила. Состояние равновесия или движение данного тела зависит от характера его механических взаимодействий с другими телами, т.е. от тех давлений, притяжении или отталкивании, которые данное тело испытывает в результате этих взаимодействий.

Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется в механике силой.

Рассматриваемые в механике величины можно разделить на скалярные, т.е., такие, которые полностью характеризуются их численным значением, и векторные, т.е., такие, которые, помимо численного значения характеризуются еще и направлениям в пространстве.

Силой является величиной векторной. Ее действия на тело определяются: 1) численной величиной или модулем силы, 2) направлением силы, 3) точкой приложения силы.

Графический сила, как и всякий вектор, изображается направленным отрезком (со стрелкой). Длина этого отрезка (AB на рис. 1). Выражает в выбранном масштабе модуль силы, направление отрезка соответствует направлению силы, его начало (точка A на рис. 1) обычно совпадает сточкой приложения силы.



Прямая DE , вдоль которого направлена сила, называется *линией действия силы*.

В дальнейшем совокупность сил, действующих на какое-нибудь твердое тело, будем называть *системой сил*. Условимся еще о следующих определениях:

1. Тело, не скрепленное с другими телами, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется *свободным*.

2. Если одну систему сил, действующих на свободное и твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются *эквивалентными*.

3. Система сил, под действием которой свободное твердое тело *может* находиться в покое, называется *уравновешенной* или *эквивалентной нулю*.

4. Если данная система эквивалентно одной силе, то эта сила называется *равнодействующей* данной системе сил. Таким образом, *равнодействующая* – это сила, которая одна заменяет действие данной системы сил на твердое тело.

Сила, равная равнодействующей по модулю, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется *уравновешивающей* силой.

5. Силы, действующие на твердое тело можно разделить на внешние и внутренние. *Внешними* называются силы, действующие на частицы данного тела со стороны других материальных тел. *Внутренними* называются силы, с которыми частицы данного тела действуют друг на друга.

6. Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется *сосредоточенной*. Силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности тела, называются *распределенными*.

Понятие о сосредоточенной силе является условным, так как практически приложить силу к телу в одной точке нельзя. Силы, которые мы в механике рассматриваем как сосредоточенные, представляют собою по существу равнодействующие некоторых систем распределенных сил.

Вопросы для самопроверки:

1. Что собой представляет предмет теоретическая механика?
2. Какое движение мы называем механической?
3. Сколько разделов в теоретической механике?
4. Какой раздел механике называется статикой, и что в нем излагается?
5. Какое тело называется абсолютно твердым?
6. Какая величина называется силой?
7. Какое тело называется свободным?
8. Какие силы называются внешними, какие внутренними?
9. Какая сила называется уравновешивающей силой?
10. Какая сила называется сосредоточенными, какие распределены?

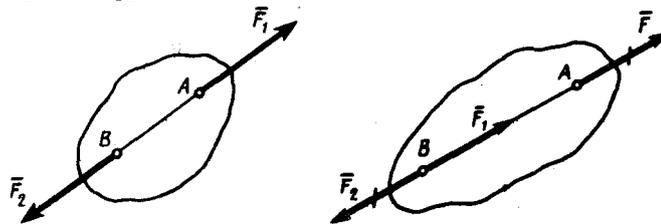
Лекция №2
Тема: **АКСИОМА СТАТИКИ.**

План:

1. Аксиомы статики.
2. Связи и их реакции.
3. Аксиома связей.

Аксиомы статики. Все теоремы и уравнения статики выводятся из нескольких исходных положений, принимаемых без математических доказательств и называемых аксиомами или принципами статики. Аксиомы статики представляют собою результат обобщений многочисленных опытов и наблюдений над равновесием и движением тел, неоднократно подтвержденных практикой. Часть из этих аксиом является следствиями основных законов механики, с которыми мы познакомимся в динамике.

А к с и о м а 1. Если на свободное твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1=F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис.2)



Аксиома 1 определяет простейшую уравновешенную систему сил, так как опыт показывает, что свободное тело, на которое действует только одна сила, находиться в равновесии не может.

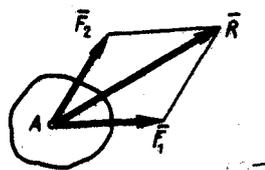
А к с и о м а 2 Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

Эта аксиома устанавливает, что две системы сил, отличающиеся на уравновешенную систему, эквивалентны друг другу.

С л е д с т в и е из 1-й и 2-й аксиомы. Действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.

А к с и о м а 3 (аксиома параллелограмма сил).

Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую силу, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах



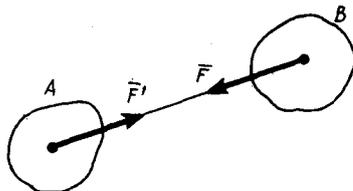
Вектор R, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах F_1 и F_2 (рис.3) называется геометрической суммой векторов F_1 и F_2 .

$$R=F_1+F_2$$

Следовательно, аксиому 3 можно еще формулировать так: *две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической (векторной) сумме этих сил и приложенную в той же точке.*

А к с и о м а 4. При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие.

Закон о равенстве действия и противодействия является одним из основных законов механики. Из него следует, что если тело А действует на тело В с силой F , то одновременно тело В действует на тело А с такой же по модулю и направленной вдоль той же прямой, но в противоположную сторону силой $F' = -F$ (рис.4). Однако силы F и F' не образуют уравновешенной системы сил, так как они приложены к разным телам.



С в о й с т в о в н у т р е н н и х с и л. По аксиоме 4 любые две частицы твердого тела будут действовать друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами. Так как при изучении условий равновесия тело рассматривают как абсолютно твердое, то (по аксиоме 1) все внутренние силы образуют при этом уравновешенную систему, которую (по аксиоме 2) можно отбросить. Следовательно, при изучении условий равновесия тела (конструкции) необходимо учитывать только **в н е ш н и е** силы, действующие на это тело (конструкцию). В дальнейшем, говоря о действующих силах, мы будем подразумевать, если не сделана специальной оговорки, что речь идет только о внешних силах.

А к с и о м а 5. (п р и н ц и п о т в е р д е в а н и я) Равновесие изменяемого (деформируемого) тело, находящегося под действиям данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым).

Высказанное в этой аксиоме утверждение очевидно. Например, ясно, что равновесие цепи не нарушится, если ее звенья считать сваренными друг с другом и т.д. Так как на покоящееся тело до и после отвердевания действует одна и та же система сил, то аксиому 5 можно еще выразить в другой форме: *при равновесии силы, действующие на любое изменяемое (деформирование) тело, удовлетворяют тем же условиям что и для тело абсолютно твердого;* однако для изменяемого тело эти условия, будучи необходимыми, могут не быть достаточными.

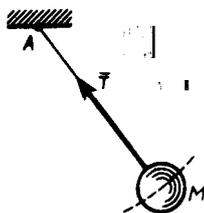
Связи и их реакции. По определению, тело, которое не скреплено с другими телами и может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве, называется **с в о б о д н ы м** (например, воздушный шар в воздухе). Тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним тело, называются **несвободным**. Все то, что ограничивает перемещения данного тело в пространстве, будем называть **связью**. Сила с которой донная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется

силой реакции, (противодействия) связи или просто реакцией связи. Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

1. Г л а д к а я п л о с к о с т ь (поверхность) или опора.

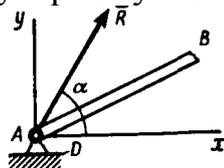
Гладкой будем называть поверхность, трением о которую данного тела можно в первом приближении пренебречь. Такая поверхность не дает телу перемещаться только по направлению общего перпендикуляра (нормали) к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис.5 а). По этому реакция N гладкой поверхности или опоры направлены по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке и их касания и приложения в этой точке. Когда одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (рис 5,б), то реакция направлена по нормали к другой поверхности.

2. Н и т ь. Связь, осуществленная в виде гибкой нерастяжимой нити (рис. б), не дает телу M удаляться от точки подвеса нити по направлению AM .



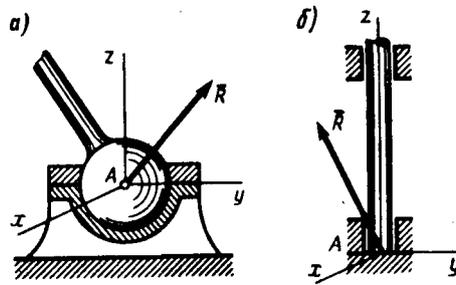
Поэтому реакция T натянутой нити направлена вдоль нити точкой ее подвеса.

3. Ц и л и н д р и ч е с к и й ш а р н и р (подшипник). Если два тела соединены болтом, проходящим через отверстие в этих телах, то такое соединение называется шарнирным или просто шарниром; осевая линия болта называется осью шарнира. Тело AB , прикрепленная шарниром к опоре D (рис.7,а), может поворачиваться как угодно вокруг оси шарнира (в плоскости чертежа); при этом конец A тело не может переместиться ни по какому направлению, перпендикулярному к оси шарнира.



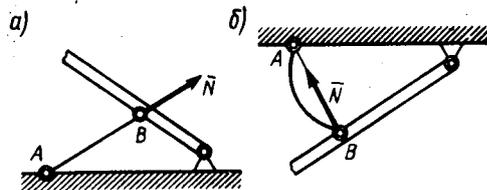
Поэтому реакция R цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости перпендикулярной к оси шарнира, т.е. в плоскости Axy . Для силы R в этом случае наперед неизвестны ни ее модуль R , ни направление (угол α).

4. Ш а р о в о й ш а р н и р и п о д п я т н и к. Этим вид связи закрепляет какую-нибудь точку тела так, что она не может совершать никаких перемещений в пространстве. С примерами таких связей служит шаровая пята, с помощью которой прикрепляется фотоаппарат к штативу (рис 7,б) и подшипник с упором (подпятник) (рис.7,в). Реакция R шарового шарнира или подпятника может иметь любое направление. Для нее наперед неизвестны ни модуль реакции R , ни углы, образуемый ею с осями x , y , z .



Аксиома связей. Равновесие не свободных тел изучается в статике на основании следующей аксиомы: *всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями этих связей.*

Например, брус AB весом P (рис. 8,а), для которого связями являются плоскость OE , опора D и трос KO , можно рассматривать так, как свободное тело (рис. 8,б), находящееся в равновесии под действием заданной силы P и реакции связей N_a , N_d и T .



Вопросы для самопроверки:

1. Что излагается в 1-й и 2-й аксиомах и следствия из 1-й и 2-й аксиом?
2. Как называется 3-я аксиома статики?
3. Что излагается в 4-й аксиоме?
4. Как называется 5-я аксиома?
5. Что называется связью?
6. Какая сила называется реакцией связи?
7. Какие виды связи вы знаете?

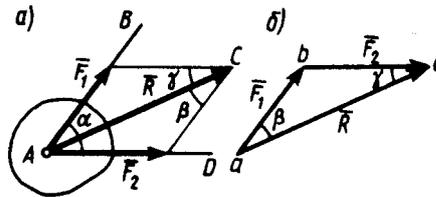
Тема: СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. СЛОЖЕНИЕ СИЛ.
РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ.

План.

1. Геометрический способ сложения сил.
2. Равнодействующая сходящихся сил.
3. Сложение двух сил.
4. Сложение трех сил не лежащих на одной плоскости.
5. Сложение системы сил.
6. Проекция силы на ось и на плоскость.

Геометрический способ сложение сил. Равнодействующая сходящихся сил. Решение многих задач механике связана с известной из векторной алгебры операции сложение векторов и, в частности, сил. Изучение статик начнем с рассмотрения геометрического способа сложения сил. Величину, равную геометрической сумме сил какой-нибудь системы, будет в дальнейшем называть *главный вектор* этой системы сил.

1) С л о ж е н и е д в у х с и л. Геометрическая сумма R двух сил F_1 и F_2 находится или по правилу параллелограмма (рис. 9,а), или построениям силового треугольника (рис. 9,б), изображающего одну из половин этого параллелограмма.



Для построение силового треугольника надо от произвольной точки A_1 отложить вектор изображающий одну из сил, а от ее конца – вектор, изображающий вторую силу. Соединяя начало первого вектора с концом второго, получим вектор, изображающий силу R .

Модуль R определяется как сторона A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ из равенства

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \alpha)$$

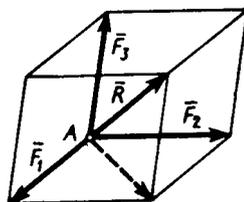
где α - угол между силами. Следовательно,

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (1)$$

Углы β и γ , которые сила R образует со слагаемыми силами, находится по теореме синусов. Замечая, что $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, получим:

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha}. \quad (2)$$

2) С л о ж е н и е т р е х с и л, не лежащих в одной плоскости. Геометрическая сумма R трех сил F_1, F_2, F_3 , не лежащих в одной плоскости, изображается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах (*правила параллелепипеда*). Справедливости этого убеждается, применяя последовательно правила параллелограмма (рис.10)



3. С л о ж е н и е с и с т е м ы с и л. Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется или последовательным сложением сил системы по правилу параллелограмма, или построениям силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения этим способом суммы сил $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ (рис.11,а) откладываем от произвольной точки O (рис.11,б) вектор Oa изображающей в выбранном масштабе силу F_1 и т.д.; от конца m предпоследнего вектора откладываем вектор mn , изображающий силу F_n . Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $On=R$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:

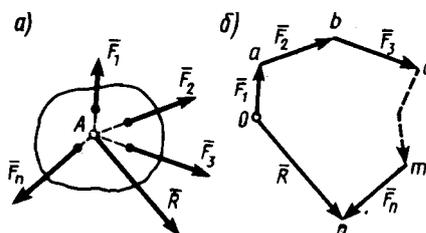
$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n \text{ или } R = \sum F_k \quad (3)$$

От порядка, в котором будут откладываться векторы сил, модуль и направления R не зависят. Легко видеть, что сделанное построение представляет собою результат последовательного применения правила силового треугольника.

Фигура построенная на рисунке 11,б называется *силовым* (в общем случае *векторным*) *многоугольником*. Таким образом, *геометрическая сумма или главный вектор несколькими сил изображается замыкающей стороной силового многоугольника, построенного из этих сил (правила силового многоугольника)*. При построении векторного многоугольника следует помнить, что у всех слагаемых векторов стрелки должны быть направлены в одну сторону (по обводу многоугольника), а у вектора R - в сторону противоположную.

Р а в н о д е й с т в у ю щ а я с х о д я щ и х с я с и л. При изучении статики мы будем последовательно переходить от рассмотрения более простых систем сил к более сложным. Начнем с рассмотрения системы сходящихся сил. *Сходящимися называются силы, линии действия которых, пересекаются в одной точке* (см. рис.11,а).

Последовательно применяя аксиому параллелограмма сил, приходит к выводу, что *система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке их пересечения*. Следовательно, если силы F_1, F_2, \dots, F_n сходятся в точке A (рис.11,а), то сила, равная главному вектору R , найденному построением силового многоугольника и положенная в точке A будет равнодействующей этой системы сил.



Проекция силы на ось и плоскость. Перейдем к рассмотрению аналитического (числового) метода решения задач статики. Этот метод основывается на понятии о проекции силы на ось. Как и для всякого другого вектора, проекция силы на ось называется скалярная величина, равная взятой соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начало и конца силы. Проекция имеет знак плюс, если перемещение от ее начало к концу происходит в положительном направлении оси, и знак минус – если в отрицательном. Из определения следует, что проекции даны силы на любые параллельные одинаково направленные оси друг другу. Этим удобно пользоваться при вычислении проекции силы на ось, не лежащую в одной плоскости силы.

Обозначать проекцию силы F на ось Ox будем символом F_x . Тогда для сил, изображенных на рис.12, получим: $F_x = AB_1 = ab$, $Q_x = -ED_1 = -ed$.

Но из чертежа видно, что $AB_1 = F \cos \alpha$, $ED_1 = Q \cos \varphi = -Q \cos \alpha_1$. Следовательно,

$$F_x = F \cos \alpha, \quad Q_x = -Q \cos \varphi = Q \cos \alpha_1, \quad (4)$$

т.е. проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси при этом проекция будет положительной, если угол между направлением силы и положительным направлением оси – острый и отрицательной если этот угол – тупой; если сила перпендикулярна к оси, то ее проекция на ось равна нулю.

Проекцией силы F на плоскость Oxy называется вектор $F_{xy} = \overline{OB_1}$, заключенной между проекциями начало и конца силы F на эту плоскость (рис.13).

Таким образом в отличие от реакции силы на ось, проекции силы на плоскость есть величина вектора, так как она характеризуется не только своим численным значением, но и направлением в плоскости Oxy . По модулю $F_{xy} = F \cos \theta$, где θ - где между направлением силы F и ее проекции F_{xy} .

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось бывает удобнее найти сначала ее проекции на плоскость, в которой эта ось лежит, а за тем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось. Например, в случае, изображенном на рисунке 13, найдем таким способом, что $F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \cos \theta \cos \varphi$,

$$F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \cos \theta \sin \varphi \quad (5)$$

Равновесие системы сходящихся сил. Из законов механики следует, что твердое тело, на которое действует взаимно уравновешенные внешние силы, может не только находиться в покое, но и совершать движение, которое мы назовем движением «по инерции». Таким движением будет, например, поступательное равномерное и прямолинейное движение тела.

Отсюда получаем два важных вывода. 1) условием равновесия статики удовлетворяет силы, действующие как на покоящееся тело, так и на тело, движущееся «по инерции». 2) Уравновешенность силы, приложенных к свободному твердому телу, является необходимым, но не достаточным условием равновесия (покоя) самого тела; в покое тела буде при этом

находиться лишь в том случае, если оно было в покое и до момента приложения к нему уравновешенных сил.

Для равновесия приложенной к твердому телу системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил была равно нулю. Условия, которым при этом должны удовлетворять сами силы, может вызвать в геометрической или аналитической форме.

1. **Геометрическое условие равновесия.** Так как равнодействующая R сходящихся сил определяется как замыкающая сторона силового многоугольника, построенного из этих сил, то R может обратиться в нуль тогда и только тогда, когда конец последней силы многоугольника совпадает с началом первой, т.е. когда многоугольник замкнется.

Следовательно, для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил был замкнут.

2. **Аналитическое условие равновесия.** Аналитически равнодействующая системы сходящихся сил определяет формулой $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$. Так как под корнем стоит сумма положительных слагаемых, то R обратится в нуль только тогда, когда одновременно $R_x=0$, $R_y=0$, $R_z=0$.

$$\sum F_{Kx} = 0 \quad \sum F_{Ky} = 0 \quad \sum F_{Kz} = 0 \quad (6)$$

Равенства (6) выражают условия равновесия в аналитической форме: для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумму проекции этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую систему сходящихся сил. В случае плоской системы сходящихся сил получим, очевидно, только два условия равновесия

$$\sum F_{Kx} = 0, \quad \sum F_{Ky} = 0 \quad (7)$$

Равенства (6) и (7) выражают так же *необходимые* условия (или уравнения) равновесия свободного твердого тела, находящегося под действиями сходящихся сил.

Вопросы для самопроверки:

1. Какой вектор называется главным вектором системы сил?
2. Как находится геометрическая сумма двух сил?
3. Как находится геометрическая сумма не лежащих в одной плоскости?
4. Как определяется геометрическая сумма (главный вектор) системы сил?
5. Какие силы называются сходящимися?
6. Какая величина называется проекции силы на ось?
7. Чему равна проекция силы на ось?
8. Каким вектором называется проекцией силы на плоскость?

Лекция №4.

Тема: **МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА. ПАРА СИЛ. МОМЕНТ ПАРЫ. ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И СЛОЖЕНИЕ ПАР.**

План

1. Теорема о трех силах.
2. Момент силы относительно центра (или точки).
3. Теорема варианта о моменте равнодействующей.

1. **Т е о р е м а о т р е х с и л а х.** При решении задач статики иногда удобно пользоваться следующей теоремой: *если свободное твердое тело находится в равновесии под действием трех не параллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.*

Для доказательства теоремы изобразим сначала какие-нибудь две из действующих на тело сил, например, F_1 и F_2 . Так как по условиям теоремы эти силы лежат в одной плоскости и не параллельны, то их линии действия будут пересекаться в некоторой точке A (рис.14).

Приложим силы F_1 и F_2 в этой точке и заменим их равнодействующей R . Тогда на тело будут две силы: сила R и сила F_3 , приложенная в какой-то точке B тела. Если тело при этом находится в равновесии, то по аксиоме 1 силы R и F_3 должны быть направлены по одной прямой, т.е. вдоль AB . Следовательно, сила F_3 тоже проходит через точку A , что и требовалось доказать.

Момент силы относительно центра (или точки). Опыт показывает, что под действием силы твердое тело может наряду с поступательным перемещением вращение вокруг того или иного центра. Вращательный эффект силы характеризуется ее *моментом*.

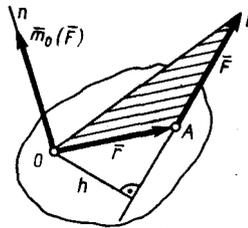
Рассмотрим силу F , приложенную в точке A твердого тела (рис.15).

Допустим что сила стремится повернуть вокруг центра O . Перпендикуляр rh , опущенный из центра O на линию действия силы F называется плечом силы F относительно центра O . Так как точку приложения силы можно произвольно перемещать вдоль линии действия, то, очевидно, вращательный эффект силы будет зависеть: 1) от модуля силы F и длины плеча h ; 2) от положения плоскости поворота OAB , проходящей через центр O и силу F ; 3) от направления поворота на этой плоскости.

Ограничимся пока рассмотрением систем сил, лежащих на одной плоскости. В этом случае плоскость поворота для всех сил является общей в дополнительном задании не нуждается, а направления поворота можно охарактеризовать законом, считая условно поворот в каком-нибудь одном направлении положительным, а в направлении противоположном – отрицательным.

Тогда для количественного измерения вращательного эффекта ввести следующие понятия о моменте силы: *моментом силы F относительно центра O называется величина, равная взятому соответствующим знаком произведению модуля силы на длину плеча.* Момент силы F относительно центра O будет обозначать символом $m_0(F)$. Следовательно,

$$m_0(F) = \pm Fh. \quad (8)$$



В дальнейшем условимся считать, что момент имеет знак плюс, если сила стремится повернуть вокруг центра O против хода часовой стрелки, и знак минус, - если по ходу часовой стрелки. Так, для силы F изображены на рис. 15,а, момент относительно центра O имеет знак плюс, а для силы, показанной на рис.15,б, - знак минус. Если плечо измерять в метрах, то момент силы будет измеряться или в ньютонах на метр ($нм$) или же в килограммах ($кгм$).

Отметим следующие свойства момента силы:

- 1) Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линий действия.
- 2) Момент силы относительно центра O равен нулю только тогда. Когда сила равна нулю или когда линия действия силы проходит через центр O (плечо равно нулю).
- 3) Момент силы численно выражается удвоенной площадью треугольника OAB (рис.15,б).

$$m_0(F) = \pm 2 \text{ пл.} \Delta OAB.$$

Этот результат следует из того, что

$$\text{пл.} \Delta OAB = \frac{1}{2} AB \times h = \frac{1}{2} Fh.$$

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Докажем следующую теорему Вариньона: *момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра.*

Рассмотрим систему силы F_1, F_2, \dots, F_n , сходящихся в точке A (рис. 16).

Возьмем произвольный центр O и проведем и проведем через него ось Ox , перпендикулярной к прямой OA ; положительное направление оси Ox выберем так, чтобы знак проекции любой из сил на эту ось совпадал со знаком ее момента относительно центра O .

Для доказательства теоремы найдем соответствующие выражения моментов $m_0(F_1), m_0(F_2), \dots$. По формуле (9) $m_0(F_1) = +1 \text{пл.} \Delta OAB_1$. Но, как видно из рисунка $2 \text{пл.} \Delta OAB_1 = OA \times Ob = OA \times F_{1x}$, где F_{1x} - проекции силы F_1 на ось Ox ; следовательно,

$$m_0(F_1) = OA \times F_{1x}. \quad (10)$$

Аналогично вычисляются момента всех других сил. При этом формула (10) справедлива и в случае, когда сила F проходит ниже линии OA ; момент при этом получится отрицательным, так как будет отрицательная самопроекция F_x .

Обозначим равнодействующую силу $F_1 F_2 \dots, F_n$ через R , где $R = \sum F_k$.

Тогда, по теореме о проекции суммы силы на ось, получим $R_x = \sum F_{kx}$.

Умножая обе части этого равенства на OA , найдем:

$$OA \times R_x = \sum (OA \times F_{kx})$$

или, согласно формуле (10)

$$m_o(R) = \sum m_o(F_k) \quad (11)$$

Формула (11) дает математическое выражение теорем Вариньона.

Вопросы для самопроверки.

1. Что необходимо и достаточно для равновесия системы сходящихся сил?
2. Как определяется аналитически равнодействующая сходящихся сил?
3. Как выражаются условия равновесия в аналитической форме?
4. Что излагается в теореме о трех силах?
5. Какая величина называется моментом силы?
6. Что излагается в теореме Вариньона о моменте равнодействующей?
7. Напишите математическое выражение теоремы Вариньона

**Тема: ТЕОРЕМА О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ СИЛЫ.
ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ДАННОМУ ЦЕНТРУ. УСЛОВИЯ
РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ.**

План

1. Сложение двух сил, направленных в одну сторону.
2. Сложение двух сил направленных в разные стороны.
3. Пара сил.
4. Момент пары.

Сложение и разложение параллельных сил. Найдем равнодействующую двух действующих на твердое тело параллельных сил. Здесь возможны два случая: 1) силы направлены в одну сторону и 2) Силы направлены в разные стороны.

1. Сложение двух сил, направленных в одну сторону. Рассмотрим твердое тело, на которое действуют две параллельные силы F_1 и F_2 (рис.17).

Пользуясь аксиомами 1 и 2 статики, перейдем от одной системы параллельных сил эквивалентны ей системе сходящихся сил Q_1 и Q_2 . Для этого приложим в точках А и В две уравновешенные силы P_1 и P_2 ($P_1 = -P_2$), направления вдоль прямой АВ, и сложим их силами F_1 и F_2 по правилу параллелограмма. Полученные силы Q_1 и Q_2 перенесем в точку О, где пересекаются их линии действия и разложим на первоначальные составляющие. После этого в точке О будут действовать две уравновешенные силы P_1 и P_2 которые отбросим, и две направленные вдоль одной прямой силы F_1 и F_2 . Эти силы перенесем в точку С и заменим их равнодействующей R , модуль которой равен:

$$R = F_1 + F_2 \quad (12)$$

Сила R и является равнодействующей параллельных сил F_1 и F_2 , приложенных в точках А и В. Для определения положения точки С рассмотрим треугольник ОАС, Оак и ОСВ, Омб. Из подобия соответствующих треугольников следует, что $\frac{AC}{OC} = \frac{P_1}{F_1}$ и $\frac{BC}{OC} = \frac{P_2}{F_2}$ или $AC \times F_1 = BC \times F_2$, так как $P_1 = P_2$.

Отсюда, принимая во внимания свойство пропорции и учитывая, что $BC + AC = AB$, а $F_1 + F_2 = R$, получим:

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}. \quad (13)$$

Итак, *равнодействующая двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в одну сторону, равна по модулю сумме модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в ту же сторону; линия действия равнодействующей проходит между точками приложения слагаемых сил на расстояния от этих точек, обратно пропорциональных силам.*

2. Сложение двух сил направленных на разные стороны. Изобразим действующие силы на тело силы F_1 и F_2 , считать для определенности $F_1 > F_2$ (рис.18).

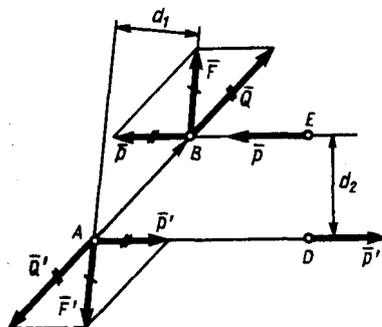
Возьмем на продолжения прямой ВА точку С и приложим в ней уравновешенные силы R и R' , параллельные силам F_1 , F_2 . При этом модули силы положение точки С выберем так, чтобы удовлетворялись равенства:

$$R = F_1 - F_2. \quad (14)$$

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}. \quad (15)$$

Тогда, сложив силы F_2 и R , мы по формулам (12) и (13) найдем, что их равнодействующая Q будет по модулю равна $F_2 + R'$, т.е. равна F_1 и положена в точки А. После этого силы F_1 и Q , как уравновешенные, можно отбросить. В результате заданные силы F_1 и F_2 будут заменены одной силой R , которая и является их равнодействующей. Модуль этой равнодействующей и точкой ее приложения С определяется формулами (14), (15). Таким образом, *равнодействующая двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в разные стороны, равна по модулю разности модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы; линия действия равнодействующей проходит вне отрезка, соединяющего точки приложения слагаемых сил, на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам.*

Пара сил. Момент пары. *Парой сил* называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис.19).



Система сил, образующих пару, очевидно, не находится в равновесии. В то же время пара сил в отличие от ранее рассматривавшихся систем, не имеет равнодействующей.

В самом деле, если допустить, что пара (F, F') имеет какую-то равнодействующую $Q \neq 0$, то сила $Q_1 = -Q$ должна эту пару уравновесить, т.е. система сил F, F', Q_1 должна находиться в равновесии. Но, как будет доказано, для равновесия любой системы сил необходима, чтобы их геометрическая сумма равнялась нулю. Следовательно, при сделанном допущении должно быть $F + F' + Q_1 = 0$, что возможно, так как $F + F' = 0$, а $Q_1 \neq 0$. Таким образом, пару сил нельзя заменить или уравновесить одной силы. По этому свойство пары, как особой меры механического взаимодействия тел должны быть изучены отдельно. Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется *плоскостью действия пары*. Расстоянием между линиями действия сил пары называется *плечом пары*. Действие пары сил на твердое тело сводится к

некоторому вращательному эффекту, зависящему от: 1) модуля F силы пары и длины ее плеча d ; 2) положения плоскости действия пары; 3) направления поворота в этой плоскости. Для характеристики этого эффекта выводится понятия момента пары. *Моментом пары называется величина, равная взятому соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на ее плечо.* Будем обозначать момент пары буквой m или M . Тогда

$$m = \pm Fd. \quad (16)$$

Момент пары (как и момент силы) будем считать положительным, когда пар стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и отрицательным – когда по ходу часовой стрелки.

Вопросы для самопроверки.

1. Как определяется равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону?
2. Как определяется равнодействующая двух параллельных сил направленных в разные стороны?
3. Какая система сил называется парой сил?
4. Какая плоскость называется плоскостью действия пары ?
5. Какое расстояние называется плечом пары?
6. Какая величина называется моментом пары?

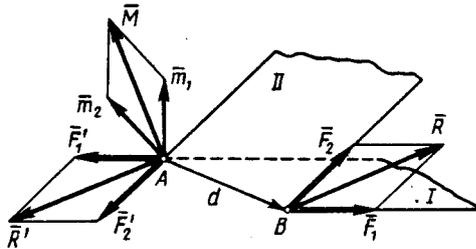
Тема: ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ СИЛЫ И ПАРЫ. ПРИВЕДЕНИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ. РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ. СЛУЧАЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ.

План

1. Теорема о параллельном переносе силы.
2. Приведение плоской системы к данному центру.
3. Условия равновесия произвольных систем сил.
4. Основная форма условий равновесия.
5. Вторая форма условий равновесия.
6. Третья форма равновесия.

Теорема о параллельном переносе сил. Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого действия переносить параллельно ей самой в любую точку тела, прибавляя при этом пару с момента, равным моменту, переносимой силой относительно точки, куда силы переносится.

Пусть на твердое тело действует сила F , приложенная в точке A (рис.20,а)



Действие этой силы не изменится, если в любой точке B тела приложить две уравновешенные силы F' и F'' , такие, что $F'=F$, $F''=-F$. Полученная система трех сил и представляет собой силу F' , равную F , но приложенную в точке B , и пару (F, F'') с моментом

$$m = m_B(F) \quad (17)$$

Таким образом, теорема доказана. Результат, даваемый теоремой. Можно еще изобразить так, как это показано на рис.20,б (силу F на этом рисунке надо считать отброшенной).

Приведенные плоской системы сил к данному центру. Пусть на твердое тело действует какая-нибудь система сил F_1, F_2, \dots, F_n , лежащих в одной плоскости. Возьмем в этой плоскости произвольную точку O , которую назовем *центром приведения*, и, пользуясь высшей доказанной теоремой, перенесем все силы в центр O (рис.21,а).

В результате на тело будет действовать система сил

$$F'_1 = F_1, F'_2 = F_2, \dots, F'_n = F_n, \quad (18)$$

приложенных в центре O , и система пар, моменты которых согласно формуле (17) будут равны:

$$m_1 = m_o(F_1), m_2 = m_o(F_2), \dots, m_n = m_o(F_n). \quad (18^1)$$

Силы, приложенные в центре O , можно заменить одной силой R , приложенной в том же центре; при этом $R = \sum F_k'$ или, согласно равенству (18)

$$R = \sum F_k \quad (19)$$

Точно так же, по теореме сложении пар, все пары можно заменить одной прямо, лежащей в той же плоскости. Момент этой пары $M_o = \sum m_k$ или согласно равенству (18)

$$M_o = \sum m_k (F_k) \quad (20)$$

Величина R , равна геометрической сумме всех сил системы, называется, как известно, *главным вектором системы*; величину M_o , равную сумме моментов всех сил системы относительно центра O , будем называть *главным моментом системы относительно центра O* . В результате мы доказали следующую теорему: *всякая плоская система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно всякому центру O заменяется одной силой R , равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения O , и одной пары с моментом M_o , равным главному моменту системы относительно центра O (рис.21,в).*

Заметим, что сила R не является равнодействующей данной системы сил так как она заменяет систему сил не одна, а вместе с парой.

Из доказанной теоремы видно, что две системы сил имеющие одинаковые главные моменты, статически эквивалентны. Следовательно, для задания плоской системы сил достаточно задать ее главный вектор R и главный момент M_o относительно некоторого центра O .

Условия равновесия произвольной плоской системы сил. Случай параллельных сил. Для равновесия любой плоскости системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:

$$R=0, M_o=0 \quad (21)$$

Здесь O -любая точка плоскости, так как при $R=0$ величина M_o от выбора центра O не зависит.

Найдем вытекающие из равенств (21) аналитические условия равновесия. Эти условия можно получить в трех различных формах, которые мы последовательно рассмотрим.

1. **Основная форма условий равновесия.** Величина R и M_o определяется равенствами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad M_o = \sum m_o (F_k),$$

Где $R_x = \sum F_{xk}$, $R_y = \sum F_{yk}$. Но R может равняться нулю только тогда, когда одновременно $R_x=0$ и $R_y=0$. Следовательно, условия (21) будут выполнены, если будет:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_o (F_k) = 0 \quad (22)$$

Равенство (22) выражает следующие аналитические условия равновесия: *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо достаточно, чтобы суммы проекции всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма*

их моментов относительно любого центра лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

2. Вторая форма условий равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммами моментов всех этих сил относительно каких-нибудь центров A и B и сумма их проекции на ось Ox , не перпендикулярную к прямой AB , были равны нулю:

$$\sum m_A(F_k) = 0, \quad \sum m_B(F_k) = 0, \quad \sum F_{kx} = 0. \quad (23)$$

3. Третья форма условий равновесия (уравнения трех моментов): для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех центров A, B и C , не лежащих на одной прямой были равны нулю:

$$\sum m_A(F_k) = 0, \quad \sum m_B(F_k) = 0, \quad \sum m_C(F_k) = 0, \quad (24)$$

Необходимость этих условий, как и в предыдущем случае очевидно. Достаточно условий (24) следует из того, что если при одновременном выполнении этих условий данная система сил не находилась бы в равновесии, то она должна была бы приводиться к равнодействующей, одновременно проходящей через точки A, B и C , что невозможно, так как эти точки не лежат на одной прямой. Следовательно, при выполнении условий (24) имеет место равновесие.

Во всех рассмотренных случаях для плоской системы сил получают три условия равновесия. Условия (22) мы считаем основными, так как при пользовании ими никаких ограничений на выбор координатных осей и центра моментов не налагается.

Вопросы для самопроверки.

1. Что излагается в теореме о параллельном переносе силы?
2. Какая точка называется центром приведения?
3. Какая величина называется главным вектором системы?
4. Какая величина называется главным моментом системы?
5. Что необходимо и достаточно для равновесия любой плоской системы?
6. Как выражается основная форма условий равновесия?
7. Как выражается вторая форма условий равновесия?
8. Как выражается третья форма условий равновесия?

Тема: ЗАКОНЫ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ. РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ. ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ. УГОЛ ТРЕНИЯ.

План.

1. Законы трения сложения.
2. Экспериментальное определение коэффициента трения.
3. Трения качения.

Законы трения сложения. Опыт показывает, что при стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению, называемая силой трения скольжения.

Возникновение трения обусловлено, прежде всего, шероховатостью поверхностей, создающей сопротивления перемещения, и наличием сцепления у прижатых друг к другу тел. Изучение всех особенностей явления трения представляет собой довольно сложную физико-механическую проблему, рассмотрения которой выходит за рамки теоретической механики.

В инженерных расчетах обычно исходят из ряда установленных опытным путем общих закономерностей, которые с достаточной для практики точностью отражают основные особенности явления трения. Эти закономерности, называемые законами трения сложения при покое, можно сформулировать следующий образ:

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (или сила сцепления), величина которой может принимать любое значение от нуля до значения $F_{\text{пр}}$, называемого *предельной силой трения*.

Сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело.

2. Величина предельной силы трения равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление или нормальную реакцию:

$$F_{\text{пр}} = f_0 N. \quad (25)$$

Статический коэффициент трения f_0 – число отвлеченное; он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояние поверхностей (характер обработки, температура, вежливость, смазка и т.д.).

3. Величина предельной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей.

Объединяя вместе первый и второй законы, получаем, что при равновесии сила трения покоя (сила сцепления) $F \leq F_{\text{пр}}$ или

$$F \leq f_0 N \quad (26)$$

Экспериментально коэффициент трения можно определить с помощью простейшего прибора, схема которого показана на рис.22.

Горизонтальная плита АВ и прямоугольник брус D делаются из материалов, для которых определяется коэффициент трения. На брус D будут действовать силы тяжести P, уравновешенная нормальной реакцией плиты N, и сдвигающая сила Q, которая при покое уравновешивается силой трения F (сила Q численно равна весу чашки E с гирями). Постепенно нагружая чашку, находим ту нагрузку Q*, при которой брусок трогается с места. Очевидно, предельная сила трения $F_{np}=Q^*$. Тогда, так как в данном случае $N=P$, находим по формуле (25)

$$f_o = \frac{F_{np}}{N} = \frac{Q^*}{P}.$$

Проделав ряд аналогических опытов, можно убедиться, что при изменении в известных пределах веса бруска P величина Q* возрастает пропорционально P, а значение f_o остается неизменным. Точно так же f_o не меняется, если в известных пределах менять площадь грани бруска. Этим подтверждается справедливость 2-го и 3-го законов трения. Справедливость 1-го закона следует из того, что при любых нагрузках Q, меньших Q*, груз остается в покое. Следовательно, уравновешивающая сила Q сила трения F действительно может принимать любые значения от нуля (при $Q=0$) до F_{np} (при $Q \geq Q^*$).

Следует иметь в виду, что пока груз находится в покое, сила трения F равна сдвигающей силе Q, а не величине $F_{np}=f_o N$. Значения $f_o N$ сила трения принимает только тогда, когда положение равновесия становится предельным.

Представление о величине коэффициента трения для некоторых тел дают следующие данные:

Дерево по дереву $f_o=0,4 \div 0,7$

Металл по металлу ... $f_o=0,15 \div 0,25$

Сталь по льду $f_o=0,027$

Более подробные сведения можно найти в различных технических справочниках.

Все изложенное выше относилось к трению скольжения при покое. При движении сила трения направлена в сторону, противоположную движению, и равна произведению динамического коэффициента трения на нормальное давление: $F=fN$.

Динамический коэффициент трения скольжения f также является величиной отвлеченной и определяется опытным путем. Значения коэффициента f зависит не только от материала и состояния поверхности, но в некоторой степени и от скорости движения тел. В большинстве случаев с увеличением скорости величина f сначала несколько убывает, а затем сохраняет почти постоянное значение.

Трение качения. Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим круглый цилиндрический каток радиус R и веса P , лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости. Приложим к оси катка силу Q (рис.23,а), меньшую $F_{\text{тр}}$.

Тогда в точке A возникает сила трения F , численно равная Q , которая будет препятствовать скольжению цилиндра по плоскости. Если считать нормальную реакцию N тоже приложенной в точке A , то она уравнивает силу P , а силу Q и F образует пару, вызывающей качения цилиндра. При такой схеме качения должно начаться, как видим, под действием любой, сколь угодно малой силой Q .

Истинная же картина, как показывает опыт, выглядит иначе. Объясняется это тем, что фактически, вследствие деформации тел, касания их происходит вдоль некоторой площадки AB (рис.23,б). При действии силы Q интенсивность давления у края A бывает, а у края B возрастает. В результате реакции N оказывается смещенной в сторону действия сил Q . С увеличением Q это смещение растет до некоторой предельной величины k . Таким образом, в предельном положении на каток будет действовать пара $(Q_{\text{пр}}, F)$ с моментом $Q_{\text{пр}}R$ уравнивающая ее пара (N, P) с моментом Nk . Из равенства моментов находим $Q_{\text{пр}}R = Nk$ или

$$Q_{\text{пр}} = \frac{k}{R} N. \quad (27)$$

Пока $Q < Q_{\text{пр}}$, каток находится в покое; при $Q > Q_{\text{пр}}$ начинается качение.

Входящая форма (27) линейная величина k называется *коэффициентом трения качения*. Измеряют величину k обычно в сантиметрах. Значения коэффициента k зависит от материала тел и определяет опытным путем. Приведем значения этого коэффициента для некоторых материалов

Дерева по дереву..... $k=0,05 \div 0,08$ см
 Сталь мягкая по стали (колесо по рельсу)..... $k=0,005$ см
 Сталь закаленная по стали (шариковый подшипник).. $k=0,001$ см

Отношение k/R для большинство материалов значительно меньше статического коэффициента трения f_0 . Этим объясняется то, что в технике, когда это возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, шариковые подшипники и т.п.)

Вопросы для самопроверки.

1. Объясните возникновение трения.
2. Чему равна предельная сила трения?
3. Как можно определить статического коэффициента трения?
4. Какое сопротивление называется трением качения?
5. От чего зависит значение коэффициента трения качения k ?

Тема: ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА И ГЛАВНОГО МОМЕНТА СИСТЕМЫ СИЛ. РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ. СЛУЧАЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ.

План.

1. Момент силы относительно центра как вектор.
2. Изображение момента вектором.
3. Выражение момента силы с помощью векторного произведения.
4. Момент силы относительно оси.

Момент силы относительно центра как вектор.

Момент силы относительно центра как вектор. Чтобы перейти к решению задач статики для системы сил, как угодно расположенной в пространстве, оказывается необходимым несколько уточнить и расширить ряд введенных ранее понятий. Начнем с понятия о моменте сил.

1. **Изображение момента вектора.** Момент силы F относительно центра O (см. рис. 24) как характеристика ее вращательного эффекта определяется следующими тремя элементами: 1) модуля момента, равным произведению модуля силы на плечо т.е. Fh ; 2) плоскостью поворота OAB , проходящей через линию действия силы F и центр O ; 3) направления поворота в этой плоскости. Когда все силы и центр O лежат в одной плоскости, необходимость задать каждой раз плоскость поворота OAB отпадает, и момент можно определять как скалярную алгебраическую величину, равную $\pm Fh$, где знак указывает направления поворота.

Но в случае сил, произвольно расположенных в пространстве, плоскости поворота у разных сил будут разными и должны задаваться дополнительно. Положение плоскости в пространстве можно задать, задав отрезок (вектор), перпендикулярной этой плоскости. Если одновременно модуль этого вектора выбрать равным модулю момента силы условиться направлять этот вектор так, чтобы его направление определяло направление поворота силы, то такой вектор полностью определит все три элемента, характеризующие момент данной силы относительно центра O .

По этому в общем случае *момент $m_o(F)$ силы F относительно центра O (рис.24). Будем изображать приложенным в центре O вектором M_o , равным по модулю (в выбранном масштабе) произведению модуля силы F на плечо h и перпендикулярным плоскости OAB , проходящей через центра O и силу F направлять вектор M_o будем в ту сторону, откуда поворот, совершаемый силой, виден происходящим против хода часовой стрелки.* Таким образом, вектор M_o будет одновременно характеризовать модуль момента, плоскость поворота OAB , разную для разных сил, и направления поворота в этой плоскости. Точка приложения вектора M_o определяет положения центра момента.

2. Выражения момента силы с помощью векторного произведения. Рассмотрим векторное произведение $\overline{OA} \times F$ вектор $\overline{OA} \in F$. По определению, $|\overline{OA} \times F| = 2 \text{ пл. } \triangle OAB = M_0$, так как модуль вектора $M_0 = 2 \text{ пл. } \triangle OAB$. Направлен вектор $(\overline{OA} \times F)$ перпендикулярна к плоскости OAB, в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение \overline{OA} с F (если их отложить от одной точки) вид напротив хода часовой стрелки, т.е. так же, как вектор M_0 . Следовательно, векторы $(\overline{OA} \times F)$ и M_0 совпадают и по модулю и по направлению и, как легко поверить, по размерности, т.е. оба эти вектора изображают одну и ту же величину. Отсюда

$$M_0 = \overline{OA} \times F \text{ или } M_0 = r \times F, \quad (28)$$

где вектор $r = \overline{OA}$ называется радиусом – вектором точка А относительно центра О.

Таким образом, *момент силы F относительно центра О равен векторному произведению радиуса вектора $r = \overline{OA}$, соединяющего центр О с точкой продолжения силы А, на саму силу.* Этим выражением момента сил бывает удобно пользоваться при доказательстве некоторых теорем.

Момент силы относительно оси. Чтобы перейти к решению задач статики для случая произвольной пространственной системы сил, необходимо ввести еще понятия о моменте сил относительно оси.

Момент силы относительно оси характеризуют вращательный эффект, создаваемой силой, стремятся повернуть тело вокруг данной оси. Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг некоторой оси z (рис. 25). Пусть на это тело действует сила F приложенная в точке А. Проведем через точку А плоскость ху, перпендикулярную оси z, и разложим силу F на составляющие: F_z параллельную оси z, и F_{xy} , лежащую в плоскости ху (F_{xy} является одновременно проекцией силы F на плоскость ху). Сила F_z , направленная параллельна оси z, очевидно, не может повернуть тело вокруг этой оси (она только стремится сдвинуть тело *вдоль* оси z). Следовательно, весь вращательный эффект, создаваемой силой F, будет совпадать с вращательным эффектом ее составляющей F_{xy} . Отсюда заключаем, что

$$m_z(F) = m_z(F_{xy}),$$

где символ $m_z(F)$ обозначает момент силы F относительно оси z.

Для силы F_{xy} , лежащей в плоскости, перпендикулярной оси z, вращательный эффект измеряется произведением модуля этой силы на ее расстояния h от оси. Но этой же величиной измеряется момент силы F_{xy} относительно точки О, в которой ось z пересекается с плоскостью ху. Следовательно, $m_z(F) = m_o(F_{xy})$ или, согласно предыдущему равенству

$$m_z(F) = m_o(F_{xy}) = \pm F_{xy} h \quad (29)$$

В результате приходим к следующему определению: *моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равна моменту проекции*

этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Момент будем считать положительным, если с положительного конца оси z поворот, который сила F_{xy} стремится совершить, виден происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

При вычисления моментов надо иметь в виду следующий частный случай:

1) Если сила параллельно оси, то ее момент относительно оси равен нулю (так как $F_{xy}=0$).

2) Если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно оси так же равен нулю (так как $h=0$).

Объединяя оба случая вместе, заключаем, *что момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.*

3) Если сила перпендикулярна оси, то ее момент относительно оси равен произведению модуля силы на расстояние между силы и осью.

Вопросы для самопроверки.

1. Как можно изображать момента вектором?
2. Как можно выражать момента силы с помощью векторного произведения?
3. Какая величина называется моментом силы относительно оси?
4. Когда момент силы относительно оси равен нулю

**Тема: ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. КООРДИНАТЫ ЦЕНТРОВ
ТЯЖЕСТИ ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
КООРДИНАТ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ ТЕЛ.**

План.

1. Приведения пространственной системы сил к данному центру.
2. Условие равновесия произвольной пространственной систем сил.
3. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси.

Привидение пространственной системы сил к данному центру. Полученные выше результаты позволяет решить задачу о приведении любой системы сил к данному центру. Эта задача, аналогичная задаче, рассмотренной выше решается с помощью теоремы о параллельном переносе силы. Для переноса действующей на абсолютно твердое тело силы F из точки A (рис.26,а) в точку O прикладываем в точке O силы $F'=F$ и $F''=-F$. Тогда сила $F'=F$ окажется приложенной в точке O и к ней буде присоединена пара (F, F'') с моментом m , что можно показать еще так, как рис.26,б.

При этом

$$m=m_o(F). \quad (30)$$

Рассмотрим теперь твердое тело, на которое действует какая угодно система сил $F_1 F_2 \dots F_n$ (рис. 27,а).

Выберем произвольную точку O произведена и перенесем все силы системы в этот центр, присоединяя при этом соответствующие пары. Когда на тело будет действовать система сил

$$F'_1 = F_1, F'_2 = F_2, \dots, F'_n = F_n, \quad (31)$$

приложение в центре O , и система пар, моменты которых, согласно формуле (30) будут равны

$$m_1=m_o(F_1), m_2=m_o(F_2), \dots, m_n=m_o(F_n) \quad (32)$$

Силы, приложенные в точке O заменяются одной силы R , приложенные в той же точке. При этом $R=\sum F'_k$ или , согласно равенствам (31)

$$R=\sum F_k. \quad (33)$$

Чтобы сложить все полученные пары, надо геометрически сложить векторы моментов этих пар. В результате система пар заменится одной парой, момент которой $M_o=\sum m_k$ или, согласно равенствам (32)

$$M_o=\sum m_o(F_k) \quad (34)$$

Как и в случае плоской системы, величина R , равная геометрической сумме всех сил, называется *главным вектором системы*; величина M_o , равная геометрической сумме моментов всех сил относительно центра O , называется *главным моментом системы* относительно этого центра.

Таким образом мы доказали следующую теорему: *любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно*

Приложим в этой точке силу $R' = -R$. Тогда система сил F_1, F_2, \dots, F_n, R' будет находиться в равновесии и для нее будут выполняться все условия. В частности, для любой координатной оси Ox будет:

$$\sum m_x(F_k) + m_x(R') = 0.$$

Но, так как сила $R' = -R$ и обе они направлены вдоль одной и той же прямой, то $m_x(R') = -m_x(R)$ подставляет это значение $m_x(R')$ в предыдущее равенство найден из него, что

$$m_x(R) = \sum m_x(F_k). \quad (38)$$

следовательно, если данная система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же оси (теорема Вариньона).

Вопросы для самопроверки:

1. Какая величина называется главным вектором системы?
2. Какая величина называется главным моментом системы?
3. Чем заменяется пространственная система сил при приведении к данному центру?
4. Как определяется проекции главного вектора и главного момента?
5. Что необходимо и достаточно для равновесия произвольной пространственной системы сил?
6. Что излагает теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси?

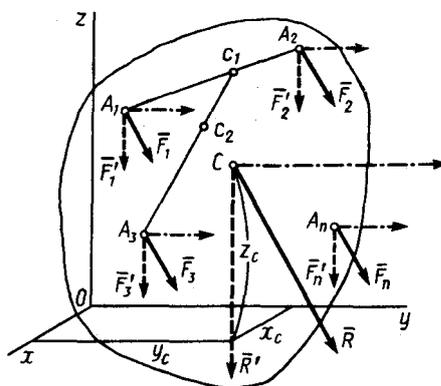
Тема: ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. КООРДИНАТЫ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ ТЕЛ.

План:

1. Центр параллельных сил.
2. Центр тяжести твердого тела.

Центр параллельных сил. Понятия о центре параллельных сил возникает при решении некоторых задач механики, в частности, при определении центров тяжести тел.

Рассмотрим систему параллельных и одинаково направленных сил F_1, F_2, \dots, F_n , приложенных к твердому телу в точках A_1, A_2, \dots, A_n , (рис.29).



Очевидно, что эта система имеет равнодействующую R , направленную так же, как слагаемые силы, причем по модулю

$$R = \sum F_k \quad (39)$$

Если теперь каждую из сил системы поворачивать около ее точки приложения в одну и ту же сторону и на один тот же угол, то мы будем получать новые системы одинаково направленных параллельных сил с тем же модулями и точками приложения, но с другим общим направлением. Равнодействующая каждой из таких систем параллельных сил будет, очевидно, иметь тот же модуль R , но всякий раз другую линию действия. Чтобы найти эту линию действия, надо каждый раз определять какую-нибудь точку, через которую она проходит. Покажем, что при всех таких поворотах линия действия равнодействующей всегда проходит через одну и ту же точку S .

Точка S , через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил около их точек приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, называется центром параллельных сил.

Найдем координаты центра параллельных сил. Положение точки S по отношению телу является неизменным и от выбора системы координат зависеть не будет. Возьмем поэтому произвольные координатные оси $Ox_1y_1z_1$ и обозначим в этих осях координаты точек: $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), \dots; S(x_c, y_c, z_c)$. Пользуясь тем, что от направления сил положение точки S не зависит, подвергнем сначала силы около их точек приложения так, чтобы они стали параллельны оси Oz_1 , и применим к повернутым силам F'_1, F'_2, \dots, F'_n теорему Вариньона. Так как R'

является равнодействующей этих сил, то по формуле (38), беря беря моменты относительно оси Oy , получим

$$m_y = (R') = \sum m_y(F'_k) \quad (40)$$

Но из чертежа видно, что $m_y(R') = Rx_c$, так как $R' = R$; аналогично $m_y(F'_1) = F_1x_1$, так как $F'_1 = F_1$ и т.д. Подставляя все эти величины в равенство (40), будем иметь: $Rx_c = F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_nx_n$. Отсюда находим:

$$x_c = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_nx_n}{R} = \frac{\sum F_kx_k}{R}.$$

Для координаты y_c аналогичную формулу получим, беря моменты относительно оси Ox . Чтобы определить z_c , повернем опять все силы, сделав их параллельными оси Oy , и применим к этим силам (изображенным пунктиром с точками) теорему Вариньона, беря моменты относительно оси Ox . Это даст:

$$-Rz_c = -F_1z_1 + (-F_2x_2) + \dots + (-F_nz_n),$$

откуда найдем z_c .

Окончательно получим следующие формулы для координат центра параллельных сил

$$x_c + \frac{\sum F_kx_k}{R}, y_c = \frac{\sum F_ky_k}{R}, z_c = \frac{\sum F_kz_k}{R}, \quad (41)$$

где R определяется равенством (40)

Центр тяжести твердого тела. На любую частицу тела, находящегося вблизи земной поверхности, действует направленная вертикально вниз сила, называемая силой тяжести.

Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с земным радиусом, силы тяжести, действующие на частицы тела, можно считать параллельными друг другу и сохраняющими для каждой частицы постоянную величину при любых поворотах тела. После тяжести, в котором выполняются эти два условия, называют *однородным полем тяжести*.

Равнодействующие сил тяжести p_1, p_2, \dots, p_n , действующих на частицы данного тела, обозначим P (рис.30).

Модуль этой силы равен весу тела и определяется равенством

$$P = \sum P_k \quad (42)$$

При любом повороте тела силы p_k остаются приложенными в одних и тех же точках тела и параллельными друг другу; изменяется только их направление по отношению к телу. Следовательно, равнодействующая P сил p_k , при любых положениях тела проходить через одну и ту же неизменно связанную с телом точку C , являющуюся центром параллельных сил тяжести p_k . Эта точка и называется *центром тяжести тела называется неизменная связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести частиц данного тела при любом положении тела в пространстве*. Что такая точка всегда существует, следует, как мы видели из доказанного выше.

Координаты центра тяжести, как центра параллельных сил тяжести определяются формулами (41) и будут:

$$x_c = \frac{\sum p_k x_k}{P}, y_c = \frac{\sum p_k y_k}{P}, z_c = \frac{\sum p_k z_k}{P}, \quad (43)$$

где x_k, y_k, z_k - координаты точек приложения сил тяжести p_k частиц тела.

Вопросы для самопроверки

1. Какая точка называется центром параллельных сил?
2. Как определяются координаты центра параллельных сил?
3. Какое поле тяжести называется однородным полем тяжести?
4. Какая точка называется центром тяжести тела?
5. Как определяются координаты центра тяжести твердого тела?

Тема: ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ. ТРИ СПОСОБА ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ: ВЕКТОРНЫЙ, КООРДИНАТНЫЙ, ЕСТЕСТВЕННЫЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ, СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ КООРДИНАТНЫМ И ВЕКТОРНЫМ СПОСОБОМ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ.

План.

1. Введение в кинематику
2. Способы задания движения точки.
3. Естественный способ задания движения.
4. Координатный способ задания движения.
5. Векторный способ задания движения.

Введение в кинематику. *Кинематикой* называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

Кинематика представляет собою, основных кинематических понятий и зависимостей необходимо для изучения движения тел с учетом действия сил. С другой стороны, методы кинематики имеют и самостоятельное практическое значение, например при изучении передач движения механизмах. По этой причине под влиянием запросов развивающегося машиностроения и произошло выделения кинематики в самостоятельный раздел механики (в первой половине XIX в.).

Под движением мы понимаем в механике изменение с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам.

Для определения положения движущегося тела (или точек) с тем телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему координат, которая вместе с телом образует *систему отсчета*. Если координаты всех точек тела в выбранной системе отсчета остаются все время постоянными, то тело по отношению к этой системе отсчета находится в покое. Если же координаты каких-нибудь точек тела с течением времени изменяются, то тело по отношению к данной системе отсчета, подразумевая под этим движением по отношению к тому телу, с которым эта система отсчета связана.

Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах кинематики время t принимают за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т.д.) рассматривают как изменяющиеся с течением времени, т.е. как функции времени t . Отсчет времени ведется от некоторого *начального момента* ($t=0$), о выборе которого в каждом случае уславливаются. Всякий данный *момент времени* t определяется числом секунд, прошедших от начального момента до данного; разность между какими-нибудь двумя последовательными моментами времени называется *промежутком времени*.

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано).

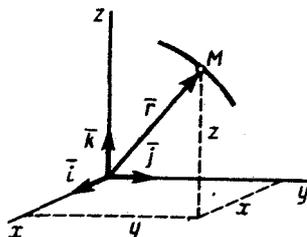
Кинематику задать движение или закон движения тела (точки) значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени. Установление математических способов задания движения точек или тел является одной из важных задач кинематики. По этому изучение движения любого объекта мы будем начинать с установления способов задания этого движения.

Основная задача кинематики состоит в том, чтобы, зная закон движения данного тела (или точки), определить все кинематические величины, характеризующие как движение каждой из его точек в отдельности (траектории, скорости, ускорения и т.п.).

Для задания движения точки можно применять один из следующих трех способов: 1) естественный, 2) координатный, 3) векторный.

1) Естественный способ задания движения. Непрерывная линия, которую описывает движения точка относительно данной системы отсчета, называется *траекторией* точки. Если траекторией является прямая линия, движение точки называется *прямолинейным*, а если кривая-*криволинейным*.

Естественным (или натуральным) способом задания движения удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки известна заранее. Пусть точка М движется относительно системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ вдоль некоторой траектории АВ (рис. 1).



Выберем на этой траектории какую-нибудь не подвижную точку О, которую примем за начало отсчета; затем, рассматривая траекторию как прямолинейную координатную ось, установим на ней положительное и отрицательное направление, как на обычной координатной оси. Тогда положение точки М на траектории будет однозначно определяться криволинейной координатной s , которая равна расстоянию от точки О до точки М, измеренную вдоль дуги траекторию и взятому соответствующим знаком. При движении точки М будет перемещаться в положения M_1, M_2, \dots , следовательно, расстояние s будет с течением времени изменяться. Что бы знать положение точки М на траектории, в любой момент времени надо знать зависимость

$$s=f(t). \quad (1)$$

Уравнение (1) и выражает закон движения точки М вдоль траектории.

Таким образом, чтобы задать движение точки естественным способом, надо задать: 1) *траекторию точки*; 2) *начало отсчета* на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета; 3) *закон движения точки вдоль траектории в виде $s=f(t)$.*

Например, если точка движется из начала отсчета O вдоль некоторой кривой так, что ее расстояние от этого начала растет пропорционально координату времени, то закон движения точки будет

$$s=at^2$$

где a – коэффициент, численно равный расстоянию, пройденному точкой за первую секунду.

В случае *прямолинейного движения*, если направить ось Ox вдоль траектории точки (рис. 2), будет иметь $s=x$ и закон *прямолинейного движения* точки будет

$$x=f(t). \quad (2)$$

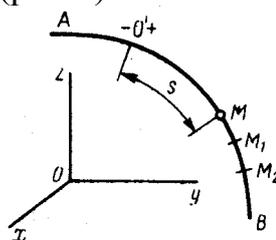
2) **К о о р д и н а т н ы й с п о с о б з а д а н и я д в и ж е н и я.** Естественный способ задания движения весьма нагляден. Однако траектория точки заранее бывает известна далеко не всегда. Поэтому на практике чаще пользуются другим способом задания движением точки – координатным.

Положение точки по отношению к данной систем отсчета $Oxyz$ можно определить ее декартовыми координатами x, y, z . При движении все эти три координаты будут с течением времени изменяться. Чтобы знать закон движения точки, т.е. ее положение в пространстве любой момент времени, надо знать значения координат точки для каждого момента времени, т.е. знать зависимости

$$x=f(t), \quad y=f(t), \quad z=f(t). \quad (3)$$

Уравнения представляют собой *уравнения движения точки в декартовых прямоугольных координатах*. Они определяют закон движения точки при координатном способе задания движение.

3) **В е к т о р н ы й с п о с о б з а д а н и я д в и ж е н и я.** Пусть точка M движется по отношению к некоторой системе отсчета $Oxyz$. Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав вектор r , проведенный из начало координат O в точку M (рис.4).



Вектор r называется *радиусом – вектором* точки M .

При движении точки M вектор r будет с течением времени изменяться и по модулю, и по направлению. Следовательно, r является переменным вектором (вектор – функцией), зависящий от аргумента t :

$$r=r(t). \quad (4)$$

Вопросы для самопроверки

1. Какой раздел механики называется кинематикой?
2. Какой величиной является время?
3. Что значит кинематически задать движение телу (точке)?
4. В чем состоит основная задача кинематики?
5. Какие способы существуют задания движения точки?
6. Какая линия называется траекторией точки?

**Тема: ГРАФИКИ ДВИЖЕНИЯ, СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ
ТОЧКИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ ПРИ
ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ.**

План.

1. Вектор скорости точки.
2. Вектор ускорения точки.
3. Касательное и нормальное ускорение точки.

Вектор скорости точки. Одной из основных кинематических характеристик движения точки является векторная величина, называемая скоростью точки. Введем с начала понятие о средней скорости точки за какой-нибудь промежуток времени. Пусть движущаяся точка находится в моменте времени t в положении M , определяемом радиусом-вектором r , а в момент t_1 проходит в положении M_1 , определяемом вектором r_1 (рис. 5). Тогда перемещение точки за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ определяется вектором $\overline{MM_1}$, который мы будем называть *вектором перемещения точки*. Этот вектор направлен по хорде, если точка движется криволинейно (рис.5, а), вдоль самой траекторией АВ, когда движение является прямолинейным (рис.5,б).

Из треугольника OMM_1 видно, что, $r + \overline{MM_1} = r_1$, следовательно,

$$\overline{MM_1} = r_1 - r = \Delta r.$$

Отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени дает векторную величину, называемую *средней* по модулю и направлению скоростью точки за промежуток времени Δt :

$$v_{cp} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}. \quad (6)$$

Модуль средней скорости, определяемый формулой (6), равен

$$v_{cp} = \frac{MM_1}{\Delta t}. \quad (6')$$

Направлен вектор v_{cp} так же, как и вектор $\overline{MM_1}$, т.е. при криволинейном движении вдоль хорды MM_1 в сторону движения точки, а при помощи прямолинейном движении вдоль самой траектории (отделения на Δt направления вектора не изменяется).

Очевидно, что чем меньше будет промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$, для которого вычислена средняя скорость, тем величина v_{cp} будет точнее характеризовать движение точки. Чтобы полнее характеризовать движение, независимую от выбора промежутка времени Δt , вводят понятия *о скорости точки в данный момент времени*.

Скоростью точки в данный момент t называется векторная величина v , к которой стремится средняя скорость v_{cp} при стремлении промежутка времени Δt к нулю

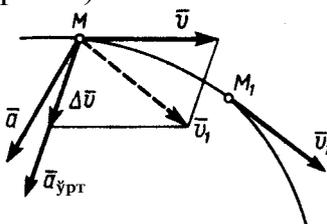
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (v_{cp}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

Окончательно получаем

$$v = \frac{dr}{dt}. \quad (7)$$

Итак, *вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиуса- вектора точки по времени.*

Вектор ускорения точки. Ускорение точки называется векторная величина, характеризующая изменения с течением времени модуля и направления скорости точки (рис.6).



Отношения приращения вектора скорости Δv соответствующему промежутку времени Δt определяет *вектор среднего ускорения точки* за этот промежуток времени:

$$w_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (8)$$

Ускорением точки в данный момент времени t называется векторная величина w , которой стремится среднее ускорение w_{cp} при

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

или, с учетом равенства (9),

$$w_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d^2 r}{dt^2}. \quad (9)$$

Следовательно, *вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса- вектора точки по времени.*

Размеры ускорения - длины / (времени)²; в качестве единицы измерения применяется обычно м/сек².

Вопросы для самопроверки.

1. Какой вектор называется вектором перемещения точки?
2. Как определяется модуль средней скорости?
3. Чему равен вектор скорости точки в данный момент времени?
4. Какая величина называется ускорением точки?
5. Как определяется вектор среднего ускорения точки?
6. Чему равен вектор ускорения точки в данный момент времени?

Тема: ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ОСИ. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ. УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ.

План.

1. Поступательное движение.
2. Вращательное движение твердого тела.

Поступательное движение. В кинематике, как и статики, мы будем рассматривать все твердые тела как абсолютно твердые, т.е. будем считать, что расстояние между двумя любыми точками тела остается все время движения неизменными.

Задачи кинематики твердого тела распадается на две части: 1) задание движения и изучения кинематических характеристик движения всего тела в целом; 2) изучения движений каждой из точек тела в отдельности.

Начнем с рассмотрения поступательного движения тела.

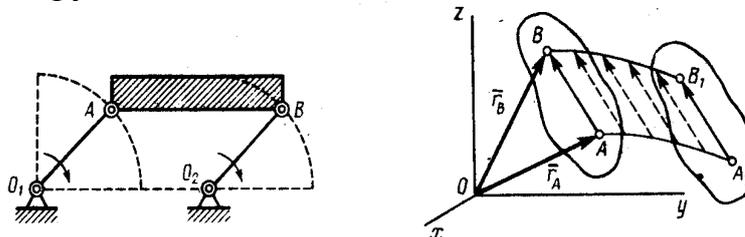
Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе.

Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями.

Приведем примеры поступательных движений.

1. Кузов автомобиля на прямом горизонтальном участке дороги движется поступательно. При этом траектории его точек будут прямыми линиями.

2. Спарник АВ (рис.7) при вращении кривошипов O_1A и O_2B ($O_1A=O_2B$) так же движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной самой себе). Точки спарника движутся при этом по окружностям.



Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой: *при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.*

Для доказательства рассмотрим твердое тело, совершающее поступательное движение относительно системы отсчета $Oxuz$. Возьмем в теле две произвольные точки А и В, положения которых в момент времени t

определяется радиусами- векторами r_A и r_B (рис.8); проведем вектор \overline{AB} , соединяющий эти точки. Тогда, как легко видеть

$$r_B = r_A + \overline{AB}. \quad (10)$$

При этом длина \overline{AB} постоянна, как расстояние между точками твердого тела, а направление \overline{AB} остается неизменным, так как тело движется поступательно. Таким образом, \overline{AB} во все время движения тела остается постоянным ($\overline{AB} = \text{const}$). Вследствие этого, как видно из равенство (10) (и не посредственно из чертежа), траектории точки В получается из траектории точки А параллельным смещением всех ее точек не постоянный вектор \overline{AB} . Следовательно, траектории точек А и В будут действительно одинаковыми (при наложении совпадающими) кривыми.

Для нахождения скорости точек А и В продифференцируем обе части равенства (10) по времени. Тогда получим:

$$\frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}.$$

Но производная от постоянного вектора \overline{AB} равна нулю. Производные же от вектора r_A и r_B по времени дают скорости точек А и В. В результате находим, что

$$v_A = v_B,$$

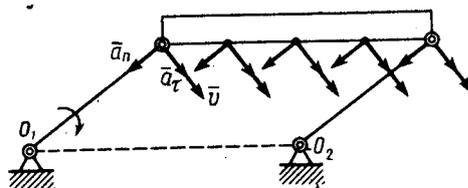
т.е. что скорости точек А и В тела в любой момент времени одинаков и по модулю и по направлению. Беря от обеих частей полученного равенства производные по времени, найдем:

$$\frac{dv_A}{dt} = \frac{dv_B}{dt} \text{ или } w_A = w_b.$$

Следовательно, ускорения точек А и В тела в любой момент времени тоже одинаковы по модулю и направлению.

Так как точки А и В были выбраны произвольно, то из найденных результатов следует, что у всех точек тела их траектории, а так же скорости и ускорения в любой момент времени будут одинаковы. Таким образом, теорема доказана.

Вращательное движение твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение. *Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными (рис. 9). Проходящая через не подвижные точки А и В прямая АВ называется осью вращения.*



Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать в зависимости угла φ от времени t , т.е.

$$t = f(\varphi). \quad (11)$$

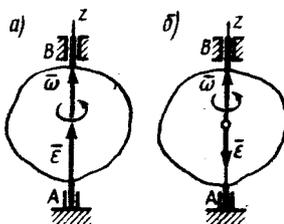
Уравнение (11) выражает закон вращательного движения твердого тела.

Угловой скоростью тела в данный момент времени t называется величина, к которой стремится значение $w_{\text{ср}}$, когда промежуток времени Δt стремится к нулю:

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \text{ или } w = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (12)$$

Таким образом, угловая скорость тела в данный момент времени численно равна первой производной от угла поворота по времени.

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости тела с течением времени (рис.10)



Угловое ускорением тела в данный момент времени t называется величина, в которой стремится значение $\varepsilon_{\text{ср}}$ когда промежуток времени Δt стремится к нулю; следовательно,

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{dw}{dt}. \quad (13)$$

или, принимая во внимание равенство (13)

$$\varepsilon = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (14)$$

Итак, угловое ускорение тела в данный момент времени численно равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Размерность углового ускорения будет $1/\text{время}^2$; в качестве единицы измерения обычно применяется $1/\text{сек}^2$.

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется *ускоренным*, а если убывает - *замедленным*.

Вопросы для самопроверки.

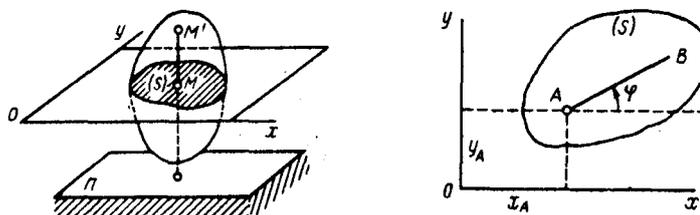
1. Как движение твердого тела называют поступательным?
2. Какое движение твердого тела называется вращательным?
3. Какой угол φ называется углом поворота тела?
4. Какое уравнение введает закон вращательного и твердого тела?
5. Какая величина называется угловой скоростью тела?
6. Чему равно угловое ускорение тела?

Тема: ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА. РАЗЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ НА ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ.

План.

1. Уравнение плоскопараллельного движения.
2. Разложение движения на поступательное и вращательное
3. Определение скоростей точек тела.

Уравнения плоскопараллельного движения. Разложения движения на поступательное и вращательное. *Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой не подвижной плоскости Π (рис.11).*



Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например, катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-шатунном механизме и др. Частным случае плоскопараллельного движения является вращательное движения твердого тела.

Рассмотрим сечение S тела какой-нибудь плоскостью Oxy параллельно плоскости Π . (см. рис.11).

При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой MM' , перпендикулярной к сечению S , т.е. к плоскость Π , движутся тождественно по этому для изучения движения всего тела достаточно, как движется сейчас S тело в плоскости Oxy .

При движении тела величины x_A , и y_A и φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения тела, т.е. знать ее положения в пространстве в любой момент времени, надо знать зависимости:

$$x_A=f_1(t), \quad y_A=f_2(t), \quad \varphi_A=f_3(t), \quad (15)$$

Уравнения (15) определяющие закон происходящего движения, называется уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

Определения скорости точек тела. Плоскопараллельное движение твердого тела складывается из поступательного движения, при котором все точки тела движутся со скоростью плюса v_A , и из вращательного движения вокруг этого полюса. Покажем, что скорость любой точки M тела складывается геометрически из скоростей, которая она получает в каждом из этих движений.

В самом деле, положение любой точки M , лежащей в сечении (S) тела, определяется по отношению к осям Oxy радиусом – вектором $r=r_A+r'$ (рис.13), где r_A – радиус – вектор полюса A , $r'=\overline{AM}$ – вектор – вектор, определяющий положения точки M относительно осей $Ax'y'$, перемещающихся вместе с

поллюсом А поступательно [движения сечения (S) по отношению к этим осям представляют собою вращения вокруг полюса А]. Тогда

$$v_M = \frac{dr}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{dr'}{dt}.$$

В полученном равенстве величина $v_A = \frac{r_A \dot{\varphi}}{r_A}$ есть скорость полюса А;

величина же $\frac{dr'}{dt}$ равна скорости v_{MA} , которую точка М получает при $r_A = \text{const}$, т.е. относительно осей $Ax'y'$ или, иначе говоря, *при вращении тела вокруг полюса А*. Таким образом, из предыдущего равенства действительно следует, что

$$v_M = v_A + v_{MA}. \quad (16)$$

При этом скорость v_{MA} точки М во вращательном движении вокруг полюса А будет

$$v_{MA} = \omega \cdot MA \quad (v_{MA} \perp \overline{MA}), \quad (17)$$

где ω - угол скорость вращения тела.

Таким образом, *скорость любой точки М тела геометрически складывается из какой-нибудь другой точки А, принятой за полюс, и скорости точки М ее вращении вместе с телом вокруг этого полюса*. Модуль и направления скорости v_M находятся построением соответствующего параллелограмма (рис.14).

Вопросы для самопроверки

1. Какие движения твердого тела называется плоскопараллельными?
2. Чего достаточно изучить, для изучения движения всего тела?
3. Какие уравнения называются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела?
4. Из каких движений слагается плоскопараллельное движение твердого тела?
5. Как определяется скорость тела?

Тема: МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ. ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИЯХ СКОРОСТЕЙ ДВУХ ТОЧЕК ТЕЛА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТЕЛА. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ.

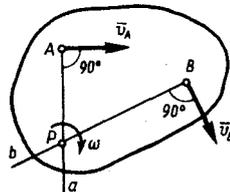
План.

1. Определения скоростей точек тела с помощью мгновенного центра скоростей.
2. План скоростей.
3. Определение ускорений точек тела.
4. Мгновенный центр ускорений

Определения скоростей точек тела с помощью мгновенного центра скоростей. Другой простой наглядный метод определения скоростей точек тела при плоскопараллельном движении основан на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенный центр скоростей называется точка сечения S тела, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Легко убедиться, что если тело движется не поступательно, то такая точка в каждый момент времени t существует и притом единственная. Пусть в момент времени t точка A и B тела, лежащей в сечении S , имеют скорости v_A и v_B , не параллельную к друг другу (рис.15).



Тогда точка P , лежащая на пересечении перпендикуляров Aa вектора v_A и Bb к вектору v_B , и будет мгновенным центром скоростей, так как $v_P=0$. В самом деле, если допустить, что $v_P \neq 0$, то по теореме о проекции скоростей точек тела вектор v_P должен быть одновременно перпендикулярен к AP (так как $v_A \perp AP$) и к BP (так как $v_B \perp BP$), что невозможно. Из той же теоремы видно, что никакая другая точка сечения S в этот момент времени не может иметь скорость равную нулю (например, для точки A проекция v_B на линию Ba не равна нулю и, следовательно, $v_A \neq 0$ и т.д.).

Если теперь в момент времени t взять точку P за плюс, то по формуле (16) скорость точки A будет равна

$v_A = v_P + v_{AP} = v_{AP}$, так как $v_P = 0$. Аналогичный результат получается для любой точки тела. Следовательно, *скорость любой точки тела, лежащей в сечении S , равна ее вращательной скорости вокруг мгновенного центра скоростей P . При этом согласно соотношениям (17)*

$$v_P = \omega \cdot PA \quad (v_A = \overline{PA})$$

$$v_P = \omega \cdot PA \quad (v_B \perp \overline{PB}) \text{ и т.д.} \quad (18)$$

Из равенства (18) следует также, что

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}, \quad (19)$$

т.е. что скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей.

План скоростей. Скорости точек тела можно определять графически, построением плана скоростей. *Планом скоростей* называется диаграмма, на которой от некоторого центра отложены векторы скоростей точек тела.

Пусть v_A, v_B, v_C – скорости точек А,В,С данного тела (рис.16,а).

Тогда соответствующий план скоростей получим, отложив от некоторого центра О (рис.16,б) в выбранном масштабе отрезки

$$\overline{Oa} = v_A, \quad \overline{Ob} = v_B, \quad \overline{Oc} = v_C.$$

Установим свойства и правила построения плана скоростей. По формулам (16) и (17)

$$v_B = v_A + v_{BA}, \quad (20)$$

$$\text{где } v_{BA} \perp AB \text{ и } v_{BA} = \omega \cdot AB. \quad (20')$$

Но из треугольника Oab видно, что $\overline{Ob} = \overline{Oa} + \overline{ab}$ или $v_B = v_A \pm \overline{ab}$. Сравнивая это результат с равенством (20), получаем $\overline{ab} = v_{BA}$. Аналогично найдем, что $\overline{ac} = v_{CA}$ и т.д. Тогда по формулам (20)

$$ab \perp AB, \quad ac \perp AC, \quad \text{и т.д.} \quad (21)$$

Кроме того, по тем же формулам $ab = \omega \cdot AB$, $ac = \omega \cdot AC$ и т.д., откуда

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC} = \dots = \omega \quad (21')$$

Следовательно, отрезки, соединяющие концы векторов скоростей на плане скоростей, перпендикулярны отрезкам, соединяющим соответствующие точки тела, и по модулю пропорциональны этим отрезкам; фигуры, обозначенные на плане скоростей и в сечении (S) тела одинаковыми буквами, будут при этом подобны и повернуты одна относительно другой на 90° .

Определение ускорений точек тела. Покажем, что ускорение любой точки М тела при плоскопараллельном движении (так же, как скорость) складывается из ускорений. Которой она получает в поступательном и во вращательном движениях этого тела. Положение точки М по отношению к осям Оху определяется радиусом-вектором $r = r_A + r'$, где $r' = \overline{AM}$. Тогда

$$w_M = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r_A}{dt^2} + \frac{d^2 r'}{dt^2}.$$

В полученном равенства величина $\frac{d^2 r_A}{dt^2} = w_A$ равна ускорению полюса А, а

величина $\frac{d^2 r'}{dt^2} = w_{MA}$ определяет ускорения, получаемая точкой М при ее вращении вместе с телом вокруг полюса А. Следовательно,

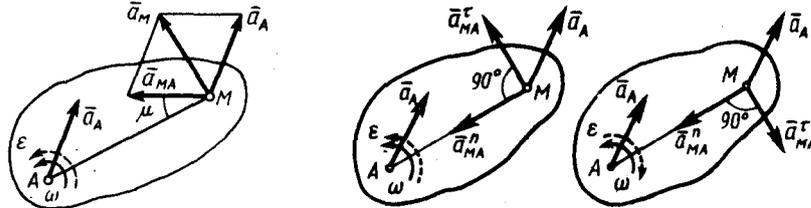
$$w_M = w_A + w_{MA}. \quad (22)$$

При это м для ускорения w_{MA} точки М во вращательном движении вокруг полюса А будет:

$$w_{MA} = MA \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot \operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}, \quad (23)$$

где ω и ε - угловая скорость и угловое ускорения тела, а μ - угол между направлением w_{MA} и отрезок МА.

Таким образом, ускорение любой точки М тела геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки, принятой за полю, и ускорения точки М в ее вращения вместе с телом вокруг этого полюса. Модуль и ускорения направления w_M находится построением соответствующего параллелограмма (рис.17).



Однако вычисления величины w_M с помощью изображенного на рис.17 параллелограмма несколько усложняется расчет, так как предварительно надо будет вычислять угол μ , а затем угол между векторами w_{MA} и w_A . Поэтому при решении задач удобнее вектор w_{MA} заменять его касательной (w_{MA}^t) и нормальной (w_{MA}^n) составляющими, где

$$w_{MA}^t = AM \cdot \varepsilon, \quad w_{MA}^n = AM \cdot \omega^2. \quad (24)$$

Вектор w_{MA}^t направлен перпендикулярно АМ в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если оно замедленное; w_{MA}^n всегда направлен от точки М к полюсу А (рис.21).

Тогда вместо равенства (25) получим:

$$w_m = w_a + w_{MA}^t + w_{MA}^n. \quad (25)$$

Если полюс А движется не прямолинейно, то его ускорение также слагаться из касательного и нормального и тогда

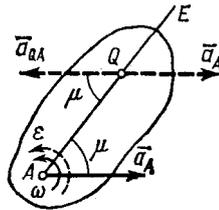
$$w_M = w_{At} + w_{An} + w_{MA}^t + w_{MA}^n. \quad (25')$$

причем модуль двух последних слагаемых находится по формулам (24). Формулами (24), (25) и пользуясь при решении задач, вычисляя векторы вычисляя векторы стоящей в правой части равенства, а затем определяя их геометрическую сумму или производя соответствующие графические построения.

Мгновенный центр ускорений. При не поступательном движении твердого тела в его сечении S в каждый момент времени имеется точка Q , ускорение которой равно нулю. Эта точка называется *мгновенным центром ускорения*. Определяется положение центра Q , если известно ускорение w_A какой-нибудь точки A тела и величины ω и ε , следующим путем:

1) Вычисляем величину угла μ из формулы $\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$.

2) От точки A под углом μ к вектору w_A проводим прямую AE (рис.19); при этом прямая AE должна быть отклонена от w_A в *сторону вращения тела, если вращение является ускоренным, и против вращения, если она является замедленным, т.е. в сторону направления ускорения ε* .



3) Откладываем вдоль линии AE отрезок AQ , равный

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (26)$$

Построение таким путем точка Q и будет мгновенным центром ускорения. В самом деле по формуле

$$w_Q = w_A + w_{QA},$$

где $w_{QA} = QA \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Подставляя сюда значения QA из равенства (23) находим, что $w_{QA} = -w_A$. Кроме того, вектор w_{QA} должен образовать с линией QA угол μ , следовательно, вектор w_{QA} параллелен w_A , но направлен в противоположную сторону. Поэтому $w_{QA} = -w_A$ и $w_Q = 0$.

Если точку Q выбрать за полюс, то так как $w_Q = 0$, ускорение любой точки M тела, согласно формулам (22) и (23), будет равно:

$$w_M = w_Q + w_{MQ} = w_{MQ} \quad \text{и} \quad w_M = QM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (27)$$

Следовательно, *ускорение любой точки тела равно ее ускорению во вращательном движении и вокруг мгновенного центра ускорений Q* . При этом, как следует из (27),

$$\frac{w_m}{QM} = \frac{w_A}{QA} = \dots \quad \text{и т.д.}, \quad (27')$$

т.е. ускорения точек тела пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений.

Вопросы для самопроверки.

1. Какая точка называется мгновенным центром скоростей?
2. Как определяется скорость точки тела с помощью мгновенного центра скоростей?
3. Что надо знать для определения на мгновения центра скоростей?
4. Чему равна угловая скорость тела?
5. Какая диаграмма называется планом скоростей?
6. Как определяется ускорения точки тела?
7. Из чего складывается ускорение точки тела?
8. Какая точка называется мгновенным центром ускорений?
9. Чему равно ускорение точки тела?
10. Как определяется ускорение точки тела с помощью мгновенного центра ускорений?
11. Когда совпадают центры скоростей и ускорений?

Лекция-16.

Тема: КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА. СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ТЕЛА.

План.

Вопросы для самопроверки.

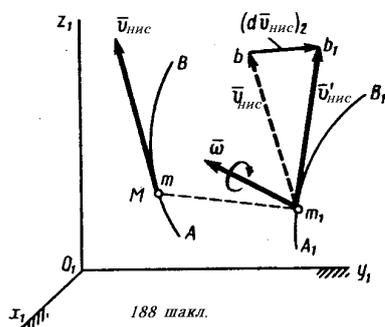
Лекция-17.

Тема: СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ, ПЕРЕНОСНОЕ И АБСОЛЮТНОЕ ДВИЖЕНИЯ. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ. ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА.

План.

1. Относительное, переносное и абсолютное движение.
2. Сложение скоростей.

Относительно, переносное и абсолютное движение. Рассмотрим сложное движение точки M , перемещающейся по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$, которая в свою очередь как-то движется относительно другой системы отсчета $O_1 x_1 y_1 z_1$, условно названной нами не подвижно (рис.20).



Каждая из этих систем отсчета связана, конечно, с определенным телом, на чертеже не показанным. Введем следующие определения:

1. Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижным осям координат, *относительным движением* (такое движение будет видеть наблюдатель, связанный с подвижными осями $Oxyz$ и перемещающийся вместе с ними). Траектория AB , описываемая точкой в относительном движении. Называется *относительной траекторией*. Скорость движения точки M по отношению к осям $Oxyz$ (т.е. вдоль этой кривой AB) называется

относительной скоростью (обозначается $v_{отн}$), а ускорения точки в этом движении - *относительным ускорением* (обозначается $w_{отн}$). Из определения следует, что при вычислении $v_{отн}$ и $w_{отн}$ оси $Oxyz$ можно считать не подвижным.

2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Oxyz$ и всеми неизменно связанными с ней точками пространства по отношению к не подвижной системе $O_1 x_1 y_1 z_1$, является для точки M *переносным движением*.

Скорость той неизменно связанной с подвижными осями $Oxyz$ точки m , с которой в данный момент совпадет движущаяся точка M , называется *переносной скоростью* точки M в этот момент (обозначается $v_{пер}$), а ускорение этой точки – *переносным ускорением* точки M (обозначается $w_{пер}$). Таким образом

$$v_{пер} = v_m, \quad w_{пер} = w_m, \quad (28) \quad \text{где } m \text{ – не}$$

подвижная по отношению к осям $Oxyz$ точка, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M . Если представить себе, что относительное движение точки M происходит движение по поверхности (или внутри) твердого тела, с которым жестко связаны подвижные оси $Oxyz$, то переносной скоростью (или ускорением) точки M в данный момент будет скорость (или ускорение) то точки m тела с которой в этот момент совпадает точка M .

3. Движение, совершаемая точкой по отношению к не подвижной системе отсчета $O_1 x_1 y_1 z_1$, называется *абсолютным* или *сложным*. Траектория CD этого движения называется *абсолютной траекторией*, скорость – *абсолютной скоростью* (обозначается v_a) и ускорение – *абсолютным ускорением* (обозначается w_a).

Сложение скоростей. Рассмотрим сложное движение точки M . Пусть эта точка совершает за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ вдоль своей относительной траектории AB относительное перемещение, определяемая вектором $\overline{MM'}$ (рис.21,а).

Сама кривая AB , двигаясь вместе с подвижными осями $Oxyz$, перейдет за тот же промежуток времени в како-то новое положение $A_1 B_1$. Одновременно та точка m кривой AB , с которой момент t совпадает точка M , совершит переносное вращение $\overline{mm_1} = \overline{Mm_1}$. В результате этих движений точка M придет в положение M_1 и совершит за время Δt абсолютное перемещение $\overline{MM_1}$.

Из векторного треугольника Mm_1M_1 имеем:

$$\overline{MM_1} = \overline{Mm_1} + \overline{m_1M_1}$$

Деля обе части этого равенства на Δt и переходя к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{Mm_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{m_1M_1}}{\Delta t}.$$

Но по определению:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = v_a, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{Mm_1}}{\Delta t} = v_{пер}.$$

Что касается последнего слагаемого, так как при $\Delta t \rightarrow 0$ кривая $A_1 B_1$ стремится к совпадению с кривой AB , то в пределе будем иметь

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{m_1 M_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = v_{отн}.$$

В результате находим, что

$$v_a = v_{отн} + v_{пер}. \quad (29)$$

Направлены векторы v_a , $v_{отн}$, $v_{пер}$ по касательным соответствующим траекториям (рис.21,б).

Таким образом, мы доказали следующую теорему о сложении скоростей: *при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.* Построение на рис.21,б фигура называется *параллелограмм скоростей.*

Если угол между направлениями векторов $v_{отн}$ и $v_{пер}$ равен α , то по модулю

$$v_a = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2 + 2v_{отн} v_{пер} \cos \alpha}. \quad (29')$$

Вопросы для самопроверки.

1. Какое движение точки называется относительным движением?
2. Какая скорость движения точки называется относительной скоростью?
3. Какое движение является для точки переносным движением?
4. Какая скорость точки называется переносной скоростью?
5. Какое ускорение точки называется переносным ускорением?
6. Какое движение точки называется абсолютным или сложным?
7. Чему равна абсолютная скорость при сложном движении?

**Тема: СЛОЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ.
СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ВОКРУГ 2 ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ.
СЛОЖЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ И ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ.
ВИНТОВОЕ ДВИЖЕНИЕ.**

План.

1. Сложение ускорений
 2. Сложение ускорений при поступательном переносном движении.
 3. Сложение ускорений при поступательном переносном движении.
- Теорема Кориолиса
4. Сложение поступательных движений.
 5. Сложение вращение вокруг двух параллельных осей

Сложение ускорений. Найдем зависимость между абсолютным, относительным и переносным ускорением точки. Для этого воспользуемся равенством. Из него получаем

$$w_a = \frac{dv_a}{dt} = \frac{dv_{отн}}{dt} + \frac{d_{пер}}{dt}. \quad (30)$$

Вычислим стоящие справа производные, которые, как мы увидим, в общем случае не равны $w_{отн}$ и $w_{пер}$ соответственны. Для этого нам не понадобится выражение векторов $v_{отн}$, $w_{отн}$, $v_{пер}$, $w_{пер}$.

Пусть положение движущейся точки М в подвижных осях $Oxuz$ определяется ее координатами x, y, z (рис.22).

Тогда, поскольку при вычислении $v_{отн}$ и $w_{отн}$ движение подвижных осей во внимание не принимается (их можно рассматривать как не подвижные), то проекция векторов не принимается $v_{отн}$ и $w_{отн}$ на оси $Oxuz$ при любом переносном движении определяется формулами

$$v_{отн} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k, \quad w_{отн} = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k \quad (31)$$

де i, j, k – единичные векторы (орты) осей $Oxuz$.

Дальнейший расчет зависит от характера переносного движения. Рассмотрим сначала случай, когда оно является поступательным.

Сложное ускорении при поступательном переносном движении. Если подвижная система отсчета $Oxuz$ перемещается по отношению к не подвижной поступательно (рис.22,а), то очевидно, что при любом положении точки М будет

$$v_{пер} = v_O, \quad w_{пер} = w_O, \quad (32)$$

где v_O и w_O – скорость ускорение начало О.

Кроме того, при поступательном движении осей $Oxuz$ их орты, перемещаясь параллельно самим себе, остаются постоянным. Тогда из равенств (31) и (32) получим

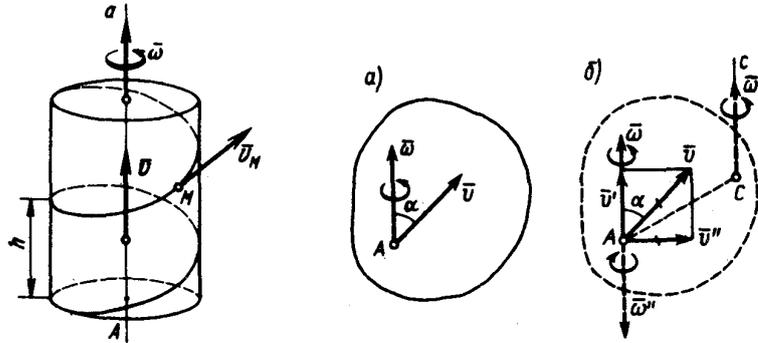
$$\frac{dv_{отн}}{dt} = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k = w_{отн}; \quad \frac{dv_{пер}}{dt} = \frac{dv_O}{dt} = w_O = w_{пер}$$

В результате формула (30) дает

$$W_a = W_{отн} + W_{пер}. \quad (33)$$

Следовательно, при поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений. Результат здесь аналогичен тому, который дает теорема о сложении скоростей.

Сложение ускорений при поступательном переносном движении. Теорема Кориолиса. Допустим с начала, что переносное (т.е. движение подвижной системы отсчета $Oxyz$) является вращательным с углом скоростью ω (рис.22,б).



При этом ось OD может быть или неподвижной или же мгновенной осью вращения (когда не подвижно точка O). В обоих случаях орты i, j, k уже не являются постоянными, так как, поворачиваясь вместе с осями $Oxyz$, они изменяют свои направления, что при вычислении $w_{отн}$ не учитывалась. Поэтому получим из равенств (31) справедливых при любом переносном движении

$$\frac{dv_{i\dot{o}i}}{dt} = (\ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k) \left(x \frac{di}{dt} + y \frac{dj}{dt} + z \frac{dk}{dt} \right) = w_{i\dot{o}i} + w_1,$$

где через w_1 обозначена вторая скобка в правой части равенства. Вычисляя w_1 с помощью формул Пуассона, найдем

$$w_1 = x(\omega \times i) + y(\omega \times j) + z(\omega \times k) = \omega \times (xi + yj + zk) = \omega \times v_{отн}$$

окончательно будем иметь

$$\frac{dv_{отн}}{dt} = w_{отн} + w_1$$

$$\text{где } w_1 = \omega \times v_{отн} \quad (34)$$

В этом равенстве величина $w_{отн}$ учитывает изменение вектора $v_{отн}$ только при относительном движении точки M , а добавочный член w_1 учитывает то изменения вектора $v_{отн}$, которая происходит при его повороте вместе с трехгранником $Oxyz$ вокруг оси OD , т.е. переносим движении.

Далее, при вращательном движении скорость и ускорение любой неизменной связанной с осями $Oxyz$ точки M определяются по формулам

$$v_{пер} = \omega \times r, \quad w_{пер} = (\varepsilon \times r) + (\omega \times v_{пер}), \quad (35)$$

$$\frac{dv_{пер}}{dt} = w_{пер} + w_2,$$

$$\text{где } w_2 = \omega \times v_{отн}. \quad (36)$$

Подставляя теперь величины (34) и (36) в равенство (30), получим

$$w_a = w_{отн} + w_{пер} + w_1 + w_2 \quad (37)$$

Введем обозначение

$$w_{кор} = w_1 + w_2 = 2(\omega \times v_{отн}). \quad (38)$$

Величина $w_{кор}$, характеризующая изменение вектора относительной скорости $v_{отн}$ в переносном движении векторов переносной скорости $v_{пер}$ в относительном движении называется *поворотным* или *Кориолисовым ускорением точки*. Тогда из равенства (37) окончательно получим

$$w_a = w_{отн} + w_{пер} + w_{кор} \quad (39)$$

Формула (39) выражает следующую **теорему Кориолиса**: *абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, характеризующего изменение относительной скорости точки в относительном движении, переносного, характеризующего изменение переносной скорости точки в переносном движении, и Кориолисов, характеризующего изменения относительной скорости точки в переносном движении и переносной скорости точки в относительном движении.*

Сложение поступательных движений. Если тело движется относительно подвижных осей $Oxuz$, а эти оси совершают одновременно переносное движение по отношению к не подвижным осям $Ox_1y_1z_1$, то результирующее (абсолютное) движение тела называется сложным.

Задачей кинематики в этом случае является нахождением зависимостей между характеристиками относительного, переносного и абсолютного движений. Основными кинематическими характеристиками движение тела, как мы знаем, являются по поступательные и угловые скорости и ускорения. Мы ограничимся, в дальнейшем будем определять зависимости только между поступательными и угловыми скоростями движений.

Рассмотрим сначала случай, когда относительное движение тела является поступательным со скоростью v_1 , а переносное движение – тоже поступательное со скоростью v_2 . Тогда все точки тела в относительном движении будут иметь скорость v_1 , а в переносном скорость v_2 . Следовательно, по теореме сложения скоростей, все точки тела в абсолютном движении будут иметь одну и ту же скорость $v = v_1 + v_2$, т.е. абсолютное движение тела будет поступательным.

Итак, при сложении двух поступательных движений со скоростями v_1 и v_2 результирующее движение тела так же является поступательным со скоростью $v = v_1 + v_2$.

Сложение вращений вокруг двух параллельных осей. Рассмотрим случай, когда относительное движение тела является вращением с угловой скоростью ω_1 вокруг – оси aa' , укрепленная на кривошипе ba (рис.23,а), а переносное – вращением кривошипа ba вокруг оси bb' , параллельной aa' , с угловой скоростью ω_2 . Тогда движение тела будет плоскопараллельным по отношению к плоскости, перпендикулярной к осям. Здесь возможны три частных случая.

1) **Вращения направлены в одну сторону.** Изобразим сечение (S) тела плоскостью, перпендикулярной осям (рис.23,б). Следы осей в сечении (S) обозначим буквами А и В. Легко видеть, что точка А лежащая на оси Aa' , получает скорость только от вращения вокруг оси Bb' , следовательно,

$v_A = \omega_2 \cdot AB$. Точно так же $v_B = \omega_2 \cdot AB$. При этом векторы v_A и v_B параллельны друг к другу (оба перпендикулярны AB) и направлены на разные стороны. Тогда точка C является мгновенным центром скоростей ($v_C = 0$), а следовательно, ось Cc' , параллельная осям Aa' и Bb' , является *мгновенной осью вращения* тела.

Для определения угловой скорости ω абсолютного тела вращения вокруг оси Cc' и положение самой оси, т.е. точки C , воспользуемся равенством

$$\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC}.$$

Из свойств пропорции получим:

$$\omega = \frac{v_A + v_B}{AC + BC} = \frac{v_A + v_B}{AB}.$$

Подставляя в это и предыдущее равенство $v_A = \omega_2 \cdot AB$, $v_B = \omega_1 \cdot AB$, найдем окончательно:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad (40)$$

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \quad (41)$$

Итак, *если тело участвует одновременно в двух нормальных в одну сторону вращения вокруг параллельных осей, то его результирующее движение будет мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$, вокруг мгновенной оси, параллельной данным; положение этой оси определяется пропорцией (41).*

2) Вращения направлены в разные стороны. Изобразим опять сечения (S) тела (рис.24) и допустим для определенности, что $\omega_1 > \omega_2$.

Тогда, рассуждая, как в предыдущем случае, найдем, что скорости точек A и B будут численно равны $v_A = \omega_2 \cdot AB$, $v_B = \omega_1 \cdot AB$; при этом v_A и v_B параллельны друг другу и направлены в одну сторону. Тогда мгновенная ось вращения проходит через точку C (рис.29), причем

$$\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC}$$

или по свойствам пропорции

$$\omega = \frac{v_B - v_A}{BC - AC} = \frac{v_B - v_A}{AB}.$$

Подставляя в эти равенства значения v_A и v_B найдем окончательно

$$\omega = \omega_1 - \omega_2, \quad (42)$$

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \quad (43)$$

Итак, в этом случае результирующее движение также является мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_1 - \omega_2$ вокруг оси Cc' , положение которой определяется пропорцией (43).

Полученные результаты показывают, что векторы угловых скоростей при вращении вокруг параллельных осей складываются так же, как векторы параллельных.

Вопросы для самопроверки

1. Чему равно абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении?
2. Какая величина называется Кориолисовым ускорением точки?
3. Что излагается в теореме Кориолиса?
4. Каково будет результирующее движение при сложении поступательных движений?
5. Какой осью называется мгновенной осью вращения тела?
6. Каким равенства определяется угловая скорость абсолютного вращения тела?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.М. Тарг. Краткий курс теоретической механики.
2. В.В. Добронравов. Н.Н. Никитен. И курс теоретической механики.

Москва Высшая. школа-1983 г.

3. Воронков И.М. курс теоритической механики.
4. Старжинский В.М. Теоритическая механика . Москва-1980 г.
5. Космодемьянский А.А. Курс теоритическрий механики Мосва-1954 г.
6. Лойцанский Л.Г. Лурье. А.И. Курс теоритической механики . Масква-

1980 г.

7. Старжинский В.М. Теоритическая механика. М.-1980г.
8. Яблонский А. А. Никифррова В.М. Курс теоретической механики.