



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA- MATEMATIKA FAKULTETI
MATEMATIK TAHLIL KAFEDRASI

ALGEBRA VA SONLAR NAZARIYASI
FANIDAN MA'RUZALAR MATNI
(1-kurs matematika bo'limi talabalari uchun)

TUZUVCHI: fizika-matematika fanlari

nomzodi, dotsent

ALLAKOV I.A.

TERMIZ-2007

1-MA'RUZA

MAVZU: TO`PLAMLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

TO`PLAMLAR ALGEBRASI.

REJA:

1. To`plam tushunchasi va unga misollar.
2. Qism to`plamlar va ularga misollar.
3. To`plamlar ustida bajariladigan amallar.
4. To`plamlar ustida bajariladigan amallarning xossalari.
5. Bo'sh va universal to`plamlar. To'ldiruvchi to`plam.
6. To`plamlar ustida bajariladigan amallarni Eyler-Venn diagrammalari yordamida ifodalash.

ADABIYOTLAR [1, 2] .

1. To'plam matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, u matematika faniga nemis matematigi Georg Kantor (1845-1918) tomonidan kiritilgan. To'plam tushunchasi eng sodda tushunchalardan biri bo'lgani uchun o'nga ta'rif berilmaydi. Odatda ob'ektlarni (predetlarni) birgalikda olib qaraganimizda to'plam tushunchasiga kelamiz. Lekin bu yuzaki qarash bo'lib ayrim olingan birta elementning o'zini ham to'plam deb qarash mumkin.

To'plamlarni biz lotin alfavitining bosh harflari $A, B, C, D, \dots$ bilan, To'plamni tashkil etuvchi ob'ektlarni (ya'ni to'plamning elementlarini) esa lotin alfavitining kichik harflari $a, b, c, d, \dots$ lar bilan belgilaymiz. a elementning A to'plamga tegishli ekanligini $a \in A$ ko'rinishda b elementning A to'plamga tegishli emas ekanligini esa $b \notin A$ ko'rinishda belgilaymiz. A to'plam a, b, c, d, e elementlardan tashkil topgan bo'lsa, u $A = \{a, b, c, d, e\}$ ko'rinishda belgilanadi.

Agar qaralayotgan to'plamdagi elementlar soni chekli bo'lsa, bu to'plamga chekli to'plam, aks holda, ya'ni to'plamdagi elementlar soni cheksiz ko'p bo'lsa, bu to'plamga cheksiz to'plam deyiladi.

Masalan: $A = \{a, b, c, 1, 2\}$, B - O'zbekistondagi talabalar to'plami, C - Er yuzidagi sut emizuvchi hayvonlar to'plami.

Bu A, B, C to'plamlar chekli to'plamlardir.

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ - natural sonlar to'plami,

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\}$ - butun sonlar to'plami,

$Z_m = \{0, \pm m, \pm 2m, \dots\}$ - m ga karrali butun sonlar to'plami.

Bu N, Z, Z_m - to'plamlar cheksiz to'plamlarga misol bo'ladi.

2. Agar A va B to'plamlar berilgan bo'lib, A to'plamning har bir elementi B to'plamga tegishli bo'lsa, A to'plamni B to'plamning qism to'plami deyiladi va $A \subset B$ ko'rinishda belgilanadi. Agarda $A \subset B$ bo'lib B da A ga kirmagan element mavjud bo'lsa, A ga B ning xos qismi deyiladi.

Masalan. $A=\{a, b, c, d, e\}$ va $B=\{a, b, c, d, e, f, l, 1, 2\}$ bo'lsa, $A \subset B$. Shuningdek $N \subset Z$.

Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamda va aksincha B to'plamning har bir elementi A to'plamda mavjud bo'lsa, u holda bunday to'plamlarga o'zaro teng to'plamlar deyiladi va $A=B$ ko'rinishda belgilanadi.

Demak, $A=B$ bo'lishi $A \subset B$ va $B \subset A$ munosabatlarga teng kuchlidir. To'plamlarning tegishli bo'lishlilik munosabati quyidagi xossalarga ega:

- 1). $A \subset A$ (refleksivlik xossasi);
- 2). $A \subset B$ va $B \subset A$ dan $A=B$ kelib chiqadi (antisimmetriklik xossasi);
- 3). $A \subset B$ va $B \subset C$ dan $A \subset C$ kelib chiqadi (tranzitivliklik xossasi).

Bu xossalar bevosita ta'rifdan kelib chiqadi.

3. Endi berilgan A va B to'plamlardan yangi to'plamlarni hosil qilish amallarni ko'rib chiqamiz.

A va B to'plamlarning barcha elementlaridan tuzilgan C to'plamga A va B to'plamlarning birlashmasi deyiladi va $A \cup B$ ko'rinishda belgilanadi. Demak, $C=A \cup B$. Masalan: $A=\{a, b, c, 1, 2\}$ va $B=\{b, d, 2\}$ bo'lsa, $A \cup B = \{a, b, c, d, 1, 2\}$ bo'ladi. Bunda A va B to'plamlarning ikkalasida ham mavjud bo'lgan elementlar birlashmada bir marta olinadi.

A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tuzilgan C to'plamga A va B to'plamlarning kesishmasi deyiladi va $A \cap B$ ko'rinishda belgilanadi. Demak, $C=A \cap B$. Masalan yuqorida berilgan to'plamlar uchun $A \cap B=\{b, 2\}$.

A to'plamdan B to'plamning ayirmasi deb A ning B ga kirmagan elementlaridan tuzilgan to'plamga aytiladi va $A \setminus B$ ko'rinishda belgilanadi. Yuqoridagi olgan misolimizda $A \setminus B=\{1, a, c\}$ va $B \setminus A=\{d\}$. Bundan $A \setminus B \neq B \setminus A$ ekanligi kelib chiqadi.

To'plamlarning ayirmasi bilan birga ularning simmetrik ayirmasi deb ataluvchi $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ bilan aniqlanuvchi to'plam ham qaraladi.

A va B to'plamlarning elementlaridan tuzilgan barcha mumkin bo'lgan (a, b) ko'rinishdagi juftliklar to'plamiga A va B to'plamlarning to'g'ri (Dekart) ko'paytmasi deyiladi va $A \times B$ ko'rinishda belgilanadi. (a, b) juftlikda $a \in A$ va $b \in B$. Demak, $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$. Masalan: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ bo'lsa, $A \times B = \{(1, a); (1, b); (2, a); (2, b); (3, a); (3, b)\}$ bo'ladi.

4. To'plamlar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega:

- 1). $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ - idempotentlik;
- 2). $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ — kommutativlik;
- 3). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ - *assotsiativlik*;
- 4). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — *distributivlik*;
- 5). Agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda $A \cup B = B$ va $A \cap B = A$ bo'ladi.

Biz faqat 4) ning birinchisini isbotlash bilan chegaralanamiz.

a). $x \in A \cup (B \cap C)$ bo'lsin, u holda $x \in A$ yoki $x \in B \cap C$. Faraz etaylik $x \in A$ bo'lsin. U holda $x \in A \cup B$ va $x \in A \cup C$. Demak, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Endi $x \in B \cap C$ bo'lsin. U holda $x \in B$ va $x \in C$. Demak, $x \in A \cup B$ va $x \in A \cup C$. Shuning uchun ham $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Shunday qilib,

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (1)$$

6). $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ bo'lsa, u holda $x \in A \cup B$ va $x \in A \cup C$. Bundan $x \in A$ yoki $x \in B$ va $x \in C$. Agar $x \in A$ bo'lsa, u holda $x \in A \cup (B \cap C)$ bo'ladi. Agarda $x \in B$ va $x \in C$ bo'lsa, $x \in B \cap C$ bo'ladi va shuning uchun ham $x \in A \cup (B \cap C)$. Demak,

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C). \quad (2)$$

(1) va (2) dan isbotlanishi talab etilgan tenglik kelib chiqadi.

5. To'plamlar nazariyasida bo'sh to'plam va universal to'plam deb ataluvchi to'plamlar muhim ahamiyatga ega. Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plamga bo'sh to'plam deyiladi va $\emptyset$ ko'rinishda belgilanadi.

Masalan: 1). Auditoriyadagi daraxtlar to'plami; 2). $X/1=0$ tenglamaning natural sonlardagi echimlari to'plami; 3) O'zbekiston xududidagi okeanlar (ummonlar) to'plami va boshqalar bo'sh to'plamga misol bo'ladi.

Qaralagan birorta to'plamning ham qism to'plami deb qaralmaydigan to'plamga universal to'plam deyiladi va U harfi bilan belgilanadi.

Ixtiyoriy A to'plam uchun $A \subset U$ bo'lgani sababli $A \cup U = U$, $A \cap U = A$, shuningdek $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ bo'ladi.

$U \setminus A$ to'plamga A ning to'ldiruvchisi (ya'ni to'ldiruvchi to'plami) deyiladi va A' bilan belgilanadi.

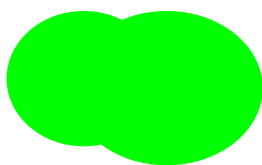
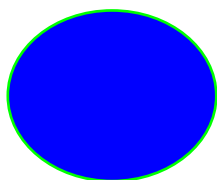
Shuningdek, $A \subset B$ bo'lsa, $B \setminus A$ to'plamga A ni B gacha to'ldiruvchi to'plam deyiladi va $C_A B = B \setminus A$ ko'rinishda belgilanadi. Osonlik bilan ko'rish mumkinki, $A \cup A' = U$, $A \cap A' = \emptyset$, $(A')' = A$ va agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda $B' \subset A'$ bo'ladi.

$(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ - to'plamlar uchun de Morgan qonunlari o'rinli.

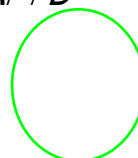
6. To'plamlar va ular ustida amallarni diagrammalar yordamida ifodalash qulay. Buning uchun A to'plam biror doira ichidagi elementlardan tuzilgan deb qaraymiz. U holda ko'rib o'tilgan amallar quyidagicha tasvirlanadi:

a) $A \cup B$

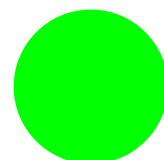
$A \setminus B$

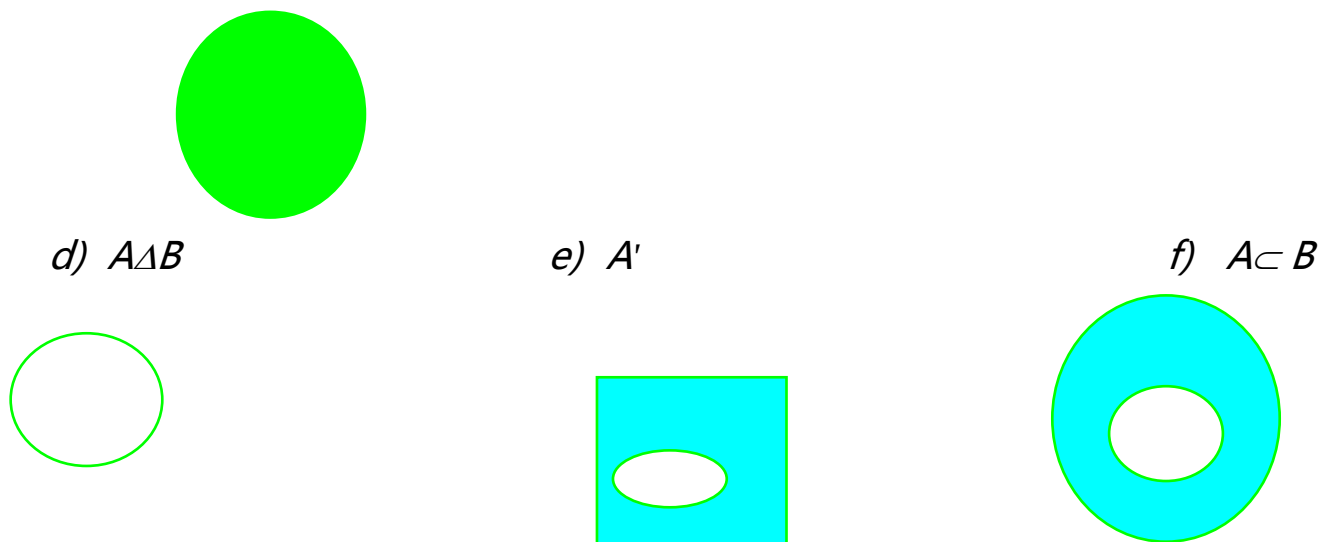


b) $A \cap B$



c)





Mavzuni mustahkamlash uchun savollar.

1. To'plamning xarakteristik xossasi deganda nimani tushunasiz?
2. Qism to'plam deb qanday to'plamlarga aytiladi?
3. Chekli va cheksiz to'plamlarga misollar keltiring.
4. To'plamlarning birlashmasi va kesishmasi deb nimaga aytiladi?
5. Berilgan A to'plamdan V to'plamning ayirmasi deb nimaga aytiladi?
6. To'plamlarning Dekart (to'g'ri) ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
7. Bo'sh va universal to'plamga ta'rif bering.
8. To'ldiruvchi to'plam deb qanday to'plamga aytiladi?
9. $A = \{1, 2, 3, a, b\}$ va $B = \{2, b, d\}$ bo'lsa, u holda $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$ va $A \times B$ larni toping.
10. To'plamlar ustida amallarni Eyler Venn doiralari yordamida ifodalang.

2-3-MA'RUZA

MAVZU: AKSLANTIRISHLAR VA ULARNING XOSSALARI

REJA:

1. Akslantirishlar ta'rifi va misollar.
2. Syurektiv, inektiv va beyektiv akslantirishlar.
3. Akslantirishlar kompozitsiyasi.
4. Teskarlanuvchi akslantirishlar.

Adabiyotlar (1,2)

Faraz etaylik bizda A va B bo'sh bo'lmagan to'plam berilgan bo'lsin.

1-ta'rif: Agar bir f qoidaga muvofiq A to'plamning har bir $x \in A$ elementiga B to'plamning biror y elementi mos qo'yilgan bo'lsa, bu f qoidaga aks ettirish deyiladi va $f:A \rightarrow B$ yoki $y = f(x)$ ko'rinishida belgilanadi.

Bunda $f(x) \in B$ ga $x \in A$ elementining obrazi (aksi), x ga esa $y = f(x)$ B elementining probrazi (asli) deb ataladi. A to'plam f aks ettirishning aniqlanish sohasi, B to'plam esa qiymatlar to'plami deyiladi.

$f:A \rightarrow B$ akslantirishda $\forall x \in A$ yagona $f(x) \in B$ obrazga ega, lekin B ning istalgan elementi har doim ham asliga ega bo'laverishi asliga ega bo'lganda ham u yagona bo'lishi shart emas.

Misollar: A – odamlar to'plami, B – musbat ratsional sonlar to'plami bo'lsin. $f:A \rightarrow B$ akslantirish har bir odamga uning santimetrlarda hisoblangan bo'yini mos qo'ysin. U holda $f:A \rightarrow B$ odamlar to'plamini ratsional sonlar to'plamiga akslantiradi. Har bir odamga yagona uzunlik mos keladi, lekin 1500 sm mos keluvchi odam mavjud emas, shuningdek 175 sm ga mos keluvchi odamlar yagona emas.

2. $f:x \rightarrow x^2$ akslantirish barcha haqiqiy sonlar to'plami R ni haqiqiy sonlar to'plami R^+ ga akslantiradi. $f:A \rightarrow B$ akslantirishga A ning obrazini $f(A)$ bilan belgilaymiz. U holda $f(A) \subseteq B$ bo'ladi.

Agarda $f:A \rightarrow B$ aks ettirish uchun $\exists b_0 \in B$ element mavjud bo'lib $\forall x \in A, f(x) = b_0$ tenglik o'rinli bo'lsa, f ga (o'zgarmas akslantirish) funktsiya deyiladi.

2-ta'rif. Agar $f:A \rightarrow B$ va $g:A \rightarrow B$ aks ettirishlar berilgan bo'lib $\forall x \in A$ uchun $f(x) = g(x)$ o'rinli bo'lsa bu aks ettirishlarni teng deyiladi va $f = g$ ko'rinishda belgilanadi.

Berilgan A to'plamni B to'plamga akslantiruvchi barcha akslantirishlar to'plamini A orqali belgilaymiz. $A_1 \subset A$ bo'lsin. U holda $x \in A_1$ $f_1(x) = f(x)$ tenglik bilan aniqlangan $f_1:A_1 \rightarrow B$ aks ettirishga f ning torayishi f esa f_1 ning kengayishi (davomi) deyiladi.

Masalan: R dagi $f(x) = \sqrt{|x|}$ ($f:x \rightarrow \sqrt{|x|}$) akslantirish R^+ dagi $f(x) = \sqrt{x}$ ($f:x \rightarrow \sqrt{x}$) ning davomidir.

3-ta'rif. Agar $f:A \rightarrow B$ aks ettirishga har bir $y \in B$ element A to'plamda kamida bitta aslga ega bo'lsa bunday aks ettirish (s'yurektsiya) s'yurektiv aks ettirish deyiladi.

4-ta'rif. Agar $f:A \rightarrow B$ aks ettirishda har bir $y \in B$ bittadan ortiq aslga ega bo'lsa (ya'ni $f(x_1) = f(x_2)$ dan $x_1 = x_2$ kelib chiqsa) bunday aks ettirish (in'ektsiya) in'ektiv aks ettirish deyiladi.

5-ta'rif. Biz vaqtida ham s'yurektiv va ham in'ektiv bo'lgan $f:A \rightarrow B$ akslantirish biektsiya (o'zaro bir qiymatli akslantirish) deyiladi.

Misollar: 1) $f:R \rightarrow R$ $f(x) = x^2$ aks ettirish s'yurektiv ham, inyuektiv ham emas. Chunki manfiy sonlar birorta ham aslga ega emas.

2) $f_1:R \rightarrow R^+$ ni qarasak s'yurektiv bo'ladi ($f_1(x) = x^2$)

3) $f_2:R^+ \rightarrow R$ ($f_2(x) = x^2$) in'ektiv bo'ladi.

4) $f_3:R^+ \rightarrow R^+$ ($f_3(x) = x^2$) ni qarasak biektiv akslantirish bo'ladi.

Ixtiyoriy 2 ta $f:A \rightarrow B$ va $g:B \rightarrow C$ aks ettirishlar berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. Har bir $x \in A$ uchun $p(x) = g(f(x))$ tenglik bilan aniqlanuvchi $p:A \rightarrow C$ aks ettirishga f va g aks ettirishlarning kompozitsiyasi (superpozitsiyasi) (ko'paytmasi) deyiladi va $p = g \cdot f$ bilan belgilanadi.

Agarda $A = B = C$ bo'lsa, $gf : A \rightarrow A$ bilan birga $fg : A \rightarrow A$ kompozitsiyani ham qarash mumkin. Bunda umuman aytganda $gf \neq fg$ bo'ladi.

Masalan: $f : R \rightarrow R, f : x \rightarrow x^2$ ($f(x) = x^2$);

$g : R \rightarrow R, g : x \rightarrow x+1$ ($g(x) = x+1$)

bo'lsa, u holda $g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$ va $f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$ bo'ladi. Demak $gf \neq fg$.

1-teorema. Har qanday $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$ aks ettirishlar uchun $h(gf) = (hg)f$ tenglik o'rinli.

Isboti. Haqiqatdan ham $h(gf)(x) = h(gf(x)) = h(g(f(x)))$ va $(hg)f(x) = h(g(f(x)))$. Bu tengliklarning chap tomonlari tengligi ularning o'ng tomonlarining tengligidan kelib chiqadi. Bu teorema aks ettirishning assosativlik xossasini isbotlaydi.

$\forall x \in A$ uchun $e(x) = x$ tenglik bilan aniqlangan $\square$ aks ettirishga A to'plamning ayni akslantirishi deyiladi. (yoki birlik aks ettirish ham deb yuritiladi).

Tushunarliki, har qanday A to'plam uchun $e_A : A \rightarrow A$ aks ettirish biektsiyadir. Shuningdek agar $f : A \rightarrow B$ bo'lsa, $f e_A = e_A f = f$ bo'ladi.

7-ta'rif. Agar $f : A \rightarrow B$ aks ettirish uchun $\exists g : B \rightarrow A$ aks ettirish mavjud bo'lsaki $gf = e_A$ va $fg = e_B$ tengliklar o'rinli bo'lsa. Bunday f aksettirish teskarilanuvchi g ga esa f ning teskarisi deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki bu holda g ham teskarilanuvchi va f ga g ning teskarisi deyiladi.

2-teorema. Agar f aks ettirishning teskarisi mavjud bo'lsa u yagonadir.

Isboti. Faraz etaylik $g : B \rightarrow A, h : B \rightarrow A$ lar $f : A \rightarrow B$ ga teskari bo'lsin, ya'ni $gf = e_A, hf = e_A, fg = e_B, fh = e_B$. U holda $h(fg) = h \cdot e_B = h$ va $h(fg) = (hf) \cdot g = e_A \cdot g = g$ lardan $h = g$ kelib chiqadi.

Bundan keyin f ga teskari aks ettirishni f^{-1} bilan belgilaymiz.

3-teorema. Aks ettirishning teskarilanuvchi bo'lishi uchun uning biyektsiya bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. $f: A \rightarrow B$ teskarilanuvchi $g: B \rightarrow A$, uning teskarisi bo'lsin, u holda $fg = e_B$, $gf = e_A$ va $\forall y \in B$ uchun $f(g(y)) = (fg)y = e_B y = y$. Bundan $g(y) \in A$ element y elementning asli ekanligi kelib chiqadi. Demak f syurektsiya endi agar biror $x_1, x_2 \in A$ elementlar uchun $f(x_1) = f(x_2)$ bo'lsa, u holda $x_1 = e_A(x_1) = gf(x_1) = gf(x_2) = (gf)x_2 = e_A x_2 = x_2$ bo'ladi, ya'ni f in'ektsiya, shunday qilib f bieksiya ekan.

Etarli ekanligi. Faraz etaylik $f: A \rightarrow B$ bieksiya bo'lsin. U holda har bir $y \in B$ uchun yagona asl mavjud. Bundan $g(y) \in A$ element y ning asli ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $g: B \rightarrow A$ aks ettirish $f: A \rightarrow B$ ga teskari.

Misollar: 1) Agar $a \in R$ va $a \neq 0$ bo'lsa, u holda $y: R \rightarrow R$ $f(x) = ax$ funktsiya bieksiya. Uning teskarisi $g: R \rightarrow R$, $g(y) = \frac{y}{a} \left(= \frac{f(x)}{a} = \frac{ax}{a} = x \right)$ dan iborat.

2). Ixtiyoriy $b \in R$ uchun $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x + b$ funktsiya ham bieksiya. Uning teskarisi $g: R \rightarrow R$, $g(y) = y - b$.

3) Agar $a, b \in R$ va $a \neq 0$ bo'lsa, u holda $f: R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$ funktsiya bieksiya va uning teskarisi $g: R \rightarrow R$, $g(y) = \frac{y-b}{a}$.

4-teorema. Agar $f: A \rightarrow B$ va $g: B \rightarrow C$ bieksiyalar bo'lsa, ularning kompozitsiyasi $gf: A \rightarrow C$ ham bieksiya bo'ladi va $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

Isboti. f va g lar bieksiya bo'lgani uchun $f^{-1}: B \rightarrow A$ va $g^{-1}: C \rightarrow B$ lar mavjud va demak $f^{-1}g^{-1}: C \rightarrow A$ kompozitsiyasi ham mavjud.

Kompozitsiyaning assosativligiga asosan

$$(gf)(f^{-1}g^{-1}) = g(f \cdot f^{-1})g^{-1} = (ge)g^{-1} = g \cdot g^{-1} = e \text{ va}$$

$$(f^{-1}g^{-1})(gf) = f^{-1}(g^{-1} \cdot g)f = f^{-1} \cdot (ef) = f^{-1} \cdot f = e$$

Bundan gf teskarilanuvchi va $(gf)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}$ yuqorida isbotlangan 3-teoremaga asosan gf bieksiya.

8-ta'rif. $f : A \rightarrow A$ bieksiyaga A to'plamning o'zgarishi (almashtirishi) deyiladi. A to'plamning barcha o'zgartirishini G_A bilan belgilaymiz.

9-ta'rif. G_A to'plamning H qism to'plami quyidagi shartlarni qanoatlantirsa unga o'zgartirishlar guruhi deyiladi.

$$g_1) \forall f, g \in H \text{ uchun } fg \in H \text{ va } gf \in H;$$

$$g_2) A \text{ to'plamning birlik o'zgartiruvchisi } e_A \text{ ham } H \text{ ga tegishli.}$$

$$g_3) \forall f \in H \text{ uchun } f^{-1} \in H.$$

3 va 4 teoremlardan G_A to'plamning o'zi ham o'zgartirishlar guruhini hosil qilish kelib chiqadi.

Misollar. 1) R to'plamdagi $f(x) = ax (a \in R, a \neq 0)$ ko'rinishdagi barcha funktsiyalar to'plami H o'zgartirishlar guruhini hosil qiladi.

Haqiqatan ham:

$$a) f_a(x) = ax, f_b(x) = bx \text{ bo'lsa } (f_a f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(bx) = abx, (f_b f_a)(x) = bax = abx, f_a \cdot f_b \in H \text{ va } f_b \cdot f_a \in H;$$

$$b) e_R(x) = f_1 \cdot x = x, f_1 = e_R \in H$$

$$c) f_a^{-1}(x) = a^{-1}x, \text{ demak } f_a^{-1} \in H$$

2). R to'plamdagi $g_a(x) = x + a (a \in R)$ ko'rinishdagi barcha funktsiyalardan iborat to'plam P ham o'zgartirishlar guruhini hosil qiladi.

$$a) g_a(x) = x + a, g_b(x) = x + b \text{ bo'lsa,}$$

$$(g_a g_b)(x) = g_a(g_b(x)) = g_a(x + b) = x + a + b \text{ va}$$

$$g_b g_a(x) = g_b(g_a(x)) = g_b(x + a) = x + a + b, \text{ ya'ni } g_a g_b \in P \text{ va } g_b g_a \in P \text{ va}$$

$$g_a g_b = g_b g_a = g_{a+b} \in P. \quad \text{B) } e_R = g_o \in P; \quad \text{c) } g_a^{-1}(x) = x - a, \text{ demak } g_a^{-1} = g_{-a} \in P.$$

Shunday qilib P o'zgartirishlar guruhi bo'ladi.

4-MA'RUZA

MAVZU: BINAR MUNOSABATLAR VA ULARNING XOSSALARI

REJA:

1. Ta'rifi va misollar.
2. Xossalari.
3. Ekvivalentlik munosabati va unga misollar.
4. Invariantlar aks ettirishlar.

Adabiyotlar [1,2,3]

Ixtiyoriy A to'plam berilgan bo'lsin. $A^2 = A \times A$ to'plamning ixtiyoriy P qism to'plami A to'plamdagi binor munosabat deyiladi. Agar $(x, y) \in P$ bo'lsa x va y elementlar P binar munosabatda deyiladi va xPy kabi yoziladi.

Demak binar munosabatlar bu ikki ob'ekt orasidagi munosabatdir. Binor munosabatlar bilan birga unar, binar va umuman n -nar munosabatlar ham qo'yiladi. Unar munosabat bu bitta ob'ektning xossasini ifodalaydi, ternar munosabat bu uchta ob'ekt orasidagi n -nar munosabat esa n ta ob'ekt orasidagi munosabatdir.

Misollar 1) haqiqiy sonlar to'plamidagi x va y sonlarning tengligi munosabati binor munosabat bo'ladi. Bu munosabat $R^2 = R \times R$ tekislikdagi $y = x$ to'g'ri chiziq nuqtalari bilan berilgan.

2) R to'plamdagi $x \neq y$ munosabat binar bo'lib u $R^2 = R \times R$ tekislikdagi $y = x$ to'g'ri chiziqdan tashqarisidagi nuktalar bilan beriladi.

3) R da y sonning x sonidan katta ekanligi ($y > x$ eku $x < y$) R^2 da $y = x$ to'g'ri chiziqdan yuqorida yotgan nuqtalar to'plami bajariladi. (rost).

4) To'plamlarning tenglik $A = B$, teng emaslik $A \neq B$, qism to'plam bo'lishlik $A \subseteq B$ munosabatlari ham binar munosabatga mos bo'ladi.

5) Tekislikdagi to'g'ri chiziqlarning parallelizm $e_1 \parallel e_2$ va perpendikulyarlik munosabati $e_1 \perp e_2$.

6) Biz tenglamalar sistemasining ikkinchi sistemasining natijasi bo'lishlik munosabati $\square$ va biz tenglamalar sistemasining ikkinchisiga teng kuchli (ekvivalent) bo'lish munosabatlari ham binar munosabatga mos bo'ladi.

Xossalari:

1⁰. Agar $\forall a \in A$ uchun aRa rost bo'lsa bundan R munosabatga A to'plamdagi reflektiv munosabat deyiladi.

Agarda aRa munosabat o'rinli bo'lmagan $a \in A$ mavjud bo'lsa, ya'ni A dagi ba'zi $a \in A$ uchun aRa o'rinli, ba'zilar uchun o'rinli bo'lmasa R ga reflektiv bo'lmagan munosabat deyiladi.

2⁰. Agar aRb munosabatning o'rinli ekanligidan bRa ning ham o'rinli ekanligi kelib chiqsa R binar munosabatga simmetrik munosabat deyiladi. aRb o'rinli bo'lgan a, b lar uchun bRa o'rinli bo'lmasa R antisimmetrik munosabat deyiladi. (ya'ni aRb va $bRa \Rightarrow a = b$ kelib chiqsa).

Agarda aRb va bRa munosabatlar hattoki $a = b$ bo'lganda ham bajarilmasa bunday munosabatga a' simmetrik munosabat deb ataladi.

3⁰. Agarda A to'plamdagi $a, b, c \in A$ elementlar uchun aRb va bRc larning rost ekanligidan aRc ning rost ekanligi kelib chiqsa bunday R munosabatga A to'plamdagi tranzitiv munosabat deyiladi.

A to'plamdagi reflektiv, simmetrik va tranzitiv munosabatga shu to'plamdagi ekvivalentlik munosabati deyiladi va $a \approx b$ ko'rinishda belgilanadi.

Misollar. 1. (haqiqiy son) haqiqiy sonlar to'plamidagi " $=$ " тенглик munosabati.

2. To'plamlarning tengligi munosabati.

3. Tenglamalar sistemasidagi teng kuchlilik munosabati.

4. Funktsiyalarning tengligi munosabati.

5. A to'plamda H o'zgartirishlar guruxi berilgan bo'lsin. Agar A to'plamning $a, b \in A$ elementlari uchun $h(a) = b$ tengliklarni qanoatlantiruvchi $h \in H$ biektiv akslantirish mavjud bo'lsa bu a va b elementlarni H ekvivalent deyiladi va $a \stackrel{H}{\approx} b$ ko'rinishda belgilanadi. Bu H ekvivalentlik munosabati ham ekvivalentlik munosabati bo'ladi.

Chunki $\forall a \in A$ va $e_A \in H$ uchun $e_A(a) = a$ ya'ni $a \stackrel{H}{\approx} a$ ($e_A \in H$) (refleksiv).

Agarda $a \stackrel{H}{\approx} b$ bo'lsa $b \stackrel{H}{\approx} a$ bo'ladi, chunki $h \in H$, $h(a) = b$ biektiysi bo'lgani

uchun h ning teskarisi $h^{-1} \in H$ ham mavjud va $a = h^{-1}(b)$ bo'ladi. (simmetriklik) shuningdek agar $a \stackrel{H}{\approx} b$ va $b \stackrel{H}{\approx} c$ bo'lsa, u holda $a \stackrel{H}{\approx} c$ bajariladi $h(a) = b$, $g(b) = c$ dan $g(h(a)) = c \rightarrow (g \cdot h)(a) = c$ yoki $g(h) = \varphi$ deb belgilab olsak $\varphi(a) = c$ bajariladi. Demak H ekvivalentlik munosabat bo'ladi. A to'plam biror usul bilan sinflarga bo'lingan bo'lsin: $B = \{A_t, t \in T\}$, $A = \bigcup_{t \in T} A_t$, $t \in T$ bu bo'linma yordamida A to'plamda ekvivalentlik munosabatini ko'rsatamiz. Agar $x, y \in A$ elementlar $\square$ bo'linmadagi bir sinfga tegishli bo'lsa, ularni B bo'linmaga nisbatan ekvivalent deymiz va $x \approx y$ shaklda yozamiz. Bu ekvivalentlik refleksiv, simmetriklik va tranzitivlik shartlarini qanoatlantiradi. Ixtiyoriy A to'plamda har qanday ekvivalentlik munosabatini shunday hosil qilishimiz mumkinligini ko'rsatamiz. A to'plamda biror " $\approx$ " ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin $\forall x \in A$ uchun x da ekvivalent bo'lgan barcha $y \in A$ elementlar to'plamini $\bar{x}$ bilan belgilaymiz. Endi $\forall y \in A/\bar{x}$ olib $y \approx b \in (A/\bar{x})$ elementlarni $\bar{y}$ sinfga ko'rsatamiz. U holda $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$. Endi $z \in A/(\bar{x} \cup \bar{y})$ ni olib shu jarayonni davom ettiramiz. Buning natijasida asli yoki cheksiz sondagi o'zaro kesishmaydigan $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ sinflarga ega bo'lmaymiz va $A = \bar{x} \cup \bar{y} \cup \bar{z} \cup \dots$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib A to'plamni sinflarga bo'lish va ekvivalentlik munosabatlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud.

$A/\approx = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots\}$ to'plamga faktor to'plam deyiladi. A to'plamda biror P ekvivalentlik munosabati berilgan va C esa biror to'plam bo'lsin. $f: A \rightarrow C$ ni qaraymiz. Agar A to'plamning elementlarining biror f xossasi uchun $a \stackrel{P}{\approx} b$, $a, b \in A$ dagi $f(a) = f(b)$ kelib chiqsa bunday aks ettirish P invariant deyiladi.

Xususiyl holda agar A to'plamdagi ekvivalentlik munosabati A to'plamdagi biror H o'zgartirishlar guruhi hosil qilgan H ekvivalentlik bo'lsa H invariant aks ettirish $f: A \rightarrow C$ ga quyidagicha ta'rif beriladi. Agar $\forall h \in H$ va $x \in A$ uchun $f(x) = f(h(x))$ tenglik o'rinli bo'lsa bunday $f: A \rightarrow C$ aks ettirishga H invariant aks ettirish deyiladi. P invariant aks

ettirishning quyidagi xossasi muhimdir. Agar $a_1, a_2 \in A$ lar uchun $f(a_1) \neq f(a_2)$ bo'lsa ular P ekvivalentlik bo'lmaydi. Shunday qilib P invariantlar P ekvivalent sinflarni farq qilish vositasi sifatida muhimdir. Agar P invariantlar tizimi $F = \{f_\tau, \tau \in T\}$ quyidagi shartlarni qanoatlantirsa unga to'la deyiladi: har qanday P ekvivalent bo'lmagan $a_1, a_2 \in A$ elementlar uchun shunday P invariant mavjud bo'lsaki $f \in F$ $f(a_1) \neq f(a_2)$ munosabat bajariladi.

5 - MA'RUZA

Mavzu: EKVIVALENTLIK VA TARTIB MUNOSABATLARI

REJA:

1. Ekvivalentlik munosabati va unga misollar.
2. Ekvivalentlik sinflari faktor-to'plam.
3. Tartib munosabati va unga misollar.
4. Qisman va to'la tartiblangan to'plamlar.

АДАБИЁТЛАР [1,2]

1- ta'rif. A to'plamda aniqlangan R binar munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lsa, u holda bunday munosabatga A to'plamdagi *эквивалентлик муносабати* дейилади.

Ekvivalentlik munosabati $\sim$ yoki $\equiv$ simvollar bilan belgilanadi.

Masalan: 1). Ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan A to'plamda aniqlangan aynan $\equiv$ tenglik munosabati;

2). Tekislikdagi to'g'ri chiziqlar to'plamida aniqlangan parallelizm munosabati;

3). Uchburchaklar to'plamida aniqlangan o'xshashlik munosabati;

4). Fazodagi geometrik figuralarning tengdoshlik munosabati va boshqalar.

Berilgan A to'plamni unda aniqlangan R munosabat bo'yicha ekvivalentlik sinflariga ajratish mumkin. Buning uchun quyidagicha yo'l

tutiladi. A to'plamdagi Ixtiyoriy bir a elementni olib aRx shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in A$ elementlarni birta C_a sinfga kiritamiz. Endi $A \setminus C_a = \emptyset$ bo'lsa, jarayon shu joyda to'xtaydi. Agarda $A \setminus C_a \neq \emptyset$ bo'lsa, $b \in (A \setminus C_a)$ ni olamiz. Tushunarliki bu holda $b \in A$ va $b \notin C_a$. Endi barcha $y \in (A \setminus C_a)$, bRy shartni qanoatlantiruvchi y elementlarni ikkinchi birl C_b sinfga kiritamiz. Agar endi $(A \setminus C_a) \cap C_b \neq \emptyset$ bo'lsa, jarayonni shu joyda to'xtatamiz.

Agarda $(A \setminus C_a) \cap C_b \neq \emptyset$ bo'lsa, $c \in (A \setminus C_a) \cap C_b$ ni olib cRz shartni qanoatlantiruvchi barcha z elementlarni birta C_c sinfga kiritamiz va hokazo davom etamiz. Tushunarliki, agar A chekli bo'lsa, chekli qadamdan keyin chekli sondagi $C_a, C_b, \dots, C_m$ sinflarga, agarda A cheksiz to'plam bo'lsa, chekli yoki cheksiz sondagi $C_a, C_b, \dots$ sinflarga ega bo'lamiz. Bu sinflarga ekvivalentlik sinflari deyiladi.

Sinflarning hosil qilinishiga ko'ra $a \neq b$ bo'lsa, $C_a \cap C_b \neq \emptyset$ bo'lib

$$A \setminus C_a \cup C_b \cup \dots \quad (1)$$

bo'ladi. (1) ga A to'plamning o'zaro kesishmaydigan qism to'plamlar birlashmasiga yoyilmasi deyiladi. Bu holda A to'plamni ekvivalentlik sinflariga bo'laklangan (faktorizatsiyalangan) deb ham yuritiladi.

Masalan: 1). Z - butun sonlar to'plamidagi bo'linish munosabati $(x-y)/m$ ni olaylik (bu yerda $m > 0$). Tushunarliki, bu munosabat butun sonlar to'plamidagi ekvivalentlik munosabati bo'ladi, chunki:

- a) $\forall x \in Z, (x-x)/m$;
- b) $\forall x, y \in Z$ lar $(x-y)/m$ dan $(y-x)/m$ ning bajarilishi kelib chiqadi;
- c) $x, y, z \in Z$ lar uchun $(x-y)/m$ va $(y-z)/m$ larning o'rinli ekanligidan $(x-z)/m$ ning o'rinli ekanligi kelib chiqadi, ya'ni qaralagan munosabat butun sonlar to'plamidagi refleksiv, simmetrik va tranzitiv munosabatdir.

Endi shu munosabat bo'yicha Z ni ekvivalentlik sinflariga ajrataylik.

Agar $x = mq + k$ va $y = mt + k$ bo'lsagina $(x-y)/m$ bo'ladi. Bu erda $k=0,1,2,\dots,m-1$ bo'lgani uchun bu sinflar quyidagicha bo'ladi.

$$\dots, -3m, -2m, -m, 0, m, 2m, 3m, \dots; \{mq\} = C_0$$

$\dots, -3m+1, -2m+1, -m+1, 1, m+1, 2m+1, 3m+1, \dots; \{mq+1\}=C \dots, -3m+2, -2m+2, -m+2, 2, m+2, 2m+2, 3m+2, \dots; \{mq+2\}=C_2$
 $\dots, -2m-1, -m-1, -1, m-1, 2m-1, 3m-1, 4m-1, \dots; \{mq+m-1\}=C_{m-1}$
 Shunday qilib, $Z = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{m-1}$.

C_i ning har bir elementiga shu sinfning chegirmasi deyiladi. (1) dagi ekvivalentlik sinflar to'plami $\{C_a, C_b, C_c, \dots\}$ ga faktor-to'plam deyiladi va AG^R ko'rinishda belgilanadi. Demak, $A/R = \{C_a, C_b, C_c, \dots\}$.

Yuqorida keltirilgan misolimizda faktor-to'plam $Z = \{C_0, C_1, C_2, \dots, C_{m-1}\}$ bo'lib o'nga m moduli bo'yicha chegirmalar sinflari to'plami deyiladi.

Agar m moduli bo'yicha chegirmalar sinflarining har biridan birtadan chegirma olib sistema tuzsak hosil bo'lgan sistemaga m moduli bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasi deyiladi. Masalan, $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$.

Agarda m moduli bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasidan m bilan o'zaro tublarini olib sistema tuzsak hosil bo'lgan sistemaga m moduli bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasi deyiladi. Masalan: $m \cdot 6$ bo'lsa, $\{1, 5\}$.

- 2). N -natural sonlar to'plamini qaralagan sonning tub yoki (murakkab) tub emasligi bo'yicha faktorizatsiyalash mumkin.
- 3). Barcha ko'pburchaklar to'plami M ni ko'pburchak tomonlari soni bo'yicha ekvivalent sinflarga ajratish mumkin.
- 4). To'rtburchaklar to'plamida ekvivalentlik munosabatini tomonlarning parallellik tushunchasi sifatida kiritsak, uchta sinf: paralellogrammlar, trapetsiyalar va hech qanday ikki tomoni parallel bo'lmagan turtburchaklarga ega bo'lamiz.

Matematika va uning tadbirlarida tartib munosabati deb ataluvchi munosabat muhim ahamiyatga ega. Ikki sonni miqdori bo'yicha, odamlarning yoshlari bo'yicha, kitoblarni javonda terilishi bo'yicha taqqoslaganda biz tartib munosabatga duch kelamiz.

2-тариф. A то'пламдagi антисимметрик ва транзитив муносабат шу то'пламдagi tartib munosabati deyiladi.

Tartib munosabati kiritilgan to'plamlarga tartiblangan to'plamlar deyiladi.

Agar A to'plamda aniqlangan ρ tartib munosabati refleksiv bo'lsa, o'nga qat'iy emas tartib munosabati, agar antirefleksiv bo'lsa esa qat'iy tartib munosabati deyiladi.

3-ta'rif. A to'plamda aniqlangan ρ tartib munosabati bog'langan bo'lsa, ya'ni A ning ixtiyoriy x, y elementlari uchun

$x\rho y$ yoki x^*y yoki $y\rho x$ munosabatlardan biri, faqat biri bajarilsa, ρ ga chiziqli tartib munosabati deyiladi.

Chiziqli bo'lmagan tartib munosabati odatda qisman tartiblanganlik munosabati deb yuritiladi.

Misol.1). Sonlar to'plamida aniqlangan kichik emaslik ($\geq$) munosabati qisman tartib munosabati bo'ladi.

2). Natural sonlar to'plamida aniqlangan qoldiqsiz bo'lish munosabati ham qisman tartib munosabati bo'ladi.

3). Butun sonlar to'plamida aniqlangan qoldiqsiz bo'linish munosabati esa tartib munosabati emas, chunki a/b va b/a dan $a=b$ kelib chiqmaydi.

4-таъриф. +исман тартибланган A тыпламнинг a элементи учун $a \leq x$ ($x \leq a$) муносабат A тыпламдаги барча x лар учун бажарилса, a га A тыпламнинг энг кичик элементи (энг катта) дейилади.

+исман тартибланган тыпламлар умуман олганда энг кичик ёки энг катта элементга эга бўлмаслиги мумкин. Тартиб муносабати одатда $\langle$ ор=али белгиланади.

Мисоллар.

1). Ми=дорлари бўйича тартибланган ω =и=ий сонлар тыплами энг катта ва энг кичик элементларга эга эмас.

2). Манфиймас ω =и=ий сонлар тыплами энг кичик элемент 0 га эга, лекин энг катта элементга эга эмас.

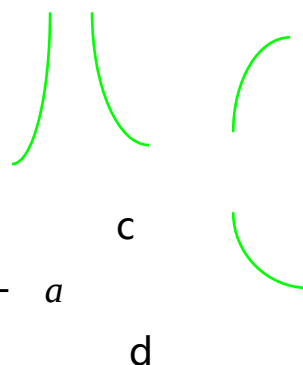
3). Натурал сонлар тыплами былиниш муносабати быйича энг кичик элемент 1 га эга, лекин энг катта элемент мавжуд эмас.

5-таъриф. Агар $=$ исман тартибланган A тыпламнинг a элементи-дан $=$ атый катта ($=$ атый кичик) былган элементлари былмаса, a га A тыпламнинг *максимал (минимал) элементи* дейилади.

$+$ исман тартибланган тыплам бир $=$ анча максимал ёки минимал элементларга эга былиши мумкин. f

Мисоллар.

1). Ушбу графикларда стрелка учидаги элемент “стрелка” бошланишидаги элемент дан “катта” деб олайлик. b, f лар максимал элементлар a, c, d лар эса минимал элементлардир.



2). $A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ тыпламдаги ихтиёрий a ва b лар учун $b \nmid a$ (b элемент a нинг былувчиси) $b < a$ каби ёзилади. Бундай щолда барча туб сонлар минимал элементларни ташкил $=$ илган щолда энг кичик элемент эса мавжуд эмас.

6-таъриф. Агар чизи=ли тартибланган A тыпламнинг ихтиёрий $B =$ исм тыплами доимо энг кичик элементга эга былса, бундай тыпламга *тыла тартибланган тыплам* дейилади.

Масалан. Натурал сонлар тыплами тыла тартибланган тыпламга мисол булади. Шунини щам таъкидлаш керакки, умуман олганда берилган тыпламда тартиб тушунчасини бир неча усуллар билан киритиш мумкин.

Масалан, натурал сонлар тыпламида 1) $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ -табий тартиб; 2) $\{\dots, n, \dots, 2, 1\}$ -тескари тартиб.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ - рационал сонлар тыпламида щам тартиб муносабатини турлича ани=лаш мумкин.

Мавзуни мустацкамлаш учун саволлар .

- 1). A -тыпламдаги рефлексив, антирефлексив, рефлексивмас муносабатларга таъриф беринг.
- 2). Бутун сонлар тыпламидаги бирор рефлексив муносабатга мисол келтиринг.
- 3). Симметрик муносабат (симметрикмас, антисимметрик) деб =андай муносабатга айтилади?
- 4). Транзитив муносабат деб =андай муносабатга айтилади?
- 5). Эквивалентлик муносабати деб =андай муносабатга?
- 6). A тыплам унда ани=ланган R эквивалентлик муносабати быйича =андай =илиб синфларга ажратилади?
- 7). Тартиб муносабати деб =андай муносабатга айтилади?
- 8). Эквивалентлик ва тартиб муносабатларига мисоллар келтиринг.

6,7- МАЪРУЗА

МАВЗУ: НАТУРАЛ СОНЛАР СИСТЕМАСИ. МАТЕМАТИК ИНДУКЦИЯ МЕТОДИ.БИРЛАШМАЛАР. НЬЮТОН БИНОМИ.

РЕЖА:

1. Натурал сондар системасини аксиоматик ани=лаш .
2. Математик индукция принципи.
3. Бирлашмалар. Ыринлаштиришлар, ырин алмаштиришлар, группалашлар.
4. Ньютон биноми формуласи.

Адабиётлар [1, 2] .

Сонли системаларни кыришнинг икки усули конструктив ва аксиоматик усуллари мавжуд. Бу иккала усул ҳам тыплам тушунчасига асосланган бўлиб, дастлаб натурал кейин бутун, рационал, ҳақиқат ва комплекс сонлар системалари ҳасил бўлади.

Конструктив усулнинг мощияти шундан иборатки, янги ҳасил бўлган система аввалдан маълум бўлган тушунчалар ёрдамида баён этилади. Масалан, натурал сонлар системаси учун бошланғич тушунча тыплам ҳисобланса, бутун сонлар системаси учун бошланғич тушунча натурал сонлардир ва ҳақиқат. (Конструктив усулга натурал сонларни ҳеч қандай тыпламларнинг ҳасил бўлиши сифатида киритишни мисол бўлиши мумкин).

Сонлар системасини аксиоматик усулда ҳасил қилишда эса ҳар бир системанинг асосий хоссалари аксиомалар ёрдамида берилди.

Биз ҳақиқатда натурал сонлар системасини аксиоматик усулда аниқлашни ҳасил қилишимиз. Бунинг учун асосий бошланғич муносабат сифатида “*b* элемент *a* элементдан бевосита кейин келади” муносабатни ва шу муносабат ёринли бўлган аксиомалар системасини оламиз.

1-таъриф. Бирор ҳақиқат бўлмаган N тыпламнинг *a* ва *b* элементлари учун “*b* элемент *a* элементдан бевосита кейин келади” муносабати ёринли бўлиб, мазкур тыплам элементлари учун ҳақиқатдаги 4 та аксиома бажарилса, у ҳолда N тыпламнинг элементларига *натурал сонлар* дейилади.

1) ҳеч қандай натурал сондан кейин келмайдиган *1* сони мавжуд. (Агар *a* дан бевосита кейин келадиган элементни *a'* десак, бу аксиомага қара $a' \neq 1$).

2) исталган *a* натурал сонидан бевосита кейин келувчи ягона *a'* натурал сони мавжуд, яъни $\forall a, b \in N$ учун $a = b \leftrightarrow a' = b'$.

3) *1* сонидан бошлаб ҳар бир натурал сон бирта ва фақат бирта натурал сондан кейин келади, яъни агар $a' = b' \leftrightarrow a = b, \forall a, b \in N$.

4) агар натурал сонлар типламининг исталган M =исм типлами :

а) 1 ни ыз ичига олса;

б) ихтиёрий $a \in M$ дан, $a' \in M$ эканлиги келиб чи=са, M =исм типлам N натурал сонлар типлами билан устма уст тушади, яъни $M \subseteq N$ ($1 \in M$) ва $(a \in M \rightarrow a' \in M) \rightarrow M=N$.

Бу аксиомага индукция аксиомаси дейилади. Ю=оридаги аксиомалар системаси дастлаб италян математиги Пеано (1858-1932) томонидан киритилгани учун, уларни *Пеано аксиомалари* дейилади.

Индукция аксиомасининг мощияти =уйидагича: $\forall n \in N$ учун $A(n) \rightarrow B(n)$ теоремани исботлаганда аввал унинг ростлиги $n=1$ да кырсадилади. Сынгра теоремани $n=k$ учун ыринли деб олиб $n=k+1$ былганда теореманинг рост эканлиги исботланади. Шундан кейин теорема исталган n натурал сони учун ты\ри деб щисобланади.

Энди шу усулнинг ты\ри эканлигини исботлаймиз.

Теорема. (Математик индукция принципи). Агар бирор $B(n)$ тасди= $n=1$ учун рост былиб, унинг $n=k$ да ростлигидан $n=k+1$ да рост эканлиги келиб чи=са, у щолда $B(n)$ тасди= исталган n натурал сони учун щам ыринли былади.

Исботи. Фараз этайлик, $M \subset N$ типлам $B(n)$ тасди= ыринли былган типлам былсин. У щолда теорема шартига кыра $1 \in M$ ва $1'=2 \in M, 2'=3 \in M, \dots$. Демак, индукция аксиомасига кыра $M=N$.

Мисоллар.

$$1. \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = (1/6) n(n+1)(2n+1) \quad (1)$$

тенгликнинг барча натурал сонлар учун ыринли эканлигини исботлайлик.

$n=1$ да (1) дан $1^2 = (1/6)1(1+1)(2 \cdot 1 + 1) \rightarrow 1=1$ ни щосил =иламиз, яъни $n=1$ да (1) тенглик ыринли.

Фараз этайлик $n=k$ да берилган тенглик ыринли былсин, яъни

$$1^2+2^2+3^2+ \dots + k^2= (1/6) k(k+1) (2k+1). \quad (2)$$

Биз берилган тенгликнинг $n=k+1$ учун ыринли эканлигини, яъни

$$1^2+2^2+3^2+ \dots + k^2+ (k+1)^2= (1/6) (k+1)(k+2) (2k+3) \quad (3)$$

тенгликнинг ыринли эканлигини кырсатамиз. $\text{Ща}=\text{и}=\text{атан щам}$ (2) га кыра

$$1^2+2^2+3^2+ \dots + k^2+ (k+1)^2=(1/6) k(k+1) (2k+1)+(k+1)^2=(1/6)(k+1) (2 k^2+k+6k+6)=(1/6)(k+1)(2 k^2+7k+6)=(1/6)(k+1)(k+2)(2k+3),$$

яъни (3) тенглик ыринли. Демак, ю=орида исботланган теоремага кыра (1) тенглик ихтиёрий n натурал сони учун ыринли.

2. $1^3+2^3+3^3+ \dots + n^3=(n(n+1)/2)^2$ эканлигини исботланг. (Бу муста=ил бажариш учун уйга вазифа).

Чекли сондаги элементлардан маълум тартибда олиб тузилган гурушларга *бирикмалар* дейилади.

Бирикмалар 3 турга: ыринлаштириш, ырин алмаштириш ва группалашларга былинади.

1. *Ыринлаштиришлар*. m элементдан n тадан ($1 \leq n \leq m$) тузилган ыринлаштиришлар деб бир-биридан камида бирта элементи билан ёки элементларининг жойлашиш тартиби билан фар= илувчи бирикмаларга айтилади. m элементдан n тадан тузилган ыринлаш-тиришлар сонини A_m^n билан белгилаймиз. Бу грекча “Arrangement” (ыринлаштириш) сызининг бош щарфидан олинган.

Мисол. a, b, c учта элементдан 1 тадан тузилган ыринлаштиришлар a, b, c ; уларнинг сони $A_3^1=3$; 3 элементдан 2 та тузилган ыринлаштиришлар: ab, ac, bc, ba, ca, cb ; быларнинг сони $A_3^2=6$. 3 элементдан 3 та тызилган ыринлаштиришлар: $abc, bac, bca, acb, cab, cba$; буларнинг сони щам $A_3^3=6$. Умуман,

$$A_m^n = m(m-1) (m-2) \dots (m-(n-1)) \quad (1)$$

эканлигини кырватиш мумкин.

Ща=и=атдан щам агар $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$ элементлар берилган
 былса, улардан 1 тадан тузилган ыринлаштиришлар $a_1, a_2, \dots, a_{m-1},$
 a_m былиб, уларнинг сони $A_m^1 = m$ га тенг.

m элементдан 2 та тызилган ыринлаштиришларни щосил
=илиш учун m элементдан 1та тызилган ыринлаштиришларни ёзиб
олиб, уларнинг щар бирининг ёнига =олган $m-1$ та элементни
ёзиб чи=иш кифоя:

[illegible]

бунда m та сатр ва $m-1$ та устун бор. Демак, $A_m^2 = m(m-1)$. Энди m элементдан 3 тадан тизилган ыринлаштиришларни щосил =илиш учун m элементдан 2 тадан $m(m-1)$ та ыринлаштиришларни ёзиб олиб уларнинг щар бирининг ёнига =олган $m-2$ та элементларни ёзиб чи=амиз:

[illegible]

Бу ерда $m(m-1)$ та сатр ва $m-2$ та устун бор. Демак, $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$.

Бу жараённи n марта такрорлаб (1) формулани щосил =иламиз.

Мисол. $A_5^3 = 5.4.3=60$

2. Ырин алмаштиришлар. m та элементдан тузилган ырин алмаштиришлар деб щар бирида m та элемент былиб, бир-биридан фа=ат элементларининг жойлашиш тартиби билангина фар= илувчи бирикмаларга айтилади.

m та элементдан тузилган ырин алмаштиришлар сони P_m (permutation) сызининг бош щарфи билан белгиланади.

Таърифга кыра

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = m! \quad (2)$$

Шунингдек $A_m^n = m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1)) = m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1))(m-n)(m-n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 / (m-n)(m-n-1) \dots 2 \cdot 1 = m! / (m-n)! = P_m / P_{m-n}$, яъни

$$A_m^n = P_m / P_{m-n} \quad (3)$$

3.Группалашлар. m элементдан n тадан тузилган группалашлар деб шар бирида n та элемент былиб, бир-биридан камида бирта элементи билан фар= илувчи бирикмаларга айтилади.

m элементдан n тадан тузилган группалашлар сони C_m^n (combination сызининг бош шарфи) билан белгиланади. Таърифдан $C_m^n P_n = A_m^n$. Бундан

$$C_m^n = A_m^n / P_n \quad (4)$$

Демак,

$$C_m^n = m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1)) / n! \quad (5)$$

(3) ва (4) дан

$$C_m^n = P_m / P_{m-n} P_n \quad (6)$$

(6) дан (2) га кыра

$$C_m^n = m! / n! (m-n)! \quad (7)$$

Хоссалари :

$$1^0. \quad C_m^n = C_m^{m-n}.$$

$$\text{Ща=икатдан щам (6)} \quad C_m^{m-n} = P_m / P_{m-n} P_{m-m+n} = P_m / P_{m-n} P_n = C_m^n.$$

$$2^0. \quad C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}.$$

Исботи.

$$C_m^n + C_m^{n+1} = m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1)) / n! + m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1))(m-n) / n!(n+1) = m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1))(m+1) / (n+1)! = C_{m+1}^{n+1}.$$

Биз $C_m^0 = 1$ деб белгилаб оламиз.

Ньютон биноми. Бизга ырта мактаблардан маълумки

$$\begin{aligned} a+b &= a+b \\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{aligned}$$

Энди $(a+b)^n$ ни щам шу тарзда езиш мумкин эканлигини исботлаймиз, яъни ушбу тенглик ыринли:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots + b^n \quad (8)$$

Бу формулани исботлаш учун, аввало $n=1$ даги тенгликнинг ихтиёрий натурал сон n учун ыринли эканлигини кырсатамиз:

$$(a+b_1)$$

$$(a+b_2)(a+b_3) \dots (a+b_n) = a^n + s_1 a^{n-1} + s_2 a^{n-2} + s_3 a^{n-3} + \dots + s_n, \quad (9)$$

бу ерда

$$\begin{aligned} s_1 &= b_1 + b_2 + \dots + b_n \\ s_2 &= b_1 b_2 + b_1 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n \\ s_3 &= b_1 b_2 b_3 + b_1 b_2 b_4 + \dots + b_{n-2} b_{n-1} b_n \\ &\dots \dots \dots \\ s_n &= b_1 b_2 \dots b_n. \end{aligned} \quad (10)$$

(9) -тенглик $n=1$ да ыринли $(a+b_1)^1 = (a+b_1)$. Энди фараз $n=1$ илайлик (9) тенглик $n>1$ учун ыринли былсин. Биз унинг $n+1$ учун щам ыринли эканлигини исботлаймиз. (9) нинг иккала томонини $(a+b_{n+1})$ га кыпайтирамыз. У щолда

$$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3) \dots (a+b_n)(a+b_{n+1}) = a^{n+1} + S_1 a^n + S_2 a^{n-1} + S_3 a^{n-2} + \dots + S_n a + S_{n+1},$$

бу ерда

$$\begin{aligned} S_1 &= s_1 + b_{n+1} = b_1 + b_2 + \dots + b_n + b_{n+1} \\ S_2 &= s_2 + s_1 b_{n+1} = b_1 b_2 + b_1 b_3 + \dots + b_n b_{n+1} \\ S_3 &= s_3 + s_2 b_{n+1} = b_1 b_2 b_3 + b_1 b_2 b_4 + \dots + b_{n-1} b_n b_{n+1} \\ &\dots \dots \dots \\ S_n &= b_1 b_2 \dots b_n + \dots + b_2 b_3 \dots b_1 b_2 \dots b_n \\ S_{n+1} &= b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1}. \end{aligned}$$

Демак (9) формула ихтиёрий n натурал сон учун ыринлидир.

Агар (9) да $b_1 = b_2 = \dots = b_n = b$ деб олсак :

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \dots + C_n^n b^n \quad (11)$$

Бунда (5) формуладан фойдалансак (8) келиб чи=ади .

(11) ни $n=0$ даги $a=b$ га қўйиб кўраймиз :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \dots + C_n^n b^n \quad (12)$$

Маълумки $C_n^p = C_n^{n-p}$ былгани учун Ньютон биноми формуласидаги бошдан ва охиридан бир хил узо=ликда турган щадларнинг коэффицентлари (биномиал коэффицентлар) тенгдир.

Агар (12) да $a=b$ деб олсак :

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n ;$$

агарда $a=1$, $b=-1$ деб олсак: $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + C_n^n(-1)^n$ ёки
 бундан $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^7 + \dots$,
 яъни жуфт ыриндаги биномиал коэффицентлар йи\индисиги то= ыринда турган биномиал коэффицентлар йи\индисига тенг.

Мисоллар:

$(a+b)^0 = 1$	1
$a+b = a+b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1
.....	

Бу ёйилмалардаги биномиал коиффицентларни *Паскал учбурчаги* деб аталувчи ынг томонда келтирилган учбурчак ёрдамида ани=лаш мумкин.

Мавзуни мустацкамлаш учун саволлар.

1. Пеано аксиомаларини айтинг.
2. Математик индукция методининг мощияти ща=ида гапириб беринг.
3. Теоремалар ва уларни исботлаш усуллари ща=ида нималарни биласиз?
4. Бирлашмалар =андай турларга былинади?
5. m элементдан n тадан ($1 \leq n \leq m$) тызилган ыринлаштиришларга таъриф беринг.
6. m элементдан тызилган ырин алмаштиришларга таъриф беринг ва уларнинг сонини щисоблаш формуласини ёзинг.
7. m элементдан m тадан ($1 \leq n \leq m$) тызилган группалашлар деб нимага айтилади?
8. Ньютон биноми формуласини езинг.
9. Биномиал коэффицентлар =андай хоссаларга эга?

10. Паскал учбурчаги ва биномиал коэффициентлар орасида =андай бо\ланиш бор?

8-МАЪРУЗА

МАВЗУ: АЛГЕБРАИК АМАЛ АНИ+ЛАНГАН ТЫПЛАМЛАР ВА АЛГЕБРАЛАР

РЕЖА:

1. Бинар, n -ар алгебраик амаллар. Алгебра тушунчаси.
2. Бинар алгебраик амалларнинг хоссалари .
3. Нейтрал элементлар .
4. Регуляр элементлар .
5. Симметрик элементлар .
6. Алгебраик амалга нисбатан ёпи= тыплам. Мисоллар.
7. Амалларнинг аддитив ва мультипликатив ёзуви.

АДАБИЕТЛАР [1 ,2].

Шозирги замон алгебраси тыплам ва унинг элементлари учун ани=ланган алгебраик амаллар ва уларнинг хоссаларини ырганади. Фараз этайлик бизга быш былмаган A тыплам берилган былсин.

1- таъриф. $A \times A$ ту\ри кыпайтмани A тыпламга мос =ыювчи $\alpha : A \times A \rightarrow A$ акслантиришга A тыпламда ани=ланган *бинар алгебраик амал* дейилади.

Таърифга асосан (a,b) , $(a,b \in A)$ тартибланган жуфтликка $c \in A$ элемент мос келгани шолда (b,a) га c элемент мос келмасдан бош=а бир $d \in A$ элемент шам мос келиши мумкин. α акслантириш ёрдамида $a \times b \in A \times A$ жуфтликка $c \in A$ элементнинг мос =ыйилиши $\alpha(a,b)=c$, $(a,b)\alpha = c$, $a \alpha b=c$ кыринишда белгиланади. Одатда кыпчилик шолларда бинар алгебраик амалларни белгилаш учун махсус $*$, $+$, $\perp$, τ , ... белгилар шам ишлатилади. Мактаб математика курсидан маълум былган арифметик =ышиш ва кыпайтириш амаллари шам бинар алгебраик амалларга мисол была олади.

2-таъриф. Агар $A^n = AXAX \dots XA$ декарт кыпайтманинг шар бир $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ элементига A тыпламнинг ягона a_{n+1} элементи мос =ыйилган былса, A тыпламда *ранги n га тенг былган* (*n ыринли, n -ар*) *алгебраик амал* ани=ланган дейилады.

n -ар алгебраик амални α билан белгиласак $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_{n+1}$. Баъзи шолларда $a_{n+1} \notin A$ былиши мумкин. Бундай шолларда =аралаётган α алгебраик амал A тыпламдаги *=исмий алгебраик амал* деб юритилады.

Алгебраик амаллар ноль, бир, икки, уч,... ыринли былиши мумкин. Улар мос равишда нулар, унар, бинар, тернар,..., n -ар алгебраик амал дейилады.

1). A тыпламнинг исталган элементини алошида олиш - нулар алгебраик амалдир.

2). $P(M)$ - M тыпламнинг барча =исм тыпламлари тыплами былсин. Шар бир $A \in P(M)$ тыпламга унинг тылдирувчиси $A' = M \setminus A$ ни мос =уювчи акслантириш унар алгебраик амалга мисол былады.

3). Натурал сонлар тыпламидаги айириш амали =исмий алгебраик амалга мисол былады.

4). Бутун сонлар тыпламидаги былиш амали щам бутун сонлар тыпламидаги =исмий алгебраик амалдир.

5). n та натурал сонлар $a_1, a_2, \dots, a_n$ га уларнинг энг катта умумий былувчиси d ни мос =уювчи амал n -ар алгебраик амалдир.

Бирта A тыпламда ани=ланган барча алгебраик амаллар $f_1, f_2, \dots, f_s$ былсин.

3-таъриф. Быш былмаган A тыплам ва унда ани=ланган алгебраик амаллар тыплами Ω дан тызилган $\langle A; \Omega \rangle$ жуфтликка *алгебра* дейилады.

Агар Ω даги амаллар сони чекли былса, улар санаб кырситилады, яъни $\langle A; f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$ кыринишда ёзилады. $A = \square \langle A; \Omega \rangle$ былса, A тыпламга **A** алгебранинг *асосий тыплами*, Ω га эса *асосий*

амаллар тыплами дейилади. f алгебраик амалнинг ранги $r(f)$ кыринишда белгиланади. $(r(f_1), r(f_2), \dots, r(f_s))$ га $\langle A; f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$ алгебранинг типи дейилади.

Масалан, $\langle N; +, \cdot \rangle$, $(2, 2, 0)$ типли
 $\langle Z; +, -, \cdot \rangle$, $(2, 2, 2)$ типли
 $\langle P(M); \cup, \cap, ' \rangle$, $(2, 2, 1)$ типли алгебрадир.

Бинар алгебраик амалларнинг хоссалари. Фараз этайлик, $\perp$ ва τ лар A тыпламдаги ихтиёрий бинар алгебраик амаллар былсинлар.

Агарда A тыпламнинг ихтиёрий a, b элементлари коммутатив учун $a \perp b = b \perp a$ тенглик ыринли былса, $\perp$ амални A тыпламдаги **коммутатив алгебраик амал** дейилади.

Агар A тыпламнинг ихтиёрий $a, b, c \in A$ элементлари учун $(a \tau b) \tau c = a \tau (b \tau c)$ тенглик бажарилса, τ алгебраик амалга A тыпламдаги **ассоциатив бинар алгебраик амал** дейилади.

Агар A тыпламнинг ихтиёрий $a, b, c \in A$ элементлари учун $(a \perp b) \tau c = (a \tau c) \perp (b \tau c)$ тенглик ыринли былса, τ алгебраик амал $\perp$ амалга нисбатан **дистрибутив алгебраик амал** дейилади.

Агар $\perp$ амал ассоциатив былса, $(a \perp b) \perp c$ ёки $a \perp (b \perp c)$ ёзувда $=$ авсларни тушириб $=$ олдириш мумкин.

Мисоллар. 1). Сонлар тыпламлари N, Z, Q, R даги арифметик $=$ ышиш ва кыпайтириш амаллари коммутатив ва ассоциативдир. Шунингдек, бу тыпламларда кыпайтириш $=$ ышишга нисбатан дистрибутив щам $c(a+b) = c \cdot a + c \cdot b$, лекин $=$ ышиш кыпайтиришга нисбатан дистрибутив эмас: $(c \cdot a) + b \neq (c+b) \cdot (a+b)$.

2). Z даги айириш амали ва даражага кытариш амаллари коммутатив эмас: $a-b \neq b-a; a^b \neq b^a$.

Бу айириш ва даражага кытариш амаллари ассоциатив щам эмас.

3). $P(M)$ тыпламда аниланган $\cup, \cap$ амаллари коммутатив, ассоциатив ва щар бири иккинчисига нисбатан дистрибутив щамдир.

Нейтрал элементлар. t A типламда ани=ланган бинар алгебраик амал былсин. Агар A типламнинг ихтиёрий $a \in A$ учун A да $a t e = a$ ($e t a = a$) шартни =аноатлантирувчи e элемент мавжуд былса, e га *ынг (чап) нейтрал элемент* дейилади.

Агарда $\forall a \in A$ учун $a t e = e t a$ былса, у шолда e га *нейтрал элемент* дейилади.

1-теорема. Агар t бинар алгебраик амалга нисбатан нейтрал элемент мавжуд былса, у ягонадир.

Ща=икатдан щам агар e ва e' ларни нейтрал элементлар десак: $a t e = e t a = a$ ва $a t e' = e' t a = a$ былиши керак. У шолда $e = e' t e = e'$.

Натижа. Агар t амалга нисбатан нейтрал элемент мавжуд былса, барча ынг ва чап нейтрал элементлар шу нейтрал элемент билан устма-уст тушади.

Мисоллар. 1). Z, Q, R сонлар типламларида =ышишга нисбатан нейтрал элемент 0 сонидир. Бу типламларда кыпайтиришга нисбатан нейтрал элемент 1 сонидир.

N -натурал сон типламида =ышишга нисбатан нейтрал элемент мавжуд эмас, кыпайтиришга нисбатан эса 1 дир.

2). $P(M)$ типламидаги $\cup$ амалга нисбатан нейтрал элемент $\emptyset$ типлам; $\cap$ амалга нисбатан нейтрал элемент эса U - универсал типлам былади.

Регуляр элементлар. Агар $a \in A$ элемент ихтиёрий $b, c \in A$ элементлар учун $a t b = a t c$ ($b t a = c t a$) тенгликлан $b = c$ келиб чи=са, a га t амалга нисбатан A типламдаги *ынг регуляр (чап регуляр) элемент* дейилади.

Агар $a \in A$ элемент t амалга нисбатан чап ва ынг регуляр элемент былса, у шолда ынга *регуляр элемент* дейилади.

Шундай =илиб, агар a регуляр элемент былса $a t b = a t c$ тенгликни a га =ис=артириш мумкин.

Мисоллар: 1). Щар бир бутун сон $\mathbb{Z}$ амалига нисбатан регулярдир.

2). Нолдан фарзли щар бир бутун сон кыпайтиришга нисбатан регуляр. 0 эса регуляр эмас.

3). N типламда даражага кытариш $a^x = a^y \rightarrow x=y$ ($a>1$) хоссага эга былгани учун 1 дан бошла барча элементлар бу амалга нисбатан ынгдан регуляр ва $x^a = y^a$ былгани учун N нинг барча элементлари чапдан регулярдир.

2- теорема. Агар a ва b элементлар ассоциатив бинар $\cdot$ амалга нисбатан регуляр былсалар, уларнинг композицияси $a \cdot b$ щам $\cdot$ амалга нисбатан регуляр былады.

Исботи. a ва b лар регуляр былгани учун $a \cdot c = a \cdot d$ дан $c=d$ ва $b \cdot c = b \cdot d$ дан $c=d$ келиб чикади. Энди фараз этайлик, c ва d элементлар $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot b) \cdot d$ шартни канаатландирсин. У щолда $\cdot$ нинг ассоциативлигидан $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ва $(a \cdot b) \cdot d = a \cdot (b \cdot d)$. Буларнинг чап томонлари тенг былганлиги учун ынг томонлари щам тенг былиши керак:

$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot d) \rightarrow b \cdot c = b \cdot d \rightarrow c=d$. Демак, $a \in A$ элемент элемент ынгдан регуляр экан. Чапдан регулярлиги щам шу усулда кырсатилады.

Симметрик элементлар. Фараз этайлик, $e \in A$ типламдаги нейтрал элементга эга былган бинар алгебраик амал былсин. $a \in A$ элемент учун $a \cdot u = e$ ($u \cdot a = e$) шартларни канаатландирувчи $u \in A$ элементга a элементга нисбатан ынг (чап) симметрик элемент дейилады.

Агарда, $a \cdot a' = a' \cdot a = e$ тенглик ыринли былса, у щолда элемент a элементга симметрик элемент дейилады.

Мисоллар. 1). Z типламда $\mathbb{Z}$ амалига нисбатан a элементга симметрик элемент $-a$ былады.

2). R тыпламда кыпайтириш амалига нисбатан a ($a \neq 0$) элементга симметрик элемент $1/a$ былади. 0 учун эса бу шолда симметрик элемент мавжуд эмас.

3-теорема. Ассоциатив t амалга нисбатан a элементга симметрик элемент мавжуд былса, у ягонадир.

Исботи. Фараз этайлик, u, v лар a га симметрик элементлар былсин. У шолда $atu = ut a = e$ ва $atv = vt a = e$. t амалнинг ассоциатив эканлигидан $u = ute = ut(atv) = (uta)tv = etv = v$.

Натижа. Агар a га t амалга нисбатан симметрик элемент a' мавжуд былса, у шолда a элементнинг барча ынг ва чап симметрик элементлари a' га тенг былади.

4-теорема. Агар a ва b элементлар учун ассоциатив t амалга нисбатан симметрик a' ва b' элементлар мавжуд былса, у шолда atb га симметрик элемент шам мавжуд ва у $b't a'$ дан иборат былади.

Ша=икатан шам, $(atb) t (b't a') = ((atb) t b') t a' = (at(btb')) t a' = (ate) t a' = at a' = e$.

Натижа. Агар a элемент учун ассоциатив t амалга нисбатан симметрик элемент a' мавжуд былса, a элемент t амалга нисбатан регуляри элемент былади.

Ша=икатан шам, $at a' = a't a = e$ былиб, $atb = atc$ былсин. У шолда $a't(atb) = a't(atc)$ ёки $(a'ta)t b = (a'ta)t c$ бундан эса $et b = et c \rightarrow b = c$.

Фараз этайлик, A тыпламда t - бинари амал ани=ланган былсин ва $B \subset A$ былсин.

Агарда $a, b \in B$, $at b \in B$ былса, у шолда B тыпламга t амалга нисбатан ёпи= тыплам дейилади.

4-теоремадан келиб чи=адики, ассоциатив бинари амал t га нисбатан симметрик элементга эга былган барча элементлар тыплами t амалга нисбатан ёпи=дир. $B \subset A$ былса, A да ани=ланган t амал, B да бирор t' бинари алгебраик амални ани=лайди: $at' b = at b$, $\forall a, b \in B$.

Бу шолда t амалга B тыпламда ани=ланган t' амалнинг A даги давоми дейилади.

Агарда t амал у ёки бу маънода арифметик =ышиш (кыпайтириш) амали билан бо\ли= былса, ынга *аддитив* (*мультипликатив*) *алгебраик амал* дейилади ва $+$ ($\cdot$) билан белгиланади. Бу шолда нейтрал элементга ноль 0 (1 бирлик) элемент, симметрик элементга эса $=$ арама= $=$ арши (тескари) элемент дейилади.

Мавзуни мустацкамлаш учун саволлар.

- 1). Алгебраик амал тушунчаси. Мисоллар.
- 2). Коммутатив ва ассоциатив алгебраик амаллар.
- 3). Нейтрал элемент деб =андай элементга айтилади?
- 4). Симметрик элемент деб =андай элементга айтилади?
- 5). Ярим группага таъриф беринг.
- 6). Умумлашган ассоциативлик =онунини тушунтиринг.

9,10- МАЪРУЗА

МАВЗУ: ГРУППАЛАР, +ИСМ ГРУППАЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ.

РЕЖА:

1. +исм группалар. Мисоллар.
2. Группалар ва уларга мисоллар.
3. Группаларнинг содда хоссалари.
4. Умумлашган ассоциатив =онуни .
5. Гомоморф ва изоморф группалар.

АДАБИЁТЛАР [1,2,3]

Фараз этайлик, бизга битта бинар t ва унар $*$ алгебраик амал ани=ланган G быш былмаган тыплам берилган былсин. Агарда G тыпламнинг элементлари унда ани=ланган t амалга нисбатан ассоциативлик =онунига быйсинса, яъни:

1). $\forall a, b, c \in G \rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ тенгликни =аноатлантиса, $\langle G; \cdot \rangle$ алгебрага $\cdot$ амалга нисбатан *ярим группа* дейилади.

Агар $\langle G; \cdot, * \rangle$ - ярим группа

2). $\forall a \in G, \exists e \in G, a \cdot e = e \cdot a = a$;

3). $\forall a \in G, \exists a^* \in G, a \cdot a^* = a^* \cdot a = e$;

шартларни =аноатлантиса, $\langle G; \cdot, * \rangle$ га $\cdot$ амалга нисбатан *группа* дейилади.

e га $G = \langle G; \cdot, * \rangle$ группанинг *нейтрал элементи*, a^* га эса a элементга *симметрик элемент* дейилади.

Агарда $G = \langle G; \cdot, * \rangle$ группанинг элементлари

4). $\forall a, b \in G \rightarrow a \cdot b = b \cdot a$ шартни =аноатлантиса, G га *коммутатив группа ёки Абел группаси* дейилади.

Нейтрал элементга эга былган ярим группага *моноид* дейилади.

Агар $M \subset G$ былиб $\langle M; \cdot, * \rangle$ группа былса, бу группага $G = \langle G; \cdot, * \rangle$ группанинг *=исм группаси* дейилади.

1-теорема. Агар $G = \langle G; \cdot, * \rangle$ группа былса, унинг ихтиёрий =исм тыплами M нинг $\cdot$ амалга нисбатан =исм группа былиши учун:

1). $\forall h, h' \in M, h \cdot h' \in M$;

2). $\forall h \in M, h^{-1} \in M$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Зарурий шарт. $\langle M; \cdot, * \rangle$ группа былсин, у шолда 1) ва 2) шартларнинг бажарилиши группа таърифидан бевосита келиб чи=ади.

Етарли шарти. 1) ва 2) шартлар бажарилсин. У шолда $M \subset G$ =исм тыпланинг G нинг =исм группаси былишини кырсатамиз. Шартга кыра $\forall h, h' \in M$ учун $h \cdot h' \in M$, яъни M тыплани $\cdot$ амалга нисбатан ёпи=дир ва $h, h', h'' \in M$ лар учун $h \cdot (h' \cdot h'') = (h \cdot h') \cdot h''$ ыринли, чунки $h, h', h'' \in M \subset G$. 2) ва 1) шартлардан $h \cdot h^{-1} = e \in M$.

Демак, 1), 2), 3) шартлар бажарилади ва $\langle M; t, * \rangle$ - группа, яъни **G** нинг =исм группаси.

Мисоллар . 1. N-натурал сонлар тыплами арифметик =ышиш амалига нисбатан текширайлик. Маълумки, $\forall n, m \in N, m+n \in N$.

1). $\forall m, n, e \in N, m+(n+e)=(m+n)+e$ бажарилади 2). $\forall m, \exists e \in N, m+e=e+m=m, e=0 \notin N$, яъни бу шарт бажарилмайди .

Демак, $N=\langle N; + \rangle$ ярим группа экан .

Энди шу тыпламни кыпайтиришга нисбатан текширайлик. $\forall m, n \in N \rightarrow m \cdot n \in N$.

1). $\forall m, n, e \in N, m \cdot (n \cdot e) = (m \cdot n) \cdot e$ бажарилади.

2). $\forall m \in N, \exists e=1 \in N, m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$ бажарилади .

3). $\forall m \in N, \exists m' \in N, m \cdot m' = m' \cdot m = 1$ былиши керак .

$m' = 1/m \notin N$. Демак, бу шарт бажарилмайди . Шундай =илиб $N = \langle N, \cdot \rangle$ моноид былар экан .

2. Барча бутун сонлар тыплами Z =ышиш амалига нисбатан группа былади .

$Z = \langle Z; + \rangle$ да a га тескари элемент $(-a)$ шамда нейтрал элемент 0 былади .

$Z = \langle Z; + \rangle$ га *бутун сонларнинг аддитив группаси* дейилади.

Энди Z ни кыпайтиришга нисбатан =арасак, $Z = \langle Z; + \rangle$ моноид былади, чунки $a \neq 0$ га (тескари) симметрик элемент $a^{-1} = 1/a \notin Z$.

3. Барча рационал сонлар тыплами Q =ышишга нисбатан аддитив Абел группаси $Q = \langle Q; + \rangle$ былади. Агар $Q_1 = Q \setminus \{0\}$ тыпламни =арасак, $Q_1 = \langle Q_1; \cdot \rangle$ шам мультипликатив группа былади.

4. Ша=и=ий сонлдар тыпламини =арасак, у щолда $R = \langle R; + \rangle$ аддитив Абел группаси ; $R_1 = \langle R_1; \cdot \rangle$ эса мультипликатив Абел группаси былади. Бу ерда $R_1 = R \setminus \{0\}$.

5. $m > 0$ модули быйича чегирмалар синфлари $\{ C_0, C_1, C_2, \dots, C_{m-1} \} = Z / mZ$ тыпламида =ышиш амалини

$$C_i + C_j = \begin{cases} C_{i+j}, & \text{агарда } 0 \leq i+j \leq m-1 \\ C_{i+j-m}, & \text{агарда } i+j \geq m \end{cases}$$

тенглик билан ани=ласак, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; + \rangle$ аддитив Абел группаси
 былади. Бунда нейтрал элемент C_0 ; C_i элементга =арама карши
 элемент C_{m-i} синф былади, чунки $C_i + C_{m-i} = C_m = C_0$.

6. $m=6$ модул бййича чегирмалар синфлари тыплами $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{ C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \}$ дан иборат былади.

+	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_0	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_0
C_2	C_2	C_3	C_4	C_5	C_0	C_1
C_3	C_3	C_4	C_5	C_0	C_1	C_2
C_4	C_4	C_5	C_6	C_1	C_2	C_3
C_5	C_5	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4

га кыра

Бу жадвалдан фойдаланиб группа таърифидаги 1), 2), 3), 4),
 шартларнинг бажарилишини осонлик билан текшириш мумкин.

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}; + \rangle$ -аддитив абель группаси.

7). $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ тыпламда кыпайтириш амалини

$$C_i \cdot C_j = \begin{cases} C_{ij}, & \text{агарда } 0 \leq ij \leq m-1 \text{ булса} \\ C_r, & \text{агарда } ij \geq m \text{ ва } ij = mq + r \text{ булса} \end{cases}$$

тенглик билан ани=ласак. $\langle \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; \cdot \rangle$ -мультипликатив моноид
 былади. Бунда нейтрал элемент C_1 былади, ассоциативлик =онуни
 бажарилади, лекин ихтиёрий C_i учун $C_i \cdot C_j = C_1$ шартни
 =аноатлантирувчи C_j элемент мавжуд эмас.

Масалан, $m=6$ да $C_3 \cdot C_0 = C_0$, $C_3 \cdot C_1 = C_3$, $C_3 \cdot C_2 = C_0$, $C_3 \cdot C_3 = C_3$, $C_3 \cdot C_4 = C_0$,
 $C_3 \cdot C_5 = C_3$, яъни $C_3 \cdot C_j = C_1$ тенгликни =аноатлантирувчи C_j синф
 мавжуд эмас.

8). $M = \{1, -1\}$ тыпламнинг арифметик кыпайтириш амалига
 нисбатан мультипликатив группа былишлигини исботланг.

9). $a + b\sqrt{3}$ кыринишдаги сонлар тыплами $a, b \in \mathbb{R}$ былганда
 кыпайтириш ва =ышиш амалларига нисбатан группа былиш ёки
 былмаслигини текширинг.

ГРУППАНИНГ ХОССАЛАРИ

1°. Ихтиёрий группада нейтрал элемент бир =ийматли ани=ланади ва группанинг исталган элементи учун ягона тескари (симметрик) элемент мавжуд былади. Биз бу хоссани илгари умумий шолда исботлаган эдик .

2°. Щар =андай мультипликатив группада былиш муносабати ыринли, яъни исталган a ва b элементлар учун шундай x, y элементлар топиладики, $ax=b, ya=b$ тенгламалар ягона ечимга эга .

Исботи. $ax=b$ тенгламани чап томондан a^{-1} га кыпайтирсак, $a^{-1}(ax) = a^{-1}b$ ёки $(a^{-1}a)x = a^{-1}b \rightarrow ex = a^{-1}b \rightarrow x = a^{-1}b$ га эга буламыз. $x = a^{-1}b$ билан бирга c щам $ax=b$ тенгламанинг ечими былса , у шолда $c=e \cdot c = (a^{-1} \cdot a)c = a^{-1}(ac)$; бу ерда $ac=b$ былгани учун $c = a^{-1}b$, яъни $c=x$.

3°. Исталган группанинг элементлари регуляр элементлардир .
Ща=и=атан щам $a \cdot b = a \cdot c \rightarrow b=c$ ва $b \cdot a = c \cdot a \rightarrow b=c$ келиб чи=ади. Группанинг элементларига симметрик a' элемент мавжут | былгани учун $a' \cdot (a \cdot b) = a' \cdot (a \cdot c) \rightarrow (a' \cdot a) \cdot b = (a' \cdot a) \cdot c \rightarrow e \cdot b = e \cdot c \rightarrow b=c$. Кейинги тенглик щам шунинг сингари исботланади .

4°. $\langle G, \cdot \rangle$ -группанинг ихтиёрий n та элементи шу группада ани=ланган алгебраик амал $\cdot$ га нисбатан ассоциативдир .

Исботи. Исботни ёзувда соддалик учун кыпайтириш амалига нисбатан олиб борамиз.

1) $n=1,2$ да исботнинг шожати йы= ;

$n=3$ да эса группа таърифидаги 1)-шартда берилган .

Фараз этайлик , $n=k$ да теорема ыринли былсин, яъни n та кыпайтувчининг кыпайтмаси =авсларни =ыйиш тартибига бо\ли= былмасин. У шолда

$a_1 a_2 \dots a_k = \prod_{i=1}^k a_i$ деб ёза оламиз . Бу тенгликнинг иккала томонини

a_{k+1} га кыпайтирсак,

$$(a_1 a_2 \dots a_k) \cdot a_{k+1} = \left(\prod_{i=1}^k a_i \right) \cdot a_{k+1} = \prod_{i=1}^l a_i \prod_{i=l+1}^k a_i \cdot a_{k+1}.$$

Энди $\prod_{i=1}^l a_i$ ва $\prod_{i=l+1}^k a_i$ лардаги кыпайтувчилар сони k дан кичик шунинг учун бу кыпайтувчилар учун хосса ыринли .

Энди $\prod_{i=1}^l a_i, \prod_{i=l+1}^k a_i, a_{k+1}$ щадлар учун (уларни 3та элемент деб)

ассоциативлик = онунини = ылласак $\prod_{i=1}^l a_i \prod_{i=l+1}^k a_i \cdot a_{k+1}$ ифодага ва демак $(a_1 a_2 \dots a_k) \cdot a_{k+1}$ ифодада щам унинг = иймати = авсларни = ышиш тартибига бо\ли= эмас деган хулосага келамиз .

5°. $a_1, a_2, \dots, a_k \in G$ элементларининг кыпайтмасига тескари былган элемент $a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$ былади .(Текширинг). $a.a\dots a = a^n$ деб белгилаймиз , $a^0 = e$.

6°. Агар $a \in G$ былса , у щолда $a^n \in G, n \in \mathbb{N}$ былади .

ГРУППАЛАРНИНГ ГОМОМОРФЛИГИ

Фараз этайлик , $G = \langle G; \cdot, ^{-1} \rangle$ ва $H = \langle H; *, ^{-1} \rangle$ -мультипликатив группалар берилган былсин. Агар G ни H га акслантирувчи h акслантириш асосий амалларни са=ласа , яъни

- 1) $\forall a, b \in G$ учун $h(a \cdot b) = h(a) * h(b)$,
- 2) $\forall a \in G, h(a^{-1}) = (h(a))^{-1}$

шартлар бажарилса, h га *гомоморф акслантириш* , G ва H группаларга эса *гомоморф* (ыхшаш) *группалар* дейилады. Агар $h: G \rightarrow H$ гомоморф акслантириш былиб G ни H га (устига) ытказса h га *эпиморф акслантириш* дейилады .

Агар $h: G \rightarrow H$ акслантириш ызаро бир =ийматли акслантириш былиб, асосий амалларни са=ласа бундай акслантиришга *изоморф акслантириш* дейилады (хоссалари бир хил). Бу щолда G ва H группаларга *изоморф группалар* дейилады ва $G \cong H$ кыринишда ёзилады.

G ни G га (устига) акслантирувчи изоморф h акслантиришга автоморфизм дейилади.

1-теорема . Агар $h: G \rightarrow H$ акслантириш G даги бинар амал $\cdot$ ни са=ласа, яъни $\forall a, b \in G, h(a \cdot b) = h(a) * h(b)$ тенглик ыринли былса, у шолда h G группанинг бирлик e элементи H группанинг бирлик элементига ытказади ва $h: G \rightarrow H$ гомоморф акслантириш былади.

Исботи . Фараз этайлик , $e \in G$ нинг бир элементи былсин ва у h акслантиришда $e' \in H$ элементга утсин , яъни $e' = h(e) \in H$. e' нинг H учун бирлик элемент эканлигини кырсатамиз . 1) га асосан $h(e \cdot e) = h(e) * h(e) = e' * e'$, иккинчи томондан $e' = h(e) = h(e \cdot e)$. Демак, $e' * e' = e'$, яъни $e' \in H$ бирлик элемент. h нинг гомоморф акслантириш эканлигини кырсатиш учун 2) шартни =аноатлантиришни кырсатиш етарли.

Фараз этайлик , $\forall a \in G$ былсин. У шолда G группа былгани учун $\exists a^{-1} \in G$ ва $a \cdot a^{-1} = e \in G$. (1) га асосан бундан $h(a \cdot a^{-1}) = h(a) * h(a^{-1}) = h(e) = e' \in H$. Демак, $\forall a \in G, h(a^{-1}) = (h(a))^{-1}$, яъни $h(a)$ га тескари элемент.

Группалар тыпламидаги изоморфлик муносабати эквивалентлик муносабатидир (текшириб кыринг).

Мисоллар. 1. Q^* -барча нолдан фар=ли рационал сонлар тыплами ва $Q^* = \langle Q^*; \cdot, ^{-1} \rangle$ эса рационал сонларнинг мультипликатив группаси былсин. $Q^+ = \langle Q^+; \cdot, ^{-1} \rangle$ -мусбат рационал сонларнинг мультипликатив группаси былсин. У шолда $h(a) = a/$, $h: Q^* \rightarrow Q^+$ (яъни $h: a \rightarrow a/$) гомоморф акслантириш былади.

1-шарт. $h(a \cdot b) = h(a) \cdot h(b)$, чунки $a \cdot b = a \cdot b/$

2-шарт. $h(a^{-1}) = (h(a))^{-1}$, $a^{-1} = a^{-1}/$ лар абсолют =ийматнинг хоссаларига асосан бажарилади.

2. $R^+ = \langle R^+; \cdot, ^{-1} \rangle$ -мусбат ща=и=ий сонларнинг мультипликатив группаси, $R = \langle R; +, - \rangle$ эса ща=и=ий сонларнинг аддитив группаси былсин, у шолда $f(x) = \log x$ функциянинг ёрдамидаги акслантириш $f: R^+ \rightarrow R$ изоморф акслантириш былади, чунки $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$, $\log x^{-1} = -\log x$.

3. $g(x) = 2^x$ функция ёрдамида акслантириш (яъни $f(x) = \log_2 x$ функцияга тескари функция билан) $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ шам изоморф акслантириш былади, чунки $2^{x+y} = 2^x 2^y$, $2^{-x} = (2^x)^{-1}$.

Мавзуни мустацкамлаш учун саволлар

- 1). Группа деб нимага айтилади ?
- 2). Чекли группанинг тартиби деганда нимани тушунаси ?
- 3). Аддитив ва мультипликатив группага таъриф беринг .
- 4). $+$ исм группа деганда нимани тушунаси ?
- 5). Группанинг нормал булувчиси деб нимага айтилади ?
- 6). Лагранж теоремасини айтинг .
- 7). Фактор группага таъриф беринг .
- 8). Гомоморф группалар деб =андай группаларга айтилади ?
- 9). Изоморф группалар деб =андай группаларга айтилади ?

11-МАЪРУЗА

МАВЗУ: ЧИЗИ+ЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ ВА ТЫ/РИ

БУРЧАКЛИ МАТРИЦАЛАР

РЕЖА:

1. Чизи=ли тенгламалар системалари ща=идаги умумий маълумотлар .
2. Эквивалент чизи=ли тенгламалар системалари.
3. Чизи=ли тенгламалар системасидаги элементар алмаштиришлар .
4. Ту\ри бурчакли матрицалар .

АДАБИЁТЛАР [1,2,3].

Ушбу системага

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \text{.....} \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{array} \quad (1)$$

n та номаълумли *m* та чизи=ли тенгламалардан тузилган система дейилади.

Бунда a_{ij} лар коэффициентлар (сонлар), $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумлар, $b_1, b_2, \dots, b_m$ лар озод шадлар дейилади. a_{ij} коэффициентда биринчи индекс *i* тенгламанинг номерини, иккинчи индекс *j* эса номаълумнинг номерини билдиради. Агар (1)да $b_1, b_2, \dots, b_m$ лардан бирортаси нолдан фар=ли былса, (1) га бир жинсли былмаган тенгламалар системаси, агар $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ былса, (1) га бир жинсли чизи=ли тенгламалар системаси дейилади. (1) ни =ис=ача

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i=1,2,3, \dots, m. \quad (2)$$

кыринишда щам ёзиш мумкин.

n та ща=и=ий сондан тузилган тартибланган *n*-лик $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ га *n*- ылчовли арифметик вектор дейилали.

(2) нинг *ечими* деганда унинг щар бир тенгламасини ты\ри тенгликка айлантйрувчи $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонларга айтилади.

(1) -системани вектор тушунчасидан фойдаланиб =уйидагича ёзиш мумкин. (1)

нинг номаълумлар олдидаги коэффициентлардан тузилган вектор устунларини

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

деб белгилаб олсак, (1) дан

$$A^{(1)} x_1 + A^{(2)} x_2 + \dots + A^{(n)} x_n = b \quad (3)$$

ни щосил =иламиз. (Маълумки векторни сонга кыпайтириш учун унинг барча координаталари шу сонга кыпайтирилади).

Агар (1) система ечимга эга былса, бундай системага *биргаликдаги система*, ечимга эга былмаса *биргаликда былмаган*

система дейилади. Агар (1) система фа=ат битта ечимга эга былса, ынга *ани= система*, чексиз кып ечимга эга былса, (1) га *ани=мас система* дейилади. (Тушунарлики, (1) система ечимга эга былса ,у ягона ечимга эга ёки чексиз кып ечимга эга былади). М: а) $3x_1-2x_2+5x_3=6$ система ечимга $2x_1+x_2-3x_3=1$ эга эмас; $5x_1-x_2+2x_3=2$

$$\begin{aligned} б) \quad & 3x_1-2x_2+5x_3=6 && \text{система ягона ечим } (1, 1, 1) \\ & 2x_1-x_2+3x_3=4 && \text{га эга ;} \\ & x_1+x_2+x_3=2 \end{aligned}$$

$$в) \quad x_1-x_2-x_3=2$$

$$2x_1+5x_2+x_3=4 \quad \text{система чексиз кып ечимга эга .}$$

Тушунарлики бир жинсли чизи=ли тенгламалар системаси доимо $(0,0,...,0)$ ечимга эга. Бу ечим унинг тривиаль ечими дейилади ва унинг нолдан фар=ли ечимларга эга былиш шартлари текширилади. (2) система билан бирга

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n = d_i, \quad i=1,2,3, \dots, m. \quad (4)$$

система щам берилган былсин. Агар (2)-системанинг щар бир ечими (4)-система ечими былса , (4)-система (2) -системанинг *натижаси* дейилади.

Агар (2) нинг ечимлари тыпламини A , (4) нинг ечимлари тыпламини эса B деб белгиласак, $A \subseteq B$ былади.

Агар (4)-система (2)-системанинг натижаси, (2)- система эса (4)-системанинг натижаси былса, у щолда (2) ва (4) системаларга *ызаро эквивалентлик* системалар дейилади.

Ушбу алмаштиришларга (1)-чизи=ли тенгламалар системасидаги *элементар алмаштиришлар* дейилади.

1). (1) системадаги бирор (масалан, k -тенгламани) тенгламанинг икки то-монини $\alpha \neq 0$ сонига кыпайтириш;

2). Системадаги ихтиёрий 2 та тенгламанинг ыринларини алмаштириш;

3). Системанинг 2та тенгламасини мос равишда $\alpha \neq 0$ ва $\beta \neq 0$ сонларига кыпайтириб натижаларини =ышиш;

4). Барча коэффициентлари ва озод щади ноллардан иборат (агар шундай тенгламалар мавжуд былса) тенгламаларни ташлаб юбориш.

Теорема. Элементлар алмаштиришлар натижасида щосил былган система дастлабки системага тенг кучли системадир.

Исботи. Ща=икатдан щам, агар =аралаетган система (1) системадан 2) ва 4) элементар алмаштиришлар натижасида щосил =илинган былса, уларнинг эк-вивалент эканлиги таърифдан бевосита келиб чи=ади.

Фараз этайлик, (1) системанинг бирорта тенгламаси, масалан, i -тенгламаси $\alpha \neq 0$ сонига кыпайтирилиб, янги система щосил =илинган былсин. Бу системадаги i -тенгламадан бош=а тенгламалар (1)-системадаги тенгламалар билан бир хил, шунинг учун щам (1)нинг ихтиёрий $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ечимини олиб, унинг янги системадаги i -тенглама $\alpha a_{i1}x_1 + \alpha a_{i2}x_2 + \dots + \alpha a_{in}x_n = \alpha b_i$ ни =аноатлантиришини кырсатиш кифоя. Ща=икатдан щам $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (1) нинг ечими былгани учун $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$ дан $\alpha a_{i1}\alpha_1 + \alpha a_{i2}\alpha_2 + \dots + \alpha a_{in}\alpha_n = \alpha(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n) = \alpha b_i$ келиб чи=ади.

Энди агарда янги системадаги i -тенглама (1)даги i -тенглама $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ ни α га j -тенгламани эса β га кыпайтириб натижани щадлаб =ышиш натижасида щосил =илинган былса, у щолда ю=ридаги сингари мулоццаза юритиб $\alpha(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n) + \beta(a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \dots + a_{jn}\alpha_n) = \alpha b_i + \beta b_j$, $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$ ва $a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \dots + a_{jn}\alpha_n = b_j$ ларга асосан $(\alpha a_{i1} + \beta a_{j1})\alpha_1 + (\alpha a_{i2} + \beta a_{j2})\alpha_2 + \dots + (\alpha a_{in} + \beta a_{jn})\alpha_n = \alpha b_i + \beta b_j$ тенгликка эга быламиз. Шундай =илиб теорема тыла исботланди.

Мисоллар: 1.
$$\begin{cases} 5x + 4y = 2 \\ x - 4y = 4 \end{cases} \quad (1) \quad \text{ва} \quad x + 4y = -2 \quad (2)$$

(1) ечими $(1; -3/4)$; (2) бу чексиз кып ечимга эга.

Демак, (2) система (1) системанинг натижаси.

$$2. \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

системаларнинг иккаласи ҳам аниқмас системалар бўлиб уларнинг ечимлари тып-ламли уст-уст тушади. (1) системадаги 1-тенгламадан 2-тенгламани айирсак, (2)-системадаги 3-тенглама; =ышсак, 2-тенглама ҳосил бўлади. (1)-системадаги 2-тенгламани 2га кўпайтириб 1-тенгламага =ышсак, (2)-системанинг 1-тенгламаси ҳосил бўлади.

Ушбу (1)-системанинг номунолулари коэффициентларидан тuzилган

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

жадвалга (1) системанинг матрицаси дейилади.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

жадвалга эса (1)-системанинг кенгайтирилган матрица дейилади.

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ элементлар жойлашган диагоналга *бош диагональ* дейилади.

$a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots$ элементлар жойлашган диагональга эса *иккинчи диагональ* дейилади. Агар $m = n$ бўлса, A га n -тартибли *квадрат матрица* дейилади. матрицага *бирлик матрица* дейилади.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицадаги элементар алмаштиришлар деб =уйидагиларга айтилади.

1). Иккита сатрининг (устунининг) ўрнини алмаштиришга;

- 2). Бирор сатридаги (устунидаги) барча элементларни нолдан фар=ли сонга кыпайтиришга;
- 3). Бирор сатри (устуни) даги барча элементларни нолдан фар=ли сонга кыпайтириб, иккинчи бир сатр (устун) элементларига =ышишга.

МАВЗУНИ МУСТАЦКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

- а). n та номалумли m та чизи=ли тенгламалардан тузилган системани ёзинг.
- б). +андай чизи=ли тенгламалар системасига биргаликдаги система дейилади?
- в). Ани= ва ани=мас, зиддиятли системалар деб =андай системаларга айтилади?
- г). Матрица деганда нимани тушунасиш?
- е). Эквивалент (тенг кучли) чизи=ли тенгламалар системалари деб =андай системаларга айтилади?
- ж). Чизи=ли тенгламалар системасидаги элементар алмаштиришлар деб нимага айтилади?
- з). Бир жинсли чизи=ли тенгламалар системаси деб =андай системага айтилади?

12-МАЪРУЗА

МАВЗУ: n -ЫЛЧОВЛИ АРИФМЕТИК ФАЗО . ЧИЗИ+ЛИ БО/ЛАНГАН ВА ЧИЗИ+ЛИ БО/ЛАНМАГАН ВЕКТОРЛАР СИСТЕМАЛАРИ.

РЕЖА:

1. n -ылчовли арифметик фазонинг таърифи;
2. n -ылчовли арифметик фазонинг хоссалари;
3. Чизи=ли бо\ланган ва чизи=ли бо\ланмаган векторлар системалари;

4. Чизи=ли бо\ланмаган векторлар системаларининг хоссалари;
АДАБИЁТЛАР [1,2,3].

1. n та тартибланган ща=и=ий сонлар $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ дан тузилган $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ n -ликка n -ылчовли вектор деб айтилади ва $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ларни векторнинг *координаталари* дейилади.

Барча мумкин былган n -ылчовли векторлар тыплами R^n билан белгилаймиз. R^n даги $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ва $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ элементларнинг тенглиги, йи\индисини ва R дан олинган λ сонига кыпайтмасини =уйидагича ани=лаймиз:

1). $(a=b) \Leftrightarrow (\alpha_1=\beta_1, \alpha_2=\beta_2, \dots, \alpha_n=\beta_n)$;

2). $a+b = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \dots, \alpha_n+\beta_n)$;

3). $\lambda a = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n)$. Тушунарлики, у щолда $\forall a, b \in R^n$ учун $a+b \in R^n$ щамда $\forall \lambda \in R, a \in R^n$ учун $\lambda a \in R^n$ бажарилади. λ сонига кыпайтириш амали R^n даги унар алгебраик амал былиб, уни биз езувда =улайлик учун ω_λ билан белгилаймиз. $(0, 0, \dots, 0)$ вектор *нол вектор* дейилади ва 0 билан белгиланади.

2) га асосан $a+0=0+a=a$ былгани учун 0 вектор =ышиш амалига нисбатан нейтрал элемент былади .

(- 1) $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ векторга $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ га =арама- карши вектор дейилади . $a+(-1)a=0$ былгани учун $(-1)a=-a$ билан белгиланади .

1- таъриф. R^n Тыпламга унда ани=ланган =ышиш ва сонга кыпайтириш амалига нисбатан (яъни $\langle R^n ; +, \omega_\lambda \rangle$ алгебрага) n -ылчовли векторларнинг арифметик фазоси (ёки =ис=ача n -ылчовли арифметик фазо) дейилади. Биз уни R^n билан белгилаймиз.

Векторларни =ышиш ва λ сонга кыпайтириш амалларига арифметик фазо-нинг *асосий амаллари* дейилади.

2. $R^n = \langle R^n ; +, \omega_\lambda \rangle$ фазонинг асосий амаллари =уйидаги хоссаларга эга:

1°. $\langle R^n ; + , \omega_\lambda \rangle$ - алгебра аддитив Абель группаси .

2°. Сонга кыпайтириш амали ассоциатив: яъни

$$\forall \alpha, \beta \in R, \forall a \in R^n \rightarrow (\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a).$$

3°. Сонга кыпайтириш =ышиш амалига нисбатан дистрибутив :

$$\forall \alpha \in R, \forall a, b \in R^n \rightarrow \alpha \cdot (a+b) = \alpha a + \alpha b .$$

4°. Векторга кыпайтириш сонларни =ышишга нисбатан

дистрибутив, яъни $\forall \alpha, \beta \in R, \forall a \in R^n \rightarrow (\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a .$

5°. $\forall a \in R^n \rightarrow 1 \cdot a = a$. хоссаларнинг ыринли эканлигига бевосита текшириб кыриш йили билан ишонч щосил =илиш мумкин. Уни биз талабаларга щавола =иламиз.

$\langle R^n ; + , - \rangle$ -группага ***R^n -арифметик фазонинг аддитив группаси*** дейилади.

3. Бизга $R^n = V$ фазонинг $a_1, a_2, \dots, a_m$ векторлари системаси берилган былсин. $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$, ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in R$) ифодага $a_1, a_2, \dots, a_m$ векторлар системасининг ***чизи=ли комбинацияси*** дейилади. Бу ердаги $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ларга ***чизи=ли комбинациянинг коэффи-циентлари*** дейилади. Агар коэффицентлардан бирортаси нолдан фар=ли былса, тривиал былмаган, акс щолда, яъни барча коэффици-ентлар нолга тенг былса, тривиал чизи=ли комбинация дейилади .

$a_1, a_2, \dots, a_m$ векторларнинг барча мумкин былган чизи=ли комбинацияла-ридан тызилган L Тыплагга шу ***векторларнинг чизи=ли =оби*** и дейилади.

Демак, $L = L(a_1, a_2, \dots, a_m) = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in R \}$.

Осонлик билан кыриш мумкинки, чизи=ли =оби= векторларни =ышиш, айириш ва λ сонига кыпайтириш амалларига нисбатан ёпи=дир.

2- таъриф. Агар щеч былмаганда бирортаси нолдан фар=ли $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ сонлари мавжуд былиб

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0 \tag{1}$$

тенглик бажарилса, у щолда

$$a_1, a_2, \dots, a_m \quad (2)$$

векторлар системаси *чизи=ли бо\ланган* дейилади. Агарда (1) тенглик $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ былгандагина бажарилса, (2) векторлар системасига *чизи=ли бо\ланмаган система* дейилади. *Масалан:* $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ бирлик векторлар системаси *чизи=ли бо\ланмагандир*. *Ща=икатдан* $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ дан $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = 0$ ёки $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ келиб чи=ади.

4. Х о с с а л а р и .

1°. Нол вектор ёки ызаро пропорционал векторлар =атнашган шар =андай векторлар системаси *чизи=ли бо\лангандир*. *Ща=и=атдан* $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$ агар $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ деб олсак, $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$ тенглик ыринли былади. $\lambda_1 = \lambda a_2$ былса ($\lambda \neq 0$), *щам шундай* *исботланади*.

2°. $a_1, a_2, \dots, a_m$ ($a_1 \neq 0$) векторлар системаси *чизи=ли бо\ланган* былиши учун ундаги бирорта векторнинг =олган векторнинг *чизи=ли комбинацияси=дан иборат* былиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Зарурлиги. $a_1, a_2, \dots, a_m$ ($a_1 \neq 0$) система *чизи=ли бо\ланган* былсин. У щолда

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0 \quad (3)$$

тенглик бажарилади ва бунда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ларнинг щеч былмаса бирортаси нолдан фар=ли. Масалан, $\lambda_k \neq 0$ ва k шу шартни =аноатлантирувчи энг катта индекс былсин. Бу ерда $k > 1$, акс щолда, $\lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ деб олсак, $\lambda_1 a_1 = 0$ дан $\lambda_1 = 0$ келиб чи=ади.

(3) ни a_k га нисбатан ечсак: $a_k = (-\lambda_1 / \lambda_k) a_1 + (-\lambda_2 / \lambda_k) a_2 + \dots + (-\lambda_{k-1} / \lambda_k) a_{k-1} + (-\lambda_{k+1} / \lambda_k) a_{k+1} + \dots + (-\lambda_m / \lambda_k) a_m$ ёки $\lambda'_s = (-\lambda_s / \lambda_k)$ деб белгилаб олсак, $a_k = \lambda'_1 a_1 + \lambda'_2 a_2 + \dots + \lambda'_{k-1} a_{k-1}$ га эга буламыз.

Етарли шрти. Фараз этайлик $a_s = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{s-1} a_{s-1} + \lambda_{s+1} a_{s+1} + \dots + \lambda_m a_m$ былсин. У щолда бу тенгликни $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{s-1} a_{s-1} + \lambda_s a_s + \lambda_{s+1} a_{s+1} + \dots + \lambda_m a_m = 0$ кыринишда ёзиш мумкин. Бу ерда $\lambda_s = -1 \neq 0$

был-гани учун $a_1, a_2, \dots, a_m$ векторлар системаси чизи=ли бо\лангандир.

3°. Агар берилган системанинг бирор =исмий системаси чизи=ли бо\ланган былса, шу системанинг ызи щам чизи=ли бо\ланган былади.

Исботи. $a_1, a_2, \dots, a_k$ векторлар системалари чизи=ли бо\ланган былиб $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m$ системанинг =исми былсин. У щолда щеч былмаса бирортаси нолдан фар=ли $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ сонлари мавжуд былиб $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = 0$ былади. Бундан $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k + 0 a_{k+1} + \dots + 0 a_m = 0$ ва $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0$ сонларининг щеч былмаса бирортаси нолдан фар=ли.

Демак, таърифга асосан $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m$ векторлар системаси чизи=ли бо\ланган.

Натижа. Агар берилган векторлар системаси чизи=ли бо\ланмаган был-са, унинг ихтиёрий =исмий системаси щам чизи=ли бо\ланмагандир.

4°. Агар $a_1, a_2, \dots, a_m$ векторлар системаси чизи=ли бо\ланмаган былиб

$$a_1, a_2, \dots, a_m, v \quad (4)$$

система чизи=ли бо\ланган былса, у щолда v вектор

$$a_1, a_2, \dots, a_m \quad (5)$$

системадаги векторлар ор=али ягона усулда чизи=ли ифодаланади.

Исботи. (4) система чизи=ли бо\ланган былганлиги сабабли щеч былмаса бирортаси нолдан фар=ли былган $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda$ сонлари мавжуд былиб

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m + \lambda v = 0 \quad (6)$$

тенглик бажарилади. Бу ерда ерда $\lambda \neq 0$, акс щолда (6)дан $a_1 \lambda_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$ тенглик $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ларнинг бирортаси нолдан фар=ли былганда бажарилиши керак. Бу эса (5) нинг чизи=ли эрки эканлигига зиддир. (6) ни v га нисбатан ечиб

$$v = \lambda'_1 a_1 + \lambda'_2 a_2 + \dots + \lambda'_m a_m \quad (7)$$

Энди ягоналигини исботлайлик. (7) билан бирга $v = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_m a_m$ былса, у шолда $(\lambda'_1 - \mu_1) a_1 + (\lambda'_2 - \mu_2) a_2 + \dots + (\lambda'_m - \mu_m) a_m = 0$ былади. (5) система чизи=ли эркили былгани учун $\lambda'_1 - \mu_1 = 0, \lambda'_2 - \mu_2 = 0, \dots, \lambda'_m - \mu_m = 0$ ёки $\lambda'_1 = \mu_1, \lambda'_2 = \mu_2, \dots, \lambda'_m = \mu_m$ былади.

$$a = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_m b_m \quad . \quad (8)$$
[illegible]

$$a = (\lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{21} + \dots + \lambda_m \alpha_{m1})c_1 + (\lambda_1 \alpha_{12} + \lambda_2 \alpha_{22} + \dots + \lambda_m \alpha_{m2})c_2 + \dots +$$

$$+ (\lambda_1 \alpha_{1s} + \lambda_2 \alpha_{2s} + \dots + \lambda_m \alpha_{ms})c_s \quad \text{ёки} \quad \mu_i = \lambda_1 \alpha_{1i} + \lambda_2 \alpha_{2i} + \dots + \lambda_m \alpha_{mi} \quad \text{деб}$$
 белгилаб олсак $a = \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \dots + \mu_s c_s$ щосил былади, яъни $a \in L(c_1, c_2, \dots, c_s)$.

Исботи. m га нисбатан математик индукция методи билан исботлаймиз. $a_1, a_2, \dots, a_{m+1}$ векторларнинг барчасини нолдан фарзли деб оламиз, акс шолда теорема ыз ызидан тушунарли. $m=1$ да $a_1, a_2 \in L(b_1)$ былиб, бундан $a_1 = \lambda_1 b_1, a_2 = \lambda_2 b_2$ ни, ёки $\lambda_1^{-1} a_1 + (-\lambda_2)^{-1} a_2 = 0$, бу ерда $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Демак, a_1, a_2 векторлар чизишли боланган ва $m=1$ да теорема ыринли.

[illegible]

Агарда бу коэффициентлардан бирортаси, масалан $\alpha_{n+1, n}$ нолдан фар=ли былса, у шолда =олган барча тенгликлардан b_n векторни йу=отамиз:

щосил былади. Индуктивлик фаразимизга кыра $a_1 - \beta_1 a_{n+1}$,

Натижалар. 1). Агар $a_1, a_2, \dots, a_k \in L(b_1, b_2, \dots, b_m)$ былиб, $k > m$ былса $a_1, a_2, \dots, a_k$ векторлар системаси чизи=ли бо\ланган былади.

3). n ылчовли арифметик фазодаги шар = андай $n+1$ та ва
ундан орти= векторлардан тизилган система чизи=ли
бо\лангандир.

53

МАВЗУНИ МУСТАЦКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

- 1). 1 ва 2 ылчовли арифметик фазоларга мисоллар келтиринг .
- 2). n ылчовли арифметик фазо деганда нимани тушунаси?
- 3). 3 ылчовли арифметик фазога мисоллар келтиринг.
- 4). Чизи=ли бо\ланган векторлар системасига таъриф беринг.
- 5). Чизи=ли бо\ланмаган векторлар системасига таъриф беринг.

13 -МАЪРУЗА

МАВЗУ: ВЕКТОРЛАР СИСТЕМАСИНИНГ РАНГИ ВА БАЗИСИ

РЕЖА:

1. Векторларнинг эквивалент системалари .
- 2 . Векторлар системасидаги элемент алмаштиришлар .
3. Чекли сондаги векторлар системасининг базиси .
4. Чекли сондаги векторлар системасининг ранги .

АДАБИЁТЛАР [1, 2, 3,].

n - ылчовли арифметик фазо R^n даги векторлар $S=\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ва $T = \{b_1, b_2, \dots, b_s\}$ системалари берилган былсин .

Агар S системадаги щар бир векторни T системасидаги векторларнинг чизи=ли комбинацияси кыринишида ва аксинча T системадаги щар бир векторни S системалаги векторларнинг чизи=ли комбинацияси кыринишда ифодалаш мумкин былса, S ва T векторлар системаларига *эквивалент векторлар системалари* дейилади ва $S \sim T$ кыринишда ёзилади. $\sim$ муносабат бинар муносабат былиб, рефлексив ($S \sim S$), симметрик ($S \sim T \rightarrow T \sim S$) ва транзитив ($S \sim T$ ва $T \sim L \rightarrow S \sim L$) лик хоссаларига быйсунади, яъни эквивалентлик муноса-бати былади .

Хоссалари. 1°. Иккита системанинг эквивалент былиши учун уларнинг чизи=ли =оби=ларининг тенг былиши зарур ва етарлидир .

Исботи. $S \sim T$ былсин, $L(S) = L(T)$ эканлигини кырсатамиз. $S \sim T \rightarrow \forall a \in S \rightarrow a \in L(T)$, яъни $L(S) \subseteq L(T)$.

Агарда $\forall b \in L(T)$, у шолда $T \sim S$ былгани учун $b \in L(S)$; яъни $L(T) \subseteq L(S)$. Демак, $L(S) = L(T)$.

Агар $L(S) = L(T)$ былса, $S \sim T$ эканлиги таърифдан бевосита келиб чи=ади.

2°. Агар иккита векторларнинг чекли системалари ызаро эквивалент былиб, чизи=ли эркли былса, улар бир хил сондаги векторлардан тузилган былади.

Исботи. Агар иккала векторлар системалари быш былса, теорема ыринли. Фараз этайлик $u_1, u_2, \dots, u_n$ ва $v_1, v_2, \dots, v_s$ лар эквивалент системалар былиб щар бири чизи=ли бо\ланмаган былсин. У шолда илгариги мавзудаги иккинчи натижага кыра $r \leq s$ ва $s \leq r$ былиб, былардан $r = s$ келиб чи=ади.

Чекли векторлар системасидаги элементар алмаштиришлар деб =уйидагиларга айтилади:

- 1). Системадаги бирор векторни $\alpha \neq 0$ сонга кыпайтириш;
- 2). Системадаги бирор векторни $\alpha \neq 0$ га кыпайтириб иккинчи бир векторга =ышиш;
- 3). Системадан нол векторни чи=ариб ташлаш ёки нол векторни =ышиш.

1) ва 2)-элементар алмаштиришларга хосмас, 3) га эса хос алмаштириш дейилади.

1-теорема. Агар чекли сондаги векторларнинг бирор системаси иккинчи бир вектор системасидан элемент алмаштиришлар ёрдамида щосил =илинган былса, бу икки система ызаро эквивалент былади.

Исботи. Фараз этайлик ,

$$a_1, a_2, \dots, a_m \tag{1}$$

векторлар системаси берилган былсин. Агар янги система (1) дан 1) алмаштириш натижасида щосил =илинган былса, у шолда

$$\alpha a_1, a_2, \dots, a_m \quad (2)$$

система щосил былади ва (1) шамда (2) ларнинг эквивалент эканлиги таърифдан бевосита келиб чиқади. Агар янги система

$$a_1 + \alpha a_2, a_2, \dots, a_m \quad (3)$$

кыринишда былса шам (1) ва (3) лар эквивалентдир.

Энди векторли фазолар назариясининг асосий тушунчаларидан бирига таъриф берамиз.

Таъриф. Берилган чекли сондаги векторлар системасининг базиси деб унинг чизиqli бўланмаган ва берилган системага эквивалент быш былмаган исмий системасига айтилади.

Бошача сиз билан айтганда берилган векторлар системасидаги шар бир векторни ифодалаш мумкин былган, чизиqli бўланмаган, быш былмаган исмий системадир.

2-теорема. Агар чекли векторлар системасида шеч былмаса бирорта нолдан фарqli вектор мавжуд былса, бу система базисга эга. Берилган системанинг шар андай иккита базиси бир хил сондаги векторлардан тизилган былади.

Исботи. Фараз этайлик, чекли сондаги шеч былмаса бирортаси нолдан фарqli былган векторлар системаси

$$u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_m \quad (4)$$

берилган былсин. Бу системадаги нол векторларни ташлаб юбориш мумкин, чунки щосил былган система (4) системага эквивалент былади. Шунинг учун шам $u_1 \neq 0$ деб олишимиз мумкин. Агар (4) чизиqli эркли былса унинг ызи базис былади. Агарда (4) система чизиqli бўланган былса, у щолда бу системадаги u_k вектор ызидан олдинги векторларнинг чизиqli комбинациясидан иборат былади, яъни $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_m$ система (4) га эквивалент ва камида бирта нолдан фарqli вектор ынга арашли. Шу жараённи давом эттириб чекли адамдан кейин бирортаси шам

=олганларининг чизи=ли комбинациясидан иборат былмаган системага эга буламиз ва у базис булади.

Агар $u_1, u_2, \dots, u_k$ ва $v_1, v_2, \dots, v_s$ лар берилган системанинг базислари былсалар, улар эквивалент булади ва демак $k=s$.

Таъриф. Берилган векторлар системасининг базисини ташкил этувчи векторлар сонига шу системанинг *ранги* дейилади.

Фа=ат нол вектордан тызилган системанинг ва быш системанинг ранги нолга тенг деб щисобланади.

Хоссалари.

1°. Агар $u_1, u_2, \dots, u_k \in L(v_1, v_2, \dots, v_m)$ былса, $u_1, u_2, \dots, u_k$ векторлар системасининг ранги $v_1, v_2, \dots, v_m$ векторлар системасининг рангидан катта эмас.

Исботи. Агар $u_1, \dots, u_k$ система фа=ат нол векторлардан тызилган былса, унинг ранги нолга тенг ва $v_1, \dots, v_m$ системанинг рангидан катта эмас.

Агарда биринчи $u_1, \dots, u_r$ системада бирорта нолдан фар=ли вектор мав-жуд былса, $v_1, \dots, v_m$ система щам нолдан фар=ли векторга эга булади(теорема-нинг шартига кыра). У щолда иккала система щам базисга эга. $u_1, \dots, u_r$ би-ринчи системанинг базиси; $v_1, \dots, v_s$ эса иккинчи системанинг базиси былсин. У щолда $v_1, \dots, v_s$ система $v_1, \dots, v_m$ га эквивалент ва демак $L(v_1, \dots, v_s) = L(v_1, \dots, v_m)$.

Шундай =илиб $u_1, \dots, u_r \in L(v_1, \dots, v_s)$ ва $r \leq s$.

Натижалар:

1. Берилган системанинг ранги унинг ихтиёрий =исми системанинг рангидан кичик эмас.

2. Эквивалент системанинг ранглари ызаро тенг.

3. n - ылчовли векторли фазодаги Ихтиёрий чекли системанинг ранги $\leq n$.

Шамдан $L(e_1, e_2, \dots, e_n) = R^n$ ва $a_1, \dots, a_m \in L(e_1, e_2, \dots, e_n) = R^n$ былса, 1° га кыра $a_1, \dots, a_m$ нинг ранги $e_1, e_2, \dots, e_n$ нинг ранги n дан катта эмас.

4. Агар чекли системанинг ранги r га тенг былса, унинг Ихтиёрий k та вектордан тызилган $k > r$ исмий системаси $k > r$ былганда, чизи=ли бо\лангандир.

5. Агар

$$a_1, \dots, a_m \quad (5)$$

системанинг ранги

$$a_1, \dots, a_m, b \quad (6)$$

системанинг рангига тенг былсин. У щолда b вектор (5) системадаги векторлар ор=али чизи=ли ифодаланади.

Исботи. Тушунарлики, агар иккала системанинг шам ранги нолга тенг былса, теорема ыринли. Фараз этайлик, (5)-системанинг ранги

$r > 0$ га тенг былсин ва $a_1, a_2, \dots, a_r$ - унинг базиси былсин. У щолда иккинчи системанинг ран-ги шам r га тенг былади ва $a_1, a_2, \dots, a_r$ система (6) нинг r исми былгани учун $a_1, \dots, a_r, b$ чизи=ли бо\ланган, демак, $b \in L(a_1, \dots, a_r)$. У щолда $b \in L(a_1, \dots, a_r, \dots, a_m)$ яъни $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$.

МАВЗУНИ МУСТАЦКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

- 1). Чизи=ли бо\ланмаган максимал система деб =андай системага айтилади?
- 2). Векторлар системасининг базиси ва ранги деб нимага айтилади?
- 3). $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1)$ векторлар системасининг ранги нечага тенг?

14 - 15 - МАЪРУЗА

МАВЗУ: МАТРИЦАЛАР ВА ЧИЗИ+ЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ РАНГИ

РЕЖА :

1. Матрицалар ва улар устида амаллар.
2. Матрицанинг ранги.
3. Чизи=ли тенгламалар системасининг ранги.

АДАБИЁТЛАР [1 , 2 , 3].

Матрица деб элементларни (объектларни) маълум тартибда олиб тизилган жадвалга айтилади. Масалан, ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

жадвалга n та устун ва m та сатрдан тузилган *матрица* дейилади. Бундан кейин матрицаларни лотин алфавитининг бош шарфлари билан белгилаймиз: $A, B, \dots$. Агар сатр ва устунлари сонини кырсатиш зарур былса $A^{m \times n}$ кыринишдаги белгилашдан фойдаланамиз. (1) да $|| \dots ||$ кыринишда белгилашнинг ырнига (...) ёки $[\dots]$ кыринишдаги белгилашлардан щам фойдаланилади. Агарда (1) да $m=n$ былса, унга n - *тартибли квадрат матрица* дейилади. Барча элементлари ноллардан иборат былган матрицага *нол матрица* дейилади.

Бош диагоналида бирлар =олган жойларида эса ноллардан иборат былган квадрат матрицага *бирлик матрица* дейилади . Масалан, ушбу матрица n -тартибли бирлик матрицадир

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Агар бизга $A^{m \times n} = (a_{ij})$ ва $B^{m \times n} = (b_{ij})$ матрицалар берилган бўлса, у шолда уларнинг мос элементлари тенг бўлсагина бундай *матрицаларга тенг* дейилади. Демак, $A^{m \times n} = B^{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$. Энди матрицалар устида бажариладиган амалларни *арабчи* амиз.

1. *ҲАШИШ*. Матрицаларнинг *ҲА*индиси *ҲА*м тенглик сингари бир хил русумли матрицалар учун ани*ҲА*ланган. $A^{m \times n} = (a_{ij})$ ва $B^{m \times n} = (b_{ij})$ матрицаларнинг *ҲА*индиси *ҲА*б $A^{m \times n} + B^{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})$ тенглик билан ани*ҲА*ланувчи матрицага айтилади. Бош*ҲА*ча *ҲА*илиб айтганда матрицаларни *ҲА*шиш учун уларнинг мос элементлари кушилади.

$$\text{Масалан } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ b & d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+0 & 3+2 \\ a+b & b+d & c+e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ a+b & b+d & c+e \end{pmatrix}$$

Тушунарлики $A^{m \times n}$ ва $B^{m \times n}$ матрицаларнинг *ҲА*индиси *ҲА*м *mxn* ылчовли матрица бўлади, яъни $A^{m \times n} + B^{m \times n} = (A+B)^{m \times n}$.

Матрицаларни *ҲА*шиш *ҲА*уйидаги хоссаларга эга:

- 1) $A+B = B+A$ - коммутативлик, 2) $A+(B+C) = (A+B)+C$ - ассоциативлик,
- 3) $A+O = O+A = A$, бу ерда O нол матрица.

2. Матрицани сонга кыпайтириш. Матрицани сонга кыпайтириш учун унинг барча элементлари шу сонга кыпайтирилади, яъни $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

$$\text{Мисол. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} \text{ бўлса, у шолда } 5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 5a_1 & 5a_2 \end{pmatrix} \text{ бўлади.}$$

Хоссалари:

- 1°. $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$ 2°. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
- 3°. $1 \cdot A = A$. 4°. $\lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.

3. Матрицани матрицага кыпайтириш. Матрицаларни кыпайтириш сатрларни устунларга кыпайтириш *ҲА*оидаси быйича амалга оширилади. Унинг маънога эга бўлиши учун биринчи матрицанинг устунлари сони 2-матрицанинг сатрлари сонига тенг бўлиши керак, яъни $A^{m \times n} \cdot B^{n \times k} = C^{m \times k}$. $C^{m \times k}$ матрицанинг c_{ij} элементи A даги i -сатр элементларини B даги j -устун элементларига

матрицада кыпайтириб =ышиш натижасида шосил булади ,
яъни агар

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

болса ,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ij}b_{ij} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,k) \quad (2)$$

булади.

Бош=ача =илиб айтганда $C=(c_{ij})$ матрицанинг элементлари (2)-формула билан ани=ланади.

Хоссалари. 1). $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ - матрицаларнинг кыпайтмасы ассоциатив;

$$2). A \cdot E = E \cdot A = A$$

$$3). A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \text{ - матрицаларнинг кыпайтмасы}$$

=ышишга $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ нисбатан дистрибутивдир.

Бу хоссаларнинг ыринли эканлигини чап ва ынг томондаги ихтиёрий элементларини щисоблаб кыриш йыли билан матрицаларнинг тенглик тушунчасидан фойдаланиб исботлаш мумкин. Уни биз талабаларга муста=ил иш сифатида таклиф =иламиз.

Мисоллар:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ булса } AB = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \\ -2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & -2 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{ва } BA = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 10 \end{pmatrix} \text{ булади.}$$

Бу мисолдан кыринадики, матрицаларни кыпайтириш коммутативлик хоссасига быйсинмайди, яъни $AB \neq BA$.

3). (Муста=ил топшири=). Барча n-тартибли матрицалар тыплагининг аддитив Абел группаси былишини исботланг.

Матрицанинг ранги. А матрицанинг сатрлари m та n ылчовли горизонтал

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, \mathbf{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \quad (3)$$

векторларни, устунлари эса n та m ылчовли вертикал векторларни ташкил қилади. Уларни горизонтал векторлардан фарқиш учун

$$\mathbf{a}^1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), \mathbf{a}^2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, \mathbf{a}^n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \quad (4)$$

қыринишда белгилаймиз.

1-таъриф. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ векторлар системасининг ранги A матрицанинг *сатрлар бййича ранги*, $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n$ векторлар системасининг рангига эса A матрицанинг *устунлар бййича ранги* дейилади.

1-теорема. Элементар алмаштиришлар матрицанинг рангини ызгартирмайди.

Исботи. Элементар алмаштиришларни сатрларга тадбиқ этайлик.

1). Матрицанинг ихтиёрий иккита сатрининг ырнини алмаштириш (3) системадаги иккита векторнинг ырнини алмаштиришга мос келади, шунинг учун ҳам унинг ранги ызгармайди.

2). Матрицанинг бирор сатри (масалан i -сатр) $\alpha \neq 0$ сонига кыпайтирилган былса, у шолда (3) системадаги $\mathbf{a}_i$ -вектор шу α сонига кыпайтирилган былади, яъни

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \alpha \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_m \quad (5)$$

система шосил былади. Фараз этайлик, (3) чизиқли эркли, лекин (5) эса чизиқли боланган былсин. У шолда шеч былмаса бирортаси нолдан фарқиқли $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m$ сонлари мавжуд былиб $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_i (\alpha \mathbf{a}_i) + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = 0$ тенглик бажарилади. $\alpha \neq 0$ деб олишимиз мумкин (акс шолда (3)-система чизиқли боланган былар эди). $\alpha \neq 0$ былганлиги сабабли $\alpha_i \alpha \neq 0$, демак, $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + (\alpha_i \alpha) \mathbf{a}_i + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = 0$

$m=0$, яъни (3)-система чизи=ли бо\ланган, бу =арама-каршилик (5)-системанинг чизи=ли бо\ланмаган эканлигини кырсатади.

3). Матрицанинг j -сатрининг элементлари α га ($\alpha \neq 0$) кыпайтирилиб i -сатрнинг мос элементларига =ышилган былса, у шолда

$$a_1, a_2, \dots, a_i + \alpha a_j, \dots, a_m \quad (6)$$

векторлар системасига эга быламиз. Бизга маълумки, (3) ва (6) векторлар системалари эквивалент, яъни уларнинг ранглари тенг.

2-теорема. Щар бир матрицанинг сатр быйича ранги устун быйича рангига тенг.

Исботи. Биз (3) ва (4) системаларнинг рангларининг тенг эканлигини ис-ботлаймиз. (3) нинг базиси

$$a_1, a_2, \dots, a_r \quad (7)$$

(4) нинг базиси эса

$$a^1, a^2, \dots, a^s \quad (8)$$

былсин. Биз $r=s$ эканлигини исботлаймиз. Фараз этайлик $r < s$ былсин. У шолда (7) системадаги $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}, \dots, a_{in})$, ($i=1, 2, \dots, r$) векторлар-нинг биринчи s та координаталаридан фойдаланиб ушбу s та номаълумли r та тенгламадан тузилган бир жинсли чизи=ли тенгламалар системаси $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{is}x_s = 0$, ($i=1, 2, \dots, r$) ни тузиб оламиз. $r < s$ былгани учун бу $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ нолмас ечимга эга, яъни

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{is}\alpha_s = 0, \quad (i=1, 2, \dots, r). \quad (9)$$

Бу $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ ечим (3) даги =олган векторлар $a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_m$ ларнинг биринчи s та координаталардан тузилган

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{ks}x_s = 0, \quad (k=r+1, r+2, \dots, m)$$

системани щам =аноатлантиради. Ща=и=атан щам, $a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_m$

векторларнинг щар бири (7) системадаги векторлар ор=али (базис ор=али) чизи=ли ифодаланади: $a_k = \mu_{1k}a_1 + \mu_{2k}a_2 + \dots + \mu_{rk}a_r$, ($k=r+1, r+2, \dots, m$).

Бундан $(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) = (\mu_{1k}a_{11} + \mu_{2k}a_{21} + \dots + \mu_{rk}a_{r1}, \dots, \mu_{1k}a_{1n} + \mu_{2k}a_{2n} + \dots + \mu_{rk}a_{rn})$ ёки

$$a_{k1} = \mu_{1k}a_{11} + \mu_{2k}a_{21} + \dots + \mu_{rk}a_{r1},$$

$$\begin{aligned}
 a_{ks} &= \mu_{1k} a_{1s} + \mu_{2k} a_{2s} + \dots + \mu_{rk} a_{rs}, \\
 a_{k,s+1} &= \mu_{1k} a_{1,s+1} + \mu_{2k} a_{2,s+1} + \dots + \mu_{rk} a_{r,s+1}, \quad (k=r+1, r+2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

$$a_{kn} = \mu_{1k} a_{1n} + \mu_{2k} a_{2n} + \dots + \mu_{rk} a_{rn}.$$

Бу тенгликларнинг биринчи s тасини мос равишда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ларга кыпайтириб =ышсак (9) га асосан $a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\alpha_2 + \dots + a_{ks}\alpha_s = \alpha_1(\mu_{1k} a_{11} + \mu_{2k} a_{21} + \dots + \mu_{rk} a_{r1}) + \alpha_2(\mu_{1k} a_{12} + \mu_{2k} a_{22} + \dots + \mu_{rk} a_{r2}) + \dots + \alpha_s(\mu_{1k} a_{1s} + \mu_{2k} a_{2s} + \dots + \mu_{rk} a_{rs}) = \mu_{1k}(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1s}\alpha_s) + \mu_{2k}(a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2s}\alpha_s) + \dots + \mu_{rk}(a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \dots + a_{rs}\alpha_s) = \mu_{1k} \cdot 0 + \mu_{2k} \cdot 0 + \dots + \mu_{rk} \cdot 0 = 0$ ни щосил =иламиз.

Демак,

$$a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\alpha_2 + \dots + a_{ks}\alpha_s = 0 \quad (10)$$

(9) ва (10) дан (8) нинг чизи=ли бо\ланган эканлиги келиб чи=ади.

Ща=и=атан щам $\alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \dots + \alpha_s a^s = \alpha_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) + \alpha_2(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) + \dots + \alpha_s(a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{ms}) = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1s}\alpha_s, a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2s}\alpha_s), \dots, a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{ms}\alpha_s) = (0, 0, \dots, 0)$. Бу эса (8) нинг чизи=ли эркли эканлигига зиддир. Демак, $r < s$ была олмас экан. $r > s$ щол щам худди шундай =аралади. Шунинг учун щам $r = s$.

Чизи=ли тенгламалар системасининг ранги деб унинг матрицасининг рангига айтилади.

Агар нолмас сатрга эга былган матрицадаги k -нолмас сатрдаги биринчи нолдан фар=ли элемент $(k-1)$ -нолмас сатрдаги биринчи нолдан фар=ли элементдан ынг томонда турса бундай матрицага по\онали матрица дейилади. Тушунарлики матрицанинг ранги унинг по\онали кыринишидаги нолдан фар=ли сатрлар сонига тенг.

Мисол. Ушбу матрицанинг рангини щисобланг

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шундай =илиб, берилган матрицанинг ранги $r(A)=3$.

МАВЗУНИ МУСТАЦКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

- 1). Матрицанинг ранги деб нимага айтилади?
- 2). Чизи=ли тенгламалар системасининг ранги деб нимага айтилади ?
- 3). Матрицанинг сатрлар (устунлар) бййича ранги деб нимага айтилади?
- 4). Матрицадаги элементар алмаштиришлар унинг рангига =андай таъсир =илади?

16- МАЪРУЗА

МАВЗУ: ЧИЗИ+ЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ НОМАЪЛУМЛАРИНИ КЕТМА-КЕТ ЙЫ+ОТИШ УСУЛИ (ГАУСС УСУЛИ) БИЛАН ЕЧИШ

РЕЖА:

1. Чизи=ли тенгламалар системасида ягона ечимга эга былган шол.
2. Чизи=ли тенгламалар системаси чексиз кып ечимга эга былган шол.
3. Мисоллар.
4. Бир жинсли ва бир жинсли былмаган чизи=ли тенгламалар системаси ечимлари орасидаги бо\ланиш.

АДАБИЁТЛАР [1 , 2 , 3].

Ушбу $m \times n$ -чизи=ли тенгламалар системаси (ч.т.с.)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

(1)

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

берилган бўлсин. Уни Гаусс усули билан ечиш учун унинг ихтиёрий бир (масалан биринчи) тенгламасини ёзиб оламиз ва x_1 олган тенгламаларнинг барчасидан бирорта номуъалумни (масалан, x_2 ни) y_1 оламиз. У шолда ушбу системага эга бўламиз:

[illegible]

Тушунарлики (2) система (1) га эквивалент. Энди (2) системадаги 1-тенгламани ва =олган тенгламалардан яна бирортасини (масалан 2-тенгламани) ёзиб оламиз, =олган барча тенгламалардан x_2 ни йы=отамиз. Шу жараёни давом эттирамиз. Бунда агар $0=0$ кыринишдаги тенглама щосил былса, уни тушириб =олдирамиз. Агарда, $0=b$ ($b \neq 0$) кыринишдаги тенглик щосил былса, у щолда жараёни тыхтатамиз ва система ечимга эга былмайди. Шу жараёни k марта такрорлагандан кейин =уйидаги икки щолатдан бири юз беради:

- 1).Охирги тенгламада $\phi_a = a t_1$ та номаълум $= a t_{нашиб} = o_{лади}$;
- 2).Охирги тенгламада 1 тадан орти= номаълум $= a t_{нашади}$ ва улардан бирортасини ҳам энди йи=отиш имконияти йи=.

1-шолда охирги тенгламадан x_n ни топиб оламиз ва уни охиргидан олдинги тенгламага =ыйиб x_{n-1} ни топамиз. x_n ва x_{n-1} ларни топилган =ийматларини ундан олдинги тенгламага =ыйиб x_{n-2} ни топамиз ва х.к. $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2$ ларнинг топилган =ийматини системадаги биринчи тенгламага =ыйиб x_1 ни топамиз.

Шундай =илиб, бу щолда берилган система ягона $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2,$
 $\dots, x_n=\alpha_n$ ечимга эга.

Мисол. 1).
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -12 \end{cases}$$
 системани Гаусс усули билан ечинг.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ 7x_2 - 12x_3 = -22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ -8x_3 = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Жавоби: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Иккинчи шолда системанинг охири тенгламасида фақат бирта номуалумни чап томонда (масалан, x_k ни) олдириб бошлануомуалумларни $x_{k+1}, \dots, x_n$ ларни эркин ызгарувчи сифатида абул илиб шосил былган системани 1-шолдаги сингари йил билан ечиб $x_1, x_2, \dots, x_n$ ларни топамиз ва бу шолда топилган ечим $x_{k+1}, \dots, x_n$ эркин ызгарувчи (параметр)ларга боли булади ва уларга ихтиёрий ийматлар бериб системанинг чексиз кып ечимини топамиз.

Мисол. 2).

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ -3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_2 - 4x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_2 = 4x_3 - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 + 2 \\ x_2 = \frac{4}{3}x_3 - 2 \end{cases}$$

$$x_1 = 2 + x_2 - x_3 = 2 - 2 + \left(\frac{4}{3}\right)x_3 - x_3 = x_3/3.$$

Жавоби: $x_1 = x_3/3$; $x_2 = 2 + (4/3)x_3$; $x_3 \in \mathbb{R}$.

Бу алмаштиришларни тури бурчакли матрицалар ёрдамида шам бажариш мумкин.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Фараз этайлик

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i=1,2,3, \dots, m. \quad (1)$$

система билан бирга унга мос

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0, \quad i=1,2,3, \dots, m. \quad (2)$$

бир жинсли чизишли тенгламалар системаси шам берилган былсин.

1°. (2) системанинг иккита $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ва $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ечимларининг йиндиси ва айирмаси шам шу системанинг ечими булади.

Исботи. Шамкатан шам, $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = 0$ ва $a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n = 0$ былса, у шолда $a_{i1}(\alpha_1 \pm \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 \pm \beta_2) + \dots + a_{in}(\alpha_n \pm \beta_n) = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n \pm (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n) = 0 \pm 0 = 0$.

2°. (2)-системанинг ихтиёрий ечимининг $\lambda \in R$ сонига кыпайтмасы яна шу системанинг ечими булади.

Исботи. $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ (2)-системанинг ечими былсин, яъни $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = 0$, у шолда $a_{i1}(\lambda\alpha_1) + a_{i2}(\lambda\alpha_2) + \dots + a_{in}(\lambda\alpha_n) = \lambda(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n) = \lambda \cdot 0 = 0$.

Бу икки хоссадан келиб чиқадики, (2) системанинг ечимлар тыплами W арифметик фазо былар экан (n ылчовли арифметик фазо мавзусига аранг), яъни W , n ылчовли арифметик фазонинг исм фазоси экан.

3°. (1) нинг ихтиёрий $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ва $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ечимларининг айирмасы (2) системанинг ечими булади.

Исботи. Шамкатан шам $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$ ва $a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n = b_i$ былса, у шолда $a_{i1}(\alpha_1 - \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 - \beta_2) + \dots + a_{in}(\alpha_n - \beta_n) = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n - (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n) = b_i - b_i = 0$ булади.

4°. (1) нинг ихтиёрий ечими $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ билан (2) нинг ечими $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ларнинг йиғиндиси ва айирмасы шам (1) нинг ечими булади.

Исботи. $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$ ва $a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n = 0$ былса, у шолда $a_{i1}(\alpha_1 \pm \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 \pm \beta_2) + \dots + a_{in}(\alpha_n \pm \beta_n) = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n \pm (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n) = b_i \pm 0 = b_i$ булади.

3° ва 4° -хоссалардан келиб чиқадики, (1)- системанинг ечимларини щосил қилиш учун унинг бирта $x_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ечимига (2) - системанинг ечимини қўйиб қўйиб, яъни агар (1) нинг ечимлари тыплами H десак, $H = x_0 + W$. Демак, H тыплам W исм фазони x_0 векторга қўйиб қўйиб натижада щосил булади. Бундай шолда (1) нинг ечимлари тыплами қизиқли қўйиб қўйиб ташкил этади дейилади.

МАВЗУНИ МУСТАЦКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Ч.т.с.ни Гаусс усули билан ечишни гапириб беринг .
2. +андай шолда ч.т.с. ечимга эга эмас .
3. +андай шолда чизи=ли тенгламалар системаси ягона ечимга эга ?
4. +андай шолда ч.т.с. чексиз кып ечимга эга ?
5. Бир жинсли чизи=ли тенгламалар системанинг ечимлари фазоси
деганда нимани тушунасыз ?
6. Чизи=ли кыпхиллилик нима ?

17-МАЪРУЗА

МАВЗУ: 2 ВА 3- ТАРТИБЛИ ДЕТЕРМИНАНТЛАР. ЫРНИГА +ЫЙИШЛАР ГРУППАСИ.

РЕЖА:

1. Икки номаълумли чизи=ли тенгламалар системаси ва иккинчи тартибли детерминантлар.
2. 3 номаълумли чизи=ли тенгламалар системаси ва 3-тартибли детерминантлар.
3. Ырнига =ыйишлар группаси.
4. Жуфт ва то= ырнига =ыйишлар.

АДАБИЁТЛАР [1, 2, 3].

1. Фараз этайлик бизга

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array} \quad (1) \quad \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} \\ -a_{11} & -a_{12} \end{array} \right|$$

чизи=ли тенгламалар системаси берилган былсин. (1) ни x_1 ва x_2 га нисбатан ечсак

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad (2)$$

лар щосил =иламиз. Бу ерда махраж

$$d = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (3)$$

кыринишда белгиланиб (3)га *иккинчи тартибли детерминант* дейилади. Демак, иккинчи тартибли детерминантни щисоблаш учун унинг бош диагоналидаги элементлари кыпайтмасидан иккинчи диагоналидаги элементлари кыпайтмасини айириш керак экан. (2) нинг суратидаги ифодаларни щам иккинчи тартибли детерминант кыринишда ёзиш мумкин:

$$d_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad d_2 = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Булардан фойдаланиб (2) ни

$$x_1 = d_1 / d, \quad x_2 = d_2 / d \quad (4)$$

кыринишда ёзиш мумкин. (4) га (1) системани ечиш учун Крамер формуласи дейилади.

Мисол.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{системани Крамер формулалари ёрдамида ечинг.}$$

Бу ерда $d = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad d_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$

Демак, (4) га кыра $x_1 = -5 / (-5) = 1$ ва $x_2 = -5 / (-5) = 1$.

Жавоби: $x_1 = 1$ ва $x_2 = 1$.

2.Энди фараз =илайлик 3 та номаълумли

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (5)$$

чизи=ли тенгламалар системаси берилган былсин. (5)ни x_1, x_2, x_3 ларга нисбатан ечамиз. Бунинг учун унинг биринчи тенгламасини $a_{22} a_{33} - a_{23} a_{31}$ га иккинчисини $a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33}$ га ва учинчисини $a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}$ га кыпайтириб =сшамиз. У щолда

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + b_2 a_{13} a_{32} + b_3 a_{12} a_{23} - b_3 a_{13} a_{22} - b_2 a_{12} a_{33} - b_1 a_{23} a_{32}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{13} a_{22} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}}. \quad (6)$$

Бунинг махражини

$$d = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{13} a_{22} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

деб белгилаб олсак, (7) га 3- тартибли детерминант дейилали. (7) нинг чап томонидан уни щисоблаш =оидаси келиб чи=ади:

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}^+ + \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}^-$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^+ \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^-$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Осонлик билан кыриш мумкинки, агар (7) да 1-устун элементлари a_{11}, a_{21}, a_{31} ни мос равишда b_1, b_2, b_3 лар (озод шадлар устуну) билан алмаштирсак (6) нинг сурати щосил былади, яъни (7) дан

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} a_{33} + b_2 a_{13} a_{32} + b_3 a_{12} a_{23} - b_3 a_{13} a_{22} - b_2 a_{12} a_{33} - b_1 a_{23} a_{32} . \quad (8)$$

(7) ва (8) га асосан (6) ни =уйидагича ёза оламиз: $x_1 = d_1 / d$. Худди шунингдек, (5) ни x_2 ва x_3 га нисбатан ечсак $x_2 = d_2 / d$, $x_3 = d_3 / d$ ларни щосил =иламиз. Бу ерда

$$d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} .$$

Мисолар. 1). $d = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 3 - 0 - 12 - 2 = -7.$

2). $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ чизи=ли тенгламалар системасини ечинг.

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4, \quad d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 + 1 + 1 + 0 + 1 = 4, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$0 + 1 + 1 + 0 + 1 - 1 = 2, \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 = -2,$$

Шунинг учун ҳам $x=4/4=1$, $y=2/4=1/2$; $z=2/4=-1/2$.

Жавоби: $(1, 1/2, 1/2)$.

3. Ўрнига =ыйишлар группаси. Фараз этайлик, бизга n та элементга эга бўлган A типлам берилган бўлсин. Бу типлам элементларини $1, 2, \dots, n$ лар билан номерлаб чиқайлик. У ҳолда A ни $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ деб ёзиш мумкин.

1-таъриф. A типламни ўзига биектив (ўзаро бир =ийматли) акслантиришга **ўрнига =ыйиш** дейилади.

Тушунарлики =аралаётган типламда $n!$ та ўрнига =ыйиш мавжуд. Бундан кейин биз s ўрнига =ыйишда $1, 2, 3, \dots, n$ элементларнинг мос равишда $i_1, i_2, \dots, i_n$ элементларга ўтишини

$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ кыринишда белгилаймиз. Агар $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$

ва $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ ўрнига =ыйишлар берилган бўлиб $i_k = j_k$ ($k =$

$1, 2, \dots, n$) тенглик бажарилса s ва t ўрнига =ыйишларга тенг

дейилади ва $s = t$ кыринишда ёзилади. $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ га **айний**

ўрнига =ыйиш дейилади.

n та элементдан тузилган A типламдаги барча ўрнига =ыйишлар типламини S_n билан белгилаймиз. S_n даги иккита s ва t ўрнига =ыйишнинг кыпайтмаси деб аввало s кейин эса t ўрнига =ыйишни бажариш натижасида ҳосил бўлган ўрнига =ыйишга айтишга келишамиз.

Масалан: $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ва $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ бўлсин.

У шолда $st = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ былади.

1 - теорема. $\langle S_n; \cdot \rangle$ - мультипликатив группа былади.

Исботи. Группа таърифидаги шартларнинг бажарилишини текширайлик.

1) $\forall s, t \in S_n \Rightarrow s \cdot t \in S_n$ бажарилади;

2) $\forall s, t, l \in S_n \Rightarrow s \cdot (t \cdot l) = (s \cdot t) \cdot l$ былади, чунки агар $s = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, $l = \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix}$

былса, бу тенглик $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix}$ былиб, унинг чап

ТОМОНИ

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ d \end{pmatrix} \quad \text{ЫНГ ТОМОНИ}$$

$$\text{щам} \left[\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ d \end{pmatrix} \quad \text{дан иборат}$$

3) $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ былиб $\forall s \in S_n$ учун $s \cdot e = s$ бажарилади.

4) $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ га тескарсиси $s^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ былади,

чунки $s \cdot s^{-1} = e$.

Шундай =илиб группа таърифидаги барча шартлар бажарилади. $\langle S_n; \cdot \rangle$ — группага *n-тартибли симметрик группа* деб юритилади.

Агар $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ ырнига =ыйишда $i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_n$

былса, у инверсияга эга эмас дейилади, акс шолда *инверсияга* эга дейилади.

Масалан: $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ да инверсиялар сони 1 учун 1 та, 2 учун 2 та ,

3 учун 1 та, 4 учун 0 та, жами 4 та инверсия бор.

Берилган ырнига =ыйишдаги инверсиялар сони жуфт былса, унга жуфт ырнига =ыйиш, агарда инверсиялар сони то= былса , у шолда то= ырнига =ыйиш дейилади .

Ырнига =ыйишдаги исталган 2 та элементнинг ырнини алмаштиришга *транспозиция* дейилади.

Агар i_k ва i_l ларнинг ырни алмаштирилса, у (i_k, i_l) кыринишда белгиланади.

2- теорема. Транспозиция натижасида ырнига =ыйишларнинг жуфт-то=лиги ызгаради.

Исботи.

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_k & \dots & i_l & \dots & i_n \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_l & \dots & i_k & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

транспозиция натижасида щосил =илинган былсин. У щолда i_k ни i_l дан олдинга ытказиш учун $l-(k-1)$ та инверсия бажариш керак. Ундан кейин i_l ни жойига (яъни i_{l-1} дан кейинги жойга) =ыйиш учун $l-(k-1)-1$ та инверсия, жами $l-k+1+l-k+1-1=2(l-k)+1$ та инверсия бажариш керак.

3-теорема. $n!$ та ырнига =ыйишларнинг ярми $n! / 2$ таси жуфт ва =олган ярми $n!/2$ таси то= былади.

Исботи. Агар $n!$ та ырнига =ыйишлардаги жуфтлари сони p , токлари сони q билан белгиласак, $p+q=n!$ былади. Энди агар барча $n!$ та ырнига =ышишларда транспозиция бажарсак, у щолда жуфтлар то=ларга, то=лари эса жуфтларга ытади, яъни $p=q$, демак, $p=n!/2$ ва $q=n!/2$.

4-теорема. Жуфт ырнига =ышишлар тыплами S_n^* кыпайтиришга нисбатан группа щосил =илади.

Бунинг исботи =атый келтиришни талабаларга хавола =иламиз. $\langle S_n^*; \cdot \rangle$ да бирлик элемент айний =ышиш былади. t га тескарис $t^{-1} \in S_n^*$ былади.

Натижа. То= ырнига =ышишлар тыплами кыпайтиришга нисбатан группа былмайди.

Бунда бирлик элемент мавжуд эмас.

Мисол . $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

ни =арайлик . $S_3 = \{ f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \}$ деб белгилаб олсак, =уйидаги жадвалга эга буламыз. Бу жадвалда бирлик элемент $e = f_0$, f_1 га тескарис f_2 ; f_2 га тескарис f_1 ; f_3 га тескарис f_3 ; f_4 га тескарис f_4 ; f_5 га тескарис f_5 . Шунингдек группанинг барча шартлари бажарилади, яъни $\langle S_3; \cdot \rangle$ - мультипликатив группа булади.

.	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	f_0	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	f_0	f_4
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0

МАВЗУНИ МУСТАЦКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Иккинчи тартибли детерминант =андай щисобланади ?

2. Ушбу детерминант $\begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$ нинг =иймати нимага тенг ?

3. Учинчи тартибли детерминант =андай щисобланади ?

4. Ушбу $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ детерминантнинг =иймати нимага тенг ?

5. Ырнига =ыйишлар группаси $\langle S_n; \cdot \rangle$ нинг тартиби нечага тенг ?

6. Ырнига =ыйишларнинг инверсияси деганда нимани тушунаси ?

7. То= (жуфт) ырнига =ыйиш деб нимага айтилади ?

8. Транспозиция нима ва у =андай хоссага эга ?

9. n та элементдан тузилган жуфт ырнига =ыйишлар тыплами мультипликатив группа буладими ?

10. n элементдан тузилган то= ырнига =ыйишлар тыплами группа буладими ?

18- МАЪРУЗА

МАВЗУ: n - ТАРТИБЛИ ДЕТЕРМИНАНТЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

РЕЖА:

1. n - тартибли детерминантнинг таърифи.
2. Хоссалари.
3. Мисоллар.

АДАБИЁТЛАР [1, 2, 3] .

1. n - тартибли

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

квадрат матрицанинг детерминанти деб ушбу $n!$ та шадлар йи\индисидан тузилган

$$\sum_{n!} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} \quad (1)$$

ифодага айтилади. Бунда шар бир шадда n та кыпайтувчи былиб, шар бир сатр ва устундан биртадан элемент =атнашади. γ эса

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

ырнига =ыйишдаги инверсиялар сонини билдиради. Демак , (1) даги $n! / 2$ та шад мусбат ишора билан ва =олган $n! / 2$ та шад эса манфий ишора билан олинади. Берилган A матрицанинг детерминанти =уйидагича белгиданади:

$$\det A = D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{n!} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$$

Мисол. 1). $a_{12} \ a_{23} \ a_{31} \ a_{52} \ a_{45} \ a_{54}$ кыпайтма 6-тартибли детерминант ёйилмасида =атнашадими?

Индекслар щосил =илган ырнига =ыйиш $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

дан иборат. Бундан кыринадики иккинчи устундан иккита элемент олинган. Шунинг учун щам у 6- тартибли детерминант таркибида =атнашмайди.

2). $a_{12} a_{23} a_{31}$ щад 3- тартибли детерминантда =андай ишора бидан =атнашади ?

$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ырнига =ыйишдаги инверсиялар сонини ани=лайлик: 1 учун 2 та, 2 учун 0 та, 3 учун щам 0 та жами 3 та инверсия бор. Шунинг учун щам бу щад учинчи тартибли детерминант таркибига минус ишора билан киради.

Детерминантнинг сатрларини устунлар устунларини эса сатрлар =илиб ёзишга уни *транспонирлаш* дейилади.

2. Хоссалари.

1°. Детерминантни транспонирласак унинг =иймати ызгармайди.

Исботи.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\gamma} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} \quad (1)$$

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \quad (2)$$

(1) ва (2) нинг ынг томонидаги йи\инди барча $n!$ та ырнига =ыйишлар быйича олингани учун ынг томонлари тенг. Демак чап томонлари щам тенг былиши керак, яъни $D = D'$.

2°. Детерминантда исталган 2 та сатрининг ырнини алмаштирсак, унинг ишораси ызгаради.

Исботи. Агарда D детерминантда k ва l сатрларнинг ыринларини алмаштирсак D' детерминант щосил былади.

Бу ерда

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_k & \dots & i_l & \dots & i_n \end{pmatrix} \text{ ни } t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_l & \dots & i_k & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

дан бирта транспозиция ёрдамида щосил килиш мумкин. Транспозиция то= ырнига =ыйиш былганлиги сабабли (1) ва (2) даги щадларнинг барчаси тескари ишора билан олинади, яъни $D' = -D$.

Натижа. 2 та бир хил сатр (устун) га эга былган детерминантнинг =иймати нолга тенг.

3°. Детерминантда бирор сатри (устуни) ноллардан иборат былса, ундай детерминантнинг =иймати нолга тенг.

4°. Агар детерминантдаги бирор сатр (устун) элементлари умумий кыпайтувчи m га эга былса, уни детерминант белгисидан таш=арига чи=ариш мумкин.

Исботи.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ma_{i1} & ma_{i2} & \dots & ma_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\gamma}^{n!} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots (ma_{ik_i}) \dots a_{nk_n} =$$

$$= m \sum_{\gamma}^{n!} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{ik_i} \dots a_{nk_n} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

1- натижа. Детерминантни бирор s сонига кыпайтириш учун унинг бирор сатри (устуни) ни шу сонга кыпайтириш кифоя.

2- натижа. Детерминантнинг бирор сатри (устуни) иккинчи бир сатрига пропорционал былса, унинг Δ иймати 0 га тенг.

5°. Агар n -тартибли детерминантдаги бирор сатр (устун) элементлари 2 та элементнинг γ ий\индиси кыринишда ифодаланган былса, уни 2 та n -тартибли детерминант γ ий\индиси кыринишида ёзиш мумкин.

Исботи

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\gamma} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots (a_{ik_i} + b_{ik_i}) \cdots a_{nk_n} \\
 &= \sum_{\gamma} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{nk_n} + \sum_{\gamma} (-1)^{\gamma} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots b_{ik_i} \cdots a_{nk_n} = \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Натижа. Детерминантнинг бирорта сатри (устуни) ни бирор сонга кыпайтириб иккинчи бир сатри (устуни) нинг мос элементларига Δ ышсак детерминантнинг Δ иймати ызгармайди.

5°. Агар n -тартибли детерминантдаги бирор сатр (устун) элементлари Δ олган сатр (устун) ларининг чизи Δ ли комбинациясидан иборат былса, унинг Δ иймати нолга тенг.

Исботи ю=оридаги хоссалардан бевосита келиб чи=ади.

Мисол. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Бунда охирги устунидан 4 ни

чи=ардик. Натижада 1 ва 4 устунлари бир хил былиб =олди.

МАВЗУНИ МУСТАЦКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

- а). n - тартибли детерминант деб нимага айтилади?
- б). n - тартибли детерминантнинг щар бир щади =андай =оида быйича щосил =илинади?
- в). n - тартибли детерминантдаги щадларнинг ишораси =андай ани=ланади?
- г). Детерминантнинг =иймати =андай алмаштиришлар бажарса ызгармайди?
- д). +андай щолларда детерминантнинг =иймати нолга тенг былади?

19- МАЪРУЗА

МАВЗУ: МИНОРЛАР ВА АЛГЕБРАИК ТЫЛДИРУВЧИЛАР

РЕЖА:

1. n -тартибли детерминантнинг ($k \leq n$) k -тартибли минори ва =ышимча минор.
2. Алгебраик тылдирувчи.
3. Детерминантларни k -тартибли минорлар быйича ёйиш. Лаплас теоремаси.
4. Мисоллар.

АДАБИЁТЛАР [1, 2, 3].

Тартиби 3 дан ю=ори былган детерминантларни щисоблаш учун тайин бир формула мавжуд эмас. Уларни кыпчилик щолларда тартиби пасайтириб щисобланади. Бунинг учун эса бизга минор ва алгебраик тылдирувчи тушунчалари керак былади.

Фараз =илайлик n -тартибли D детерминант берилган былсин.

Ундаги k та сатр ва k та устунини ажратиб уларнинг кесишиш жойидаги элементларидан детерминантдаги тартибда олиб k -тартибли детерминант тузсак бу детерминантга D детерминантнинг k -тартибли минори дейилади. Шу ажратилган сатр ва устунларни ычириб, =олган жойдаги элеметлардан детерминантдаги тартибда олиб $n-k$ -тартибли детерминант тузсак унга k -тартибли минорга мос *=ышимча минор* дейилади. Масалан: ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kk+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+11} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n -тартибли детерминантдаги $1, 2, \dots, k$ сатрлари ва $1, 2, \dots, k$ устунларини ажратиб k -тартибли M минор ва $n-k$ -тартибли *=ышимча M' минор* тузсак у *=уйидагича* былади

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad M' = \begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & a_{k+1k+2} & \cdots & a_{k+1n} \\ a_{k+2k+1} & a_{k+2k+2} & \cdots & a_{k+2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk+1} & a_{nk+2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Агар $k=1$ былса, бирта элеиентга (масалан, $a_{ij}=M$ га) эга быламиз. Унинг *=ышимча минорини M'_{ij}* билан белгилаймиз.

=ышимча минор M' нинг ычирилган сатрлари $i_1, i_2, \dots, i_k$ ва устунлар $j_1, j_2, \dots, j_k$ номерларининг $(-1)^{i_1+j_1+i_2+j_2+\dots+i_k+j_k}$ нинг даражасидаги йи\индисига кыпайтмасига M минорга мос *алгебраик тылдирувчи* дейилади.

Агар биз M га мос алгебраик тылдирувчини A билан белгиласак, у щолда

$$i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + j_2 + \dots + j_k$$

$A=(-1)^{i+j} M'$ былади.

Хусусий шолда $M = a_{ij}$ былса, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M'_{ij}$ былади.

Мисол. $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ нинг $M = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$ минорига мос

алгебраик тылдирувчиси = уйидагича ёзилади:

$A = (-1)^{1+3+2+4} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$. Шу детерминантдаги a_{43} элементнинг

алгебраик тылдирувчиси

$$A_{ij} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$$

дан иборат былади.

Энди ушбу теоремани исботлаймиз.

1-теорема. D детерминантдаги M минорнинг исталган щадини унга мос алгебраик тылдирувчининг исталган щадига кыпайтирсак, D детерминантнинг щади щосил былади, яъни MA нинг исталган щади D нинг щадидан иборатдир.

Исботи. + уйидаги икки шолни = араймиз.

1⁰-шол. M минор D детерминантнинг ю=ори чап бурчагида, =ышимча минор эса =уйи ынг бурчагида жойлашган былсин:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kk+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline a_{k+11} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Бу шолда M нинг алгебраик тылдирувчиси $A = (-1)^{1+2+\cdots+k+1+2+\cdots+k} M' = M$.

M нинг исталган щади

$$(-1)^p a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} \dots a_{k\beta_k} \quad (1)$$

кыринишга эга. Бунда

$$p = \text{inv.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_k \end{pmatrix}$$

$A = M'$ нинг исталган щади эса

$$(-1)^q a_{k+1\beta_{k+1}} a_{k+2\beta_{k+2}} \dots a_{n\beta_n} \quad (2)$$

кыринишга эга. Бунда

$$q = \text{inv.} \begin{pmatrix} k+1 & k+2 & k+3 & \dots & n \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \beta_{k+3} & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$$

(1) ва (2) нинг кыпайтмаси

$$(-1)^{p+q} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} \dots a_{k\beta_k} a_{k+1\beta_{k+1}} a_{k+2\beta_{k+2}} \dots a_{n\beta_n} \quad (3)$$

D нинг щади былади. Чунки унда n та кыпайтувчи былиб D нинг шар бир сатри ва устунидан биртадан элемент олинган ва

$$\text{inv} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} = p+q$$

, чунки $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k$ лар $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \beta_{k+3}, \dots, \beta_n$ лардан кичик былгани учун улар билан инверсия ташкил килмайди.

2⁰-хол. M минор D нинг $k_1, k_2, \dots, k_r$ сатрлари ва $l_1, l_2, \dots, l_r$ устунларини ишгол =илсин ва $k_1 < k_2 < \dots < k_r$, $l_1 < l_2 < \dots < l_r$ деб оламиз. Бу шолни 1-холга келтирамиз. Бунинг учун k_1 -сатрни ызидан олдинги (k_1-1) -та сатрдан олдинга ытказиб 1-ыринга, k_2 -сатрни ызидан олдинги (k_2-2) сатрдан олдинга ытказиб 2-ыринга ва шоказо k_r -сатрни ызидан олдинги $(k_r - r)$ та сатрдан олдинга ытказиб r -ырин-га ёзамиз. Устунлар билан шам худди шу ишни бажарсак, M минор D' нинг ю=ри чап бурчагида жойлашади ва детерминантнинг хоссаларига кыра

$$D = (-1)^{(k_1-1)+(k_2-2)+\dots+(k_r-r)+(l_1-1)+(l_2-2)+\dots+(l_r-r)}$$

$$D' = k_1 + k_2 + \dots + k_r + l_1 + l_2 + \dots + l_r = (-1) D' \quad (3)$$

1-шолга кыра M нинг исталган щадининг M' нинг ихтиёрий щадига кыпайтмаси D' нинг щадини беради. Энди M нинг ихтиёрий щади

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + l_1 + l_2 + \dots + l_r$$

(-1) $M' = A$ нинг исталган щадига

кыпайтирсак, (3)га кыра D нинг щадини беради.

2 -теорема (Лаплас теоремаси). n -тартибли D детерминантнинг r та сатр (устун) ларидан барча r -тартибли минорларни тызиб ва уларни мос алгебраик тылдирувчиларга кыпайтириб =ышсак, йи\инди D детерминантнинг =ийматига тенг былади.

Исботи. Шу r - тартибли минорлар $M_1, M_2, \dots, M_t$ ва уларга мос алгебраик тылдирувчилар $A_1, A_2, \dots, A_t$ былсин. У шолда

$$M_1 A_1 + M_2 A_2 + \dots + M_t A_t = D \quad (4)$$

эканлигини исботлаймиз. 1-теоремага кыра M_i нинг исталган щадини A_i нинг исталган щадига кыпайтирсак D нинг щади щосил былади. $M_i A_i$ ва $M_j A_j$ лар ($i \neq j$) умумий щадга эга эмас, чунки M_i ва M_j лар камида бирта устун элементлари билан фар= =илади.

Энди (4) нинг чап томонида $n!$ та щад бор эканлигини кырсагсак теорема исботланган былади. Детерминантнинг таърифига кыра M_i минорда (r -тартибли детерминант) $r!$ та A_i да эса $(n-r)!$ та щад бор. У шолда $M_i A_i$ да $r!(n-r)!$ та щад былади. Демак, (4) нинг чап томонида $r!(n-r)!$ t та щад былади. Энди t ни ани=лайлик: $C_n^r = n! / r! (n-r)!$. Шунинг учун щам $r! (n-r)! \{n! / r! (n-r)!\} = n!$. (4) нинг чап томонида $n!$ та щад бор экан.

Мисол.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{детерминантни биринчи 2 та сатри быйича}$$

щисобланг.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \cdot (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot (-2) + (1+3)(-1)(-1-1) + (2-3)2 + 2(-1) + \\ 4(-1)2 + (-2-1)1 + 12 + 8 - 2 - 2 + 16$$

2).

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 4 - 3 - 0 = 4$$

Энди D ни биринчи сатр элементлари бййича ёйиб
щисоблайлик.

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1+2) - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = 3 + 4 - 3 = 4$$

МАВЗУНИ МУСТАХКАМДАШ УЧУН САВОЛЛАР.

- а). k - тартибли минор деб нимага айтилади ?
- б). $+$ ышимча минор деб нимага айтилади ?
- в). Алгебраик тылдирувчи деб нимага айтилади ?

$$\text{г). } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминантдаги a_{32} элементга мос алгебраик тылдирувчини
топинг.

20 - МАЪРУЗА

МАВЗУ: ДЕТЕРМИНАНТЛАРНИ САТР ЁКИ УСТУН ЭЛЕМЕНТЛАРИ БЫЙИЧА ЁЙИШ.

РЕЖА:

1. Детерминантларни сатр элементлари бййича ёйиш формуласи. Мисоллар.
2. Детерминантларни сатр элементлари бййича ёйиш. Мисоллар.
3. Крамер формулалари.
4. Бир жинсли чизи=ли тенгламалар системасининг нолмас ечимга эга былиш шарти.

АДАБИЁТЛАР [1, 2, 3].

1. Агар Лаплас теоремасида $r=1$ деб олиб i - сатрни ажратсак (4) формула =уйидаги кыринишга келади.

$$1\text{- натижа. } D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (1)$$

(1) га D детерминантни i -сатр элементлари бййича ёйиш формуласи дейилади.

Агарда Лаплас теоремасида $r=1$ деб олиб бирта j - устунини ажратиб олсак ушбу натижага эга буламыз.

$$2\text{- натижа. } D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \quad (2)$$

(2) га D ни j - устун элементлари бййича ёйиш формуласи дейилади.

Мисол. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

ни аввал 1-сатр элементлари бййича ёйиб, кейин эса 1- устун элементлари бййича ёйиб щисобланг.

Аввало D ни 1-сатр элементлари бййича ёйиб щисоблайлик:

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$0 + 0 + 4 - 0 - 2 + 0 - 2(0 + 0 + 0 + 0 - 2 - 0) + 3(1 - 2 - 0 - 0 + 1) + 0 = 2 + 4 - 6 = 0$$

Энди D ни 1- устун элементлари бййича ёйиб щисоблаймиз:

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 = (0 + 0 + 4 - 0 - 2 - 0) - (0 + 0 + 6 - 0 - 3 - 0) + (4 + 0 - 6 - 0 + 3 - 0) = 2 - 3 + 1 = 0.$$

Агарда D нинг i -сатридаги фа=ат бирта элемент, масалан $a_{i1} \neq 0$, былиб

=олган элементлар нолга тенг былса, у щолда D нинг =иймати шу элемент билан ынга мос алгебраик тылдирувчи A_{i1} нинг кыпайтмасига

тенг былади.

$$\text{Мисол 1)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 4 + 0 - 0 + 40 + 1 = 25$$

2).

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

3).

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1n} (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1}.$$

3-натижа. Агар n - тартибли D детерминантдаги i - сатрнинг (устуннинг) элементларини бош=а бир j - сатрининг (устунининг) алгебраик тылдирувчиларига мос равишда кыпайтириб =ышсак йи\инди 0 га тенг былади, яъни

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad (i \neq j) \quad (3)$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad (i \neq j). \quad (4)$$

Исботи. 1- натижага кыра $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$. Агар бу формуланинг чап томонидаги $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ элементларни мос равишда $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}$ лар билан алмаштирсак (яъни D да j -устун элементларининг ырнига щам i -устун элементларини ёзсак) D да иккита бир хил устун пайдо былади. Детерминантларнинг хоссасига кыра бундай детерминантнинг =иймати нолга тенг. Шундай =илиб (4) тенглик исботланди. (3) щам худди шунга ыхшаш исботланади.

3. Фараз этайлик n та номалумли n та чизи=ли тенгламадан тузилган система

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-----} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \quad (5)$$

берилган былсин. Бу системадаги 1-тенгламани A_{1j} га, иккинчисини A_{2j} га, $\dots$, n -тенгламани A_{nj} га кыпайтириб, тенгламаларни щадлаб =ышамиз. У щолда

$$(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \dots + a_{n1}A_{nj})x_1 + (a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \dots + a_{n1}A_{nj})x_2 + \dots + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj})x_j + \dots + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \dots + a_{nn}A_{nn})x_n = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj}.$$

тенгламага эга быламиз. Бундан эса (4)га асосан

$$(a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj})x_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj} \quad (6)$$

ни щосил =иламиз. (6) нинг чап томонидаги x_j номаълум олдидаги коэффицент 2-натижага кыра D га тенг. Ынг томонидаги ифода эса D даги j -устун элементларининг ырнига (5) даги озод щадлар устунини =ыйиб щосил =илинган D_j детерминантга тенг. Демак , $Dx_j = D_j$ ёки $x_j = D_j / D, j=1,2,3,\dots,n$; яъни

$$x_1 = D_1 / D, x_2 = D_2 / D, \dots, x_n = D_n / D \quad (7)$$

формулаларга *Крамер формулалари* дейилади. (7) нинг (5)-чизи=ли тенгламалар системасини =аноатлантиришини бевосита унинг исталган тенгламасига =ыйиб текшириб кыриш мумкин.

(7) да $D \neq 0$ былиши керак, агар $D=0$ былса, (5) ечиш учун Крамер формуласидан фойдаланиб былмайди. (Бу шолда (5) нинг ранги $r < n$ топилади ва (5)да $n-r$ та номаълумларни ынг томонга ытказиб кейин =ылласа былади).

Мисол. $2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \quad \text{чизи=ли тенгламалар системасини}$$

Крамер формулаларидан фойдаланиб ечинг.

Аввало D, D_1, D_2, D_3 ларни щисоблайлик.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 1 + 18 - 12 + 3 - 4 = 12, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 3 + 24 - 16 + 9 + 2 = 12$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 4 + 6 - 9 + 1 + 16 = 24, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 1 - 27 + 12 + 12 + 6 = 36.$$

Бу топилган =ийматларни (7) формулаларга олиб бориб =ыйсак $x_1 = D_1 / D = 12 / 12 = 1$, $x_2 = D_2 / D = 24 / 12 = 2$, $x_3 = D_3 / D = 36 / 12 = 3$ берилган системанинг ечимларига эга быламиз.

Энди ушбу теоремани исботлаймиз:

Теорема. n та номаълумли n та бир жинсли чизи=ли тенгламалар системаси нолдан фар=ли ечимга эга былиши учун унинг номаълумлари олдидаги коэффициентлардан тузилган матрицанинг детерминанти нолга тенг ($D = \det A = 0$) былиши зарур ва етарлидир.

Исботи. а). Фараз этайлик

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

система нолдан фар=ли $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ечимга эга былсин. У шолда

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Бу охирги системани =уйидагича ёза оламиз:

$$(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n; a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n; \dots; a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

ёки

$$\alpha_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) + \alpha_2(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}) + \dots + \alpha_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn}) = 0. \quad (10)$$

(10) дан кыринадики D нинг устунлари чизи=ли бо\ланган ва демак $D=0$.

б). $D=0$ былса, у щолда детерминантларнинг хоссаларига кыра унинг устунлари чизи=ли бо\ланган. Демак, щеч былмаса бирортаси нолдан фар=ли былган $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонлари мавжуд былиб (10) бажарилади. (10) дан эса (9) келиб чи=ади, яъни (8)-система нолдан фар=ли ечимга эга.

Мисол. $2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$

$$x_1 - x_2 - 5x_3 = 0$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \quad \text{чизи=ли тенгламалар системасини}$$

=арайлик..

Бунда $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 16 - 15 - 12 + 1 + 40 = 43 - 43 = 0$

былгаглиги учун система нолдан фар=ли ечимга эга. Уни Гаусс

узули билан ечамиз : $x_1 - x_2 - 5x_3 = 0$ $x_1 - x_2 - 5x_3 = 0$ $x_1 - x_2 - 5x_3 = 0$

$$\Rightarrow \quad 3x_2 + 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + 2x_3 = 0$$

$\Rightarrow$

$$7x_2 + 14x_3 = 0 \quad x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_2 = -2x_3, \quad x_1 = 5x_3 + x_2 = 5x_3 - 2x_3 = 3x_3.$$

Жавоби: $x_1 = 3x_3, x_2 = -2x_3, x_3 \in R.$

МАВЗУНИ МУСТАЦКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. n - тартибли D детерминантни i - сатр элементлари быйича ёйиш формуласини ёзинг.
2. n - тартибли D детерминантни j - устун элементлари быйича ёйиш формуласини ёзинг.

3. Агар n - тартибли детерминантдаги бирор сатр элементларини бош=а бир сатрининг алгебраик тилдирувчиларига мос равишда кыпайтириб щосил былган кыпайтмаларни =ышсак йи\инди нимага тенг былади?
4. Агар n -тартибли детерминантдаги бирор сатр элементларини уларга мос алгебраик тилдирувчиларга кыпайтириб щосил былган кыпайтмаларни кушсак йи\инди нимага тенг былади?
5. Крамер формуласини ёзинг.
6. Агар Крамер формуласи $x_j = D_j / D$ да $D = 0$ былиб =олса =андай щолат юз беради?
7. $x_j = D_j / D$ Крамер формуласидаги D_j ва D лар =андай бо\ланган ?

21- МАЪРУЗА

МАВЗУ: МАТРИЦАНИНГ РАНГИНИ УНИНГ МИНОРЛАРИДАН ФОЙДАЛАНИБ ЩИСОБЛАШ

РЕЖА:

1. Матрицанинг ранги ва унинг нолдан фар=ли минорларининг тартиби
орасидаги бо\ланиш.
2. Матрицалар кыпайтмасининг детерминанти.
3. Мисоллар. (Детерминантларни щисоблаш).

АДАБИЁТЛАР [1, 2, 3]

1. Фараз этайлик бизга $m \times n$ -тартибли $A=(a_{ij})$ матрица берилган былсин. Биз бундан аввал матрицанинг рангини элементар алмаштиришлардан фойдаланиб щисоблаш мумкин эканлигини курган эдик. Энди ушбу теоремани исботлаймиз.

1-теорема. $A=(a_{ij})$ матрицанинг ранги унинг нолдан фар=ли минораларининг энг ю=ори тартиблисининг тартибига тенг.

Исботи. A матрицада нолдан фар=ли энг ю=ори k -тартибли минор M унинг ю=ори чап бурчагида жойлашган былсин:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kk+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline a_{k+11} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & a_{m,k+1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Акс шолда A нинг сатр ва устунларининг ыринларини ызаро алмаштириб шу шолга олиб келиш мумкин. Бу билан унинг ранги ызгармайди.

A нинг s - сатри ($s = 1, 2, 3, \dots, m$) биринчи k та сатрлар ор=али чизи=ли ифодаланади. Ушбу $(k+1)$ - тартибли детерминант Δ_i ни =араймиз:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{ki} \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sk} & a_{si} \end{vmatrix}$$

Бу ерда $i = 1, 2, \dots, n$; $s = k+1, k+2, \dots, m$. Барча $i = 1, 2, \dots, n$ лар учун $\Delta_i = 0$, чунки $i \leq k$ да Δ_i да иккита бир хил устун мавжуд былади. $k+1 \leq i$ да эса $\Delta_i A$ нинг $(k+1)$ - тартибли минорини ифодалайди, шунинг учун шам $\Delta_i = 0$. Δ_i ни охирги устун элементлари быйича ёйсак

$$a_{1i} A_{1i} + a_{2i} A_{2i} + \dots + a_{ri} A_{ri} + a_{si} A_{si} = 0, \quad (1)$$

Бунда $A = (-1)^{k+1+k+1} M = M = 0$ былгани учун (1) ни a_{si} га нисбатан ечсак $a_{si} = \beta_{1i} a_{1i} + \beta_{2i} a_{2i} + \dots + \beta_{ri} a_{ri}$, ($i = 1, 2, \dots, n$; $s = k+1, k+2, \dots, m$) га эга буламиз. Бундан кыринадики A нинг s -сатри биринчи k та сатрлари ор=али чизи=ли ифодаланади. Демак, A матрицанинг ранги (сатрлар быйича ранги) k га тенг.

Натижа. Детерминантнинг нолга тенг булиши учун унинг сатрлари (устунлари) чизи=ли бо\ланган булиши зарур ва етарлидир.

Мисол. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицанинг рангини щисобланг.

Аввало шуни таъкидлаш керакки, матрицанинг рангини минорлардан фойдаланиб щисоблашда фа=ат бир-бирининг ичига жойлашган минорларини текшириш кифоя.

Бизнинг мисолимизда $M_1 = 1 \neq 0$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0, \quad M_2' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 = 4 \neq 0$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-4) = 4 \neq 0$$

Демак, $r(A) = 4$.

2. Матрицалар кыпайтмасининг детерминанти

2- теорема. A ва B n -тартибли квадрат матрицалар кыпайтмасининг детерминанти шу матрицалар детерминантларининг кыпайтмасига тенг.

Исботи. Агар $A=E$ - бирлик матрица былса $|E \cdot B| = 1 \cdot |B| = |E| \cdot |B|$.
яъни бу щолда теорема ыринли.

2-теоремани исботлашдан олдин ушбу леммани исботлаймиз.

Лемма. Агар A'' матрица A' матрицадан бирта элементар сатр алмаштириш ёрдамида щосил =илинган былса, у щолда

$$|A' \cdot B| = |A'| \cdot |B| \quad (2)$$

дан

$$|A'' \cdot B| = |A''| \cdot |B| \quad (3)$$

келиб чи=ади.

Исботи. Фараз этайлик A'' матрица A' матрицадан =уйидаги элементар алмаштиришларнинг бири ор=али щосил =илинган былсин:

а) сатрларининг ыринларини алмаштириш;

б) ихтиёрий сатрини нолдан фар=ли k сонига кыпайтириш;

с) бирор сатрини ихтиёрий сонга кыпайтириб иккинчи бир сатрига =ышиш.

Матрицаларни кыпайтириш =оидасига асосан $A'' \cdot B$ матрица $A' \cdot B$ матрицадан мос элементар алмаштириш натижасида щосил былади.

а) бажарилган былса, $|A''| = -|A'|$ ва

$$|A'' \cdot B| = -|A' \cdot B|; \quad (4)$$

б) бажарилган былса,

$$|A''| = k \cdot |A'|, \quad |A'' \cdot B| = k \cdot |A' \cdot B|; \quad (5)$$

в) бажарилган былса, у щолда

$$|A''| = |A'|, \quad |A'' \cdot B| = |A' \cdot B| \quad (6)$$

(4) , (5) ва (6) дан (2) га асосан (3) келиб чи=ади. Ща=икатан щам ,

$$(4) \text{ ва } (2) \text{ дан } |A'' \cdot B| = -|A' \cdot B| = -|A'| \cdot |B| = |A''| \cdot |B|;$$

$$(5) \text{ ва } (2) \text{ дан эса } |A'' \cdot B| = k \cdot |A' \cdot B| = k \cdot |A'| \cdot |B| = |A''| \cdot |B|;$$

$$(4) \text{ ва } (2) \text{ дан } |A'' \cdot B| = |A' \cdot B| = |A'| \cdot |B| = |A'| \cdot |B|.$$

Шу билан лемма тыла исбот былди.

Агар A матрица а), б), с) элементар алмаштиришлар ёрдамида E бирлик матрицадан щосил =илинган былса, леммага асосан $|E \cdot B| =$

$|E| \cdot |B|$ дан $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ келиб чи=ади. Бунда $|A| \neq 0$, яъни A - хосмас матрица.

$|A| = 0$ былса, у щолда AB матрицанинг сатрлари щам чизи=ли бо\ланган былади, яъни $|A \cdot B| = 0$ ва $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ тенглик бажарилади.

3. Детерминантларни щисоблаш.

1- мисол. Ушбу $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$

детерминантда x = атнашган шаднинг коэффиценти шисобланг:

Детерминантни охирги устун элементлари быйича ёйсак
фа=ат 1-сатр , 4- устунини ычирганда x =атнашади. Шунинг учун
шам x =атнашган шаднинг коэффиценти =уйидагига тенг былади:

$$-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0+1+0+1-1+0) = -1$$

2 - мисол . Ушбу Вандермонд детерминантининг =ийматини

шисобланг: $V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$. Бунинг учун V_n нинг шар бир

устунини $(-a_1)$ кыпайтириб ызидан олдингисига =ышамиз. У шолда

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & a_2^2(a_2 - a_1) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & a_n^2(a_n - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} =$$

$$(a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \cdot V_{n-1} = \cdots =$$

$$= (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) (a_3 - a_2) \cdots (a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1}) = \prod_{1 \leq j < i} (a_i - a_j).$$

3-мисол. Ушбу детерминантни учбурчак кыринишга келтириб
шисобланг:

$$D = \begin{vmatrix} a-x & a & a & \dots & a \\ a & a-x & a & \dots & a \\ a & a & a-x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a-x \end{vmatrix}$$

Охирги устунини (-1) га кыпайтириб барча устунларига =ышиб
чи=амиз:

$$D = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \dots & a \\ 0 & -x & 0 & \dots & a \\ 0 & 0 & -x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a-x \end{vmatrix}$$

Энди барча сатрларини охирги сатрига =ышамиз:

$$D = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & a \\ 0 & -x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & na-x \end{vmatrix} = (-x)^{n-1}(na-x).$$

4- мисол. Берилган D детерминантни чизи=ли кыпайтувчиларини
ажратиш усули билан щисобланг:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_1 & x & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x \end{vmatrix} \quad (1)$$

D нинг ёйилмаси n -даражали кыпщад былиб у $x=x_1, x_2, \dots, x_n$ да
нолга айланади. Шунинг учун щам

$$D = c (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (2)$$

деб олсак былади. Энди номаълум коэффициент c ни ани=лаймиз.

(1) нинг бошщади x^{n-1} , демак $c=1$.

Шундай =илиб

$$D = (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n).$$

5-мисол. (Рекурент формулалардан фойдаланиш).

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

ни щисобланг.

D_{n+1} ни охирги сатр элементлари быйича ёйамиз:

$$D_{n+1} = (-1)^{n+2} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \end{vmatrix} + x D_n = a_n (-1)^{n+2+n} + x D_n = a_n + x(a_{n-1} + x D_{n-1}) = a_n + a_{n-1} x +$$

Бу ерд $D_2 = \begin{vmatrix} a_0 & -1 \\ a_1 & x \end{vmatrix} = a_0 x + a_1$ $D_1 = a_0$.

Шунинг учун ҳам

$$D_{n+1} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

МАВЗУНИ МУСТАЦКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Матрицанинг ранги нимага тенг ?
2. Матрицалар кыпайтмасининг детерминанти шундаги теоремани айтинг.
3. n ($n > 3$) тартибли детерминантларни щисоблаш усуллари шундаги гапириб беринг.

22 - МАЪРУЗА

МАВЗУ : ТЕСКАРИ МАТРИЦА

РЕЖА:

1. Детерминантларни кыпайтириш.
2. Тескариланувчи матрицалар .
3. Тескари матрицани щисоблаш усуллари.
4. Чизишли тенгламалар системасини матрицавий кыринишда ёзиш ва ечиш.
5. Мисоллар.

1. Детерминантларни кыпайтириш. Ушбу теорема ыринли:

Теорема. Иккита n - тартибли

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{ва} \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминантларнинг кыпайтмасини яна n - тартибли детерминант

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

шаклида ифодалаш мумкин былиб, бунда c_{ij} элемент D_1 даги i - сатр элементлари $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ ларни D_2 даги j - устун элементлари

$b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ га мос равишда кыпайтириб натижани =ышиш билан щосил =илинади, яъни

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (1)$$

Исботи. Ушбу $2n$ -тартибли детерминантни =араймиз:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Агар D да биринчи n та сатрини ажратиб n - тартибли минорлар тузсак фа=ат биртаси D_1 га тенг, =олганлари эса нолга тенг былади.

D_1 нинг алгебраик тылдирувчиси D_2 га тенг былади . Демак,

$$D \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = D_1 D_2 \quad (2)$$

Энди D даги 1- устунни b_{11} га 2 - устунни b_{21} га , . . . , n - устунни b_{n1} га кыпайтириб $n+1$ - устунига =ышамиз. Сынгра 1- устунни b_{12} га , 2- устунни b_{22} га ва х.к. n - устунни b_{n2} га кыпайтириб $n+2$ - устунига =ышамиз ва х.к. давом этиб 1- устунни b_{1n} га , иккинчи устунни b_{2n} га ва х.к. n - устунни b_{nn} га кыпайтириб $2n$ - устунига =ышамиз. У шолда ушбуга эга быламиз (детерминантнинг хоссаларига кыра $D \square$ нинг =иймати ызгармайди):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Агар D нинг охирги n та сатрини ажратиб шу сатрлардаги n - тартибли минорлар быйича ёйсак $D = MA$ га эга быламиз. (Чунки

$$\text{фа=ат} \quad M = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n \neq 0$$

былиб =олган барча n - тартибли минорлар нолга тенг).

Бу ерда

$$A = (-1)^{(n+1)+(n+2)+\dots+2n+1+2+\dots+n} D = (-1)^{n+2(1+2+\dots+n)} D = (-1)^n D.$$

$$\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square D = (-1)^n (-1)^n D = (-1)^{2n} D = D. \quad (3)$$

Демак, (2) ва (3) дан $D_1 \cdot D_2 = D$.

Детерминантларни транспонирласак унинг =иймати ызгармагани учун детерминантларни кыпайтириш учун шам шозирги кыриб ытилган

“сатрларини устунларига“, быйича =оидасидан таш=ари “сатрларини сатрларига“, “устунларини сатрларига“, ”устунларини устунларига” =оидаларини =ыллаш мумкин.

Натижа. A ва B квадрат матрицалар кыпайтмасининг детерминанти шу матрицалар детерминантларининг кыпайтмасига тенг .

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B. \quad (4)$$

Умуман

$$|A_1 \cdot A_2 \cdots A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|; \quad |A|^k = |A^k|.$$

2. Тескари матрица .

Фараз этайлик F майдонда n -тартибли A матрица берилган былсин. Агар

$$A \cdot B = B \cdot A = E \quad (1)$$

шартни =аноатлантирувчи B n -тартибли квадрат матрица мавжуд былса, бу матрицага A га тескари матрица дейилади, ыз навбатида A щам B га тескари матрица былади . (1) дан

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det E = 1$$

былгани учун $\det A \neq 0$ ва $\det B \neq 0$ деган хулосага келамиз, яъни фа=ат хосмас матрицалар учун тескариси мавжуд былар экан . Бундан кейин A га тескари матрицани A^{-1} билан белгилаймиз.

Берилган матрицага тескари матрицани топишнинг 2 хил усули бор:

- 1). Детерминантлардан фойдаланиб ;
- 2). Матрицадаги элементар алмаштиришлардан фойдаланиб топиш .

Аввало 1- усулни =араб чи=айлик . Фараз этайлик

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица берилган былсин. У щолда

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица A га тескари матрица былади. Бу ердаги A_{ij} A матрицадаги a_{ij} элементнинг алгебраик тилдирувчиси. $\Delta = \det A$ атан-
шам

$$AA^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \dots + a_{1n}A_{2n} & \dots & a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \dots + a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \dots + a_{2n}A_{1n} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n} & \dots & a_{21}A_{n1} + a_{22}A_{n2} + \dots + a_{2n}A_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \dots + a_{nn}A_{1n} & a_{n1}A_{21} + a_{n2}A_{22} + \dots + a_{nn}A_{2n} & \dots & a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Мисол. Берилган A матрицага тескари матрицани

$$\text{щисобланг. } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Барча элементларга мос алгебраик тилдирувчиларни
щисоблаймиз:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 12 - 5 = 7; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -24 + 25 = 1; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 10 = 6;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -20; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -17; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -16; \quad \det A = -1 \quad \text{демак } A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 20 & 19 \\ -1 & 2 & 2 \\ -6 & 17 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Текшириш: } AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 20 & 19 \\ -1 & 2 & 2 \\ -6 & 17 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Иккинчи усул. Агар A хосмас n - тартибли матрица берилган
былса, ушбу (A/E) матрицани тызиб олиб шундай элементар
алмаштиришлар бажарамизки, бунинг натижасида (E/B) матрица

щосил былсин. Ана шу $B=A^{-1}$ матрица A га тескари матрица
 былади . (Бу тасди=нинг =атый исботи уйга муста=ил топшири=).
 Энди ю=ридаги мисолни иккинчи усул билан ечайлик:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -6 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & 17 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -14 & 40 & 38 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 16 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & -29 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 16 \end{pmatrix}. \quad \text{Шундай кириб} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -29 & 19 \\ -1 & 2 & 2 \\ -6 & 17 & 16 \end{pmatrix}$$

4. Чизи=ли тенгламалар системасини матрицавий кыринишда ёзиш ва уни ечиш.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \begin{matrix} F \text{ майдондаги} & nxn- \\ \text{чизи=ли} & \text{тенгламалар} \\ \text{системаси} & \end{matrix}$$

(1)

берилган былсин. Агар (1) нинг асосий матрицасини A ,
 ноъмаълумлар устунини X ва озод щадлар устунини b билан
 белгиласак, яъни

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

деб белгилаб олсак, (1) ни =уйидагича ёза оламиз:

$$AX = b. \quad (2)$$

Бунга (1)-чизи=ли тенгламалар системасининг матрицавий кыринишда ёзилиши дейилади.

Агар $\det A \neq 0$ былса, у шолда A га тескари A^{-1} матрица мавжуд булади ва $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b$ ёки $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot b$, бу ерда $A^{-1} \cdot A = E$ ва

$$E \cdot X = X \text{ былгани учун}$$

$$X = A^{-1} \cdot b \quad (3)$$

тенгликка эга буламыз.

Мисол. Ушбу тенгламалар системасини матрицавий кыринишда ёзинг ва ечинг:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

деб олсак $AX=b$ щосил булади. Энди A^{-1} ни топайлик.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Демак, $x_1=1, x_2=5, x_3=3$.

МАВЗУНИ МУСТАЦКАМЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Тескари матрица деб =андай матрицага айтилади?
2. =андай матрицалар учун тескарисини мавжуд булади?
3. Берилган матрицага тескари матрица мавжуд былса уни топишнинг =андай усуллари биласиз?

4. Матрицанинг рангини топишнинг =андай усуллари биласиз?
5. Ушбу матрицавий тенглама $AX=B$ дан нимаълум матрица X ни топинг.

АДАБИЁТЛАР

1. Хожиев Ж., Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси. Тошкент. Ўзбекистон. 2001 йил. 304 бет.
2. Курош А.Г. Олий алгебра курси. Тошкент. Ўзбекистон. 1975 йил.
3. Назаров Р.Н., Тошпулатов Б.Т., Дусимбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. I, II- + исм. Тошкент. Ўзбекистон. 1993, 1995 йил.
4. Искандаров Р.И. Олий алгебра. I, II- + исм. "Ўрта ва олий мактаб". Тошкент. 1963.
5. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М. "Наука". 1971.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М. "Наука". 1977.
7. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. Учебник. М. "Наука". 1984.
8. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения. М. "Наука". 1983.
9. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М. "Наука". 1983.
10. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М. "Наука". 1985.
11. А.И. Кострикина. Сборник задач по алгебре. Под редакцией М. "Наука". 1987.