

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ХАЛҚ ТАЪЛИМИ ВАЗИРЛИГИ
МУҚУМИЙ НОМИЛИ ҚЎҚОН ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА
ИНСТИТУТИ

Математика-информатика кафедраси

Б И О М Е Т Р И Я

фанидан

маъруза матинлари, мустақил иш ва
амалий машғулот ишланмалари.

Билим соҳаси: Таълим – 100000

Таълим соҳаси: 140000 – ўқитувчилар тайёрлаш ва
педагогика фани

Магистратура мутахассислиги: 5140400 – Биология ва инсон ҳаёти
фаолияти муҳофазаси бакалаврият
негизидаги 5 А 140401 –“Биология”

(I курс, I семестр)

Қўқон-2007 й.

Аннотация.

Ушбу матнлар ЎзРОУМТВ нинг 2002 йил 21 февралдаги 54-сонли буйруғи билан ДТС асосида ва таянч олий ўқув юрти Тош ДПУ томонидан тавсия этилган 2004 йилдаги намунавий дастур асосида тузилган.

Матнларда эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг биологик тадқиқотларга татбиқлари кўп сонли мисол ва масалалар билан бирга баён қилинган. Ушбу матнлар маърузалар, мустақил ишлар ва амалий машғулоти ишланмаларни ўз ичига олади.

Матнларни тузувчи:

ф.м.ф.н. Жўраев Ю.Т.

Такризчи:

ф.м.ф.н. Мамадалиев Б.

Кафедра мудири:

ф.м.ф.н. Солиев Ш.Т.

I боб. Асосий тўшунчалар.

1- маъруза

Мавзу: Математик статистика (варицион статистика) нинг масалалари (предмети) ва методлари. Математик статистиканинг эҳтимоллар назарияси билан алоқадорлиги.

Режа: 1. Масаланинг қўйилиши.
2. Математик статистика предмети ва методлари.
3. математик статистиканинг эҳтимоллар назарияси билан алоқадорлиги.

Мавзу баёни: 1. Масаланинг қўйилиши. Табиат ва жамиятда рўй берадиган барча жараёнлар жуда кўп сондаги сабаблар (факторлар) ўзаро бир-бирига таъсир қилади. Бундай жараёнларни ўрганиш ва натижада уларни бошқариш учун бу факторларни ҳар бири ушбу жараёнда қандай роль ўйнашини ўрганиш зарур. Бунинг учун етарли сонда кузатишлар ва тажрибалар ўтказиш ва бу кузатишлар натижаларини миқдорий баҳоларда ифодаланади. Ушбу миқдорий баҳолар (сонлар)ни ўрганишда математик усуллардан (методлардан) фойдаланилади.

Баъзи факторлар жараён учун катта таъсир кўрсатса, баъзилари сезиларли таъсир қилмайди. Шунинг учун кузатилаётган жараённи ўрганшида асосий факторлар (белгилар) қаралиб, асосий бўлмаган (кам таъсирли) белигилар эътиборга олинмайди. Ўзаро таъсир қиладиган белгиларнинг ўзаро тасирини математик усуллар ёрдамида ўрганиш учун бу белгиларни сонлар ёрдамида ифодалашни билиш зарур. Бундай миқдор (сон) ларни олиш учун етарлича сондаги кузатишларни ўтказиш керак. Демак, кузатиш-ҳар қандай тажриба ёки текширишнинг муҳим бўғинидир.

Лекин, ҳар қандай тажриба ҳам бизни қизиқтираётган белгини соф ҳолда (жуда аниқ) ажратиб олишга имкон бермайди.

Масалан. Бирор химик реакцияни ўрганаётганимизда ҳеч қачон соф ҳолдаги моддалар билан иш кўролмаймиз. Демак, ҳар бир кузатиш натижасида асосий белгининг кўпсондаги қўшимча белгилар (таъсирлар) билан ўзаро алоқадор ҳолдаги натижаларни оламиз. Ана шуларни ҳисобга олиб, кузатиш натижалари тасодикий бўлиб, маълум хатоликларга эга бўлади, деб айта оламиз.

2. Математик статистика предмети (масалалари) ва методлари.

Юқорида айтилгандек, кузатиш (тажриба) натижаларида тасодикий хатоликлар (силжишлар)га йўл қўйилади. Тасодикий хатоликлар назариясини ўрганувчи фан математик статистикадир.

Статистика сўзи лотинча бўлиб, ҳолат, вазият деган маънони англатади. Статистика табиатда ва жамиятда бўладиган оммавий ҳодисаларни ўрганади. Математик статистиканинг вазифаси статистик (кузатиш натижалари)

маълумотларни тўплаш, уларни таҳлил қилиш ва шу асосда баъзи бир хулосалар чиқаришдан иборатдир.

Математик статистиканинг асосий масалаларидан бири-нисбатан кам сондаги кузатишлар ёки тажрибалар ўтказиш ёрдамида оммавий ҳодисалар ёки жараёнларни ўрганиш методларини ишлаб чиқишдан иборат. Бу методлар илмий жаҳатдан асосланган бўлиб, ўзининг назарияларига эга ва бу назария танланмалар назарияси дейилади.

Ушбу назариянинг асосий тушунчалари, масалалари, қонуниятлари билан келгусида батафсил танишиб чиқамиз.

Математик статистикада қўлланиладиган методлар илмий жиҳатдан қандай асосланади?

Бу ўринда математик статистика эҳтимоллар назарияси деб номланадиган фанга асосланади.

3. Математик статистиканинг эҳтимоллар назарияси билан алоқадорлиги.

Оммавий тасодифий ҳодисаларнинг қонуниятларини ўрганувчи фан эҳтимоллар назарияси дейилади.

Етарли сондаги кузатишлар (тажрибалар) асосида олинган маълумотларни тўплаш, таҳлил қилиш ва тегишли хулосалар чиқаришда эҳтимоллар назариясини тадбиқ қилиш (қўллаш) математик статистика (вариацион статистика) дейилади.

Кузатиш натижаларидаги силжишлар (хатоликлар)нинг тегишли қонуниятлари ҳозирги кунда етарли даражада ўрганилган, кўп сондаги жадваллар тузилган.

Математик статистиканинг асосий масалаларидан бири кузатиш натижаларини таҳлил қилишда йўл қўйилган хатоликларни маълум даражада ишончлилигини баҳолашдан иборат.

Эҳтимоллар назарияси ўрганилаётган ҳодисанинг тасодифий эканлигини ҳисобга олади, лекин бу ҳодиса қайси соҳага (физика, биология, демография ва бошқалар) тегишли эканлигини ҳисобга олмайди.

Эҳтимоллар назарияси математик статистиканинг асосий аппаратигина бўлиб қолмай, бунидан ташқари унинг методларининг оммавий хизмат кўрсатиш назариясида, ишонччилик назариясида, назарий физикада, биологияда, географияда математик лингвистикада, ишлаб чиқаришни режалаштириш ва оптимал бошқаришда, технологик жараёнларни таҳлил қилишда, мақсулотларнинг сифатини назорат қилишда ва бошқа мақсадларда қўлланилади. Эҳтимоллар назариясининг элементлари XVII аср ўрталаридан вужудга кела бошлаган.

Ўзбекистонимизда ҳам эҳтимоллар назарияси ва математик статистика мактаби мавжуд ва бутун дунёда машхурдир. Ушбу мактабнинг вужудга келиши В. И. Романовский ва унинг шогирдлари (Т.А.Саримсоқов, С.Ҳ.Сирожддинов ва бошқалар) номи билан боғлиқ.

Ҳозирғизамон биологияси, асосан, экспериментал фандир. Ўлчаш техникаси ва биологик тажриба методлари такомиллашиб бормоқда. Бир хил курунишдаги индивидлардан иборат тўпламнинг ўзида уларнинг хусусиятлари ғоят ўзгарувчан бўлади. Шунинг учун биологияда математик (вариацион) статистика методларини қўллаш катта аҳмиятига эгадир.

1-2-мустақил иш, 1-2 амалий машғулотлар

Мавзу: Статистик тўплам. Варианта. Бош ва танланма тўплам. Вариантларни гуруппалаш.

Режа: 1. Статистик тўплам. Вариантлар.
2. Бош ва танланма тўплам. Танланма турлари.
3. Вариантларни гуруҳлаш. Вариацион қатор.
4. Сифат ва сон бўйича вариацияда берилганларни гуруҳлаш
5. Йиғилган ва нисбий частоталар.

Мавзунинг баёни: 1.Статистик тўплам. Вариантлар. Биологияда тадқиқотчи,асосан, сифат таркиби бир жинсли бўлган тўплам билан иш кўради.

Жонли организмнинг ривожланиши жуда кўп ва деярли турлича бўлган ички ва ташқи шароитлар билан белигиланади; бирор иккита индивид учун бу шарт-шароитлар бир хил бўлмайди. Шу сабабли индивидларнинг сон ёки сифат белгилари ўрганилаётганда бир эмас, балки бир қатор қийматлар ҳосил бўлади.

Мисол. 1-жадвалда М. Улуғбек номидаги Миллий университети дарвинизм ва генетика кафедрасининг тажриба станциясида маълум нав ғўза устида ўтказилган 10 та тажрибада олинган ҳосил (ҳарбир ғўзада г ҳисобида) келтирилган.

1-жадвал

Тажрибалар номери	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ҳосил	42,6	60,2	64,0	65,6	68,0	63,7	44,0	41,0	47,4	59,5

Бу мисолда тажрибадан тажрибага ўтганда турли қийматга эга бўлган миқдорни кўрамиз. Агар ҳар бир тажрибанинг барча шарт-шароитлари бир хил бўлганда бу миқдор ўзгармаслиги керак эди. Ҳақиқатда эса тажриба шароитларининг бир-бирига мумкин қадар ўхшашлиги сақланган бўлса ҳам, текширилаётган миқдорга таъсир этувчи турли тасодифий факторлар натижасида ҳосил тажрибадан тажрибага ўтканда ўзгаради.

Сифат таркиби нисбатан бир жинсли бўлиб, бир белгига тегишли бўлган ўзгарувчи қийматлар тўплами статистик тўплам дейилади. Статистик тўпламнинг ҳар бир элементи варианта дейилади. Тўпламдаги вариантлар сони эса тўпламнинг ҳажми дейилади.

Масалан, 1-жадвалдаги тўпламнинг ҳажми 10 га тенг. Одатда, вариантлар $X_1, X_2, \dots, X_n$ ҳарфлар билан белгиланади: бу ерда $X_k^{x_k}$ вариантдаги К индекс вариантнинг тартиб номери (рақами)ни билдиради.

Кўп тасодифий сабабалар таъсирида ўзгариб, турли қийматлар қабул қилиши мумкин бўлган Х миқдор тасодифий миқдор деб аталади. Вариантлар Х тасодифий миқдорнинг сон қийматларидан иборатдир.

Белгилар икки хил-сифат ва сон белгиларига ажралади. Бир-бирдан сифати билан фарқ қиладиган вариантлар сифат вариантлари дейилади. **Масалан**, уй хайвонлари тўпламини туси бўйича характерлаётган бўлсак, у вақтда ҳар бир варианта олдиндан қабул қилинган: қора, малла, қора-чипор, қора-малла ва хо казо тусларга мос сифат характеристикасини қабул қилиши керак.

Вариантлар орасидаги фарқ сон билан ҳам ифодаланиши мумкин. Масалан, уруғнинг оғирлиги, сутдаги ёғ миқдори-фойизи, буғдой донлари узунлиги, боғдаги дарахтлар сони ва бошқалар сон вариантларга мисол бўлади. Сон вариантлар икки хил-дискрет (узлукли) ва узликсиз бўлади. Дискрет ҳолда вариантлар орасидаги фарқ бутун сонлар билан ифодаланади. Масалан, боғдаги дарахтлар сони, гулдаги барглари сони, турли хайвонлар умуртқа поғоналари сони ва хо казо. Узлуксиз ҳолда вариантлар орасидаги фарқ исталганча кичик сонга тенг бўлиши мумкин. Масалан, 1-жадвалда берилган ҳар бир ғўзадан олинган пахта ҳосили узлуксиз вариантга мисол бўлади.

2. Бош ва танланма тўплам. Танланма турилари.

Айтайлик, пахтазордаги ҳали очилмаган кўсакларнинг ўртача оғирлигини аниқлаш керак бўлсин. Талаб этилган ўртача оғирлигини билаш учун даладаги ҳамма кўсакларни йиғиб олиш ва уларни тортиш лозим, лекин бу билан катта даладаги ҳосилни исроф қилган бўлар эдик. Бундай ҳолларда кўсакларнинг бир қисминигина йиғиб олиб, уларнинг ўртача оғирлигини билган ҳолда бутун даладаги кўсакларнинг ўртача оғирлиги тўғрисида фикр юритиш мумкин. Текширишнинг бундай усули танланма усул, ўлчаиш учун йиғиб олинган кўсаклар танланма тўплам ёки оддий қилиб танланма дейилади. *Пахтазордаги ҳамма кўсаклар тўплами эса бош тўплам* дейилади.

Бош тўпламдаги ҳамма элементлар сони шу тўпламнинг ҳажми дейилади: уни N ҳарфи билан белгилаймиз.

Танланма тўпламдаги ҳамма элементлар сони танланманинг ҳажми дейилади; уни n ҳарфи билан белгиланади.

Танланмалар ҳосил қилиш усули бўйича такрор ва такрормас (нотакрор) танланмаларга бўлинади. Агар танланманинг элементлари бош тўпламдан танланган элементни яна бош тўпламга қайтариш йўли билан ажратилса, бундай танланма **такрор танланма** дейилади. Бунда ҳар бир танланган элемент кейинги танлашда такрор чиқиши мумкин. Агар танланма элементларни бош тўпламга, қайтармасдан унинг элементлари бош тўпламдан ажратилса, бундай танланма **такрормас** танланма дейилади. Бош тўплам тўғрисида танланма

тўпламга асосланиб тўлароқ муҳокама юрутиш учун уни мумкин қадар бош тўпламга “ўхшаш” қилиб танлаб олинади.

Бош тўпламдаги нисбатни етарлича аниқ такрорловчи танланма **репрезентатив** дейилади. Текшириш натижасида__ биз бош тўпламдаги белгиларнинг саноғини ва нисбатини била олмаймиз. Шунинг учун репрезентатив танланма ҳосил қилишда биз уни тасодифий танланма қилиб тузамиз, яъни уни шундай усул билан танлаб оламизки, бу усул текшириладиган белгига ҳеч қандай таъсир қилмайди ва боштўпламнинг ҳар бир элементи танланмада бир хил имконият билан қатнашиши таъминланади. Бундай ҳолда текшириладиган белгиларнинг танланмадаги нисбатлари бош тўпламдаги мос нисбатларни аниқроқ кўрсатади, ва демак, танланма репрезентатив бўлади.

Танланма тўпламга асосланиб, бош тўплам тўғрисида қанчалик тўлиқ муҳокама юритиш мумкинлиги масаласи биологик статистиканинг энг муҳим назарий ва амалий масалаларидан биридир. Биз келгусида асосан танланма тўпламлар билан иш кўрамиз ва уларни, қисқача, тўплам деб юритамиз.

3. Вариантларни гуруҳлаш. Вариацион қатор.

Тажриба ўтказётган шахс, яъни статист ишлаб чиқариш керак бўлган “хом” материал-танланма тўплам қандай ҳосил қилинган бўлса, шундай ҳолда ёзилган қатор $X_1, X_2, \dots, X_n$ қийматлардан иборат бўлади; бу тўпламда ҳеч қандай тартиб йўқ. Биринчи вазифа шу $X_1, X_2, \dots, X_n$ вариантлар орасида тартиб ўрнатишдан иборат. Агар берилган $X_1, X_2, \dots, X_n$ вариантларни тартиб ёки камайиб бориш тартибида, масалан, бундай ёзсак,

$$X_1^* \leq X_2^* \leq \dots \leq X_n^*$$

Бу **вариацион қатор** дейилади.

Мисол. Пиллаларнинг узунлигини ўлчашда қуйидаги қийматлар (см ҳисобида) ҳосил бўлган:

3,30 3,40 3,25 3,40 3,60 3,45 3,43 3,50 3,35 3,55.

Бунга мос вариацион қатор қуйидаги кўринишда бўлади:

3,25 3,30 3,35 3,40 3,43 3,45 3,50 3,55 3,60.

Вариантларнинг сони нисбатан кам бўлгандагина бундай тартибга солиб ёзиш мумкин.

Таҳлил қилиши лозим бўлган тўпламда (танланмада) вариантлар сони кўп бўлганда эса уларни гуруҳларга ажратиб, сўнгра жадвал ёки қатор кўринишида ёзилади. Шундагина олинган маълумотларни осон ишлаб чиқариш ва ўрганилаётган тўпламни тўла характерловчи статистик тўпламни ишлаб чиқиш усули ўрганилаётган белгиларнинг вариацион характериға боғлиқ бўлади.

Статистикада гуруҳлаш масаласи жуда катта аҳамиятга эга, чунки белгиларни хато гуруҳлаш текширилатган тўплам ҳақида нотўғри хулосага олиб келиши мумкин.

А. Сифат бўйича вариацияда (ўзгарувчанликда) берилганларини гуруҳлаш.

Бу ҳолда берилганлар энг осон гуруҳланади. Буни куйидаги мисолда кўриб ўтамиз.

Мисол. Мўйналар туси бўйича ажратилаётган бўлсин. Бундай ҳолда уларнинг тақсимланишини ҳар бир тусли мўйнанинг сони ва ҳар бир тусли мўйнани мўйналарнинг умумий сонига нисбатан фойиз орқали кўрсатиш мумкин. Кузатиш натижасида куйидаги 2-жадвал ҳосил қилинган:

2-жадвал

Мўйна типлари	Ҳар бир тусли мўйналар сони	Мўйналарнинг умумий сонга нисбатан фойизи.
Стандарт жигар ранг	120	24
Кумушдек кўк	160	32
Сапфирли	180	36
Қора	40	8
Жами	500	100

Биологик тадқиқотларда муҳим бўлган ва кўп учраб турадиган сифат бўйича вариациянинг (ўзгарувчанликнинг) хусусий ҳали альтернатив вариациядир. Бунда тўплам элементларини фақат иккита гуруҳга ажратиш мумкин. Бунда бир гуруҳнинг элементларида маълум бир сифат (белги) мавжуд бўлса, у иккинчи гуруҳнинг элементларида бўлмайди.

Масалан. Оқсил касали бор-йўқлиги текширилатганда ҳайвонларнинг мусбати ва манфий реакцияли икки гуруҳга ажратилиши; у ёки бу жинсли индивид туғилиши; гибридларни бир белги бўйича икки формага ажратиш ва бошқалар. Буларнинг ҳаммаси алтернатив вариацияга мисол бўла олади.

Б. Сон бўйича вариацияда берилганларни гуруҳлаш.

Белги дискрет ўзгарувчи бўлса, у ҳолда тўпламдаги (танланмадаги) вариантларнинг турли қийматларини ўсиш таркибида ёзиб, улардан ҳар бирининг такрорланиши сонини кўрсатиши етарлидир. Бу амалда қандай бажарилишини куйидаги мисолда кўрамиз.

Мисол. 3-жадвалда Ўзбекистон Республикаси миллий Унверситети дарвинизим ва генетика кафедрасининг тажриба станциясида маълум навли 60 туп ғўзанинг асосий поясидаги бўғинлар сонини ҳисоблаш натижаси келтирилган

3-жадвал.

12	12	12	10	13	11	14	11	11	11
12	11	11	11	12	11	13	11	10	12
11	12	13	13	11	12	12	12	13	13
11	13	15	13	14	13	13	14	13	12
12	13	11	14	11	12	13	13	12	13
13	12	12	14	14	12	11	12	12	12

Кўрамизки энг кичик бўғинлар сони 10, энг каттаси 15, шунинг учун уч устунга эга бўлган жадвал тузамиз (4-жадвал)

4-жадвал

Қий- матлар	Варианталарни гуруҳларга ажратиш																		Қийматлар сони
10								1				1							2
11				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		15
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20
13			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		16
14							1	1	1	1	1	1							6
15								1											1

Берилган тўпламдаги қийматларни бир чеккадан кўздан кечириб, иккинчи усутни тўлдирамиз. Масалан 3-жадвалда биринчи бўлиб 12 сони учрайди, шунинг учун 4-жадвалнинг иккинчи устунида 12 қийматнинг тўғрисига битта чизиқ чизамиз; иккинчи бўлиб яна 12 сони учрайди; 12 қийматининг тўғрисига яна битта чизиқ чизамиз ва ҳо казо. Натижада 5-жадвал ҳосил бўлади.

5-жадвал

Ўзанинг асосий поядаги бўғинлар сони (X_i)	10	11	12	13	14	15	Жами
Бўғинлар сони X_i бўлган ҳўзалар сони (n_i)	2	15	20	16	6	1	60

Вариацион қатор-белгининг (ортиши ёки камайиши бўйича) тартибга солинган турли қийматлари ва уларнинг мос частоталари (такрорланишлари сони n_i) қатори ушбу

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

$$n_1, n_2, \dots, n_k$$

кўринишда ёзилади.

Масалан, 5-жадвал вариацион қаторга мисол бўлаолади. Вариацион қатордаги частоталар ушбу тўпламда алоҳида вариантларни неча марта учрашини кўрсатади. Жумладан, 5-жадвалдан асосий поясида бўғинлар сони 10 та бўлган ҳўзалар сони 2 та, бўғинлари 11 та бўлган ҳўзалар сони 15 та ва ҳо казо, эканлиги кўринади.

Энди бундай саволни қўйиш мумкин: бўғинлари 10 тадан кам ғўзалар сони қанча? Бундай ғўзалар йўқ (0); бўғинлари 11 тадан кам ғўзалар сони қанча? Бўғинлар 10 та ва ундан кам бўлган ғўзалар сони 2 та; бўғинлари 12 тадан кам ғўзалар сони қанча? Бўғинлар 10 та ва 11 та ғўзалар сони $2+15=17$ та; бу жараёни давом эттириб 0,2,17,37,53,59,60 сонларини ҳосил қиламиз. Бу сонларни **йиғилган частоталар** дейилади.

Йиғилган частоталар берилган тўпламнинг бирор вариантадан кичик бўлган элементлари сонини характерилайди.

Белгининг турли қийматлари частоталарининг танланма ҳажмига нисбати шу **белгининг нисбий саноклари** ёки **нисбий частоталари** дейилади.

Масалан, ушбу

$$X_i: X_1, X_2, \dots, X_K$$

$$n_i: n_1, n_2, \dots, n_K$$

вариацион қатор берилган, шу билан бирга $n_1 + n_2 + \dots + n_K = n$ бўлсин, у вақтда

$$W_1 = \frac{n_1}{n}, W_2 = \frac{n_2}{n}, \dots, W_K = \frac{n_K}{n}$$

нисбатлар белгининг тегишли қийматларига мос бўлган нисбий частоталарни ташкил қилади. Натижада қуйидаги жадвалга эга бўламиз:

$$X_i: X_1, X_2, \dots, X_K$$

$$W_i: W_1, W_2, \dots, W_K \quad (A)$$

Берилган белгининг турли қийматлари ва уларга мос нисбий частоталардан тузилган (A) жадвал шу белгининг **статистик** ёки **эмприк тақсимооти** дейилади.

Нисбий частоталар йиғиндиси бирга тенг: $W_1 + W_2 + \dots + W_K =$

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \dots + \frac{n_K}{n} = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_K}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

5-жадвалда берилган вариацион қатор учун статистик тақсимот қуйидагича ёзилади:

$$X_i \quad 10, \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15$$

$$W_i \quad \frac{2}{60} \quad \frac{15}{60} \quad \frac{20}{60} \quad \frac{16}{60} \quad \frac{6}{60} \quad \frac{1}{60}$$

ёки

$$X_i \quad 10, \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15$$

$$W_i \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{4}{15} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{60}$$

Узлуксиз ўзгарувчан вариантларда тўпламдаги ҳамма вариантларни маълум сондаги гуруппаларга ажратилади, сўнгра эса ҳар бир гуруҳга кирган вариантлар сони ҳисобланади. Натижада вариацион қатор жадвал кўринишда ҳосил бўлади, лекин такрорланишлар сони айрим, алоҳида олинган вариантга тегишли бўлмасдан, балки гуруҳга тегишли бўлади, яъни гуруҳнинг такрорланиш сони бўлади.

Масалан, берилган катта ёшдаги эркак ишчиларнинг бўйига кура тақсимланиши узлуксиз вариантага мисол бўла олади (6-жадвал). Бундай вариацион қатор **интервалли вариацион қатор** дейилади. (А.И.Карасев)

6-жадвал

Бўйи (см ҳисобида)	Эркаклар сони, n_i	Бўйи (см ҳисобида)	Эркаклар сони, n_i
143-146	1	167-170	170
146-149	2	170-173	120
149-152	8	173-176	64
152-155	26	176-179	28
155-158	65	179-182	10
158-161	120	182-185	3
161-164	181	185-188	1
164-167	201	Жами	1000

Гуруҳлар сонини танлашда (бу сонни К ҳарфи билан белгилаймиз), одатда, куйидаги мулоҳазаларга амал қилишади;

1) Гуруҳлар сони тоқ бўлгани мақул;

2) Тўпламнинг ҳажми катта бўлганда ($n > 100$) гуруҳлар сони катта

(масалан 9,11,13) бўлгани, ҳажми кичик бўлганда кичик (Масалан 5,7, 9 та) бўлгани маъқул. Шунини айтиш керакки, тўпламни неча гуруҳга ажратишгина эмас, балки биринчи гуруҳнинг чегаралари қандай аниқлашишга ҳам аҳамият бериш зарур. Гуруҳ оралиғи (кенглиги)ни катта олмаслик керакки, энг кичик варианта шу гуруҳнинг тахминан ўртасига тўғри келсин.

Гуруҳлар оралиғи (кенглиги) ва улар чегараларининг жойлашиши масалаласининг ҳал этилишини биз 6-жадвалда берилган тўплам мисолида кўрамиз. Гуруҳларнинг кенглиги ΔX ҳамма гуруҳлар учун бир хил бўлади ва у энг катта ва энг кичик вариантлар айирмасини гуруҳлар сонига нисбати билан аниқланади. 6-жадвалдаги мисолимизда

$X_{\max} = 187$ ва $X_{\min} = 142$; гуруҳлари сони $k = 15$ деб олинган ($n = 1000 > 100$); бу ҳолда

$$\Delta X = \frac{X_{\text{ёфч}} - X_{\min}}{15} = \frac{187 - 142}{15} = \frac{45}{15} = 3$$

Кўпинча $X_{\max} - X_{\min}$ айирма гуруҳлар сони k га қолдиқсиз бўлинмайди (бизнинг мисолимизда $\Delta X = 3$ бутун сон). Бундай ҳолларда гуруҳ кенглигини ортиши

томонга яхлитланади, чунки акс ҳолда вариация оралиғининг умумий кеглиги камайган бўлар эди, ва демак, вариантларнинг четки қийматлари унга кирмай қолар эди. Кенгайтиришни шундай бажариш, қийматларининг биттаси ҳам гуруҳларнинг чегарасига тушмасин.

Тақсимот жадвали тузилаётганда ҳар бир гуруҳ учун ё гуруҳнинг ўртаси (масалан, қўрилаётган мисолда 144;147;150;... ва ҳо казо; 6-жадвал), ёки гуруҳларнинг чегаралари (масалан, 143;146;149;... ва ҳо казо.; 6-жадвал) кўрсатилади.

6- жадвалдаги мисол бўйича тақсимот жадвалини тузиамиз (7-жадвал).

7-жадвал

Гуруҳнинг ўртаси	Такрорланиш сони	Гуруҳнинг ўртаси	Такрорланиш сони
144	1	168	170
147	2	171	120
150	8	174	64
153	26	177	28
156	65	180	10
159	120	183	3
162	181	186	1
165	201	Жами	1000

Тўпلامни гуруҳларга ажратиш урганилаётган белгининг фақат дискрет ёки узликсиз ўзгарувчанлигига эмас, балки тўпلامнинг (танланманинг) ҳажмига ҳам боғлиқ бўлади.

Мисол. Маълум нав пахта 60 туп ғўзасининг баландлиги (см) 30 дан 53 гача ўзгарган (8-жадвал).

8-жадвал

35	38	30	32	37	38	44	34	39	42
37	41	35	32	38	36	41	38	44	45
40	40	42	45	35	42	48	50	45	43
36	45	45	38	48	45	45	47	45	49
46	48	42	53	45	40	45	50	45	50
45	45	45	44	49	45	42	42	40	40

Агар бу тўпلامни вариантларнинг қийматларига, яъни 30,31 ва ҳо казо, кўра гуруҳларга ажратсак, у вақтда 23 та ($53-30=23$) гуруҳ ҳосил бўлади ва қатор чўзилиб кетиб, уни кўздан кечириш қийинлашади. Шунинг учун берилган тўпلامни вариантларнинг бирнеча қийматларини ўз ичига олган, масалан, 30-32, 33-35 ва ҳ. к. Гуруҳларга ажратиш қулайдир. Шундай қилсак, 8-жадвални ушбу 9-жадвал курунишида ёзиш мумкин.

9-жадвал

Гуруҳлар	30-32	33-35	36-38	39-41	42-44	45-47	48-50	51-53
Такрорланиш сони	3	4	9	8	10	17	8	1

3. Мустақил иш (назарий), 3-4-амалий машғулотлар.

Мавзу: Эмприк тақсимот функцияси. Статистик жадваллар. Полигон ва гистограмма.

Режа:

1. Эмприк тақсимот функцияси.
2. Статистик жадваллар. Мисоллар.
3. Тақсимотларни график тасвирлаш. Полигон ва гистограмма.

Мавзунинг баёни

1. Эмприк тақсимот функцияси.

Тўплам вариантларининг бир қисми (улуши) X нинг қийматидан кичик, қолганлари эса ундан катта ёки унга тенг бўлади. Шунинг учун ҳар бир X га йиғилган нисбий частоталар мос келади; уларни $F_n(X)$ орқали белгилаймиз X нинг ўзгариши билан йиғилган нисбий частоталарнинг қийматлари ҳам ўзгаради. Шунинг учун $F_n(X)$ ни X нинг функцияси деб ҳисоблаймиз.

Варианталарнинг X сондан кичик бўлган қийматларининг нисбий частотаси **эмприк тақсимот функцияси** дейилади.

Яъни

$$F_n(X) = \frac{m(X \leq x)}{n} = \frac{m(x)}{n},$$

Бу ерда $T(X)$ ифода X дан кичик бўлган вариантлар сони, n -тўплам (танланма) ҳажми.

Мисол. 5-жадвалда берилган тақсимот учун эмприк тақсимот функциясини топинг.

Ечиш. X нинг - $\sim$ дан 10 гача (10 сон ҳам киради) бўлган барча қийматлари учун изланаётган эмприк тақсимот функцияси нолга тенг. Аввал унинг $x=10$ да нолга тенглигини курайлик. Таърифга кўра

$$F_n(10) = \frac{m(10)}{60},$$

Бу ерда $m(10)$ -асосий поясида бўғинлари 10 тадан кам бўлган ғўзалар сони. Кўрган мисолимизда асосий поясида бўғинлари 10 тадан кам ғўзалар йўқ эди, яъни $m(10) = 0$. демак, X нинг $X \leq 10$ бўлган ҳамма қийматлари учун ҳам $F_n(10) = 0$,

Энди x $10 < X \leq 11$ тенгсизликни қаноатлантирисин. Масалан, $X=10,1$ ни олайлик, у ҳолда

$$F_n(10,1) = \frac{m(10,1)}{60},$$

Бу ерда $m(10,1)$ асосий навдадаги бўғинлар сони 10,1 тадан кам бўлган ғўзалар сонини ифодалайди. Бунга 10 та бўғинли ғўзалар сони киради. Шунинг учун

$$F_n(10,1) = \frac{2}{60} = \frac{1}{30} \approx 0,033.$$

X нинг олинган тенгсизликни қаноатлантирувчи бошқа ҳар қандай қийматлари учун ҳам $F_n(X)$ нинг 0,033 га тенглигини шунга ўхшаш кўрсатиш мумкин.

X энди $11 < X \leq 12$ тенгсизликни қаноатлантиради деб фараз қиламиз. Масалан, $X=(12)$ ни олайлик, у ҳолда $F(12) = m(12) / 60$, бу ерда $M(12)$ -асосий поясида бўғинлари 12 тадан 10 та бўғин бўлган ғўзалар сони. Кўрган мисолимизда асосий поясида 10 та бўғин бўлган ғўзалар сони 2 та, асосий поясида 11 та бўғин бўлган ғўзалар сони 15 та эди. Демак,

$$F_n(12) = \frac{2+15}{60} = \frac{17}{60} \approx 0,28.$$

X нинг $11 < X \leq 12$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бошқа ҳар қандай қийматлари учун ҳам $F_n(12) \approx 0,28$.

Шунга ўхшаш мулоҳаза юритиб ва йиғилган частоталарни ҳисоблаб, x нинг ҳар қандай қиймати учун изланаётган эмприк тақсимот функциясининг қийматларини топамиз. Натижада изланаётган эмприк тақимат функциясининг қуйидаги ифодасини ҳосил қиламиз:

$$F_n(X) = \begin{cases} 0, & \text{агар } -\infty < X \leq 10 \text{ бўлса,} \\ \frac{2}{60} \approx 0,033, & \text{агар } 10 < X \leq 11 \dots, \\ \frac{17}{60} \approx 0,28, & \text{агар } 11 < X \leq 12 \dots, \\ \frac{37}{60} \approx 0,61, & \text{агар } 1 < X \leq 13 \dots, \\ \frac{53}{60} \approx 0,8, & \text{агар } 13 < X \leq 14 \dots, \\ \frac{59}{60} \approx 0,98, & \text{агар } 14 < X \leq 15 \dots, \\ 1, & \text{агар } 15 < X \leq +\infty \dots, \end{cases}$$

Тўғри бурчакли координаталар системасида бу функциянинг графигини ясаймиз (1-чизма)

1-чизма

Энди интервалли вариацион қаторлар учун эмприк тақсимот функцияларини қандай топишни кўрайлик.

Мисол. 6 – жадвалда берилган маълумотлар бўйича эркалар бўйларининг эмприк тақсимот функциясини топинг.

Ечиш. Изланаётган тақсимот функцияси x нинг $-\infty$ дан 143 гача бўлган қийматларида 0 га тенг.

Масалан $F_n(143) = 0$, чунки бўйи 143 см дан кичик эркалар сони нолга тенг.

Кийин биз $X=146$ учун эмприк тақсимот функциясининг қийматини топишимиз мукин, лекин 143-146 см оралиқнинг бирарта ҳам нуқталари учун уни топа олмаймиз. Ҳақиқатан ҳам, масалан, $X=145$ см бўлсин, у вақтда

$F_n(145) = m(145)/1000$, бу ерда $m(145)$ – бўйи 145 см дан кичик бўлган эркалар сони. Лекин биринчи интервалга киритилган эркаларнинг бўйи қанчалигини билмаймиз, шунинг учун $m(145)$ нинг қийматини кўрсата олмаймиз. Демак, $F_n(145)$ нинг қийматини билмаймиз. Аммо $X=146$ см да $F_n(146) = 1/1000 = 0,001$ га эгамиз, чунки $m(146) = 1$.

Аргументнинг кейинги қийматлари учун ҳам эмприк тақсимот функциянинг қийматлари шунга ўхшаш топилади.

Масалан, $X=149$ да

$$F_n(149) = \frac{m(149)}{1000} = \frac{1+2}{1000} = 0,003$$

бўлади, чунки $m(149) = 3$; $X=152$ да

$$F_n(152) = \frac{m(152)}{1000} = \frac{1+2+8}{1000} = 0,011$$

ни ҳосил қиламиз, худди шунга ўхшаш

$$F_n(155) = m(155)/1000 = 0,037 \text{ ва ҳо казо.}$$

Натижада изланаётган $F_n(X)$ эмприк тақсимот функцияси қийматларининг қуйидаги жадвалини ҳосил қиламиз:
 $X: -\infty < X \leq 143 \ 146 \ 148 \ 152 \ 155 \ 158 \ 161 \ 164 \ 167 \ 170 \ 173$
 $F_n(X): 0 \ 0,001 \ 0,003 \ 0,011 \ 0,037 \ 0,102 \ 0,222 \ 0,403 \ 0,604 \ 0,774 \ 0,894$
 Давоми
 $X: 176 \ 179 \ 182 \ 185 \ 188 \leq X < +\infty$
 $F_n(X): 0,958 \ 0,986 \ 0,996 \ 0,999 \ 1$

Ҳосил бўлган функциянинг графигини яшашимиз мумкин. (2-чизма)
 Амалий татбиқлар $F_n(X)$

эмприк тақсимот
 функцияси

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_n(X+h) - F_n(X)}{h} = F_n(X) = f_n(X)$$

ҳосилага эга бўлган ҳол айниқса муҳим.

2. Статистик жадваллар.

Берилган статистик тўпламларни гуруҳларга ажратиш натижасида юқоридаги 2,5- жадваллар ҳосил бўлди. Бундай жадваллар **статистик жадваллар** дейилади.

Статистик жадваллар кўпинча ўрганилаётган белгининг ўзгариш характерини яққол тасаввур этишга ёрдам беради ва турли статистик кўрсаткичларни ҳисоблаш техникасини соддалаштириш имконини беради.

Тўпламнинг (такланманинг) ўрганилмоқчи бўлган хусусиятларига қараб, статистик жадваллар турили кўринишда бўлади. Бундай жадваллар тўплам элементларининг бир ёки бир неча ўзаро боғлиқ бўлмаган ёки ўзаро боғлиқ бўлган белгилари бўйича тақсимланишини ифодаловчи маълумотларни ўз ичига олиши мумкин. Мисоллар келтирасиз.

10-жадвалда Белоцерковская навли кузги бўҳдой уруғли сорти 500 та бошоғининг оғирлиги бўйича тақсимланиши берилган (узликсиз ўзгарувчанлик).

10-жадвал

1 бошоқ уруғининг оғирлиги (мг ҳисобида)											
401-500	501-600	601-700	701-800	801-900	901-1000	1001-1100	1101-1200	1201-1300	1301-1400	1401-1500	Жами
8	16	32	49	84	126	75	45	34	20	11	500

Л-13 нав пахта 60 туп ғўзасидаги биринчи ҳосил шохи жойлашган бўғин (h_s доналарда) бўйича тақсимланиши (дискрет ўзгарувчанлик) (11-жадвал)

11-жадвал

Биринчи ҳосил шохи жойлашган бўғин						
5	6	7	8	9	10	Жами
4	9	20	16	10	1	60

Сифат белгиларининг тақсимланиши бир неча белги учун 12-жадвал кўринишида ва иккита белги (альтернатив ўзгарувчанлик) учун 13 – жадвал кўринишида тасвирланган.

12-жадвал

Қизил рангли		Оқ рангли		Жами				
Серқилтиқ	Қилтиқсиз	Серқилтиқ	Қилтиқсиз	Қизил	Оқ	Серқилтиқ	Қилтиқсиз	Бошоқларнинг жами
506	1912	216	698	2418	914	722	2610	3332

Жўҳори уруғининг эндосперма ранги бўйича тақсимланиши (13-жадвал)

13-жадвал

Оқ	Сариқ	Жами
206	33	239

Тўплам (танланма)нинг бир вақтда икки белги бўйича тақсимланишини тассирловчи статистик жадваллар **корреляцион жадваллар** деб аталади (14-жадвал)

14-жадвал

$\begin{matrix} X \\ y \end{matrix}$	1,45	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	n_y
3,20	1	-	1	-	1	-	-	-	-	-	3
3,25	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	2
3,30	1	1	3	1	1	1	-	-	-	-	8
3,35	-	-	5	3	4	4	1	-	-	-	17
3,40	-	1	5	8	3	4	3	-	-	-	24
3,45	-	-	-	-	6	5	2	-	-	1	14
3,50	-	-	-	2	1	3	3	1	1	-	11
3,55	-	-	-	-	-	2	1	1	-	-	7
3,60	-	-	-	1	2	2	1	2	1	-	9
3,65	-	-	-	-	1	1	2	-	1	-	5
n_x	2	2	15	16	22	22	13	4	3	1	100=n

Жадвалда вертикальбўйича пилла бўйининг узунлигига кўра тақсимланиши, горизантал бўйича эса пилла энининг узунлигига кўра тақсимланиши кўрсатилган (14-жадвал).

Бир тўплам намуналаридаги бирор белгининг маълум бир вақт оралиғида, яъни динамикада кўрисатувчи жадваллар хронологик жадваллар дейилади. Воронежская 76 жўхори ўсимлиги поясининг 50 марта ўлчашдаги ўртача узунлигининг ҳар 10 кунликда ўсиши (см ҳисобида)

15-жадвал

Кузатишлар куни	18.VI	28 VI	8. VII	18. VII	28. VIII	7. VIII
Узунлиги	10	29	55	110	124	129

4. Тақсимотларни график тасвирлаш.

Тўпламда вариантлар гуруҳларга ажратилгандан сўнг, тақсимотнинг характери озми-кўпми ойдинлашади. Лекин тақсимотни график тасвирланганда унинг характери яна ҳам яққоллашади.

Тақсимотни график тасвирлаш усуллари ичида жуда кўп қўлланадиган тасвирлаш усуллари ичида жуда кўп қўлланадиган икки тасини: полигон ва гистограмма ясашни кўриб чиқамиз.

А. Гистограмма яшаш. Абсциссалар ўқига гуруҳларнинг чегаралари қўйилади ва ҳар бир гуруҳда уни асос қилиб, сатҳи шу гуруҳнинг такрорланишига тенг бўлган тўғри тўртбурчак чизилади. Гистограмма яшаш учун ҳар бир гуруҳнинг такрорланишини гуруҳнинг кенглигига (оралиғга) бўлиб ҳосил бўлган сонни тўртбурчакнинг баландлиги қилиб олиш керак. Гуруҳларнинг кенглиги бир хил бўлганда тўғри тўртбурчакларнинг баландликлари (n_i/h – частоталар зичлиги) мос такрорланишларга пропорционал бўлади. Гистограммани яшаш усулидан унинг тўлиқ сатҳи бирга тенглиги келиб чиқади.

Мисол сифатида 9-жадвалда берилган таъсимот учун 3-чизмада гистограмма ясалган.

Б. Полигон ясаш. Гистограмма яшашда бир гуруҳга кирган ҳамма қийматлар текис тақсимланган деб ҳисобланган бўлса, полигон яшашда уларнинг ҳаммаси шу группанинг ўртасига тўпланган деб ҳисобланади.

Масалан, 9 жадвалда 36-38 гуруҳга 9 туп ғўза баландликлари тегишлидир. Уларнинг барчаси 37 см баландликка эга деб ҳисоблаймиз. Бошқа гуруҳларда ҳам ўрталарини олмиз. Абсциссаси ҳар бир гуруҳнинг ўртасига, ординатаси эса шу гуруҳнинг такрорланишига пропорционал бўлган ($N_i(\Delta X)$) нуқталар топилади ва бу нуқталар тўғри чизик кесмалари билан туташтирилади. 4-чизимада 9-жадвалда берилган 60 туп ғўза баландлиги тақсимотнинг полигони ясалган

4-чизма

I боб мавзулари бўйича машқ қилиш учун масалалар

1-мисол. М. Улуғбек номидаги Ўзбекистон Республикаси миллий университети дарвинизим ва генетика кафедрасининг тажриба станциясида Л - 47 х Л -15 нав дурагай пахта ўсимлигини кузатиш натижасида олинган қуйидаги маълумотларни гуруҳларга ажратиб, вариацион қатор тузинг ва тақсимот гистограммаси ва полигонини ясанг [1]

1) Ғўзаларнинг баландлиги (см ҳисобида):

38	40	42	41	38	35	37	43	39	40
44	45	45	42	31	46	43	44	42	40
44	42	43	43	49	47	39	46	46	40
38	42	39	45	43	37	44	47	40	48
43	44	43	44	44	47	47	51	47	56
39	44	45	39	44	43	45	45	44	43

2) асосий поядаги бўғинлар сони:

10	11	10	10	10	9	9	11	9	9
11	11	11	7	9	10	10	10	10	10
10	10	11	11	11	10	10	11	10	10
9	10	9	9	9	9	11	9	10	10
10	10	10	10	11	9	10	9	9	12
9	10	8	11	10	10	9	10	10	11

3) биринчи ҳосил шохи жойлашган бўғин (h_s доналарда)

5	6	5	5	5	7	5	5	5	6
6	5	6	6	5	5	5	5	5	5
6	5	5	6	5	4	6	4	5	6
7	5	5	5	5	6	5	6	5	5
5	5	7	4	5	5	8	4	6	5
5	7	4	5	6	4	5	5	4	5

4) ҳосил шохлари сони:

7	8	7	7	6	4	6	8	7	6
8	8	7	5	8	8	10	8	8	8
7	8	7	8	8	8	8	8	18	7
5	8	7	8	7	8	9	7	7	8
8	8	7	8	8	8	5	10	8	10
6	5	7	7	6	8	8	7	17	8

5) Гунчалар сони:

15	15	14	15	12	7	12	16	14	9
17	17	5	10	14	17	20	16	14	16
15	16	16	16	15	17	16	17	14	14
10	16	15	17	14	16	17	15	15	18
18	17	14	16	17	14	10	20	16	18
11	10	13	14	13	16	16	15	3	17

2-мисол. Юқорида 1-мисолда келтирилган кафедранинг тажриба станциясида F_1 Л- 44 х Л-16 нав дурагай пахта ўсимлигини кузатиш натижасида олинган қуйидаги маълумотларни гуруҳларга ажратиб, вариацион қатор тузинг ва тақсимотнинг полигон ва гистограммасини ясанг.

1) Кўсақлар сони:

8	6	5	5	3	4	4	4	5	5
5	7	5	7	5	7	4	8	7	6
7	6	4	5	8	3	5	5	6	5
3	7	4	3	4	5	4	4	5	6
5	5	5	6	6	5	4	5	4	6

2) очилган кўсаклар сони:

7 6 4 5 3 3 4 4 4 3 5 7 6 4 3 7 4 4
4 4 4 7 4 6 7 6 3 4 4 4 6 5 4 4 6 3
7 4 3 4 3 5 4 4 4 5 3 5 5 3 4 4 4 4

3) кўсакларнинг йириклиги (ҳар бир кўсакдаги пахта оғирлиги г ҳисобида):

9,0 7,9 8,3 8,0 8,0 8,3 8,1 7,6 8,5 8,2 8,3 7,9
8,1 8,0 7,7 8,4 8,0 8,1 7,9 8,7 9,0 8,3 7,6 9,0
8,0 8,2 7,5 7,8 8,6 7,8 8,4 8,5 8,1 8,4 8,8 7,9
8,4 7,4 8,8 7,8 8,2 7,5 8,1 8,9

4) ҳар бир туп ғўзадаги пахта ҳосилининг оғирлиги (г ҳисобида):

38,0 48,3 36,0 47,4 33,2 34,5 24,0 58,5 24,3 25,5 49,2 33,2
32,6 58,8 32,0 32,0 48,0 24,3 31,6 34,8 33,2 45,6 35,0 23,4
43,0 31,2 32,0 40,2 56,0 33,2

3-мисол. Қуйида Ўрта Осиё ипакчилик илмий текшириш институтида 60 дона пилланинг бўйи ва эни ҳақида олинган маълумотлар келтирилган. Улар гуруҳларга ажратиб, вариацион қатор тузинг ва гистограммасини ясанг.

1) пилланинг эни (см ҳисобида):

1,65 1,60 1,55 1,67 1,67 1,55 1,72 1,54 1,60 1,70 1,70 1,60
1,57 1,65 1,75 1,50 1,60 1,55 1,64 1,63 1,57 1,65 1,63 1,60
1,70 1,73 1,48 1,70 1,70 1,60 1,52 1,55 1,70 1,52 1,65 1,55
1,55 1,65 1,60 1,60 1,45 1,70 1,60 1,65 1,58 1,75 1,55 1,60
1,60 1,72 1,62 1,55 1,70 1,55 1,45 1,70 1,65 1,70 1,65 1,70

2) пилланинг бўйи (см ҳисобида)

3,20 3,20 3,20 3,20 3,45 3,30 3,45 3,25 3,40 3,45 3,10 3,30
3,30 3,40 3,40 3,50 3,35 3,30 3,34 3,40 3,45 3,35 3,40 3,35
3,45 3,45 3,20 3,50 3,10 3,30 2,20 3,25 3,40 3,20 3,30 3,35
3,25 3,25 3,30 3,30 3,10 3,40 3,20 3,20 3,30 3,90 3,40 3,35
2,90 3,20 3,45 3,45 2,90 3,35

1-3 мисоллардаги тўпламларнинг эмприк тақсимот функцияларини топинг ва графикларини ясанг.

I бобда кўриб ўтилган тушунчалар рўйхати:

Статистика, математик статистика предмети, танланма методи, статистик тўплам, варианта, бош ва танланма тўпламларнинг ҳажми, такрор танланма, такрормас танланма, репрезентатив танланма, вариацион қатор, сифат ва сон бўйича вариацияда берилганларни гуруҳлаш, йиғилган частоталар, нисбий частота, эмприк тақсимот, интервалли вариацион қатор, гуруҳнинг кенглиги, эмприк миқдорлар, статистик жадвал, хронологик жадвал, гистограмма, полигон ва уларни яшаш.

II боб. Статистик характеристикалар.

2-март, 5-6-7- амалий машғулотлар.

Мавзу: Ўртача қийматлар. Тарқоқ ва ўзгарувчанлик ўлчови. Вариация ёки ўзгарувчанлик коэффициенти.

Режа:

1. Ўртача қиймат.
2. Арифметик ва геометрик ўртача қийматлар.
3. Тарқоқлик ва ўзгарувчанлик ўлчови, ўртача квадратик фарқ (хатолик), дисперсия.
4. Вариация коэффициенти.

Мавзунинг баёни: 1. **Ўртача қийматлар.** Статистик ҳисобнинг асосий масалаларидан бири параметрлар деб аталадиган ва вариацион қаторнинг хусусиятларини етарли даражада ифодалаб берадиган характеристикаларни аниқлашдан иборат. Вариацион қаторлар қуйидагиларга асосан бир –биридан фарқ қилиши мумкин:

1⁰. белгининг атрофида кўпчилик вариантлар тўпланган қиймати бўйича. Белгининг бу қиймати тўпламида (танланмада) белгининг ривожланиш даражасини, қаторнинг марказий тенденциясини, яъни қаторнинг ўзига ҳослигини акс эттиради;

2⁰. вариантларнинг қатор марказий тенденциясини акс эттирувчи қиймат атрофида ўзгарувчанлик даражаси, яъни ўша қийматдан фарқ қилиш (четланиш) даражаси бўйича.

Биринчи гуруҳга турли “ўртача қийматлар”: арифметик ўртача қиймат, геометрик ўртача қиймат, мода, медианалар киради; Иккинчи гуруҳга: абсолют ўртача фарқ (хатолик), ўртача квадратик фарқ, дисперсия, вариация ва асимметрия коэффециентлари киради.

Биз бу бобда статистик характеристикаларнинг энг кўп қўлланадаганлари билан танишамиз.

2. Ўртача қийматлар: арифметик ва геометрик ўртача қийматлар.

- 1) Ўртача қийматлар орасида энг муҳими арифметик ўртача қиймат (миқдор)дир. Арифметик ўртача қийматни оддий ва вазний (вазн билан олинган) ўртача арифметик қийматларга ажратилади. Масалан, айтайлик, 5 та бир хил катталиқдаги ер майдонидан гектарида 32,28,30,31,33 центнердан пахта ҳосил йиғиб олинган бўлсин. Бу ҳолда ўртача ҳосил оддий арифметик ўртача қиймат бўлиб,

$$\frac{1}{5}(32+28+30+31+33)=\frac{154}{5}=30,8 \text{ ц. га тенг бўлади.}$$

Умуман, агар Π та кузатишда X миқдор учун $X_1, X_2, \dots, X_\Pi$ қийматларни ҳосил қилган бўлсак, уларнинг ушбу

$$X = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_\Pi}{\Pi} \quad (1)$$

ўртача қиймати **оддий арифметик ўртача қиймат** бўлади.

- 2) 16-жадвалда ҳар бир гектар ердан олинган пахта ҳосили тақсимооти (Ц. Ҳисобида) берилган.

16-жадвал

Бунда 28 ц ҳосил
2 марта, 29 ц ҳосил 5 марта
кузатилган ва ҳо казо.

x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - a$	$n_i(x_i - a)$
28	2	56	-2	-4
29	5	145	-1	-5
30	8	240	0	0
31	4	124	1	4
32	3	96	2	6
Жами	22	661		-9 +10

Бу ҳолда ўртача ҳосил вазний арифметик ўртача қиймат бўлиб, ушбу кўринишда ифодаланади:

$$X = \frac{2 \cdot 28 + 5 \cdot 29 + 8 \cdot 30 + 4 \cdot 31 + 3 \cdot 32}{22} = \frac{56 + 145 + 240 + 124 + 96}{22} = \frac{661}{22} = 30,05.$$

Умуман, агар X миқдорнинг S та қиймати

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_s$$

қиймати мос тартибда

$\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_s$

мартадан кузатилган бўлса, вазни ўртача қийматнинг умумий ифодаси

$$\bar{X} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_s x_s}{n_1 + n_2 + \dots + n_s} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i x_i}{\sum_{i=1}^n n_i} \quad (2)$$

Бўлади, бунда $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_s$ сонлар вазнлар деб аталади, Σ -йиғинди белгисидир.

3) арифметик ўртача қийматни (2) формула билан ҳисоблаш ҳар доим ҳам қулай бўлавермайди, чунки бу вевосита ҳисоблаш усули бўлиб, унга кўп меҳнат ва вақт талаб этилади.

Статистикада умумий ғоя ва қонидлар билан бир қаторда тажрибадан олинган материалларни тез ва содда ҳисоблаш усуллари ҳам муҳим роль ўйнайди. Статистикада бир қанча тез ва содда ҳисоблаш усуллари бор. Шулардан шартли вариантлар деб аталувчи усулни келтирамиз. (2) ифода орифметик ўртача қиймат учун қандай қиймат берса,

$$\bar{X} = a + \frac{\sum_{i=1}^s n_i (X_i - a)}{\sum_{i=1}^s n_i} \quad (3)$$

Ифода ҳам шу қийматни беришни кўрсатиш қийин эмас. Бунда а сифатида танланмадаги ихтиёрий варианта олинади (а сон ҳисоб боши ёки ёлғон ноль деб ҳам аталади).

а ни шундай танлаб олиш керакки, $X_1 - a, X_2 - a, \dots$ айирмалар мумкир қадар кичик бўлсин. Масалан, 16-жадвалда $a=30$ деб оламиз; мос $X_i - a$ айирма ва унинг такрорланувчисонга кўпайтмаси $\Pi_i (X_i - a)$ жадвалнинг 4 ва 5-устунларига жойлашган. Шу билан бирга 5-устуннинг 3-сатрдан пастда мусбат сонлар жойлашади. Бу ҳолда (3) тенгликка мувафиқ

$$X = 30 + \frac{-9 + 10}{22} = 30 + \frac{1}{22} = 30,05$$

Ни ҳосил қиламиз.

4) тўплам оралиғи h га тенг бўлган гуруҳларга ажратилган бўлсин. Масалан, 6- жадвалда (11-бет) гуруҳлар оралиғи $h=3$ см. Ҳисоб боши такрорлаши (варианталари сони) энг кўп бўлган гуруҳнинг ўртасига жойлаштирамиз ва ҳамма гуруҳларни ўсиш тартибида номерлаймиз. 6-жадвалда ҳисоб бошини (164-167) ораликдаги гуруҳга жойлаштирамиз. Бир гуруҳга кирган ҳар бир вариантанинг қиймати шу гуруҳнинг ўртасига тенг деб ҳисоблаймиз. Натижада 17-жадвал ҳосил бўлади.

Масалан, нолинчи гуруҳнинг ўртаси F_0 бўлсин (бизнинг мисолда $F_0=165,5$), у вақтда k -номерли гуруҳнинг шртача қиймати $F_k = F_0 + k \cdot h$ бўлади. Агар шартли

вариантлари К-гурӯҳга n_k та варианта тўғри келса, барча вариантлар сони эса П бўлса, у ҳолда уларнинг ўртача қиймати

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K n_k z_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K E(z_o + kh) \cdot n_k = z_o + \frac{h}{n} \sum_{k=1}^K k n_k = z_o + k \cdot h \quad (4)$$

бўлади.

17-жадвал

X_k	144,5	147,5	150,5	153,5	156,5	159,5	162,5	165,5	168,5	171,5	174,5	177,5	180,5	183,5	186,5	Жами
n_k	1	2	8	26	65	120	181	201	170	120	64	28	10	3	1	1000
k	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	

(4) формуладан кўрамизки, $\bar{X}$ ни топиш учун k нинг ўртача қиймати $\bar{K}$ ни топиш етарли, $\bar{X}$ ни ҳисоблашдан кўра, $\bar{K}$ ни ҳисоблаш осон, чунки:

А) одата p_k сон қанчалик катта (мисолимизда $n_o=201$) бўлса k нинг шунчалик кичик қийматга кўпайтирилади;

Б) ҳисоблашда k нинг абсолют қиймати тенг, лекин ишоралари турлича бўлган қийматлари p_k ларга кўпайтириб, сўнг қўшилиши мумкин.

Масалан, 6-жадвалда (17-жадвал) берилган маълумотлар учун арифметик ўрта қийматни ҳисоблаймиз:

$$\bar{X} = 165,5 + \frac{3}{1000} (-7 \cdot 1 - 6 \cdot 2 - 5 \cdot 8 - 4 \cdot 26 - 3 \cdot 65 - 2 \cdot 120 - 1 \cdot 181 + 0 \cdot 201 + 1 \cdot 170 + 2 \cdot 120 + 3 \cdot 64 + 4 \cdot 28 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1) = 165,5 + \frac{3}{1000} (-779 + 789) = 165,5 + \frac{3}{1000} \cdot 10 = 165,5 + 0,03 = 165,53$$

ҳисоблашда хатога йўл қўймаслик учун ҳисоб бошини бошқа гурӯҳга кўчириб, арифметик ўртача қийматни яна шу формула билан ҳисоблаб чиқиш керак. Масалан, бизнинг мисол учун ҳисоб бошини (161-164) ораликдаги гурӯҳга жойлаштирсак, у вақтда $Z_o=162,5$ бўлади; керакли ҳисоблашларни бажариб, уларни 18-жадвалда келтирамиз:

18-жадвал

Гурӯҳ ўртаси	144,5	147,5	150,5	153,5	156,5	159,5	162,5	165,5	168,5	171,5	174,5	177,5	180,5	183,5	186,5	Жами
K	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
n_k	1	2	8	26	65	120	181	201	170	120	64	28	10	3	1	1000
$K \cdot n_k$	-6	-10	-32	-78	-130	-120	0	201	340	360	256	140	60	21	8	-420 +1386

$$\bar{X} = 162,5 + \frac{3}{1000} (-420 + 1386) = 162,5 + \frac{3}{1000} \cdot 966 = 162,5 + \frac{2898}{1000} = 162,5 + 2,89 = 165,398.$$

$$\bar{X} = 165,398.$$

Энди арифметик ўрта қийматнинг энг содда ҳоссларини кўриб ўтайлик.
1⁰. Кузатилган қийматлар билан уларнинг вазний ўртача қиймати орасидаги айирмаларнинг вазний йиғиндисини нолга тенг:

$$\sum n_j (X_j - \bar{X}) = 0$$

Исбот.

$$\begin{aligned} \sum n_i (X_j - \bar{X}) &= \\ &= \sum_i n_j X_j - \sum_j n_j \bar{X} = \sum_j n_j x_j - \bar{X} \sum_j n_j = \sum_j n_j x_j - \frac{\sum_j n_j x_j}{n} * n = \sum_j n_j x_j - \sum_j n_j x_j = 0. \end{aligned}$$

Бу ҳоссани 17-18 жадвалдаги мисолимизга тадбиқ қилайлик.

$$\begin{aligned} \sum_j n_j (X_j - \bar{X}) &= 1*(144,5 - 165,53) + 2*(147,5 - 165,53) + 8*(150,5 - 165,53) + 26*(153,5 - \\ &165,53) + 65*(156,5 - 165,53) + 120*(159,5 - 165,53) + 181*(162,5 - 165,53) + 170*(168,5 - \\ &165,53) + 120*(171,5 - 165,53) + 64*(174,5 - 165,53) + 28*(177,5 - 165,53) + 10*(180,5 - \\ &165,53) + 3*(183,5 - 165,53) + (186,5 - 165,53) = -36,06 - 21 - 120 - 312 - 58,695 - 723,6 - \\ &548,43 + 504,9 + 716,4 + 574,08 + 335,16 + 149,7 + 53,91 + 20,97 = -2348,04 + 2355,12 = 7,08 \end{aligned}$$

Ҳисоблаш ишларидаги хатоликлар туфайли қисман фарқ келиб чиқди.

2⁰. ҳар қандай $X \neq \bar{X}$ қиймат учун

$$\sum_j n_j (X_j - \bar{X})^2 < \sum_j n_j (X_j - X)^2$$

Тенгсизлиги ўринлидир.

Исбот.

$$\sum_j n_j (X_j - X)^2 = \sum_j n_j (X_j - \bar{X})^2 + 2(\bar{X} - X) * \sum_j n_j (X_j - \bar{X}) + n(\bar{X} - X)^2 = \sum_j n_j (X_j - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - X)^2.$$

Бундан
$$\sum_j n_j (X_j - X)^2 > \sum_j n_j (X_j - \bar{X})^2.$$

Бу ҳосса арифметик ўртача қийматга алоҳида аҳамият касб этади.

3) **ўртача қийматларни қўшиш.** Агар биз n_1, n_2, n_3 та кузатишларга мос учта X_1, X_2, X_3 ўртача қийматни ҳосил қилсак, $n_1 + n_2 + n_3$ та кузатишлар учун $\bar{X}$ ўртача қийматни

$$\bar{X} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2 + n_3 \bar{X}_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

Тенгликка мувофиқ топамиз.

Масалан, вилоятдаги 10 та жамоа хўжалиги маълум бир нав пахтадан гектарига ўртача $\bar{X} = 40$ ц дан ҳосил олган бўлсин; шу вилоятдаги 5 та бошқа жамоа хўжаликлари шу навли пахтадан гектарига ўртача $\bar{X}_2 = 35$ ц дан ҳосил олган бўлсин. Барча 15 та жамоа хўжалигида гектарига олинган ҳосилнинг ўртача миқтори қандай?

Бу ҳолда жамланган ёки вазний ўртача қиймат қуйидагича аниқланади:

$$\bar{X} = \frac{10 \cdot 40 + 5 \cdot 35}{10 + 5} = \frac{400 + 175}{15} = 38,33 \quad \text{ц}$$

4) геометрик ўртача қиймат. Биологик ва қишлоқ хўжалик тадқиқотларида кўпинча у ёки бу белгининг вақтга кўра ўсишлари ўрганилади; масалан, поя баландлигининг, барг юзининг, ўсимлик ҳаётининг турли даврлардаги ўзгаришлари. Баъзан, ўрганилаётган белгининг кузатилаётган айрим тенг давраларда ўртача ўсиш сўратини ёки бутун ўсиш даврида ўртача суратини аниқлаш зарур бўлиб қолади. Бундай ҳолларда арифметик ўртача қийматдан фойдаланиш ноқулай бўлади. Қуйидаги формула бўйича **геометрик ўртача қийматини** ҳисобланади:

$$\bar{X}_{\text{геом}} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \quad (5)$$

Бу ерда $x_1, x_2, \dots, x_n$ – айрим даврлардаги ўсишлар, $\prod_{i=1}^n x_i$ – барча айрим ўсишларнинг кўпаймаси, n – даврлар сони. $n > 2$ бўлганда, логарифмлардан фойдаланиш қулайдир. У вақтда (5) формула қуйидаги кўринишга келади:

$$\lg \bar{X}_{\text{геом}} = \frac{1}{n} (\lg x_1 + \lg x_2 + \dots + \lg x_n), \quad (5)$$

сўнги $\lg \bar{X}_{\text{геом}}$ нинг қийматини потенцирлаш билан $\bar{X}_{\text{геом}}$ аниқланади.

Мисол. Жўхори поясининг ўн кунликларда ўсиш суратини ўрганиш мақсадида Воронеж-76 навининг 50 ўсимлиги ўлчанган. Дарвлар бўйича ўртача баландлик қуйидагича бўлган (см ҳисобида).

10, 29, 55, 110, 124, 129. ҳар ўн кунликдаги ўсиш суръатини иккита кетма-кет кузатилган баландликларни нисбати деб олиш мумкин. Улар мос равишда 2,90; 1,90; 2,00; 1,13; 1,04 га тенг. Бу миқдорларнинг арифметик ўртача қиймати 1,79 га тенг; шу сон ўртача ўсишни ифодалайди, яъни ўн кунликда поянинг баландлиги ўртача 1,79 марта катталашди. Буни текшириш учун биринчи кузатишдан кейин нечта кузатиш ўтказилган бўлса, 10 ни шунча марта кетма-кет 1,79 га кўпайтирамиз. Агар арифметик ўртача қиймат ўртача, ўсишни тўғри акс эттирса, кўпайтма сўнги қийматга, яъни 129 см га тенг бўлиши керак. Ҳисоблашлар кўрсатади:

$$10 \cdot 1,79 \cdot 1,79 \cdot 1,79 \cdot 1,79 \cdot 1,79 = 183 \text{ см.}$$

Сўнгги кузатишнинг ҳисобланган қиймати ва ҳақиқий қийматнинг тўғри келмаслиги арифметик ўртача қиймат ўртача ўсишини характерлиш учун етарли эмаслигини кўрсатади.

Энди ўсишларнинг геометрик ўртача қийматини (5^1) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$Lg \bar{X}_{geom} = \frac{1}{5} (\lg 2,90 + \lg 1,90 + \lg 2,00 + \lg 1,13 + \lg 1,04) = \frac{1,1122}{5} = 0,2224$$

$$\bar{X}_{geom} = 1,67$$

Текшириши: $10 \cdot 1,67 \cdot 1,67 \cdot 1,67 \cdot 1,67 \cdot 1,67 = 130$ см. ҳисоблаб чиқилган (130 см) ва ҳақиқий (129 см) натижалар орасидаги бир оз фарқ оралик ҳисоблашларни 0,01 гача яхлитлаш натижасидир.

5) **Медиана**. Вариацион қатор элементларининг сони тоқ бўлса, вариацион қаторнинг ўртасида жойлашган ҳад (варианта) **медиана** дейилади ва у M_e символ орқали белгиланади.

Масалан, 16,19,21,26,27,31,32,35,39,41,45,47,48 тақсимот учун 32 варианта медиана бўлади.

Энди вариантлар сони жуфт бўлсин. Масалан, қуйидаги вариацион қатор берилган бўлсин:

21,25,28,32,34,35,39,42,46,54,54,58, у вақтда таърифга кўра

$$M_e = \frac{1}{2} (35 + 39) = 37 \text{ бўлади.}$$

Агар тўпламнинг ҳажми катта бўлса, аввал уни гуруҳларга ажратилади, сўнггра йиғилган такрорланишлар қатори тузилади ва медиона қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$M_e = X_0 + h \frac{S_1 - S_2}{f} \quad (6)$$

Бу ерда X_0 –кузатишлар натижаларининг ярми жойлашган гуруҳнинг қуйи чегараси; h –оралиқнинг қиймати; S_1 –қатор умумий сонининг ярми; S_2 –медиона жойлашган гуруҳдан олдинги гуруҳнинг йиғилган такрорланиши; f –медиона жойлашган гуруҳнинг такрорланиши.

Мисол. Кузги буғдой бошоқларидаги донларининг оғирлиги (мг ҳисобида) бўйича тақсимоти (19-жадвал) учун медианани ҳисобланг.

19-жадвал

Гуруҳлар	401-500	501-600	601-700	701-800	801-900	901-1000	1001-1100	1101-1200	1201-1300	1301-1400	1401-1500
Такрорланишлар											
Ҳақиқий	8	16	32	49	84	126	75	45	34	20	11
Йиғилган	8	24	56	105	189	315	390	435	469	489	500

Ушбу жадвал ва (6) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$M_e = 901 + 100 \frac{250 - 189}{126} = 948,4mg$$

- 5) **Мода**. Берилган вариацион қаторда ўрганилаётган белгининг энг кўп учрайдиган қиймати **мода** дейилади ва M_o симболи билан белгиланади. Масалан, 11 нафар боланинг бўйи ўлчанганда қуйидаги натижалар олинган бўлсин (см ҳисобида):

127,127,128,128,128,129,130,131,132,134,136.

Бу қаторда модда 128 эканлигини кўрамиз.

Узликсиз вариацион қаторларда мода, одатда, вариантлар сони энг кўп бўлган гуруҳда бўлади. Бу гуруҳ **модал гуруҳ** деб аталади. Энг кўпол ҳисоблашда мода сифатида модал гуруҳнинг ўртасини олиш мумкин.

Гуруҳ ичида кузатишлар текис тақсимланмаган бўлиши мумкин, шунинг учун моданинг қийматини ҳисоблаганда қуйидаги формула яхшироқ натижа беради:

$$M_o = X_m + h \cdot \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})}, \quad (7)$$

Бу ерда X_m -модал гуруппанинг қуйи чегараси, h -гуруҳ оралиғи, P_m, P_{m-1}, P_{m+1} -модал гуруҳ ва унга чап ва ўнгдан қўшни гуруҳларнинг такрорланишлари.

(7) формуладан фойдалансак, 19-жадвалда берилган тақсимотнинг модаси қуйидагича ҳисобланди:

$$M_o = 901 + 100 \cdot \frac{126 - 84}{(126 - 84) + (126 - 75)} = 901 + 100 \cdot \frac{42}{42 + 51} = 901 + \frac{4200}{93} = 901 + 45,16 = 946,16.$$

$$M_o = 946,16.$$

3. Тарқоқлик ва ўзгарувчанлик ўлчови.

Арифметик ўртача қиймат ўрганилаётган тўплам учун белгининг қайси қиймати энг ҳарактерли эканини кўрсатади. Лекин унинг ўзи тўпламни ҳарактерлаш учун ҳали етарли эмас, чунки тўпламнинг ҳадлари орасидаги ҳар хиллик, яъни ўзгарувчанликнинг мавжудлиги тўпламнинг асосий хусусиятидир.

Тўпламдаги бирор белгининг ўзгарувчанлигини ҳисоблаш биологияда жуда катта аҳамиятга эга, чунки ўсимликлар ёки организмлар тўпламида ҳар хил ўзгарувчанлик оқибатида организмлар орасидаги фарқни, уларнинг ирсий табиатларини ва улар етиштириган шарт-шароитларни акс эттиради. Иккита тўпламни улардаги ўзгарувчанликни баҳоламасдан таққослаш мумкин эмас. **Масалан**, бир фермадаги икки гуруҳ сигирлардан соғиб

олинган ўртача сут миқдори бир-бирига жуда яқин бўлиши мумкин, лекин бир гуруҳдаги ҳар бир сигирдан соғиб олинadиган сут миқдори бир-биридан анча катта фарқ қилиши, бошқасида эса сигирлардан соғиб олинган сут миқдори бир-биридан унча катта фарқ қилмайдиган бўлиши ҳам мумкин.

Шу сабабали тўпламнинг ҳадлари орасидаги ўзгарувчанликни характерловчи шундай кўрсаткич киритиш керакки, у ҳамма вариантларнинг ўзгаришини умумлаштирсин.

Биз тўпламда бирор белгининг тўпламлари ўша белгини ўртача қиймати атрофида озми-кўпми тарқоқ бўлиши мумкинлигини кўрдик. Бу тарқоқлик белгининг қанчалик ўзгарувчанлигини кўрсатади. $X_1, X_2, \dots, X_n$ қийматларнинг ҳар бири $\bar{X}$ дан мусбат ёки манфий сонга фарқ қилади. Тарқоқлик одатда белгининг кузатилган қийматлари билан уларнинг ўртача қиймати орасидаги фарқлар (четланишлар $(X_i - \bar{X})$ лар) квадратлари йиғинлиси ёки ўртача квадратик фарқ (хатолик) дан олинган квадрат илдиз билан ўлчанади. **Масалан**, агар X миқдор учун $X=2,3,4,5,6$ қийматларни мос тартибда $N_x=3,7,10,8,2$ марта кузатган бўлсак, у ҳолда X нинг ўртача квадратик фарқи (хатолиги)

$$\frac{3(2-\bar{x})^2 + 7(3-\bar{x})^2 + 10(4-\bar{x})^2 + 8(5-\bar{x})^2 + 2(6-\bar{x})^2}{3+7+10+8+2}$$

Га тенг бўлади. Буни ҳисоблаш учун $\bar{X}$ ўртача қийматни билиш зарур. У ушбу $\bar{X} = (3 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 2 \cdot 6) / 30 = 119 / 30$ қийматга эга.

$\bar{X}$ нинг бу қийматини юқорида ёзилган ифодага қўйиб, биз X нинг ўртача квадратик фарқини топамиз:

$$\frac{3(-1,97)^2 + 7(-0,97)^2 + 10(0,03)^2 + 8 \cdot (1,03)^2 + 2 \cdot (2,03)^2}{30} = \frac{34,9670}{30} = 1,1656.$$

X миқдорнинг ўртача квадратик фарқи **дисперсия** дейилади ва G^2 орқали белгиланади. Бизнинг мисолда $G^2=1,1656$.

Дисперсиядан мусбат ишора билан олинган квадрат илдиз **таксимотнинг стандарти** ёки **ўртача квадратик хатоси** дейилиб, у G орқали белгиланади. Бизнинг мисолда

$$G = \sqrt{1,1656} = 1,08$$

Дисперсия ва стандартнинг умумий формулалари қуйидагича бўлади:

$$G^2 = \frac{n_1(X_1 - \bar{X})^2 + n_2(X_2 - \bar{X})^2 + \dots + n_s(X_s - \bar{X})^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i (X_i - \bar{X})^2, \quad (8)$$

$$G = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^s n_j (X_j - \bar{X})^2} \quad (9)$$

Ҳисоблашларни осонлаштириш мақсадида дисперсия ифодаисни бошқача кўринишда ёзамиз:

$$(X_i - \bar{X})^2 = X_j^2 - 2X_i \bar{X} + \bar{X}^2 \quad \text{бўлганлиги учун}$$

$$\Gamma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i (X_j - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i x_i^2 - 2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i x_i \bar{X} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i \bar{X}^2,$$

лекин

$$2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i \cdot x_i \bar{X} = 2 \bar{X} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i \cdot x_i = 2 \bar{X} \cdot \bar{X} = 2 \bar{X}^2,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i \cdot \bar{X}^2 = \bar{X}^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i = \bar{X}^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot n = \bar{X}^2.$$

Шунга асосан

$$\Gamma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i x_i^2 - \bar{X}^2. \quad (10)$$

$\Gamma^2 \geq 0$ эканлигидан $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i x_i^2 \geq \bar{X}^2$. G ни ҳисоблашда (10) формуладан

фойдаланамиз. Мисол сифтида юқорида келтирилган тақсимот учун $\Gamma = 1,08$ ни (10) формула ёрдамида ҳисоблаб кўрайлик:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i x_i^2 = \frac{1}{30} (3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 3^2 + 10 \cdot 4^2 + 8 \cdot 5^2 + 2 \cdot 6^2) = \frac{12 + 63 + 160 + 200 + 72}{30} = \frac{507}{30} = 16,9.$$

$$G = 16,9 - 3,97^2 = 16,9 - 15,7609 = 1,1391. \bar{X} = 119/30 \approx 3,97.$$

Ҳисоблаш ишларида баъзи сонлар яхлитланди, шунинг учун бу натижа юқоридаги натижадан озгина фарқ қилди.

Бош тўпламнинг (танланманинг) дисперсияси шу бош тўпламдан олинган танланманинг дисперсиядан $\frac{n}{n-1}$ марта катталиги назарий статистикадан маълум. Шунинг учун (8) формулани $\frac{n}{n-1}$ га кўпайтириб “тузатма” киритилади. Натижада (8) ва (9) формулалар қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\Gamma^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s n_i (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^s n_i (X_i - \bar{X})^2 \quad (11)$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^s n_i (X_i - \bar{X})^2} \quad (12)$$

$n-1$ миқдор озодлик даражалари сони (аниқроғи, вариациялар озодлик даражалари сони) деб аталади ва G (ню) ҳарифи билан белгиланди.

Агар n та кузатишдан олинган $X_1, X_2, \dots, X_n$ қатор маълум бўлса, арифметик ўртача қиймат унинг учун умумий характеристика эканлигини юқорида кўриб ўтдик. Қаторнинг ҳар бир алоҳида ҳадининг қийматини қандай аниқлаш мумкин деган савол туғилади. Агар қатор учун $\bar{X}$ маълум бўлса, ҳар бир ҳадни қаторнинг ўртача қиймати ва қолган ҳадларнинг йиғиндиси орқали ифода қилиш мумкин, яъни қаторнинг биттадан бошқа барча ҳадлари ҳар қандай қиймат олиши мумкин. Бундай ҳолларда битта варианта озодлик даражасига эга эмас деб аталади. n катта бўлганда махражда n ёки $n-1$ бўлиши дисперсия ва стандартни ҳисоблаш натижаларига тасир билимайди n кичик бўлганда фарқи сезиларли бўлади.

Узликсиз ўзгарувчан белгиларнинг асосий характеристикалари (параметрлари) бўлган арифметик ўртача қиймат ва зртача квадратик фарқ “дискретлаштирилган” тақсимотларда ҳисобланади. Бунинг учун гуруҳ ичидаги ўзгарувчанлик хусусиятларини ҳисобга олмасдан, биз частоталарни гуруҳларнинг ўртасидаги қийматларгагина тегишли деб ҳисоблаб, узликсиз вариацион қаторни дискрет қаторга айлантираемиз; бунинг натижасида тақсимотнинг чин характери бузилади. Бу ҳатони йўқотиш мақсадида инглиз олими Шеппард ҳисоблаб чиқилган Γ^2 қийматни $h^2/12$ га кўпайтириш кераклигини кўрсатди.

19-жадвалда берилган тақсимот учун Шеппард тузатмаси

$$\frac{h^2}{12} = \frac{100^2}{12} = \frac{10000}{12} = 833,33$$

Γ тенг, яъни етарли даражада катта.

Агар тўплам (танланма) ҳажми унча катта бўлмаса ($n < 500$), Шеппард тузатмаси киртилмаса ҳам бўлади.

Энди дисперсия ва стандарт (ўртача квадратик хатолик) нинг энг муҳим хоссаларини келтираемиз:

- 1) дисперсия ва стандартнинг иккаласи ҳам тарқоқлик ёки ўзгарувчанлик ўлчовидир: бирор миқдорнинг дисперсияси ёки стандарти қанча катта бўлса, унинг арифметик ўртача қиймати атрофидаги қийматлари шунча тарқокдир, яъни у шунча ўзгарувчандир. Дисперсия ёки стандартнинг кичиклиги миқдорнинг тарқоқлик ва ўзгарувчанлиги камлигини билдиради;
- 2) стандарт қайси миқдор учун ҳисобланган бўлса, ўша миқдор ўлчовида бўлади. Масалан, 19-жадвалда берилган тақсимот мг да бўлиб, унинг стандарти ҳам мг да олинади.

- 3) Ҳар қандай $X \neq \bar{X}$ учун $\Gamma^2 = \frac{1}{n} \sum_j n_j (X_j - \bar{X})^2 < \frac{1}{n} \sum_j n_j (X_j - X)^2$ бўлади. Бу ўртача қийматнинг 2-хоссасидан келиб чиқади.

- 4) Десперсияларни қўшиш. Масалан, агар битта бош тўпламдан n_1, n_2, n_3 ҳажмли 3 та танланма тўплам олинган бўлса, у ҳолда $n = n_1 + n_2 + n_3$ ҳажимли танланманинг Γ^2 десперсияси қуйидагича топилади:

$$\Gamma^2 = \frac{n_1 g_1^2 + n_2 g_2^2 + n_3 g_3^2}{n} + \frac{n_1 (\bar{X}_1 - \bar{X})^2 + n_2 (\bar{X}_2 - \bar{X})^2 + n_3 (\bar{X}_3 - \bar{X})^2}{n}$$

бунда $\bar{X}$ жами n та кузатишининг ўртача қиймати, яъни

$$\bar{X} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + n_3 \bar{x}_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

Бошқача айтганда, умумий G^2 десперсия хусусий десперсияларнинг вазний ўртача қиймати билан хусусий $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ ўртача қийматларини умумий ўртача қиймат ($\bar{X}$) “атрофидаги десперсияси” йиғиндисига тенгдир.

Бу хосса бир неча бир жинсли танланмаларни бир тўпламга бирлаштирганимизда десперсиянинг қандай ўзгаришини кўрсатади.

4. Вариация ёки ўзгарувчанлик коэффиценти.

Факат G ўртача квадратик оғиш (хатолик) нинг ўзи ўрганлаётган миқдорнинг ўзгарувчанлигини тўлиқ ҳаракатерлаб бера олмайди. Ҳақиқатан ҳам, ўртача узунлиги 5,4 мм бўлган буғдой донлари учун $G=1,8$ мм стандарт вариантларнинг анчагина тарқоқ эканлигини билдирса, ўртача узунлиги 129 мм бўлган бадринглари учун эса ўша $G=1,8$ мм қиймат узунлигини кўрсатади. Шу сабабли ушбу формула орқали нисбий ўртача фарқ (хатолик) тушунчаси киритилади:

$$V = \frac{G}{\bar{X}} \quad (13)$$

Фойизда ифодаланадиган бу миқдор **вариация** (ўзгарувчанлик) коэффиценти деб аталади.

Мисол. Ўрта Осиё ипакчилик илмий текшириш институтидан олинган маълумотларга асосан 100 та пилла бўйининг ўртача узунлиги $\bar{X}=3,43$ см, унинг стандарти $G_x=0,1073$ см, уларнинг ўртача эни $\bar{Y}=1,65$ см, унинг стандарти $G_y=0,1024$ см. Уларнинг вариация коэффиценти

$$v_1 = \frac{G_x}{\bar{X}} \cdot 100\% = \frac{0,1073}{3,43} \cdot 100\% \approx 3,1\%,$$

$$v_2 = \frac{G_y}{\bar{Y}} \cdot 100\% = \frac{0,1024}{1,65} \cdot 100\% = 6,2\%$$

бўлади.

Вариация коэффиценти ҳадлари турли ўлчам бирлигига эга бўлган тўпламларнинг ўзгарувчанлигини таққослашга ҳам имконият беради, чунки у

таққосланадиган миқдорларнинг ўлчам бирлигига боғлиқ бўлмаган нисбий сондир.

Масалан., маълумотларга кўра соғди сигирларнинг ўртача оғирлиги (вазни) $\bar{X} = 400$ кг, унинг стандарти $G_x = 48$ кг га тенг, сигирларнинг сутидаги ёғнинг ўртача фойизи $\bar{y} = 4\%$, унинг стандарти $G_y = 0,2\%$. Биз

$$V_x = \frac{G_x}{\bar{X}} \cdot 100 = \frac{48}{400} \cdot 100 = 12\% \text{ ва } V_y = \frac{G_y}{\bar{y}} \cdot 100 = \frac{0,2}{4} \cdot 100 = 5\%$$

Эканлигини топиб сигирларнинг оғирлиги ва уларнинг сутидаги ёғнинг ўзгарувчанликларини таққослай оламиз: ёғ ўзгарувчанлиги оғирлик ўзгарувчанлигидан кам.

3-март, 8-амалий машғулот.

Мавзу: Асимметрия коэффициенти. Статистик моментлар.

Режа:

1. Асимметрия коэффициенти.
2. Статистик моментлар
3. Танланманинг ўртача қиймати, дисперсияси ва асимметрия коэффициенти хисоблашнинг содда усуллари.

Мавзунинг баёни: 1. Асимметрия коэффициенти.

Арифметик ўртача қиймат ва ўртача квадратик фарқ (хатолик) вариантларнинг арифметик ўртача қийматга нисбатан гуруҳларга қандай тақсимланиши ҳақида ҳеч қандай маълумот бермайди. Аммо вариацион қаторнинг тузулиши ҳақидаги маълумот ҳодисанинг биометрик муҳим элементини ташкил этади.

Биологик белгиларнинг кўпчилиги нормал қонун бўйича (бу қонунни кийинги мавзуларда кўрамиз) тақсимланиши маълум. Бунда вариацион қаторларда вариантлар гуруҳларга арифметик ўрта қийматнинг иккала томонида етарли даражада текис тақсимланади: симметрик тақсимотларнинг (масалан нормал қонуннинг) мода, медиана ва арифметик ўрта қийматлари биригата тенг, яъни бундай ҳолларда $M_o = M_e = \bar{X}$ тенглик ўринли бўлади. Аммо статистик амалиётда **асимметрик** (яъни симметрик бўлмаган) тақсимотлар ҳам учраб туради. Масалан, 20-жадвалда пахтанинг маълум бир нави учун тола узунлигининг тақсимоти, 5- чизмада эса шу тақсимотнинг такрорланишлар полигони келтирилган, такрорланишлар (частоталар) полигонининг асимметриклиги кўзга ташланиб турибди. [1]

20-жадвал

X_i мм	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39
n_i	8	12	21	33	56	98	183	256	214	97	22

Тақсимот асимметриясини сон жиҳатдан характерловчи параметр топиш керак.

Миқдорнинг асимметриясини

$$\lambda = \frac{\bar{X} - M_0}{\Gamma}$$

орқали аниқланади. Бу миқдор тақсимотнинг асимметриклиги (қийшайганлиги) деб аталади. λ ўлчамсиз нисбий миқдордир. Масалан, 20-жадвалдаги тақсимот учун ҳисоблашлар қуйидагиларни беради:

$$\bar{X} = 28,68; \quad \Gamma = 5,69 \text{ ва } M_0 = 30$$

$$\text{Демак, } \lambda = \frac{28,68 - 30}{5,69} = -0,23.$$

Агар $\bar{X} > M_0$ бўлса $\lambda > 0$ бўлиб, у вақтда асимметрия мусбат ҳисобланади. Акс ҳолда асимметрия манфий деб ҳисобланади. Такрорланишлар мусбат асимметрияда тақсимотнинг кўпроқ чап қисмида тўпланади: бундай қаторнинг учи чапга сурилган бўлади. Манфий асимметрияда, аксинча, вариантлар қаторнинг ўнг қисмида кўпроқ тўпланади; бундай қаторнинг учи ўнга сурилган бўлади. Модани аниқ баҳолаш қийин бўлгани учун асимметрияни баҳолаш анча кўпол бўлиб чиқади. Шунинг учун тақсимотнинг асимметриясини бошқа параметр билан баҳолаш афзалроқ. Бунинг учун ўртача кубик фарқни ҳисоблаймиз:

$$\xi^3 = \frac{1}{n} \sum_i n_i (X_i - \bar{X})^3$$

Ўртача кубик фарқ (четланиш, хатолик) умумий ҳолда нолдан фарқли бўлади. Тақсимот симметрик бўлганда $\sum_i n_i (X_i - \bar{X})^3 = 0$ бўлади. Тақсимот асимметрик бўлганда эса бу кўрсаткич ё мусбат ёки манфий миқдорни беради ва бу миқдор асимметриянинг ўлчови бўлиб хизмат қилади. λ миқдор киритилган ҳолдаги каби δ^3 миқдорни бирор стандартга нисбати олинади; кўрилатган ҳолда параметр ўлчамсиз, нисбий бўлиши учун шундай стандарт сифатида Γ ни эмас, балки Γ^3 ни олиш мақулдир:

$$A_s = \frac{\delta^3}{\Gamma^3} \quad (14)$$

A_s параметр тақсимотнинг асимметрия коэффиценти деб аталади.

Симметрик тақсимотларда асимметрия коэффиценти нолга тенг. Агар $A_s \leq 0,25$ бўлса, асимметрия кам деб ҳисобланади. $A_s \geq 0,5$ да тақсимотнинг асимметриклиги (носимметриклиги) кўп бўлади. A_s коэффицентнинг қиймати тақсимот графигининг асимметрияга қараганда муҳимроқ кўрсаткичидир,

чунки тақсимот графигининг формаси маълум даражада вариантларни гуруҳларга ажратиш усулига боғлиқ бўлади.

Биологик белгиларнинг кўпчилиги озми-кўпми симметрик тақсимланган бўлади. Ҳўш, асимметрик тақсимотларга нималар сабаб бўлади? Бу сабабалар икки турда бўлиши мумкин: техникавий ва биологик сабабалар, яъни асимметрияга ҳодисанинг табиатиғина сабаб бўлмаслиги балки мумкин.

Маълумки, “сохта” асимметрия билан бирга танланма материални гуруҳлашга боғлиқ бўлмаган тақсимотлар ҳам учрайди. Кузатишлар бундай объектив сабабларнинг кўплигини кўрсатади. Масалан, тақсимот эгри чизиғининг икки учлилиги тўплам таркибининг бир жинсли эмаслигини, ўша биргина танланмага, турли навларга, зотларга ёки турларга ва ҳоказоларга тигишли бўлган биологик гуруҳларнинг вакиллари кирганлигини кўрсатади. Асимметрия берилган тўпламдаги индивидларнинг ноқулай шароитлардан ва ҳоказолардан келиб чиқиши мумкин. Шундай қилиб, асимметрия турли табиатга эга бўлиши мумкин ва уни биометрик кўрсаткичларга асосан тушунтириш ҳар доим ҳам мумкин бўлавермайди.

2. Статистик моментлар.

Юқорида ўртача қиймат, дисперсия ва асимметрия коэффицентини ҳисоблашда

а

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum n \cdot x_i, \bar{\xi}^2 = \frac{1}{n} \sum n_i (x_i - \bar{x})^2 \quad (15)$$

$$\bar{\xi}^3 = \frac{1}{n} \sum n_i (X_i - \bar{X})^3 \quad (16)$$

микдорлардан фойдаланишга тўғри келди. Бу формулаларнинг ҳаммасига битта умумий

$$M_h = \frac{1}{n} \sum n_i (X_i - \bar{X})^h \quad (17)$$

формуланинг хусусий ҳоллари сифатида қараш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам $h=1$ ва $X=0$ да $\bar{x}$ ҳосил бўлади; $h=2$ ва $X=\bar{X}$ да $\bar{\xi}^2$ ҳосил бўлади; $h=3$ ва $X=\bar{X}$ да $\bar{\xi}^3$ ҳосил бўлади. (17) микдор (x_i, n_i) тақсимотнинг X га нисбатан h -тартибли моменти деб аталади.

Агар $X=0$ деб олинган бўлса, у вақтда момент бошланғич момент деб аталади ва α_h белгиланади. Агар X сифатида тақсимот маркази $\bar{X}$ олинган бўлса, у вақтда момент марказий момент деб аталади ва уни m_h билан белгиланади. Демак, $\bar{X}$ -биринчи таркибли боланғич моментдир: $\bar{X} = M_1$; дисперсия ёки ўртача квадратик фарқ иккинчи тартибли марказий моментдир:

$\Gamma^2=M_2$;ўртача кубик фарқ учунчи тартибли марказий молинта: $\bar{\xi}^3 = M_3$.
Асимметрия коэффициентини эса қуйидагича ёзилади:

$$A_s = \frac{M_3}{G^3} = \frac{M_3}{\sqrt{M_2^3}} \quad (18)$$

Берилган тақсимотнинг марказий ва бошланғич моментлари орасидаги боғланишга қисқача тўхтаб ўтайлик

$$\Gamma^2 = \bar{X}^2 - (\bar{X})^2 \quad (19)$$

Эканлигидан $M_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$ (19¹)
Кўринишга келади.

Худди шунга ўхшаш қуйидаги формулаларни ҳосил қилиш мумкин:

$$M_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 \quad (20)$$

$$M_4 = \lambda_4 - 4\lambda_1\lambda_3 + 6\lambda_1^2\lambda_2 - 3\alpha_1^4, \quad (21)$$

Бу ерда $\lambda_1 = \frac{1}{n} \sum_i n_i x_i, \lambda_2 = \frac{1}{n} \sum_i n_i x_i^2, \lambda_3 = \frac{1}{n} \sum_i n_i x_i^3,$

$\lambda_4 = \frac{1}{n} \sum_i n_i x_i^4$. оддий алмаштиришлар ёрдами билан M_3 ва M_4 ни текшириш учун

$$M_3 = \alpha_3 - 3m_2\alpha_1 - \alpha_1^3,$$

$$M_4 = \alpha_4 - 4m_3\alpha_1 - 6m_2\alpha_1^2 - \lambda_1^4,$$

Формулаларни ҳосил қилиш мумкин.

3. Танланманинг ўртача қиймати, дисперсияси ва асимметрия коэффициентини ҳисоблашнинг содда усуллари.

Танланма хараактеристикаларини ҳисоблашнинг соддалаштирилган усуллари X_i вариантларни унча катта бўлмаган I_i бутун сонлар-шартли вариантларга алмаштиришга асосланган. X_i бошланғич вариантдан I_i шартли вариантларга ўтиш ушбу

$$I_i = \frac{X_i - C}{h}$$

тенглик орқали амалга оширилади; бу ерда “С-сохта ноль” (янги ҳисоб боши), h -қадам, яъни иккита қўшни варианта орасидаги айирма (янги масштаб бирлиги).

Агар вариацион қатор h қадам билан тенг узоқликда бўлган вариантлардан ташкил топган бўлса, у вақтда шартли вариантлар бутун сонлардан иборат бўлишини кўрсатиш мумкин. Сохта ноль сифатида, одатда, такрорланиши энг кўп бўлган X_m варианта олинади.

K -тартибли шартли статистик момент деб, шартли вариантлар учун ҳисобланган

$$\alpha_k^* = \frac{1}{n} \sum H_i^k n_i = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{X_i - C}{h} \right)^k \cdot n_i$$

k -тартибли бошланғич моментни айтамыз. Бир хил тартибли бошланғич ва шартли моментлар орасидаги боғланишни топамиз:

$$\lambda_k^* = \frac{1}{h^k} \cdot \frac{\sum (X_i - C)^k \cdot n_i}{h} = \frac{\lambda_k}{h^k}, \quad (22)$$

Бундан $\alpha_k = \lambda_k^* \cdot h^k$

бўлади.

Шундай қилиб, K -тартибли бошланғич статистик молинти топиш учун K -тартибли шартли моментни h^k га кўпайтириш кифоя. Жумладан,

$$\lambda_1^* h = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{X_i - C}{h} \right) \cdot n_i = \frac{1}{n} \sum X_i N_i - C \frac{1}{n} \sum n_i = \bar{X} - C$$

Бундан, $\bar{X} = \lambda_1^* h + C \quad (23)$

Шундай қилиб, танланма ўртача қийматни топиш учун биринчи тартибли шартли моментни топиб, уни h га кўпайтириш ва натижага сохта нолни қўшиш кифоя.

Марказий моментларни бевосита ҳисоблаш узундан –узоқ бўлгани учун марказий моментларни бошланғич моментлар орқали ифодаловчи (19¹), (20) ва (21) формулалардан фийдаланишни олдин кўриб ўтган эдик. Шу тенгликлар ва (22) муносабатдан фойдаланиб, марказий моментларни ҳисоблаш учун қулай бўлган ушбу

$$M_2 = (\alpha_2^* - (\alpha_1^*)^2) h^2 \quad (24)$$

$$M_3 = (\alpha_3^* - 3\alpha_2^* \alpha_1^* + 2(\alpha_1^*)^3) \cdot h^3 \quad (25)$$

Формулаларни ҳосил қиламиз.

Жумладан, танланма дисперсияни биринчи ва иккинчи тартибли шартли моментлар бўйича ҳисоблаш учун

$$G^2 = [\alpha_2^* - (\alpha_1^*)^2] h^2 \quad (26)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Асимметрия коэффициентини ҳисоблаш учун эса

$$A_s = \frac{[\acute{a}_3^* - 3\acute{a}_2^* \cdot \acute{a}_1^* + 2(\acute{a}_1^*)^3 \cdot h^3]}{G^3} \quad (27)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Кўпайтма усул деб аталадиган бу усул тенг узоқликда жойлашган вариантлардан иборат вариацион қаторнинг турли тартибли шартли моментларини ҳисоблаш учун қулайдир.

Шартли моментларни билган ҳолда бизни қизиқтирувчи бошланғич ва марказий статистик моментларни ҳисоблаш қийин эмас. Жумладан, кўпайтма усули билан танланманинг арифметик ўртача қиймати, дисперсияси ва асимметрия коэффициентини ҳисоблаш қулай.

Қуйидаги тартибда тузулган ҳисоблаш жадвалидан фойдаланиш мақсадига мувофиқдир:

- 1) вариантларни ўсиш тартибида жадвалнинг биринчи устунига ёзилади;
- 2) вариантларнинг такрорлашларини иккинчи устунга ёзилади; ҳамма такрорланишлар жамланади ва уларнинг жамини (танланманинг ҳажми Π ни) устуннинг остки катагига ёзилади;
- 3) $H_i = \frac{1}{n}(X_i - C)$ шартли вариантларни учинчи устунга ёзилади, бунда C сохта ноль сифатида энг кўп такрорланган варианта олинади ва ихтиёрий иккита кўшни варианта орасидаги айирма h деб олинади; учунчи устун амалда бундай тўлдирилади: энг такрорланган варианта бўлган сатрнинг катагига 0 ёзилади, нолнинг устидаги катакларга бирин-кетин -1, -2, -3, ва хоказо, нольнинг остидаги катакларга эса 1, 2, 3 ва хоказо ёзилади.
- 4) Шартли вариантларни такрорлаш сонларига кўпайтирилади ва уларнинг n_i и i кўпайтмалари тўртинчи устунга ёзилади; ҳосил бўлган ҳамма сонларни кўшиб, уларнинг $\sum n_i u_i^2$ йиғиндиси устуннинг энг пастки катагига ёзилади;
- 5) такрорланиш сонларини шартли вариантларнинг квадратларига кўпайтирилади ва n_i и i^2 кўпайтмалар бешинчи устунга ёзилади; ҳосил бўлган ҳамма сонларни кўшиб, уларнинг $\sum n_i u_i^2$ йиғиндиси устуннинг энг пастки катагига ёзилади;
- 6) олтинчи устунни тўлдириш учун 3 ва 5 устунларнинг ҳар бир сатридаги сонларни кўпайтириб чиқиш қулайдир; ҳосил бўлган ҳамма сонларни кўшиб, уларнинг $\sum n_i u_i^3$ йиғиндиси устуннинг энг пастки катагига ёзилади;
- 7) 7-устун ҳисоблашларни

$$\sum_i n_i (H_i + 1)^3 = \sum_i n_i H_i^3 + 3 \sum_i n_i H_i^2 + 3 \sum_i n_i H_i + n$$

айният орқали текшириш учун хизмат қилади.

Арифметик ўртача қиймат, дисперсия ва асимметрия келтирилган тақсимот мисолида кўриб ўтайлик. Бу мисолда сохта ноль сифатида $C = 30$ вариантани оламыз; h кадам 3 га тенг. Натижада 21-ҳисоблаш жадвалини ҳосил қиламиз.

$$\sum n_i u_i^3 + 3 \sum n_i u_i^2 + 3 \sum n_i u_i + n = -10968 + 3 \cdot 3756 + 3$$

Назорат қилиш:

$$(-438) + 1000 = -14 \cdot \sum n_i (I_i + 1)^3 = -14.$$

Демак, ҳисоблашлар тўғри бажарилган.

Шартли бошланғич моментларни топиш учун ҳосил бўлган умумий натажаларни тўплам ҳажмига бўлиш керак.

Мисолимизда

$$\hat{a}_1^* = \frac{-438}{1000} = -0,438; \hat{a}_2^* = \frac{3756}{1000} = 3,756; \hat{a}_3^* = \frac{-10968}{1000} = -10,968.$$

Энди (24) ва (25) формулалар бўйича марказий моментларни топамиз.

$$M_2 = [3,756 - 0,438^2] \cdot 3^2 = 3,564 \cdot 9,$$

$$M_3 = [-10,968 + 3 \cdot 3,756 \cdot 0,438 - 2 \cdot 0,438^2] \cdot 3^3 \approx -6,20 \cdot 27,$$

21-жадвал

X_i	N_i	I_i	$I_i \cdot N_i$	$N_i \cdot I_i^2$	$N_i \cdot I_i^3$	$N_i (I_i + 1)^3$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
9	8	-7	-56	392	-2744	-1728
12	12	-6	-72	432	-2592	-1500
15	21	-5	-105	525	-2625	-1344
18	33	-4	-132	528	-2112	-891
21	56	-3	-168	504	-1512	-448
24	98	-2	-196	392	-784	-98
27	183	-1	-183	183	-183	0
30	256	0	0	0	0	256
33	214	1	214	214	214	1712
36	97	2	194	388	776	2619
39	22	3	66	198	595	1408
-			-912 +474		-12552 +1585	-6009 +5995
жами	1000		-438	3756	-10968	-14

--	--	--	--	--	--	--

Ниҳоят куйидаги натижаларга эга бўламиз:

$$\bar{X} = \alpha_1^* \cdot h + C = -0,438 \cdot 3 + 30 = -1,314 + 30 \approx 28,68 \text{ мм}$$

$$G^2 = M_2 = 3,564 \cdot 9 = 32,04 \text{ мм}^2$$

$$G = \sqrt{3,56 \cdot 3} = 1,89 \cdot 3 = 5,67 \text{ мм}$$

$$A_s = \frac{-6,20 \cdot 27}{3,564 \cdot 1,89 \cdot 27} = -0,92$$

Ҳисоблашнинг соддалаштирилган усулини кўрсатиш мақсадида Белоцеркавская 198 навли буғдой бошоғи ўзаги узунлигининг ўзгарувчанлиги натижасида бошоқ ўзагининг узунлигини см ҳисобида кўрсатувчи куйидаги сонли қатор ҳосил бўлган:

5,9 7,5 8,7 8,5 9,6 8,4 7,7 8,6 6,3 5,7 8,4 8,8 8,2 8,9 8,4 8,7
7,3 6,5 6,0 9,0 9,1 8,6 9,0 9,0 6,5 7,9 6,8 6,7 9,5 9,7 8,8 9,9
8,6 7,0 8,2 6,9 7,0 9,6 10,0 10,0 7,2 8,5 7,5 8,5 7,1 7,2 9,8 7,8
7,9 7,6 8,2 7,9 8,9 6,9 7,5 8,5 8,8 8,2 7,5 8,5 7,8 8,0 7,3 9,1
7,7 9,2 8,5 7,5 8,5 8,0 8,1 10,6 9,1 8,0 9,5 8,5 7,4 8,3 8,0 8,2

Ҳаммаси бўлиб 80 та варианта энди бу тўпламни гуруҳларга ажратамиз. Бизнинг мисолда $X_{\max} = 10,6$ ва $X_{\min} = 5,7$. Гуруҳлар сонини $K=10$ деб оламизб у ҳолда гуруҳлар оралиғи кенглиги

$$\Delta X = \frac{10,6 - 5,7}{10} = \frac{4,9}{10} = 0,49 \approx 0,5 \text{ см}$$

Тўпламни гуруҳларга ажратиш натижасида 22-жадвал ҳосил бўлади.

22-жадвал

Гуруҳларнинг чегаралари	Варианталарни гуруҳларга тарқатиш	Такрорланиш сони
5,65-6,15	111	3
6,15-6,65	111	3
6,65-7,15	1111 111	7
7,15-7,65	1111 1111 111	11
7,65-8,15	1111 1111 1111	12
8,15-8,65	1111 1111 1111 1111 1111	20
8,65-9,15	1111 1111 1111 1	13
9,15-9,65	1111 1	5
9,65-10,15	1111 1	5

10,15-10,65	1	1
Жами		80

Ҳар бир гуруҳ учун унинг ўртача қиймати олиниб, 22-жадвалдан 23-жадвал ҳосил қилинади. 23-жадвалда берилган тақсимот учун арифметик ўртача қиймат, дисперсия ва асимметрия коэффицентини кўпатма усулида ҳисоблаймиз. Сохта ноль сифтаида 8,4 сонини оламиз, h қадам 0,5 га тенг; натижада 24-ҳисоблаш жадвални ҳосил қиламиз.

23-жадвал

X _i	5,9	6,4	6,9	7,4	7,9	8,4	8,9	9,4	9,9	10,4	Жами
N _i	3	3	7	11	12	20	13	5	5	1	80

24-жадвал

X _i	N _i	I _i	N _i · I _i	N _i · I _i ²	N _i · I _i ³	N _i · (I _i +1) ³
1	2	3	4	5	6	7
5,9	3	-5	-15	75	-375	-192
6,4	3	-4	-12	48	-192	-81
6,9	7	-3	-21	63	-189	-56
7,4	11	-2	-22	44	-88	-11
7,9	12	-1	-12	12	-12	0
8,4	20	0	0	0	0	20
8,9	13	1	13	13	13	104
9,4	5	2	10	20	40	135
9,9	5	3	15	45	135	320
10,4	1	4	4	16	64	125
-			82		856	340
+			42		252	704
Жами	80		-40	336	-604	364

Назарат қилиш:

$$\sum n_i I_i^3 + 3 \sum n_i I_i^2 + 3 \sum n_i I_i + n = -604 + 3 \cdot 336 + 3 \cdot (-40) + 80 = 364, \sum n_i (I_i + 1)^3 = 364.$$

Демак, ҳисоблашлар тўғри бажарилган. Шартли бошланғич моментларни топиш учун ҳосил бўлган умумий натижаларни тўплам ҳажмига бўлиш керак:

$$\alpha_1^* = \frac{-40}{80} = -0,5, \alpha_2^* = \frac{336}{80} = 4,2, \alpha_3^* = \frac{-604}{80} = -7,55.$$

Энда (24) ва (25) формулалар бўйича марказий моментларни топамиз:

$$M_2 = [4,2 - 0,5^2] \cdot (0,5)^2 = 3,95 \cdot 0,25 = 0,2875,$$

$$M_3 = [-7,55 + 3 \cdot 4,2 \cdot (-0,5) + 2(-0,5)^3] \cdot (0,5)^3 = -1,5 \cdot (0,5)^3.$$

Нихоят, куйидаги натижаларга эга бўламиз:

$$\bar{X} = \alpha_1^* \cdot h + C = -0,5 \cdot 0,5 + 8,4 = -0,25 + 8,4 = 8,15 \text{ см}$$

$$G^2 = M_2 = 3,95 \cdot 0,25 = 0,2875$$

$$G = \sqrt{3,95 \cdot 0,25} = 1,99 \cdot 0,5 = 0,995 \text{ см}$$

$$A_s = \frac{-1,5 \cdot (0,5)^3}{3,95 \cdot 0,25 \sqrt{3,95 \cdot 0,25}} = \frac{-1,5(0,5)^3}{3,95 \cdot \sqrt{3,95} \cdot (0,5)^3} \approx \frac{-1,5}{3,95 \cdot 1,99} = \frac{-1,5}{4,6605} \approx -0,32$$

II боб мавзулари бўйича машқ қилиш учун Масалалар

1-мисол. Қуйида Ўрта Осиё ипакчилик илмий текшириш институтида олинган пилла ва унинг қобиғи оғирликлари берилган. Уларнинг арифметик ўртача қиймати, дисперсияси, вариация ва асимметрия коэффициентларини топинг.

а-ҳол. Пилла куртининг
урғочилари

№№	Оғирлиги	
	Пилла (г)	Қобиғи (мг)
1	1,65	370
2	2,05	410
3	1,85	455
4	1,95	455
5	1,80	415
6	1,95	458
7	2,00	477
8	2,25	553
9	2,05	490
10	1,95	465
11	2,00	515
12	2,05	467
13	2,09	475

б-ҳол. Пилла куртининг
эркаклари

№№	Оғирлиги	
	Пилла (г)	Қобиғи (мг)
1	1,60	449
2	1,60	410
3	1,70	503
4	1,50	402
5	1,55	453
6	1,40	401
7	1,50	401
8	1,45	405
9	1,50	400
10	1,50	421
11	1,55	449
12	1,60	428
13	1,50	445
14	1,70	427
15	1,50	400

2-мисол. I боб, 2-Мисолдаги вариацион қатор учун $\bar{X}, G^2, \delta_{\text{ва}A_s}$ ни ҳисобланг. Баён этилган ҳисоблаш усулларида қайсинисини қўллаш қулай эканлигини ўйлаб кўринг.

3-мисол. I боб, 2-мисолдаги 3), 4) вариацион қаторлар учун $\bar{X}, G^2, \delta_{\text{ва}A_s}$ ни ҳисобланг.

4-мисол. I боб, 3-мисолдаги 1), 2) вариацион қаторлар учун $\bar{X}, G^2, \delta_{\text{ва}A_s}$ ни ҳисобланг.

5-мисол. Қуйида эркалар бўйи (см ҳисобида) ҳақида маълумотлар берилган:
162 151 161 170 167 164 166 164 173 172 165 153 164 169 170 154 163
159 161 167 168 164 170 166 176 157 159 158 160 161 167 155 166 167

173 165 175 165 174 167 170 169 159 159 160 156 161 162 161 181 159
 169 160 169 161 161 166 164 170 180 158 167 169 165 166 172 168 171
 178 178 171 165 161 162 182 164 171 169 176 177 170 169 171 160 165
 165 179 161 178 173 168 171 163 165 166 166 166 169 167 166 167 172
 169 171 168 162 165 168 171 174 165 168 167 170 170

$\bar{X}$ арифметик ўртача қимат ва Γ стандартни аниқланг 6-мисол. Беш гуруҳ пилла учун қуйидаги арифметик ўртача қиматлар (г ҳисобида) ҳосил бўлган: $\bar{X}=2,03$ ($n=10$); $\bar{X}=1,92$ ($n=3$); $\bar{X}=1,87$ ($n=7$); $\bar{X}=1,78$ ($n=5$); $\bar{X}=1,75$ ($n=15$).

Вазний арифметик ўртача қийматни ҳисобланг. Вазний арифметик ўртача қиймат айрим пилла гуруҳларининг “вазнларини” ҳисобга олмасдан ҳисобланган арифмети ўртача қийматдан қанчалик фарқ қилади?

7-мисол. Етти гуруҳ ғўза учун қуйидаги арифметик ўртача қийматлар (баландликлар см ҳисобида) ҳосил бўлган:

$\bar{X}=43$ см ($n=10$); $\bar{X}=42,5$ см ($n=7$); $\bar{X}=38,8$ см ($n=3$); $\bar{X}=40,5$ см ($n=5$); $\bar{X}=41$ см ($n=5$); $\bar{X}=39,5$ см ($n=12$); $\bar{X}=42,3$ см ($n=13$).

Вазний арифметик ўртача қийматни ҳисоблаб чиқинг. X вазний арифметик ўртача қиймат айрим ғўза гуруҳларининг “вазнилари” ҳисобга олмасдан ҳосил қилинган $\bar{X}$ арифметик ўртача қийматдан қанчалик фарқ қилади?

8-мисол. Ширкат хўжалигида турли майдонларга турли ғалла экинлари экилган ва қуйидаги ҳосил олинган:

Ғалла	Ҳосилдорлик (гектарига ц ҳисобида)	Майдон (га ҳисобида)
Кузги буғдой	15,2	170
Баҳорги буғдой	9,4	450
Жўхори	16,0	600
Арпа	9,5	150

Ширкат хўжалигида ўртача ҳосилдорлик қандай?

9- мисол. Тажриба станциясида турли майдонларга турли нав пахта ўсимликлари экилган ва қуйидаги ҳосил олинган:

Пахта	Ҳосилдорлик (гектарига ц ҳисобида)	Майдон (га ҳисобида)
Л-15 X Л-12 нави	40,8	9
Л-15 X Л-16 нави	41,5	5
Л-47 X Л-15 нави	41,3	11

Тажриба станциясида ўртача ҳосилдорлик қандай?

10-мисол. 4,5 ёш ва ундан ктга бўлган валах она қўйлар думининг узунлигини (см ҳисобида) ўлчаш натижалари қуйидагича бўлган:

Думнинг узунлиги	Такрорланиш	Думнинг узунлиги	Такрорланиш
27-28	1	43-44	70
29-30	0	45-46	80
31-32	2	47-48	60
33-34	5	49-50	27
35-36	12	51-52	18
37-38	33	53-54	4
39-40	64	55-56	5
41-42	64	57-58	1

$\bar{X}$ арифметик ўртача қиймат, Γ стандарт ва V вариация коэффицентини ҳисобланг.

Жавоби: $\bar{X}=43,0$ см; $\Gamma=4,5$ см; $V=10,3\%$.

11-мисол. Пахта ҳосилдорлигининг (Γ ҳисобида) қуйидаги кўрсаткичлари аниқланган:

	$\bar{X}$	Γ
Ҳар бир кўсакдаги оғирлиги	8,2	0,3
Ҳар бир туп ўзадаги пахта		
Ҳосилнинг оғирлиги	49,2	1,8

Улар ўзгарувчанлик даражаси бўйича фарқ қиладими?

12-мисол. Чўчқалар гуруҳда ўсишнинг ўртача тезлиги кунига 560 г ни ташкил этиши аниқланган. Агар $V=10\%$ лиги маълум бўлса, Γ ни аниқланг.

II бобда кўриб ўтилган асосий тушунчалар рўйхати:

Арифметик ўртача қиймат, геометрик ўртача қиймат, медиана, мода, дисперсия, ўртача квадратик фарқ (хатолик) ёки стандарт, тузатилган дисперсия, ўртача қийматларнинг умумий ўртача қиймати ва дисперсияси, вариация коэффицентини, асимметрия коэффицентини, тақсимотнинг асимметриклиги, статистик моментлар, бошланғич момент, марказий момент, шартли варианта, шартли статистик моментлар, ҳисоблаш жадвали ва ҳисоблашларни назорат қилиш.

III боб. Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари.

4-назарий мустақил иш
10-11 амалий машғулотлар

Мавзу: Ҳодиса эҳтимолининг статистик таърифи нормал, биномиал ва пуассон тақсимот қанунлари.

Режа:

1. Ҳодиса эҳтимолининг статистик таърифи.
2. Тасодиқий миқдор ва унинг тақсимот қонуни.
3. Тасодиқий миқдорнинг сонли характеристикалари.
4. Нормал тақсимот қонуни ва нормал эгри чизик.
5. Биномиал тақсимот қонуни.
6. Пуассон тақсимот қонуни.

Мавзунинг баёни: 1. Ҳодиса эҳтимолнинг статистик таърифи.

Ҳодиса эҳтимолининг классик таърифи ва $P(A) = m/n$ формуладан тажрибаларнинг мумкин бўлган натижалари фақат тенг имкониятли бўлгандагина эҳтимолларни бевосита ҳисоблаш мумкин. Лекин амалда биз тенг имкониятли ҳолларни ажратиб улар орасидан текширилаётган ҳодисага қулайлик берувчи ҳамма ҳолларни доимо ҳам ҳисоблаб олмаймиз. Бундай вазиятларда ҳодиса эҳтимолини қандай ҳисоблаш керак?

Бу муаммога жавоб бериш учун ҳодиса эҳтимолининг статистик таърифига асосланилади. Бунинг сабаби шундаки, деярли барча тажрибалар кузатиш ва ўлчашларни ўз ичига олади; уларни изоҳлашда эҳтимоллар назарияси ва статистикадан фойдалариш мумкин.

Амалда, эҳтимол тушунчасини ҳодисанинг нисбий частотаси билан боғлаймиз. Тажрибалар сони етарлича катта бўлганда кўп ҳодисаларнинг нисбий частотаси маълум қонуниятга эга бўлади ва бирор ўзгармас сон атрофида тебраниб туради. Бу қонуниятни биринчи маротаба XVIII аср бошларида Я. Бернулли исботлаб берган.

Агар бирор A ҳодиса устида ўтказилган етарлича кўп сондаги такрор тажрибаларда ҳодисанинг нисбий частотаси бирор ўзгармас сон атрофида тебраниб турганлиги сезилган бўлса, у вақтда A ҳодиса тақрибан ўзининг нисбий частотасига тенг бўлган $P(A)$ эҳтимолга эга бўлади, яъни $P(A) = m/n$.

Статистик кузатишларда ҳодисанинг эҳтимоли ва унинг нисбий частотаси орасидаги бундай боғланиш кўп амалий масалаларни ҳал қилишда эҳтимол тушунчасидан фойдаланишга имкон беради.

Нисбий частотани ҳодисанинг **статистик эҳтимоли** дейилади.

Мисоллар. 1) Шохсиз бузоқ туғилиши эҳтимолини баҳолаш учун тайин бир подада ёки зотда олдин шохли ва шохсиз туғилган ҳайвонлар сонини билш

керак. Масалан. Тайин бир зотда кейинги бир неча йилда туғилган 55000 бузоқнинг 110 таси шохсиз бўлса, шу зотли сигирдан шохсиз бузоқ туғилиши эҳтимоли $P=110/5500=0,002$ бўлади. Шохли бузоқ туғилиши эҳтимоли эса $q=1-p=1-0,002=0,998$ бўлади.

2) Кўп турли хайвонларда эркак ва урғочи зотлар туғилиши сони деярли тенг бўлади. Бу эса ҳар бир 100 наслдан ўртача 50 таси урғочи, 50 таси эркак туғилади, демакдир; бундан урғочи хайвон туғилиши эҳтимоли $P=50/100=0,5$ эканлиги келиб чиқади.

2. Тасодифий миқдор ва унинг тақсимот қонуни.

Берилган шарт-шароитларда тасодифий ҳолатларга боғлиқ равишда у ёки бу сон қийматларни қабул қиладиган ўзгарувчи миқдор **тасодифий миқдор** дейилади.

Мисол. 1) 1 - январда Қўқонда туғилган ўғилболалар сони; 2) ғўза тупидаги гуллаган кўсаклар сони; 3) пахта толаси узунлиги ва хоказо.

Чекли (баъзи чексиз) сондаги $X_1, X_2, \dots, X_n$ қийматлар қабул қиладиган тасодифий миқдор дискрет тасодифий миқдор дейилади. Масалан, куён болалари сони, кишда қор ёққан кунлар сони ва хоказо.

Ўзи ўзгарадиган ораликдаги ҳар қандай сонли қийматларни қабул қиладиган Т. М. узуликсиз тасодифий миқдор дейилади. Масалан, буғдой ҳосилдорлиги, пахта толаси узунлиги, одам бўйининг узунлиги ва х. К. Узлуксиз Т.М қийматлари сони чексиз тўпламни, масалан, тўғри чизик ёки бирор (а,в) ораликни ташкил этади.

Дискрет Т.М қийматлари ва бу қийматларни қабул қилиш эҳтимоллари берилган бўлса, дискрет Т.М нинг тақсимоти (тақсимот қонуни) берилган дейилади. Бирор тажрибада Х дискрет Т.М $X_1, X_2, \dots, X_n$ қийматларни $P_1, P_2, \dots, P_n$ эҳтимоллари билан қабул қилган бўлсин: $P(X=X_i) = P_i$ бу ҳолда Х дискрет Т.М нинг тақсимоти қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} X: & X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \\ P(X): & P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \end{aligned} \quad (1)$$

Х т.м тажрибада ўзининг қийматларидан бирортасини албатта қабул қиладди. Шунинг учун

$$P(\text{ёки } X=X_1, \text{ ёки } X=X_2, \dots, \text{ёки } X=X_n) = \sum_{i=1}^n P(X_i) = \sum_{i=1}^n P_i = 1.$$

Масалан, Х дискрет т.м. қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган бўлсин:

$$\begin{aligned} X: & 2 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad \sum_{i=1}^4 P_i = 0,3+0,1+0,2+0,4=1. \\ P: & 0,3 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,4 \end{aligned}$$

Узлуксиз тасодифий миқдорлар учун (1) кўринишдаги жадвал ёрдамида характеристика тузиш мумкин эмас. Эҳтимоллар назариясида турли характердаги т.м. ни ягона усул билан таърифлаш мақсадида т.м. нинг тақсимот функцияси тушунчаси киритилади.

X тасодифий микдорнинг интеграл тақсимот қонуни ёки интеграл тақсимот функцияси деб $X < x$ тенгсизликнинг эҳтимолига айтилади ва

$$P(X < x) = F(X)$$

деб бергиланади (бу ерда x -хақиқий сон). Тақсимот функциясининг $\alpha(X) = F(X)$ ҳосиласи (агар у мавжуд бўлса) дифференциал тақсимот функцияси (тақсимот зичлиги) ёки эҳтимолнинг зичлиги (зичлик функцияси) дейилади.

$\alpha(X) dx$ кўпайтма т.м нинг $d(x)$ элементар соҳадаги қийматини қабул қилиш эҳтимолини ифодалайди. Зичлик функциясининг графиги эҳтимолларнинг тақсимот эгри чизиги дейилади. Тақсимотнинг зичлиги фақат узлуксиз т.м. лар учун мавжуддир.

3. Тасодифий микдорнинг сонли характеристикалари.

Дискрет т.м. нинг ўртача қиймати-математик кутилиши деб бу т.м. нинг қийматларини уларнинг мос эҳтимолларига кўпайтмалари йиғиндисига айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n P_i X_i$$

N та тажрибада X т.м $X_1, X_2, \dots, X_k$ қийматларни мос равишда $N_1, N_2, \dots, N_k$ марта қабул қилган бўлсин, $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$. У вақтда X нинг арифметик ўртача қиймати

$$\bar{X} = \frac{X_1 N_1 + X_2 N_2 + \dots + X_k N_k}{n} = X_1 \frac{n_1}{n} + X_2 \frac{n_2}{n} + \dots + X_k \frac{n_k}{n} = \sum_{i=1}^k X_i W_i$$

Бўлади, бу ерда W_i сон $X = X_i$ ҳодисанинг нисбий частотаси. Лекин кўп сонли натижаларда $W_i = P_i$. Шунинг учун

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i W_i = \sum_{i=1}^n X_i P_i = M(X).$$

Шундай қилиб, N етарли катта бўлганида математик кутилиш кузатилаган қийматларнинг арифметик ўртача қийматига яқин бўлади. Шунинг учун ҳам, $M(X)$ ни кўпинча тасодифий микдорининг ўртача қиймати деб аталади.

$f(X)$ зичлик функцияга эга бўлган x узлуксиз т.м. учун математик кутилиш энди йиғинди билан эмас, балки интеграл орқали аниқланади:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Бу интеграл маънлга эга бўлса (абсолют яқинлашса), биз ўртача қиймат мавжуд деймиз.

X т.м нинг математик кутилишидан фарқи квадратининг математик кутилиши унинг дисперсияси дейилади ва қуйидагича белгиланади.

$$D(X) = M\{[X-M(X)]^2\}$$

Дисперсия учун $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ тенгликни исботлаш қийин эмас.

Тасадифий миқдор тақсимотининг асосий хоссаларини таърифлаш учун назарий бошланғич ва марказий моментлардан ҳам фойдаланилади. Тасодифий миқдор k -даражасининг математик кутилиши, яъни $M(X^k)$ ни k -тартибли бошланғич момент дейилади.

Жумладан, $M(X)$ математик кутилиш биринчи тартибли бошланғич момент бўлади. $M(X^k) = V_k$ деб белгилаймиз, у вақтда $M(X^k) = V_1$ бўлади.

$M[X-M(X)]^k$ миқдор X т.м. нинг k -тартибли марказий моменти дейилади, уни M_k орқали белгилаймиз:

$$M_k = M[X-M(X)]^k$$

Иккинчи тартибли марказий момент дисперсиядир. k -тартибли марказий моментни бошланғич моментлар орқали ифодалаш мумкин. Жумладан,

$$M_3 = V_3 - 3V_1V_2 + 2V_1^3, \quad M_2 = V_2 - V_1^2 \text{ ва х.к}$$

M_3 учунчи тартибли марказий момент тақсимот асимметриясининг характеристикаси учун, яъни тақсимотнинг симметриядан четланишини баҳолаш учун хизмат қилади.

Турли тақсимотларнинг асимметриясини солиштириш учун

$$A_s = \frac{M_3}{G^3} -$$

ўлчамсиз асимметрия коэффициентидан фойдаланилади.

4. Нормал тақсимот қонуни ва нормал эгри чизик.

Агар X тасодифий миқдор (ўзгарувчан белги)- ∞ дан $-\infty$ гача бўлаган қийматларни қабул қила олса ва унинг зичлик функцияси

$$P_x = \frac{1}{G\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X - \bar{X})^2}{2G^2}} = \frac{1}{G\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\pi^2}} \quad (2)$$

Кўринишда аниқланса, у нормал тақсимот қонунига эга дейилади. (2)

формулада $\bar{X}$ - тасодифий миқдорнинг арифметик ўртача қиймати (математик кутилиш); G - унинг стандарти (ўртача квадратик фарқ), π - ўзгармас сон (3,1459...); $e = 2,71828$.

Нормал тақсимот қонуни статистикада, жумладан, биологик статистикада муҳим аҳамиятга эга, чунки узликсиз ўзгарувчанлик (вариация) билан характерланадиган жуда кўп тажрибавий (эмприк) тақсимотлар ҳар бири умумий йиғиндига нисбатан кичик бўлган кўп сонли ўзаро боғлиқ бўлмаган тасадифий миқдорларнинг (факторларнинг) бир вақтда таъсирига асосланган.

А. М. Ляпунов теоремасига асосан, агар бирор т.м. кўп сонли, ўзаро боғлиқ бўлмаган, ҳар бирининг йиғидига таъсири жуда кичик бўлган тасодифий миқдорларнинг йиғиндисидан иборат бўлса, бундай тасодифий миқдор нормал тақсимотга бўй сунади. Қишлоқ хўжалик ва биологик объектларнинг кўпчилик узликсиз характерли ўзгарувчан белгилари шу кўринишдаги тақсимотга эга.

Мисоллар. Хайвонлар бўйи, оғирлиги кўкрак ҳажми, ўсимликлар баландлиги, ўлчашларнинг тасодифий хатоси ва шунга ўхшаш жуда кўплаб ўзлуксиз миқдорлар нормал тақсимот қонунига бўйсунади.

Нормал қонун зичлик функциясининг графиги 1- чизмада кўрсатилган ABC эгри чизикдан иборат. Бу эгри чизик нормал ёки гаусс эгри чизик дейилади.

Нормал тақсимотда арифметик ўртача қиймат сон жиҳатидан медиана ва модага тенг. Бу эгри чизикнинг В учи $\bar{X} = M_o = M_e$ га тўғри келади. Тақсимотнинг ўртасидан узоқлашиши билан эгри чизик пасайиб боради. Х манфий ёки мубат бўлиб чексиз ўсганда, эгри чизик Ох ўққа чексиз яқинлашиб боради: демак, умуман исталганча катта фарқлар (гарчи эҳтимоли ҳаддан ташқари кичик бўлса ҳам) ўринли бўлиши мумкин. Эгри чизикнинг шаклига стандартнинг қиймати катта таъсир этади. Бу таъсирни 2-чизмадан кўриш мумкин. Нормал эгри чизик билан чегараланган юза 1 га тенг.

Агар Х тасодифий миқдор нормал қонун бўйича тақсимланган бўлса, уҳолда.

$$ydx = \frac{1}{G\sqrt{2P}} \bar{E} \frac{(x-\bar{X})^2}{2G^2dx} = \frac{1}{\Gamma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{(x-\bar{X})}{2\Gamma^2}} dx \quad (3)$$

ифода Х нинг $x - \frac{1}{2}dx$ ва $x + \frac{1}{2}dx$ ораликқа тушиш эҳтимоли бўлади, бу ерда dx жуда кичик сон деб ҳисоблинади. Агар Х миқдорнинг нисбий частотаси нормал

тақсимланган бўлса, у ҳолда X нинг $x - \frac{1}{2}dx$ ва $x + \frac{1}{2}dx$ оралиқдаги қийматларининг N_x/N нисбий частотаси

$$\frac{n_x}{n} = \frac{1}{G\sqrt{2P}} E^{-\frac{(X - \bar{X})^2}{2G^2}} dx \quad (4)$$

га тенг. Нормаллашган четланиш деб аталувчи

$$t = \frac{X - \bar{X}}{G} \quad (5)$$

ифодани киритсак, у – вақтда қуйидаги тақрибий тенгликни ёзиш мумкин:

$$P(X_1 \leq X \leq X_2) = \Phi(X_2) - \Phi(X_1) \quad (6)$$

Бу ерда $P(X_1 \leq X \leq X_2)$ ифода X тасодифий миқдорнинг (X_1, X_2) оралиқда бўлиш эҳтимолини ифодалайди; $\Phi(t)$ ёзув Лаплас функцияси деб аталувчи

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2P}} \int_0^t E^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_0^t e^{-z^2/2} dz \quad (7)$$

Интегрални ифодалайди. Лаплас функцияси қуйидаги хоссаларга эга:

$$1^0. \Phi(0) = 0, \text{ яъни } \Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_0^0 E^{-z^2/2} dz = 0;$$

$$2^0. \Phi(+\infty) = \frac{1}{2}, \text{ яъни } \Phi(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_0^{+\infty} E^{-z^2/2} dz = \frac{1}{2};$$

3⁰. $\Phi(-t) = -\Phi(t)$, яъни Лаплас функцияси тоқ функциядир. Бу функция учун (1)-(4) адабиётларда илова сифатида қийматлар жадвали берилган. Масалан, (1) нинг 1-жадвалида (6) тенгликда $X_1 = -3$ ва $X_2 = 3$ десак, у вақтда (5) ва (6) тенгликдан

$$P\left[\left(\bar{X} - 3G \leq X \leq (\bar{X} + 3G)\right)\right] \approx \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3)$$

ни ҳосил қиламиз. Иловадаги 1-жадвалдан $\Phi(3) = 0,49865$. Демак, $2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973$, яъни

$$P(\bar{X} - 3G \leq X \leq (\bar{X} + 3G)) \approx 0,9973 \approx 1.$$

Бу эса агар нормал эгри чизик ва абсциссалар ўқи билан чегараланган юзани 100% деб олсак, у вақтда $\bar{X} - 3G$ дан $\bar{X} + 3G$ гача оралиққа юзанинг 99,7 % и тўғри келишини билдиради. Бу муҳим хулоса вариацион статистикада “уч сигма қоидаси” деб аталади.

Мисол. (6) тенгликда $t_1 = -1, t_2 = 1$ деб олсак, у вақтда (5) ва (6) тенгликлардан

$$P(\bar{X} - G \leq X \leq \bar{X} + G) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0,34134 = 0,6827,$$

Яъни $(\bar{X} - G)$, илан $(\bar{X} + G)$ оралиғида барча вариантларнинг 0,6827 ҳиссаси ёки 68,27 % и ётади.

Шунга ўхшаш, $X_1=-2$ ва $X_2=2$ деб олинса,

$$P(\bar{X}-2G \leq X \leq \bar{X}+2G) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,47725 = 0,9545,$$

Яъни $\bar{X}-2G$ Билан $\bar{X}+2G$

Оралиғида барча вариантларнинг 0,9545 ҳиссаси ёки 95,45 % и ётади.
(3-чизмага қаранг)

5. Биномиал тақсимот қонуни.

Бирор А ҳодиса ҳар бир тажрибада рўй бериши ёки рўй бермасилиги мумкин бўлиб, унинг ҳар бир тажрибада рўй бериш эҳтимоли P , рўй бермаслик эҳтимоли эса q бўлсин.

($0 < p < 1$, $q=1-p$ ва p, q тажриба номерига боғлиқ эмас.)

N та тажрибада А нинг m марта рўй бериш эҳтимоли $P_m(m)$ деб белгиланиб, бу эҳтимоллик

$$P_m(m) = C_n^m P^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

Бўлади. Бу ерда $C_n^m = n! / (m!(n-m)!)$ Бўлиб, (8) ни қуйидагига ёзиш мумкин:

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} P^m q^{n-m} \quad (9)$$

(9) формула

$$(q+p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \dots + C_n^m q^{n-m} p^m + \dots + p^n$$

Ньютон биномининг умумий ҳадидан иборат. C_n^m коэффициентлар биномиал коэффициентлар деб аталади. Шунинг учун (8) формула биномиал тақсимот қонуни деб аталади.

Масалан, А ҳадисанинг рўй бериш эҳтимоли $P = \frac{2}{3}$ бўлса, у ҳолда $q=1-p=1/3$ ва А ни $n=7$ та тажрибада $m=4$ марта такрорланиш эҳтимоли

$$P_7(4) = C_7^4 P^4 q^{7-4} = \frac{7!}{4!3!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{24}{37} = \frac{35 \cdot 16}{2187} = \frac{560}{2187}.$$

$N=7$ га мос биномиал тақсимотни

$$(p+q)^7 = q^7 + 7pq^6 + 21p^2q^5 + 35p^3q^4 + 35p^4q^3 + 21p^5q^2 + 7p^6q + p^7$$

Тегликдан топишимиз мумкин, бунда кетма-кет ҳадлар тартиб билан А нинг 7 та тажрибада 0,1,2,3,4,5,6,7 марта рўй бериш эҳтимолиларидир. $p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$ ларни ўрнига қўйиб бу эҳтимолларни ҳисоблаш қийин эмас.

Биномиал тақсимотнинг арифметик ўртача қиймати $\bar{X} = np$ га, стандарти $G = \sqrt{npq}$ га тенг. Биномиал тақсимот альтернатив схема, яъни белги фақат иккита қийматга эга бўладиган дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимотидир. Сифат белгилари тақсимоти биномиал тақсимотдан иборат ҳоллари биологияда тез-тез учраб туради.

Кўп ҳолларда тажрибалар сони жуда катта бўлади. Масалан, $n=4000000$, $p=0,5$ ва $m=2000000$ бўлсин. У вақтда (8) га асосан

$$P_n(m) = \frac{4000000!}{(2000000)^2} \cdot \frac{1}{2^{4000000}}$$

бўлади. Бу миқдорни ҳисоблаш анча қийин. Бундай ҳолларда тақрибий формулалардан фойдаланилади. Масалан, n катта бўлганда p эҳтимол N га боғлиқ ҳолда кичик ($npq < 25$) бўлса, ушбу

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

Пуассон формуласи ишлатилади, бунда $a=np$, $e=2,71828..$ Агар $0 < p < 1$ ва $npq \geq 25$ бўлса, Муавр – Лаплас формуласи деб аталувчи

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} E^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}} \quad (11)$$

формуладан фойдаланилади.

Агар $t = (m - np) / G = (m - np) / \sqrt{npq}$ деб белгиласак, (11) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$P_n(m) = \frac{1}{G\sqrt{2\pi}} E^{-t^2/2}, P_n(m) \approx \frac{t_t}{G}, t_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E^{-t^2/2} \text{ бунда } z_t \text{ миқдор } t \text{ нинг қийматлари}$$

учун (1)нинг иловасида берилган Π жадвалдан олинади. Масалан, $n=14, p=3/7$ ва $m=8$ бўлсин.

$$\text{Бу ҳолда } q=1-3/7=4/7, G=\sqrt{npq} = \sqrt{14 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7}} = \frac{2}{7} \sqrt{42} = 1,852, t = \frac{8-14 \cdot \frac{3}{7}}{1,852} = \frac{8-6}{1,852} = 1,08$$

$$t=1,08 \text{ учун } Z_t = 0,2227. \text{ Демак, } P_{14}(8) = \frac{0,2227}{1,852} = 0,120.$$

(9) тенглик бўйича ҳисоблаш олинган сонга яқин сонни беради:

$$P_{14}(8) = \frac{14!}{8!6!} \left(\frac{3}{7}\right)^8 \left(\frac{4}{7}\right)^6 = 0,119.$$

Биномиал тақсимоатнинг графиги синик чизик бўлади. Графикнинг шакли n ва p нинг қийматларига, яъни тажрибалар сонига ва кузатилаётган ҳодиса эҳтимолининг қийматига боғлиқ бўлади. $P=q=0,5$ бўлганда биномиал тақсимоат ва унинг графиги симметрик бўлади. Агар $p \neq q$ бўлса, биномиал тақсимоат асимметрик бўлади. P ва q ларнинг қийматлари орасидаги фарқ қанча катта бўлса, асимметрия шунга кўп бўлади. Лекин кузатишлар сони n чексиз ортиши билан биномиал эгри чизик нормал тақсимоат эгри чизиги билан мос тушади, яъни силлиқ симметрик эгри чизикқа айланади.

6. Пуассон тақсимоат қонуни.

Пуассон тақсимоат қонуни биномиал тақсимоат қонуни каби дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимоат қонунидир. Альтернатив ўзгарувчан белгилардан бирининг пайдо бўлиш эҳтимоли жуда кичик бўлса, иккинчисининки бирга яқин бўлади; бу ҳолда биномиал тақсимоат яққол ифодаланган асимметрик бўлади. Шундай эҳтимоли жуда кичик, яъни камдан-кам рўй берадиган ҳодисаларнинг тақсимоат қонуни Пуассон тақсимоат қонуни дейилади ва қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$P_m(a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

бунда $P_m(a)$ – камдан – кам рўй берадиган ҳодисанинг такрор тажрибалар сериясида m та учруши эҳтимоли; $a = np$. Масалан, берилган шарт-шароитда $a=2$

да A ҳодиса рўй бермаслик эҳтимоли: $P_0 = \frac{2^0}{0!e^2} = 1/2,7183^2 = 1/7,389 = 0,1353$.

A ҳодисанинг уч марта рўй бериш эҳтимоли

$$P_3 = 2^3 / 3!e^3 = 8/6 \cdot (2,7183)^3 = 0,1805.$$

a ва m нинг турли қийматларида $P_m(a)$ эҳтимол учун жадвал тузилган. (1) нинг иловасида берилган 3 жадвалда бу эҳтимолнинг қийматлари келтирилган. Масалан, $a=5$, $m=10$ бўлганда, жадвалдан $P_m(a) = 0,018133$ га, $a=3$, $m=5$ бўлганда эса $P_m(a) = 0,100819$ ни топамиз ва х.к.

Бирор белгининг намоён бўлиши ҳар доим жуда кичик p эҳтимолига эга бўлса ва тажрибалар сони жуда катта бўлиб, $np=a$ кўпайтма кичик сон бўлса, бундай ҳолларда Пуассон тақсимоати ўринли бўлади. Биологияда Пуассон тақсимоатини камдан – кам кузатилаётган ҳодисалар қаноатлантиради. Масалан, экин экилган майдондаги бегона ўтлар сони, турли зараркунандалар билан зарарланган уруғликлар сони, микроскопнинг кўриш майдонида маълум турдаги бактериялар туркуми сони ва х. к. лар бу тақсимоат қонунига бўйсунди. Пуассон формуласи, айниқса, микробиологик тадқиқотларда катта аҳамиятга эга.

Пуассон тақсимотининг ўртача қиймати ва дисперсияси бир-бирига тенглигини кўрсатиши мумкин. Демак, агар кетмакет бутун сон қийматлар билан берилган бирор тақсимот қонуни учун ўртача қиймат ва дисперсия бир-биридан жуда кам фарқ қилса, бу ҳолда бундай тақсимот Пуассон тақсимотиға яқин бўлишини кутиш мумкин.

Ақлий ҳужум учун саволлар

1. Ҳодисанинг статистик эҳтимоли нима учун аниқланади?
2. Тасодифий миқдор ва унинг тақсимот қонуни қандай аниқланади?
3. Тасадифиймиқдорининг тақсимот ва зичлик функцияларининг маъносини қандай тушунаси?
4. Тасодифий миқдорнинг математик кутилиши, дисперсияси қандай аниқланади?
5. Тасодифий миқдорнинг бошланғич к-тартибли моменти нима?
6. Нормал тақсимот қонуни ва зичлик функциясининг графиги қандай кўринишга эга?
7. “Уч сигма қоида” деб нимага айтилади?
8. Биномиал тақсимот қонуни қандай кўринишга эга.
9. Қандай ҳолларда Пуассон тақсимот қонунидан фойдаланиш керак?

Мавзу бўйича таянч иборалар.

Ҳодисанинг статистик эҳтимоли; тасодифий миқдор ва унинг тақсимот қонуни; дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорлар; тасодифий миқдорнинг математик кутилиши, дисперсияси, марказий моментлари; нормал тақсимот қонуни, зичлик функцияси ва унинг графиги; 3 “уч сигма қоида” нормаллашган четлашув, леплас функцияси; биномиал ва Пуассон тақсимот қонунлари.

Тавсия этиладиган адабиётлар

1. М. Султонова “Вариацион статистика”, Т.:”Ўқитувчи”, 1977
2. С.Х. Сирожиддинов М.М,Маматов. “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика” Т.:”Ўқитувчи”, 1980 й
3. Б.В.Гнеденко . Курс теории вероятностей, М,1969 й
4. Г.Крамер. Методы математической статистики. М; “Мир”, 1975 й
5. В. Е. Гмурман. Эҳтимоллар назарияси ва математик статимтика., Т.:”Ўқитувчи”, 1980 й.
6. Соатов. Олий математика, II қисм, Т.:”Ўқитувчи”, 1986 й.

IV боб. Статистик муносабатлар

5-назарий мустақил иш, 12-13-амалий машғулотлар, 3-амалий мустақил иш.

Мавзу: Статистик муносабатлар тўғрисида умумий тушунча. Корреляция коэффиценти ва уни ҳисоблаш усулари, формулалари.

Режа:

1. Статистик муносабатлар тўғрисида умумий тушунча.
2. Корреляцион жадвал. Тўғри чизиқли корреляцион муносабат.
3. Корреляция коэффиценти ва уни ҳисоблаш усуллари.
4. Корреляция коэффицентини ҳисоблаш формулалари.
5. Корреляция коэффицентини ҳисоблашнинг тўрт майдон усули.

Мавзунинг баёни. 1. Статистик муносабатлар тўғрисида умумий тушунча. Кўпинча тажрибаларда турли сон ва сифат белгилари орасидаги муносабатларни ўрганишга тўғри келади. Белгилар орасида икки турдаги боғланиш-функционал ва корреляцион (ёки статистик) боғланишлар мавжуддир.

Функционал боғланишларда бир ўзгарувчи миқдорнинг ҳар бир қийматига бошқа ўзгарувчи миқдорнинг аниқ битти қиймати мос келади. Бундай боғланишлар аниқ фанлар-математика, физика ва химияда аниққиса яққол кузатилади. Масалан, термометрдаги симоб устунининг баландлиги ҳаво ёки сувнинг ҳарорати ҳақида аниқ ва бир қийматли маълумат беради: айлана радиуси R ва унинг узунлиги C орасида геометриядан маълум бўлган $C=2\pi R$ формула бўйича аниқланган функционал боғланиш мавжуд.

Биологик ҳодисаларда маълум бир организмнинг айрим сифат ёки сон белгилари орасида, ёки белгилар ва баъзи бир ташқи шарт-шароитлар орасида боғлашлар кузатилади. Биологик белгилар орасида мавжуд бўлган муносабатлар шу билан характерлики, уларда бир белгининг аниқ қийматлари тўғри келади, баъзи бу қийматлар аниқмас бўлиб қолаши ҳам мумкин, масалан,

- 1) Ҳосил солинган ўғит миқдорига боғлиқ, лекин бу боғланишда аниқ мослик йўқ;
- 2) Агар кўриниши, зоти, жинси ва ёши бўйича бир жинсли бўлган бир гуруҳ ҳайвонлар жойлаштирилган жойдаги ҳавонинг ҳароратини ўзгартирсак, у вақтда ҳар қайси ҳайвоннинг реакцияси турлича бўлади. Кўпчилик ҳайвонларда ҳароратнинг кўтарилиши билан нафас олиш тезлашади (бу ҳам турлича тезликда).

Агар икки X ва Y тасодифий миқдор орасида шундай муносабат мавжуд бўлсаки, X нинг ҳар бир қийматига X ўзгариши билан қонуний равишда ўзгарадиган Y миқдорнинг аниқ тақсимооти мос келса, X ва Y орасидаги бундай муносабат статистик ёки корреляцион муносабат дейилади.

Х ва У миқдорлар орасидаги бу муносабат оддий жадвал кўринишида берилиши мумкин (25-жадвал)

2. Корреляцион жадвал. Тўғри чизиқли корреляцион муносабат.

25-жадвал

X_1	X_2	X_3		X_n
Y_1	Y_2	Y_3		Y_n

Х ва У миқдорлар учун кузатишлар натижасида ҳосил бўлган X_i, Y_i жуфтларнинг сони катта бўлса, ва улар орасида такрорланиадиган жуфтлар бўлса, у вақтда 25-жадвални қуйидаги “икки ўлчовли” жадвал билан алмаштириш мумкин

26-жадвал

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	X_1	X_2	...	X_i	...	X_k	M_y
Y_1	M_{11}	M_{21}	...	M_{i1}	...	M_{k1}	M_{y1}
Y_2	M_{12}	M_{22}	...	M_{i2}	...	M_{k2}	M_{y2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Y_j	M_{1j}	M_{2j}	...	M_{ij}	...	M_{kj}	M_{yj}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Y_s	M_{1s}	M_{2s}	...	M_{is}	...	M_{ks}	M_{ys}
M_x	M_x	M_{x2}	...	M_{xi}	...	M_{xs}	n

Бу жадвал корреляцион жадвал ёки корреляцион панжара (тўр) дейилади. Бу жадвалнинг баъзи хоссаларини келтирамиз:

1⁰. $X_1, X_2, \dots, X_k$ Х тасодифий миқдорнинг k та турли қийматини сонлар эса У миқдорнинг S та турили қийматини ифодалайди.

2⁰. Жадвалнинг i-сарт ва j-устунларининг кесиш жойида кузатишларда Х ва У миқдорларнинг мос X_i, Y_j жуфт қийматларининг неча марта рўй берганини кўрсатувчи M_{ij} сон туради.

M_{ij} сонлар такрорланишлар дейилади.

3⁰. Охирги старда $M_{x1} M_{x2} \dots M_{xk}$ сонлар туради. Улар ҳамма кузатишларда мос $X_1 X_2 \dots X_k$ қийматлари неча марта рўй берганини кўрасатади. $M_{x1} M_{x2} \dots M_{xk}$ сонларнинг ҳар бири мос устуннинг ҳамма такрорланишлари йиғиндисига тенг, яъни

$$M_{xi} = M_x M_{i1i2} + \dots M_{i2s}$$

4⁰. Охирги устунда $M_y, M_{y2}, \dots, M_{ys}$, сонлар ёзилган. Улар бирча кузатишларда мос $Y_1, Y_2, \dots, Y_s$ қийматлар неча марта рўй берганини кўрсатилади. $M_y, M_{y2}, \dots, M_{ys}$, сонларнинг ҳар бири мос сатрнинг ҳамма такрорланишлари йиғиндисига тенг, яъни

$$M_{yj} = M_{1j} + M_{2j} + \dots + M_{kj}$$

5⁰. $M_x, M_{x2}, \dots, M_{xk}$, сонларнинг йиғиндиси $M_y, M_{y2}, \dots, M_{ys}$, сонларнинг йиғиндисига тенг ва бу йиғиндиларнинг ҳар бири алоҳида бфрча кузатишлар сонига, яъни n га тенг:

$$\sum_{i=1}^k m_{xi} = \sum_{j=1}^s m_{yj} = n.$$

6⁰. 26-корреляцион жадвалда X тасодифий миқдорнинг ҳар бир айрим қийматига Y т.м.нинг аниқ тақсимооти мос келади. Масалан, X_i қийматга Y миқдорнинг қуйидаги тақсимооти мос келади: (27-жадвал)

27-жадвал

Y_1	Y_2	Y_3	..	Y_s
M_{i1}	M_{i2}	M_{i3}	...	M_{is}

28-жадвал

X_1	X_2	X_3	...	X_k
M_{ij}	M_{2j}	M_{3j}	...	M_{kj}

Шунча ўхшаш, y_j қийматга X миқдорнинг 28-жадвалдаги тақсимооти мос келади.

Мисол. (1). Ўрта Осиё Ипакчилик илмий-текшириш институтида 1970 йилда олинган маълумотларга кўра тузилган 29-жадвални келтирамиз. Бунда 100 дона пилланинг эни (X , см ҳисобида) ва бўйи (Y , см ҳисобида) бўйича тақсимооти берилган.

29-жадвал

$X \backslash Y$	1,45	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	n_y
3,20	1	-	1	-	1	-	-	-	-	-	3
3,25	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	2
3,30	1	1	3	1	1	1	-	-	-	-	8
3,35	-	-	5	3	4	4	1	-	-	-	17
3,40	-	1	5	8	3	4	3	-	-	-	24
3,45	-	-	-	-	6	5	2	-	-	1	14
3,50	-	-	-	2	1	3	3	1	1	-	11
3,55	-	-	-	-	3	2	1	1	-	-	7
3,60	-	-	-	1	2	2	1	2	1	-	9
3,65	-	-	-	-	1	1	2	-	1	-	5
n_x	2	2	15	16	22	22	13	4	3	1	$n=100$

Жадвалда 100 дона пилланинг эни (X) ва бўйи (Y) нинг мос камбинацияларга тўғри келган частоталари келтирилган. Масалан, биринчи сатрдаги биринчи 1 сони эни 1,45 см, бўйи 3,20 см бўлган битта пилла борлигини кўрсатади ва ҳ.к.

Сўнгги устунда маълум узунликка эга бўлган пиллалар частотаси жойлашган: 100 пилладан 3 тасининг узунлиги 3,20 см, 2 тасининг узунлиги 3,25 см ва ҳ.к. бу частотлар Π_y билан белгиланган. Сўнгги сатарда маълум энга эга бўлган пиллаларнинг частоталари Π_x жойлашган. X ва Y миқдорлар орасида боғланиш функционал боғланиш эмас, чунки бу ерда бир миқдорнинг ҳар бир қийматига иккинчи миқдорнинг тақсимооти мос келяпти, масалан $x=1,65$ см га Y нинг қуйидаги тақсимооти мос келади:

3,20	3,25	3,30	3,35	3,40	3,50	3,55	3,60	3,60	3,65
1	0	1	4	3	6	1	3	2	1

КОрреляцион муносабатлар тўғри ва тескари, тўғри чизиқли ва эгри чизиқли, оддий ва кўп белгилар сорасидаги боғланишлар бўлиши мумкин.

Тўғри керреляцион муносабатда миқдорлардан бирининг ортиши (камайиши) бошқасининг ортиши (камайишига) олиб келади. Тескари типдаги муносабатда боғлаган белгилардан бирининг ортиши (камайиши) бошқаси камаяди (ортади)

Одатда тўғри ва тескари муносабатлар тўғри чизиқли ёки шунга яқин бўлган корреляцион боғланишга эга бўлади.

Боғлиқлик даражаси ва характери статистик характеристикаларни ҳисоблаш ёрдами билан аниқланиши мумкин: бу характеристикалар орасида корреляция коэффиценти, регрессия коэффиценти, корреляцион нисбат кенг тарқалган ва кўпроқ ишлатилади. Булардан ташқари, боғланиш қонуниятини акс эттирувчи ва боғланиш чизиғини яшашга имкон берувчи тенгламаларни топиш мумкин.

Икки белги орасидаги корриляцион муносабатни ўрганишда бўлиши мумкин бўлган бошқа муносабатларнинг таъсири ҳисобга олинмайди деб фараз қиламиз. Масалан, агар ҳосилнинг температура шароитлари билан боғланиши ўрганилаётган бўлса, у вақтда барча донлар учун ёритиш, намлик, донларнинг бир хил навли бўлиши, агротехника ва ҳ.к. бўйича бир хил шароит яратишга ҳаракат қилинади.

Вариацион статистика кўп сонли белгилар орасидаги муносабатларни (кўп белгилар корреляцияси) ҳам ўрганишга кишига имкон беради. Лекин бунда ҳисоблаш жуда мураккаблашиб кетади. Шунинг учун амалда, кўпинча, фақат иккита каррелирланаётган кўрсаткичларни ишлаб чиқиш билан чекланилади.

Энди биз тўғри чизиқли керреляцион муносабат билан танишиб чиқамиз. Бунинг учун корреляцион жадвал мисол тариқасида 30-жадвални келтирамиз. Унда 100 туп ғалла ўсимлигининг умумий оғирлиги (бутун ўсимлик оғирлиги, X г ҳисобида) ва дон оғирлиги (Y, г ҳисобида) бўйича тақсимооти берилган (В.И.Романовский).

30-жадал

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63	68	n_x
25	3	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5
35	-	6	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11

45	-	1	13	5	-	-	-	-	-	-	-	-	19
55	-	1	2	4	8	1	-	-	-	-	-	-	16
65	-	-	1	-	4	4	2	-	-	-	-	-	11
75	-	-	-	-	2	6	6	1	-	-	-	-	15
85	-	-	-	-	-	-	1	5	-	-	-	-	6
95	-	-	-	-	-	-	-	1	4	1	-	-	6
105	-	-	-	-	-	-	-	-	2	4	1	1	8
115	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1	2
125	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1
n_y	3	10	20	9	14	11	9	8	6	6	1	3	100

30-жадвалдан кўринадик, X нинг ҳар бир алоҳида қийматига У нинг бир неча қийматлари тўғри келсада, X ортиши билан У ҳам ўртача ҳисобда ортади. X нинг қийматларига У нинг мос хусусий ўртача қийматлари таққосланса, бу муносабат яққол намоён бўлади. Бу хусусий ўртача қийматлар қуйидагича топилади: X=25 қийматга U=13 ҳамда U=18 қийматлар 3 ва 2 частоталар билан тўғри келади; бу қийматларнинг ўртачаси

$$y_1 = \frac{13 \cdot 3 + 18 \cdot 2}{3 + 2} = \frac{75}{5} = 15$$

бўлади. Бу У учун биринчи хусусий ўртача қийматдир. У нинг иккинчи хусусий

ўрта қиймати
$$\bar{y}_2 = \frac{18 \cdot 6 + 23 \cdot 4 + 48 \cdot 1}{6 + 4 + 1} = \frac{248}{11} = 22,6;$$

бу хусусий ўртача қиймат X нинг иккинчи қиймати X=35 га тўғри келади. X нинг қийматлари ва уларга мос $\bar{y}_x$ хусусий ўртача қийматларни ҳисоблаб, қуйидаги 31-жадвални ҳосил қиламиз:

31-жадвал

X	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
$\bar{y}_x$	15	22,6	24,1	29,9	35,3	40,0	47,2	53,0	58,6	63,0	68,0

Бу жадвал X ортиши билан $\bar{y}_x$ хусусий ўртача қийматлар ҳамма вақт ортишини ва шу билан баробар, бирмунча текис ортишни кўрсатади. X нинг 10 га ортиши билан $\bar{y}_x$ тахминан 5 га ортади. Агар X ва $\bar{y}_x$ нинг ўзгариш графигини ясасак, у ҳолда X ва $\bar{y}_x$ орасидаги боғланиш янада равшан бўлади. (13-чизма). X ва $\bar{y}_x$

нинг кетма-кет жуфт қийматларига тўғри келган ва графикда доирачалар билан кўрсатилган нуқталар тахминан AA_1 тўғри чизик бўйича жайлашади; бундай ҳолларда $\bar{Y}_x$ ўртача қийматлар X билан тўғри чизикли корреляцион муносабатда боғланган дейилади.

3. Корреляция коэффиценти ва уни ҳисоблаш усуллари.

Корреляция коэффиценти биологияда кенг ишлатиладиган статистик характеристика бўлиб, белгилар орасида тўғри чизикли ёки шу типга яқин бўлган боғланишларда қўлланилади. Эгри чизикли боғланишларда эса корреляция коэффециенти боғланиш миқдорини камайтириб кўрсатиши мумкин ёки уни пайқамаслиги ҳам мумкин.

Умумий ҳолда корреляция коэффиценти

$$\Gamma = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(y_i - \bar{y})}{nG_x G_y} \quad (43)$$

формула орқали ифодаланади. (43) формулада $X_i - \bar{X}$ миқдор ҳар бир ўрганилаётган индивиднинг X қатор бўйича тақсимланган белгининг $\bar{X}$ арифметик ўртача қийматдан фарқини, $y_i - \bar{y}$ миқдор эса ўша индивиднинг Y қатор билан ифодаланган бошқа белгисининг $\bar{y}$ арифметик ўртача қийматидан фарқини ифодалайди. Формуланинг махражида эса маълум бўлган миқдорлар турибди: G_x - қаторнинг X белгиси бўйича (ёки X қаторнинг) ўртача квадратик фарқи, G_y - Y қаторнинг ўртача квадратик фарқи, n -индивидлар сони.

Корреляция коэффициентининг қийматлари -1 билан +1 орасида ётади. Мусбат корреляцияда белгилар орасидаги боғланиш тўғри бўлади: белгилардан бири ўсганда бошқаси ҳам ўсади. Манфий корреляцияда белгилар орасидаги боғланиш тескари бўлади: белгилардан бирининг ўсиши мос равишда бошқасининг камайиши билан боғланган бўлади. Сифат белгиларда манфий корреляция бир белгининг қатнашиши кўпинча бошқасининг қатнашмасилиги билан мос келади, мусбат корреляция эса бир белгининг қатнашиши бошқасининг ҳам қатнашиши билан мос келади. Корреляция коэффициенти $\Gamma=0$ бўлганда, X ва Y орасида тўғри чизикли корреляцион муносабат мавжуд бўлиши мумкин.

4. Корреляция коэффициентини ҳисоблаш формулалари.

Корреляция коэффициенти Γ ни (43) формулага нисбатан осанроқ ҳисоблашга имкон берадиган формулалар мавжуд. Чунки бевосита усул билан, яъни X_i ларнинг ва уларга мос Y_i ларнинг қийматларидан бевосита фойдаланиш билан ҳисоблаш мумкин. Энг кўп қўлланиладиган формулалардан бири қуйидагича:

$$\Gamma = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2}} \quad (44)$$

Бу формула (43) формулада G_1 ва G_2 нинг ўрнига уларнинг

$$\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2} \text{ ва } \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (y_i - \bar{y})^2}$$

нинг қийматларини қўйиш билан ҳосил қилинади.

Баъзан вариантларнинг арифметик ўртача қийматларидан фарқлари жуда катта сонлар билан ифодаланади. У вақтда бошқа формулаларни қўллаш мумкин, масалан,

$$\Gamma = \frac{\sum_i X_i y_i - n \bar{X} \bar{y}}{(\sum_i X_i^2 - n \bar{X}^2)(\sum_i y_i^2 - n \bar{y}^2)} \quad (45)$$

$\bar{X}$ ва $\bar{y}$ ни уларнинг $\frac{1}{n} \sum_i X_i$ ва $\frac{1}{n} \sum_i y_i$ ифодалари билан алмаштириб,

$$r = \frac{\sum_i X_i Y_i - \frac{1}{n} (\sum_i X_i) (\sum_i Y_i)}{\sqrt{(\sum_i X_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_i X_i)^2) (\sum_i Y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_i Y_i)^2)}} \quad (46)$$

ни ҳосил қиламиз.

Мисол. Бузоқчанинг туғилишдаги X тирик оғирлиги ва Y суткалик семириши орасидаги боғланиш ҳақида 32-жадвалда берилган маълумотлар бўйича корреляция коэффициентини (45) ёки (46) формулалардан бирини татиқ этиб топиш мумкин.

32-жадвал

X_i, kg	y_i, g	X_i^2	Y_i^2	X_i, Y_i
38,5	694	1482,25	481636	26719,0
46,0	901	2116,00	811801	41446,0
43,0	736	1849,00	541696	31648,0
43,0	1005	1849,00	1010025	43215,0
40,5	841	1640,25	707281	34060,5
44,0	743	1936,00	552049	32692,0
38,0	896	1444,00	802816	34048,0
35,0	863	1225,00	744769	30205,0
40,5	855	1640,00	731025	34627,5
54,0	830	2916,00	688900	44820,0
$\sum_i X_i = 422,5$	$\sum_i y_i = 8364$	$\sum_i X_i^2 = 18097,75$	$\sum_i y_i^2 = 7071998$	$\sum_i X_i y_i = 353481,0$

Масалан, r ни (46) формула бўйича топиш учун қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$\sum_i X_i \cdot \sum_i y_i = 422,5 \cdot 8364 = 3533790, \frac{1}{n} \sum_i X_i \cdot \sum_i y_i = \frac{3533790}{10} = 353379,$$

$$\frac{(\sum_i X_i)^2}{n} = \frac{422,5^2}{10} = 17850,6, \frac{(\sum_i y_i)^2}{n} = \frac{8364^2}{10} = 6995649,6.$$

олинган миқдорни (46) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$r = \frac{353481 - 3533790}{\sqrt{(18097,75 - 17850,6) \cdot (7071998 - 6995649,6)}} = -0,023.$$

Қўрамызки, X ва Y орасидаги боғланиш катта эмас экан. Варианталар кўп хонали ёки қаср қийматли бўлганда ҳисоблашларни соддалаштириш учун вариантларни A шартли ўртача қийматдан Δ фарқлари орқали ифодалаймиз. U вақтда r ни ҳисоблаш формуласи қуйидагича бўлади:

$$\Gamma = \frac{\sum \Delta_x \Delta_y - \frac{1}{n} \cdot \sum \Delta_x \cdot \sum \Delta_y}{\sqrt{\alpha_x \alpha_y}}, \quad (47)$$

$$\text{бунда } \Delta_x = (X - A_x), \Delta_y = (y - A_y), \alpha_x = \sum \Delta_x^2 - \frac{1}{n} (\sum \Delta_x)^2 \text{ ва } \alpha_y = \sum \Delta_y^2 - \frac{1}{n} (\sum \Delta_y)^2.$$

Мисол. Остфриз насли сигирларда Х тирик оғирлиги ва соғин давридаги У сут миқдори орасидаги муносабатни аниқланг (33-жадвал).

Ечиш. 33- жадал асосида қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\alpha_x = \sum \Delta_x^2 - \frac{1}{n} (\sum \Delta_x)^2 = 8500 - 250 = 8250,$$

$$\alpha_y = \sum \Delta_y^2 - \frac{1}{n} (\sum \Delta_y)^2 = 8500 - 250 = 8250,$$

$$\Gamma = \frac{\sum \Delta_x \Delta_y - \frac{1}{n} \cdot (\sum \Delta_x) \cdot (\sum \Delta_y)}{\sqrt{\alpha_x \alpha_y}} = \frac{5200 - \frac{-2500}{10}}{\sqrt{8250 \cdot 8250}} = 0,66.$$

33-жадвал

Оғирлиги Х, кг	Соғин даврида берган сут, У, кг	$\Delta_x = X - A_x$	$\Delta_y = y - A_y$	Δ_x^2	Δ_y^2	$\Delta_x \Delta_y$
450	2020	450-450=0	-20	0	400	0
420	2030	-30	-10	900	100	+300
470	2050	+20	+10	400	100	+200
400	2000	-50	-40	2500	1600	+2000
490	2090	+40	+50	1600	2500	+2000
410	2010	-30	-30	1600	900	+1200
480	2060	+30	+20	900	400	+600
440	2070	-10	+30	100	900	-300
460	2040	-10	0	100	0	0
430	2080	-20	+40	400	1600	-800
$A_x=450$ $A_y=2040$		$\sum \Delta_x = -50$	$\sum \Delta_y = +50$	$\sum \Delta_x^2 = 8500$	$\sum \Delta_y^2 = 8500$	$\sum \Delta_x \Delta_y = 5200$

Кўрамизики, х ва у ораисдаги боғланиш катта ($\Gamma=0,66$), демак, сигирларнинг оғирлиги орта бориши билан уларнинг сути ҳам кўпая боради.

Корреляция коэффицентини қуйидаги

$$\Gamma = \frac{\sum n_{xy}XY - n\bar{X}\bar{Y}}{nG_xG_y} \quad (48)$$

формула бўйича ҳам ҳисоблаш мумкин, бу ерда х,у лар X,У сон белгиларнинг вариантлари, n_{xy} эса (X,У) вариантлар жуфтнинг частотаси, n-танланма ҳажми, $\bar{X}\bar{Y}$ улар X ва У белгиларнинг ўртача қийматлари, G_x, G_y лар X ва У белгиларининг ўртача квадратик фарқ (хатолик)лари.

Ҳисоблашларни соддалаштириш учун

$$u_i = (X_i - C_1) / h_1, v_i = (y_i - c_2) / h_2$$

шартли вариантларга ўтиш қулайдир, бунда C_1 сони X белгининг энг кўп такрорланадиган вариантаси; h_1 -қадам (X нинг икки қўшни вариантаси орасидаги фарқ). C_2 сон У белгининг энг кўп такрорланадиган вариантаси; h_2 -қадам. У вақтда корреляция коэффиценти

$$\Gamma = \frac{\sum n_{uv}UV - n\bar{U}\bar{V}}{nG_uG_v} \quad (49)$$

формула билан ҳисобланади.

5. Корреляция коэффицентини ҳисоблашнинг тўрт майдон усули.

Корреляция жадвалида берилганлар бўйича (49) формуладан фойдаланиб, корреляция коэффицентини топамиз. $\bar{U}, \bar{V}, G_u, G_v$ миқдодлар

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum n_u u, \bar{v} = \frac{1}{n} \sum n_v v, G_u = \sqrt{\bar{u}^2 - (\bar{u})^2}, G_v = \sqrt{\bar{v}^2 - (\bar{v})^2}$$

Формулалар бўйича бевосита топилади. Энди $\sum n_{uv}UV$ ни қандай ҳисоблашни кўрамиз. Корреляция жадвалининг энг катта нисбий частота жойлашган каттада кесишадиган сатр ва устуни жадвални 4 қисимга бўлади, бу қисимлар майдонлар деб аталади. Шу сабабали усул тўрт майдон усули деб аталади. Майдонлар қуйида кўрсатилган тартибда номерлаб чиқилади.

$\begin{matrix} U \\ V \end{matrix}$			
	I		II
		Энг катта частота	
	III		IV

Ҳисоблашлар қандай олиб борилишини 1 майдонда кўрсатиш билан чегараланамиз. Биринчи майдондаги жадвал қуйидагича бўлсин:

$\begin{matrix} U \\ V \end{matrix}$	-3	-2	-1
-2	5	7	-
-1	-	20	23

U ва V вариантлар жуфтининг кўпайтмаларини топамиз ва мос частоталар жойлашган катакларнинг юқоридаги ўнг бурчакка ёзамиз. Масалан, $U=-3$ ва $V=-2$ вариантлар жуфти 5 марта кузатилган; $UV = (-3)(-2)=6$ кўпайтмани 5 частота жойлашган катакнинг юқоридаги ўнг бурчагига ёзамиз. Биринчи майдоннинг қолган катакларини ҳам шу тариқа тўлдириб, қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз:

$\begin{matrix} U \\ V \end{matrix}$	-3		-2		-1	
-2	5	6	7	4	-	
-1	-		20	2	23	1

Бошқа майдонларнинг катаклари ҳам шунга ўхшаш тўлдирилади.

Шундай қилиб, N_{uv} частота жойлашган ҳар бир катакда UV кўпатма ҳам ёзилган бўлади: ҳар бир катакдаги N_{uv} ва UV ни кўпайтириш ва натижаларни қўшиб, оқибатда $\sum N_{uv}UV$ сонни ҳосил қиламиз.

Ҳисобларни текшириш қулай бўлиши учун ҳар бир катакдаги $\sum N_{uv}$ ва UV сонларнинг топилган кўпайтмалари ҳар бир майдон бўйича алоҳида

жамланади. Шу билан бирга ҳисоблаш ҳар бир майдоннинг сатри ва устунлари бўйича олиб борилади: майдон сатрининг $\Sigma N_{uv}UV$ сонлар йиғиндиси ўнг томонда жойлашган қўшимча устунлардан сонлари қўшилаётган майдоннинг номерига эга бўлганига ёзилади. Майдон устунининг $\Sigma N_{uv}UV$ сонлари йиғиндиси пастда жойлашган қўшимча сатрлардан сонлари қўшилаётган майдоннинг номерига эга бўлганига ёзилади. Ҳар бир майдон сонларининг йиғиндиси жадвалнинг ўнг томонидаги пастки бурчагида жойлашган тўртта якунловчи катакларга ёзилади.

Ниҳоят, якунловчи катакларнинг ҳамма сонларини қўйиб, изланаётган $\Sigma N_{uv}UV$ сонлар топилади.

Ҳисоблаш жадвали қуйидаги схематик кўринишга эга бўлади:

U V	-3	-2	-1	0		I	II
-2	5 6	7 4	-		II	58	
-1	-	20 2	23 1			63	
0				Энг атта частота		III	IV
	III				IV		
I	30	68	23	II		121	II
III				IV		III	IV

Жадвал қуйидагича тўлдирлади: биринчи майдоннинг сатрлари бўйича N_{uv} ва UV лар кўпайтмалар йиғиндисини топамиз

($5 \cdot 6 + 7 \cdot 4 = 58$, $20 \cdot 2 + 23 \cdot 1 = 63$) ва уларни I қўшимча устунга ёзамиз. Биринчи майдоннинг устунлари бўйича N_{uv} ва UV лар кўпайтмаларнинг йиғиндисини топамиз ($5 \cdot 6 = 30$; $7 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 68$; $23 \cdot 1 = 23$) ва уларни I қўшимча сатрга ёзамиз

I қўшимча устуннинг сонлари йиғиндисини топамиз ($58 + 63 = 121$) ва уни биринчи якунловчи катакка ёзимиз.

Текшириш мақсадида қўшимча сатрнинг ҳамма сонларини қўшамиз ($30 + 68 + 23 = 121$). Қолган майдонлар бўйича ҳам ҳисоблар шунга ўхшаш олиб борилади.

Мисол. 34-жадвалда Ўрта Осиё ипакчилик илмий текшириш институтидан олинган 100 дона пилланинг X кенглиги ва Y узунлиги берилган. X ва Y лар орасидаги корреляция коэффициентини топинг.

Ечиш. Шартли вариантларга ўтамиз:

$$И = \frac{X - C_1}{h_1} = \frac{X - 1,65}{0,05}$$

(C_1 сохта нольсифатида энг катта частотага эга бўлган $X=1,65$ олинди;
 $h_1=1,60-1,55=0,05$ -қадам).

$$V = \frac{Y - C_2}{h_2} = \frac{y - 3,35}{0,05}$$

(C_2 сохта ноль сифатида энг катта частотага эга бўлган $Y=3,35$ варианты
олинади; $h_2=3,25-3,20=0,05$ -қадам).

34-жадвал

$\begin{matrix} X \\ y \end{matrix}$	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	N_y
2,95	1	1	1	-	-	-	-	3
3,00	-	-	-	-	-	-	-	-
3,05	-	-	1	-	-	-	-	1
3,10	-	-	-	-	-	-	-	-
3,15	1	1	-	-	1	-	-	3
3,20	3	2	2	-	-	-	-	7
3,25	1	2	2	3	-	-	-	8
3,30	3	5	3	2	-	1	3	17
3,35	-	3	6	3	4	-	1	17
3,40	3	1	3	5	3	1	1	17
3,45	-	2	2	1	4	1	1	11
3,50	-	-	1	-	3	1	-	5
3,55	-	-	1	1	-	-	-	2
3,60	-	1	-	-	2	1	1	5
3,65	-	-	-	-	-	-	-	-
3,70	1	-	-	-	2	-	-	3
3,75	-	-	-	-	-	1	-	1
n_x	13	18	22	15	19	6	7	100

Шартли вариантлар бўйича корреляцион жадвални тузимиз: Амалда бу қуйидагича бажарилади: биринчи сатрга энг катта частотага эга бўлган варианта (1,65) нинг ўрнига 0 ёзилади; нолдан чапда кетма-кет -1,-2 сонлар ёзилади; нолдан ўннгда кетма-кет 1,2,3, 4 сонлар ёзилади. Биринчи устунда энг катта частотага эга бўлган варианта (3,35) ўрнига 0 ёзилади. Нолдан юқорида кетма-кет 1,2,3,4,5,6,7,8 сонлар ёзилади. Қолган ҳамма маълумотлар дастлабки жадвалдан кўчириб олинади. Натижада қуйидаги корреляцион жадвал -35 жадвал ҳосил бўлади.

35-жадвал

$\begin{matrix} I \\ V \end{matrix}$	-2	-1	0	1	2	3	4	n_v
-8	1	1	1	-	-	-	-	3
-7	-	-	-	-	-	-	-	-
-6	-	-	1	-	-	-	-	1
-5	-	-	-	-	-	-	-	-
-4	1	1	-	-	1	-	-	3
-3	3	2	2	-	-	-	-	7
-2	1	2	2	3	-	-	-	8
-1	3	5	3	2	-	1	3	17
0	-	3	6	3	4	-	1	17
1	3	1	3	5	3	1	1	17
2	-	2	2	1	4	1	1	11
3	-	-	1	-	3	1	-	5
4	-	-	1	1	-	-	-	2
5	-	1	-	-	2	1	1	5
6	-	-	-	-	-	-	-	-
7	1	-	-	-	2	-	-	3
8	-	-	-	-	-	1	-	1
n_x	13	18	22	15	19	6	7	100

U V G_u ва G_v ларни ҳисоблаш учун ҳисоблаш жадвалларини тузамиз (36-37 жадваллар).

U	N_v	$N_b U$	$N_u I^2$	$N_u (I+1)^2$
-2	13	-26	52	13
-1	18	-18	18	0
0	22	0	0	22
1	15	15	15	60
2	19	38	76	171
3	6	18	54	96
4	7	28	112	175
+		44		
-		99		
Жами	100	755	+327	+537

Назорат қилиш: $\Sigma N_{uI_2} + 2 \Sigma N_{uI} + \Sigma N_u = 327 + 551 + 100 = 537$
 $\Sigma N_{u(I+1)^2} = 537$

37-жадвал

U	N_v	$N_v V$	$N_v V^2$	$N_v (V+1)^2$
-8	3	-24	192	147

-7	0	0	0	0
-6	1	-6	36	25
-5	0	0	0	0
-4	3	-12	48	27
-3	7	-21	63	28
-2	8	-16	32	8
-1	17	-17	17	0
0	17	0	0	17
1	17	17	17	68
2	11	22	44	99
3	5	15	45	80
4	2	8	32	50
5	5	25	125	180
6	0	0	0	0
7	3	21	147	192
8	1	8	64	81
+		96		
-	100	116		
Жами	100	20	862	1002

Назорат қилиш $\Sigma N_v V^2 + 2 \Sigma N_v V + \Sigma N_v = 862 + 2 \cdot 20 + 100 = 1002$

$\Sigma N_v (V+1)^2 = 1002$

3 7 –жадваллардан қуйидагиларни ҳосил қиламиз.

$$\bar{H} = \frac{1}{n} \sum N_u H = \frac{55}{100} = 0,55; V = \frac{1}{n} \sum N_v V = \frac{200}{100} = 0,2$$

$$\bar{H}^2 = \frac{1}{n} \sum N_u H^2 = \frac{327}{100} = 3,27, \bar{V}^2 = \frac{1}{n} \sum N_v V^2 = \frac{862}{100} = 8,62,$$

$$G_u = \sqrt{\bar{H}^2 - (\bar{H})^2} = \sqrt{3,27 - (0,55)^2} = \sqrt{3,27 - 0,3025} = \sqrt{2,9675} = 1,72,$$

$$G_v = \sqrt{\bar{V}^2 - (\bar{V})^2} = \sqrt{8,62 - (0,2)^2} = \sqrt{8,58} \approx 2,93$$

Энди $\Sigma N_{uv} UV$ ифодани тўрт майдон усули бўйича топиш учун 38-ҳисоблаш жавдалини тузамиз.

38-жадвал

U V	-2	-1	0	1	2	3	4	I	II
-8	1^{16}	1^8		-	-	-	-	24	-
-7	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-6	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-4	1^8	1^4		-	1^{-8}	-	-	12	-8
-3	3^6	2^3		-	-	-	-	24	-
-2	1^4	2^2		3^{-2}	-	-	-	8	-6
-1	3^2	5^1		2^{-1}	-	1^{-3}	3^{-4}	II	-17
0								III	IV
1	3^{-2}	1^{-1}		5^1	3^2	1^3	1^4	-7	18
2	-	2^{-2}		1^2	4^4	1^6	1^8	-4	32
3	-	-		-	3^6	1^9	-	-	27
4	-	-		1^4	-	-	-	-	4
5	-	1^{-5}		-	2^{10}	1^{15}	1^{20}	-5	55
6	-	-		-	-	-	-	-	-
7	1^{-14}	-		-	2^{14}	-	-	-14	28
8	-	-		-	-	1^{24}	-	-	24
I	52	27	II	-8	-8	-3	-12	79	-31
III	-20	-10	IV	II	88	57	32	-30	188

Яқунловчи катаклардаги сонларни қўшиб,

$$/ \sum N_{uv} UV = 79 - 31 - 30 + 188 = 206$$

Ни ҳосил қиамиз. Изланаётган корреляция коэффицентини топамиз:

$$r = \frac{\sum N_{uv}UV - N\bar{U}\bar{V}}{N\bar{G}_u\bar{G}_v} = \frac{206 - 100 \cdot 0,55 \cdot 0,2}{100 \cdot 1,72 \cdot 2,93} \approx 0,38.$$

4. Маъруза.

Мавзу: Параметрларни танланма тўплам бўйича баҳолаш.

Режа. 1. Масаланинг қўйилиши. Статистик баҳо.

2. Силжимаган, эффектив ва асосли баҳолар.

3. Ҳақиқатга максимал ўхшашлик усули. Ҳақиқатга максимал ўхшаш (яқин) баҳо.

4. Ишончилилик эҳтимоли ва ишончилилик оралиғи.

Мавзунинг баёни: 1. Масаланинг қўйилиши. Статистик баҳо.

Математик статистиканинг асосий масаласи бош тўпламнинг ўрганилаётган белгиси тақсимот қонунини топишдан иборат. Ўрганилаётган белгининг тақсимот қонунининг характери аниқлангандан кейин, масала унинг номаълум параметрларини аниқлашга келтирилади.

Текширишлар шуни кўрсатдики, битти бош тўпламдан олинган турли танланма тўпламлар учун ҳисобланган параметрларнинг қийматлари, одатда, бир-биридан фарқ қилиши мумкин.

Масалан, биз ҳаммаси бўлиб бешта ($n=5$) вариантадан иборат бўлган ушбу бош тўпламга эга бўлайлик: 8,16,20,24,32. арифметик ўртача қиймат

$$\bar{X} = \frac{1}{5}(8+16+20+24+32) = 100/5 = 20.$$

Энди бутун бош тўпламни ўрганишни ундан олинган ва ҳажми $n=4$ бўлган ҳамма танланмаларни ўрганиш билан алмаштирамиз. Танланма тўплам тасодифий бўлганда $N=5$ та элементдан $n=4$ тадан олиб тузилган гуруҳлашларнинг ҳар бири тенг эҳтимол билан шу танланма тўпламга кириши мумкин. Маълумки, бундай гуруҳлар сони $C_5^4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$

га тенг бўлади. Бу гуруҳлар қуйидагича бўлади: №1:8,16,20,; №2:8,16,20,32; №3:8,16,24,32; №4:8,20,24,32; №5: 16,20,24,32.

Ҳар бир танланма тўплам учун арифметик ўртача қийматни ҳисоблаб

$$\bar{X}_1=17, \bar{X}_2=19, \bar{X}_3=20, \bar{X}_4=21, \bar{X}_5=23$$

ларни ҳосил қиламиз. Бу танланма тўпламлар ўртача қийматларининг арифметик ўртача қиймати.

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{5}(17+19+20+21+23)=20, \text{ турга чап бош тўпламнинг арифметик ўртача}$$

қийматига тенг бўлади. Аммо бош тўпламнинг арифметик ўртача қийматини бундай усулда топиш ҳеч қандай маънога эга бўлмайди, чунки танланма тўпламларнинг сони одатда бош тўплам ҳадлари сони (ҳажми) дан жуда кўп бўлади. Масалан, $N=20$ да ҳажми $n=5$ бўлган турли танланма тўпламлар сони.

$$C_{20}^5 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15504$$

ни ташкил этишини айтишнинг ўзи кифоядир; одатдаги “биологик” тўпламларда n нинг қийматлари учун бўлиши мумкин бўлган танланма тўпламлар сонининг чексизлиги, ўз-ўзидан тушунарлидир. Биологик тўпламларнинг сони жуда катта бўлганлигидан, бутун бош тўпламни ўрганишдан кутулишига ҳаракат қилиб, танланма тўпламни ўрганиш зарурати туғилади. Танланма тўплам ҳадларини тасоддий танлаш усули билан танланма тўплам бош тўплам қонуниятларини тўғри акс этишига эришилади. (танланма тўплам репрезентатив бўлади.) Аммо, танланма тўплам бош тўпламнинг фақат бир қисмини ташкил этади. Бутун бир тўплам ҳақида унинг бир қисми бўйича фикр юритиши принципи статистик характердаги хатолар мангбаи бўлиб хизмат қилади.

Статистик хато миқдори бош тўпламдан тасоддий танланма тўпламга кирган кузатишлар сонига боғлиқ бўлади, шунинг билан бирга кузатишлар сони қанча катта бўлса, статистик хатолар шунга кичик бўлади ва танланма тўплам материалида ҳосил қилинган кўрсаткичлар бош тўплам кўрсаткичларига шунчалик яқинлашади. Статистик хатога ўрганилаётган белгининг ўзгарувчанлик даражаси ҳам таъсир этади. Белги қанчалик ўзгарувчан бўлса, статистик хато миқдори ҳам шунча катта бўлади.

Статистик хатоларини камайтиришга ҳаракат қилиш керак яъни шу хатолар келиб чиқадиган кўрсаткичларга таъсир этиш зарур; одатда тадқиқотчи ихтиёрида фақат танланма тўпламнинг берилганлари, масалан, сон белгининг n та кузатиш натижасида олинган $X_1, X_2, \dots, X_n$ қийматлари бўлади. (бу ерда ва кейин ҳам кузатишлар ўзаро боғлиқсиз деб фараз қилинади) ва баҳоланадиган параметр шу берилганлар орқали ифодаланади. $x_1, x_2, \dots, x_n$ ларни боғлиқ бўлмаган $X_1, X_2, \dots, X_n$ тасоддий миқдорлар сифатида қараймиз. Назарий тақсимот номаълум параметрининг статистик баҳосини топиш-кузатилаётган тасоддий миқдорнинг шундай функциясини топиш демакки, бу функция баҳоланадиган параметрнинг тақрибий қийматини берсин. Масалан, нормал тақсимотнинг ўртача қиймати сифатида ушбу

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Функция хизмат қилишини кўрсатиш мумкин. Демак, назарий тақсимот номаълум параметрнинг статистик баҳоси деб кузатилган тасоддий миқдорларнинг функциясига айтилади.

2. Силжимаган, эффектив ва асосли баҳолар

Баҳоланаётган параметрларга “яхши” яқинлашув бериш учун статистик баҳолар айрим талабларни қаноатлантириш керак, қуйида шу талабларни келтирамиз.

Назарий тақсимоатнинг θ номаълум параметрнинг статистик баҳоси θ^* бўлсин. Ҳажми n бўлган танланма бўйича θ^*_1 баҳо топилган деб фараз қиламиз. Тажрибани қайтарамиз ва унинг берилганлари бўйича θ^*_2 баҳони топамиз. Тажрибани кўп марта қайтариб, $\theta^*_1, \theta^*_2 \dots, \theta^*_k$ сонларни ҳосил қиламиз; бу сонлар, умуман айтганда, турлича бўлади. Шундай қилиб, θ^* баҳога тасодифий миқдор сифатида, $\theta^*_1, \theta^*_2 \dots, \theta^*_k$ сонларга эса унинг бўлиши мумкин бўлган қийматлари сифатида қараш мумкин.

θ^*_i баҳо θ нинг тақрибий қийматини ортиғи билан беради деб тасаввур қилсак, у вақтда танланма тўпламнинг берилганлари бўйича топилган ҳар бир θ^*_i ($i=1,2,\dots,k$) сон θ нинг ҳақиқий қийматидан катта бўлади. Бу ҳолда θ^* тасодифий миқдорнинг математик кутилиши (ўртачаси) ҳам θ дан катта, яъни $M(\theta^*) > \theta$ бўлиши равшан.

Агар θ^* баҳо θ нинг тақрибий қийматини ками билан берса, у вақтда $M(\theta^*) < \theta$ бўлади. Шундай қилиб, $M(\theta^*) \neq \theta$ бўлган статистик баҳо θ^* дан фойдаланиш статистик хатога олиб келган бўлур эди. Шу сабабли θ^* баҳонинг математик кутилиши баҳоланаётган параметрга тенг бўлишини талаб этиш табиийдир. $M(\theta^*) = \theta$ нинг бажарилишини талаб қилиш, статистик хатога йўл қуйишдан сақлайди.

$M(\theta^*) = \theta$ бўлган θ^* статистик баҳо силжимаган баҳо дейилади. $M(\theta^*) \neq \theta$ бўлган θ^* баҳо силжиган баҳо дейилади.

Агар θ^* нинг дисперсияси кичик бўлишини талаб қилсак, у вақтда катта хатога йўл қўйиш имкониятини йўқолади, шу сабабли статистик баҳога эффективлик талаби ҳам қўйилади. θ параметр учун λ_1 ва λ_2 баҳолар таклиф этилган деб фараз қилайлик. Агар

$$M(\lambda_1 - \theta)^2 < M(\lambda_2 - \theta)^2$$

Бўлса, у вақтда λ_1 баҳо λ_2 баҳога қараганда эффективлироқ дейилади.

Берилган n ҳажмли танланма тўпланда бўлиши мумкин бўлган энг кичик дисперсияга эга бўлган статистик баҳо эффектив баҳо дейилади.

Катта ҳажмли танланма тўпламни куришда статистик баҳоларга асослилиик талаба қўйилади. Агар кузатишлар сонини чексизликка оширганда $\lambda = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$ баҳо баҳоланаётган θ параметрга эҳтимол бўйича яқинлашса, яъни ҳар қандай $\Sigma > 0$ учун ушбу.

$$P(\lambda - \theta > \Sigma) \rightarrow 0$$

$n \rightarrow \infty$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\Sigma = \Sigma(x_1, x_2, \dots, x_n)$ баҳо θ параметрнинг асосли баҳоси дейилади. Агар баҳонинг дисперсияси $n \rightarrow \infty$ да нолга интилса, бундай баҳо асосли бўлади.

3. Ҳақиқатга максимал ўхшашлик усули.

θ параметрга боғлиқ бўлган $f(X, \theta)$ функция X тасодифий миқдорнинг зичлик (дифференциал) функцияси бўлсин. Тажрибалардан олинган маълумотларга асосан θ номаълум параметрни аниқлаш талаб этилади.

Ўтказилган n та тажрибада X тасодифий миқдорнинг кузатилган қийматларини $X_1, X_2, \dots, X_n$ билан белгилаймиз. Ушбу

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = f(X_1, \theta) f(X_2, \theta) \dots f(X_n, \theta) = \prod_{k=1}^n f(X_k, \theta) \quad (1)$$

функция ҳақиқатга ўхшашлик функцияси деб аталади.

Агар тасодифий миқдор дискрет бўлса ва $F_1, F_2, \dots, F_n$ қийматларни мос равишда $P_1(\theta), P_2(\theta), \dots, P_n(\theta)$ ($\sum_{k=1}^n P_k(\theta) = 1$) эҳтимоллар билан қабул қилса, у

$$\text{вақтда ҳақиқатга ўхшашлик функцияси } L(x_1, x_2, \dots, x_n; 0) = \prod_{k=1}^n P_{k_i}(0) \quad (2)$$

кўринишга эга, бу ерда эҳтимоллардаги индиксслар $F_{k1}, F_{k2}, \dots, F_{kn}$ қийматлар кузатилганнинг кўрсатади.

Ҳақиқатга максимал ўхшашлик усулида θ параметрнинг баҳоси сифатида θ нинг L функцияга максимум қиймат берадиган қиймати олинади, L ва $\ln L$ функциялар экстремумга θ нинг бир хал қийматларида эришганликлари учун θ нинг бу қийматлари

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

тенгламадан –ҳақиқатга ўхшашлик тенгламасидан аниқланади. Ҳақиқатга ўхшашлик тенгламасининг ҳар бир $\bar{\theta}$ ечими ҳақиқатга максимал ўхшаш баҳо деб аталади.

θ_1 ва θ_2 икки параметр бўлган ҳолда уларнинг баҳолари биргаликда (система) ечилиши керак бўлган қуйидаги икки

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0 \quad \text{ва} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0$$

тенгламадан аниқланади. Ҳақиқатга максимал ўхшашлик усули мураккаб бўлган тенгламалар системасини ечишга олиб келишига қарамай, бу усул ёрдамида топилган баҳо муҳим хусусиятга эга: бу баҳо одатда бошқа баҳоларга нисбатан энг кичик дисперсили, асосли бўлади.

Мисоллар. 1) X миқдор учун $X_1, X_2, \dots, X_n$ танланмадан фойдаланиб, ушбу $P(X=x) = e^{-\lambda} \lambda^x / x!$ Пуассон тақсимоотидаги λ параметрни баҳолаш талаб этилади. Бу ҳолда

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_2}}{x_2!} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_n}}{x_n!} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_1+x_2+\dots+x_n}}{x_1! x_2! \dots x_n!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^y}{x_1! x_2! \dots x_n!},$$

Бу ерда $y = \sum_{i=1}^n X_i$

λ ни аниқлаш учун

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -n + \frac{y}{\lambda} = 0$$

тенглама ҳосил бўлади, бундан

$$\lambda = \frac{y}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

Демак, мазкур ҳолда λ параметрнинг баҳоси $\bar{X}$, яъни арифметик ўртача қиймат бўлиб чиқди.

2) Нормал тақсимот қонунининг иккала параметрини баҳоланг.

Ечиш. X нормал тақсимланган миқдорнинг берилган $X_1, X_2, \dots, X_n$ қийматлари бўйича шу қонуннинг нормаълум a ва G параметрларини баҳолаш керак. Бу ҳолда

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; a, G) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G}} \right)^n e^{-\frac{1}{2G^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2},$$

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln G^2 - \frac{1}{2G^2} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$$

a ва G ни баҳолаш учун тенгламалар бу ҳолда қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{1}{G^2} \sum_{i=1}^n (X_i - a) = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial G^2} = -\frac{n}{2G^2} + \frac{1}{2G^4} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 = 0$$

Биринчи тенгламадан: $\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$,

Иккинчи тангламадан:

$$S^2 = \bar{G}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Биринчи баҳо силжимаган, иккинчиси эса, бизга маълумки, бир оз силжиган бўлади.

3.) X тасодикий миқдор фақат иккита: $X=0$ ва $X=1$ қийматларни q ва $p=1-q$ эҳтимоллар билан қабул қилсин. P ни баҳоланалиган θ параметр сифатида қараб, (2) га асосан

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n, p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n X_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n X_i} = p^m (1-p)^{n-m} \quad (5)$$

га эга бўламиз ($X_i=0$ ёки $X_i=1$ қийматларни қабул қилади). У ҳолда $\ln L = m \ln p + (n-m) \ln (1-p)$. (5) га биноан:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{m}{p} - \frac{n-m}{1-p} = 0, \quad \bar{p} = \frac{m}{n}$$

Бу баҳо (нисбий частота) р эҳтимолининг силжимаган, асосли ва эффектив баҳоси бўлади.

4. Ишончилилик эҳтимоли ва ишончилилик оралиғи.

Статистик методлар Θ^* баҳо ($\Theta - \Theta^*$) $< \delta$ ($\delta > 0$) тенгсизликни албатта қаноатлантиради деб тасдиқлашга тўла имкон бермайди, шу сабабали бу тенгсизлик амалга ошиши мумкин бўлган эҳтимол ҳақида гапириш мумкин.

Агар $P(|\Theta - \Theta^*| < \delta) = V$ бўлса, у ҳолда V эҳтимол Θ параметр Θ^* баҳосининг ишончилилик эҳтимоли дейилади. Одатда баҳонинг ишончилилик эҳтимоли олдиндан берилган бўлади ва бирга яқин қилиб олинади (масалан, $V=0,85$; $V=0,95$; $V=0,998$ ва х. к.)

Айтайлик

$$P(|\Theta - \Theta^*| < \delta) = V$$

бажарилган бўлсин, у ҳолда бу ифода

$$P(\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta) = V$$

Тенглик билан тенг кучлидир, яъни $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$ оралиқнинг Θ номаълум параметрни ўз ичига олиш эҳтимоли V га тенг.

Номаълум Θ параметрни берилган V ишончилилик эҳтимоли билан ўз ичига олган $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$ оралиқ ишончилилик оралиғи (интервали) дейилади.

X тасодифий миқдор, яъни кузатилаётган белги нормал қонун бўйича тақсимланган бўлсин. Бу тақсимотнинг a параметри ($a = MX$) $S^2 = \frac{n}{n-1} G^2$ тузатилаган танланма дисперсияси маълум ва номаълум бўлган ҳолларда ишончилилик оралиқларини тузамиз.

А. айтайлик S^2 маълум (G^2 маълум) бўлсин, α параметр учун ишончилилик оралиғи тузамиз. Маълумки, α параметрнинг баҳоси сифатида танланма тўпламнинг $\bar{X}$ арифметик ўртача қийматини оламиз. Бу ҳолда $\bar{X}$ ўрта арифметик $(a, \frac{G^2}{n})$ –параметрли нормал қонун бўйича тақсимланган бўлади.

Шунинг учун

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X} - a}{\frac{G}{\sqrt{n}}}\right| < \delta\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} E^{-u^2/2} du$$

Ишончилилик эҳтимоли v берилса нормал қонун жадвали (1),(2),(3) ларнинг иловасидан) дан δ_v ни шундай танлаймизки.

$$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta_v}^{\delta_v} E^{-u^2/2} du = 2\Phi(\delta_v), \Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x E^{-u^2/2} du \quad (6)$$

тенглик бажарилсин. У ҳолда

$$\bar{X} - \frac{G}{\sqrt{N}} \bar{\sigma}_v < a < \bar{X} + \frac{G}{\sqrt{n}} \bar{\sigma}_v \quad (7)$$

оралиқ α параметр учун ишончилилик эҳтимоли v бўлган ишончилилик оралиғи бўлади.

Мисол. Бош тўпلامнинг нормал тақсимланган X белгисининг номаълум σ математик кутилишини 0,95 ишончилилик билан баҳолаш учун ишончилилик оралиғини топинг. Бош ўртача квадратик четланиш $G=5$, танланма ўртача қийматини $\bar{X}=14$ ва танланма ҳажми $n=25$ берилган.

Ечиш. (7) кўринишдаги ишончилилик оралиғини топиш талаб қилинмоқда. Бу ерда $\bar{\sigma}_v$ дан бошқа барча катталиклар маълум. $\bar{\sigma}_v$ ни $2\Phi(\bar{\sigma}_v)=0,95 \Rightarrow v$ тенгликдан $\Phi(\bar{\sigma}_v)=0,475$ ни ҳосил қиламиз. $\Phi(X)$ лаплас функцияси жадвалидан ((1)-(3), иловадан) $\bar{\sigma}_v=1,96$ ни топамиз. Буларни (7) га қўйиб, изланаётган ишончилилик оралиғини ҳосил қиламиз:

$$14 - \frac{5}{\sqrt{25}} \cdot 1,96 < a < 14 + \frac{5}{\sqrt{25}} \cdot 1,96 \text{ ёки } 12,04 < a < 15,96$$

Б. Айтиайлик Γ^2 номаълум бўлсин, α ни баҳолаймиз. Бунинг учун

$$T = \frac{\bar{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad (8)$$

Тасодифий миқдорларни қараймиз, бу ерда $S = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \Gamma^2$

Бу ҳолда T т.м. озодлик даражаси $n-1$ бўлган Стъудент қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдор бўлиб, унинг зичлик функцияси

$$S(X, n) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\Pi(n-1)} \cdot \Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(1 + \frac{X^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

бўлади. $S(X, n)$ функция жуфт бўлгани учун

$$P\{T < \bar{\sigma}_v\} = 2 \int_0^{\bar{\sigma}_v} S(t, n) dt = V$$

Демак, v эҳтимол билан

$$\bar{X} - \bar{\sigma}_v \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + \bar{\sigma}_v \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (9)$$

бўлади.

Мисол. Бош тўпلامдан $n=10$ ҳажмли танланма олинган:

Варианта X_i	-2	1	23	4	5
Частота n_i	2	1	22	2	1

Бош тўпламнинг нормал тақсимланган X белгисининг (одамларнинг бўйи, пахта толасининг узунлиги ва.х.к.) α математик кутулишни танланма ўртача қиймати бўйича 0,95 ишончлилиқ билан ишончли оралиқ ёрдамида баҳоланг.

Ечиш. Маълумки, танланманинг ўртача қиймати $\bar{X}$ ва тузатилган ўртача квадратик оғиши S мос равишда ушбу формулалар бўйича ҳисобланади:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_i N_i X_i, S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i n_i (X_i - \bar{X})^2}$$

Бу формулаларга масалада берилганларини қўйиб қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{1}{10} (2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1) = \frac{20}{10} = 2, \bar{X} = 2 \\ S &= \sqrt{\frac{1}{9} [2 \cdot (2 - (-2))^2] + (1 - 2)^2 + 2 \cdot (2 - 2)^2 + 2 \cdot (3 - 2)^2 + 2 \cdot (4 - 2)^2 + (5 - 2)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{9} (32 + 1 + 2 + 8 + 9)} = \sqrt{\frac{52}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{13} = \frac{2}{3} 3,6 = 2,4; S = 2,4\end{aligned}$$

Энди b_v ни аниқлаймиз. [3] нинг 3-иловасидаги жадвалдан фойдаланиб $v=0,95$ ва $n=10$ бўйича $b_v=2,26$ ни топамиз.

Шундай қилиб, $\bar{X}=2$; $b_v=2,26$; $S=2,4$; $n=10$ ларни (9) ишончлилиқ оралиғига қўйиб, изланаётган ишончли оралиқни ҳосил қиламиз: $0,3 < \alpha < 3,7$.

Бу номаълум α математик кутулишни 0,95 ишончлилиқ билан қоплайди.

Ақлий ҳужум учун саволлар.

- 1⁰. Статистик баҳо деганда нимани тушунаси?
- 2⁰. Қандай баҳо номаълум параметрнинг силжимаган баҳоси бўлади?
- 3⁰. Қандай баҳо эффектив ҳамда асосли баҳолар бўлади?
- 4⁰. Ҳақиқатга ўхшашлик функцияси қандай тузилади?
- 5⁰. Параметрнинг қандай баҳо ҳақиқатга максимал ўхшаш баҳо бўлади?
- 6⁰. Нормал қонун бўйича тақсимланган X т.м. (белги) нинг (a, σ^2) параметрлари учун танланма тўпламнинг қандай сонли характеристикалари ҳақиқатга максимал ўхшашлик баҳолари бўлоишини асослай оласизми?
- 7⁰. Ишончлилиқ эҳтимоли берилганда номаълум параметрнинг ишончлилиқ оралиғи қандай аниқланади?

Мавзу бўйича таянч иборалар.

Номаълум параметрнинг статистик баҳоси; силжимаган, эффектив ва асосли баҳолар; ҳақиқатга максимал ўхшашлик функцияси, ҳақиқатга ўхшашлик тенгламаси, ҳақиқатга максимал ўхшаш баҳо; Пуассон ва нормал қонун параметрларининг ҳақиқатга максимал ўхшашлик баҳолари; ишончлилик эҳтимоли ва ишончлилик оралиғи; Стъюдент тақсимот қонуни.

Тавсия этилган адабиётлар.

1. М. Султонова. “Вариацион статистика”, Т. “Ўқитувчи”, 1977 йил
2. С.Х.Сиражиддинов, М.М.Маминов. “Эҳтимоллар назияси ва математик статистика” Т. “Ўқитувчи”, 1980 йил
3. В.Е Гмурман. “Эҳтимоллар назарияси ва Математик статистикадан маслалар ечишга доир” қўлланма Т. “Ўқитувчи”, 1980 йил
4. Г. Крамер. Методы математической статистика. М. : «Мир», 1975

6-7 –Назарий мустақил иш, 14-амалий машғулот.

Мавзу: Бош тўпламнинг арифметик ўртача қиймати ва дисперсиясининг танлама тўпламнинг арифметик ўртача қиймати ва дисперсияси бўйича баҳолаш. Баҳо аниқлиги.Ишончлилик эҳтимоли. Ишончлиги оралиқ.

Режа:

1. Бош тўпламнинг арифметик ўртача қиймати ва дисперсиясининг танлама тўпламнинг арифметик ўртача қиймати ва дисперсияси бўйича баҳолаш.
2. Баҳо аниқлиги.Ишончлилик эҳтимоли.
3. Ишончли оралиқ.

Мавзунинг баёни. 1. Бош тўпламнинг арифметик ўртача қиймати сифатида танлама тўпламнинг арифметик ўртача қиймати $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$

қабул қилинади. Математик статистикада $\bar{X}$ нинг силжимаган, эффектив ва асосли баҳо эканлиги исбот этилади.

Айтилганлардан яна қуйидаги келиб чиқади: битта бош тўпламдан олинган етарлича катта ҳажмли бир неча танланма тўпламларнинг арифметик ўртача қийматлари тақрибан бир-бирига тенг. Танламалар ўртача қийматларининг турғунлик хоссаси ана шундан иборатдир. Танлама тўплам дисперсияси

$D_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ни бош тўплам дисперсиясининг силжиган баҳоси эканлигини, яъни танланма тўплам дисперсиясининг математик кутилиши

$$MD_t = \frac{n-1}{n} D_o^*$$

га тенг эканлигини исботлаш мумкин.

Танлама тўплам дисперсиясини шундай “тузатиш” мумкинки, натижада унинг математик кутилиши бош тўплам дисперсиясига тенг бўлади. Бунинг учун D_T ни $\frac{n}{n-1}$ га кўпайтириш кифоя. Шундай қилиб, “тузатилган дисперсия” ни ҳосил қиламиз; уни одатда S^2 орқали белгиланади:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Демак, бош тўплам дисперсиясининг баҳоси сифатида

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (6_1)$$

Тузатилган “дисперсия” ни қабул қиламиз.

Бош тўпламнинг ўртача квадратик фарқини баҳолаш учун дисперсиянинг квадрат илдизига тенг бўлган.

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

“тузатилган” ўртача квадратик фарқдан фойдаланилади.

Шуни айтиш керакки, танланма тўпламнинг ҳажми n етарли катта бўлганда танланма ва тузатилган дисперсиялар (D_T ва S^2) деярли тенг эканлигини кўриш қийин эмас. Шунинг учун $n < 30$ бўлганда амалда тузатилган дисперсиядан фойдаланилади.

2. Баҳо аниқлиги. Ишончлилиқ эҳтимоли.

Танланма тўплам берилганлари бўйича топилган $\hat{\theta}^*$ статистик характеристика $\hat{\theta}$ номаълум параметрнинг баҳоси бўлиб хизмат қилсин. $\hat{\theta}$ ни ўзгармас сон деб ҳисоблаймиз ($\hat{\theta}$ тасоддий микдор ҳам бўлиши мумкин). $|\hat{\theta} - \hat{\theta}^*|$ айирманинг абсолют қиймати қанча кичик бўлса, $\hat{\theta}^*$ баҳо $\hat{\theta}$ параметрни шунчалик аниқроқ кўрсатиши равшан.

Бошқача сўз билан айтганда, агар $b > 0$ ва $|\hat{\theta} - \hat{\theta}^*| < b$ бўлса, у вақтда Γ қанча кичик бўлса, баҳо шунча аниқ бўлади. Шундай қилиб, b мусбат сон баҳонинг аниқлигини кўрсатади. Аммо статистик усуллар $\hat{\theta}^*$ баҳо $|\hat{\theta} - \hat{\theta}^*| < b$ тенгсизликни қаноатлантиради деб узил-кесил тасдиқлашга имкон бермайди, фақатгина бу тенгсизлик амалга ошиши мумкин бўлган эҳтимол ҳақида гапириш мумкин. $|\hat{\theta} - \hat{\theta}^*| < b$ тенгсизлиكنинг амалга ошиши мумкин бўлган λ эҳтимоли, яъни $P(|\hat{\theta} - \hat{\theta}^*| < b) = \lambda$ эҳтимол $\hat{\theta}$ параметр $\hat{\theta}^*$ баҳосининг ишончлилиқ эҳтимоли дейилади.

Одатда баҳонинг ишончлилиқ эҳтимоли олдиндан берилади; шу билан бирга λ сифатида бирга яқин бўлган сонлар олинади. Варицион статистикада (мат.

Статистикада) у ёки бу натижанинг муҳимлигини 1 га яқин бўлган қуйидаги учта эҳтимолнинг қийматлари бўйича баҳолаш қабул қилинган:

$P_1=0,95$ ёки 95 %, $P_2=0,99$ ёки 99% ва $P_3=0,999$ ёки 99,9 %

Бу эҳтимоллар ишончлилик эҳтимоллари деган ном олган. $P_1=0,05$ ёки 5 %, $P_2=0,01$ ёки 1 % ва $P_3=0,001$ ёки 0,1% эҳтимолар эса муҳимлилик даражаси деган ном олган. Юқоридаги эҳтимоллар $P_{0.95}$ ва $P_{0.5}$, ва $P_{0.99}$ ва $P_{0.1}$ х.к. символари билан белгиланади.

3. Ишончлилик оралиқ Ҳар бир ишончлилик эҳтимолига (t) нормаланган четланишнинг аниқ қиймати мос келишини иловадаги 1- жадвалдан ([1] адабиёт) кўриш мумкин. Масалан, $P_1=0,95$ га $t_1=1,96$, $P_2=0,99$ га $t_2=2,50$, $P_3=0,999$ га $t_3=3,30$ мос келади.

Фараз қилайлик, $|\bar{X} - \bar{X}^*| < \delta$ нинг эҳтимоли λ га тенг бўлсин.

$$P[|\bar{X} - \bar{X}^*| < \delta] = \lambda$$

$|\bar{X} - \bar{X}^*| < \delta$ тенгсизликни унга тенг кучли

$$-\delta < \bar{X} - \bar{X}^* < \delta \text{ ёки } \bar{X} - \delta < \bar{X} < \bar{X}^* + \delta$$

Тенгсизлик билан алмаштириб,

$$P[\bar{X}^* - \delta < \bar{X} < \bar{X}^* + \delta] = \lambda$$

га эга бўламиз. Бу муносабатни бундай тушуниш керак: ($\bar{X}^* - \delta$, $\bar{X}^* + \delta$) оралиқнинг $\bar{X}$ номаълум параметрни ўз ичига олиш эҳтимоли λ га тенг.

Номаълум параметрни берилган λ ишончлилик эҳтимоли билан ўз ичига олган ($\bar{X}^* - \delta$, $\bar{X}^* + \delta$) оралиқ ишончли оралиқ дейилади.

Кўриш мумкинки, ($\bar{X}^* - \delta$, $\bar{X}^* + \delta$) оралиқ ёки интервал тасоддий учларга (уларни ишончлилик чегаралари дейилади) эга. Ҳақиқатан, турли танланма тўпламларда $\bar{X}^*$ нинг турли қийматлари ҳосил бўлади. Демак, танланмадан танланмага ўтилганда ишончли оралиқнинг учлари ҳам ўзгариб боради, яъни ишончлилик чегараларининг ўзлари ҳам тасоддий микдордан ($x_1, x_2, \dots, x_n$ функцияларидан) иборат бўлади.

5-МАЪРУЗА

Мавзу: Статистик микдорлар хатоларининг формулалари ва улардан фойдаланиш усуллари.

Режа:

1. Статистик хато. Арифметик ўртача қийматнинг хатоси.
2. Ўртача квадратик фарқни хатоси.
3. Вариация коэффицентининг хатоси.
4. Асимметрия ва эксцесс коэффицентининг хатоси.

Мавзунинг баёни.

1. Статистик хато. Арифметик ўртача қийматнинг хатоси.

Ҳар бир статистик миқдор ўз статистик хатосига, яъни ўлчаш ва ҳисоблаш жараёнида эмас, балки танланма тўплам тузилаётганда бош тўпламдан вариантларини тасодифий танлаш натижасида ҳосил бўладиган репрезентатив хатога эга бўлади; статистик хатолар ёрдами билан танланма тўплам параметрларини бош тўплам параметрларига қанчалик тўғри келишини билиш мумкин.

Математик статистикада исбот қилинадики, арифметик ўртача қийматни m_x (статистик хатони m харфи билан белгилаймиз) статистик хатоси ўртача фарқни танлама тўплам ҳадлари сонининг квадрат илдизига нисбати билан аниқланади:

$$m_x = \frac{s}{\sqrt{n}}; \quad (63)$$

яъни хато белгининг ўзгарувчанлигига тўғри пропорционал, кузатишлар сонига тесқари пропорционалдир.

1-мисол: $\bar{x} = 5000$ кг ўртача сиғим сут учун $\sigma = 500$ кг ва $n = 100$ да арифметик ўртача қийматнинг хатосини топамиз:

$$m_x = \frac{500}{\sqrt{100}} = \frac{500}{10} = 50 \text{ кг}$$

Статистик характерискани унинг хатоси билан бирга ёзиш қабул қилинган. $\bar{x}$ арифметик ўртача қийматни берилган 1) мисол учун қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\bar{x} \pm m_x = 5000 \text{ кг} \pm 50 \text{ кг}$$

(63) формуладан танланма тўплам ҳажмини n бош тўплам ҳажми N нинг озгина (5% - 10% дан кам) қисмини ташкил этганда фойдаланилади. Қолган ҳолларда такрорланмайдиган тасодифий танланма тўпламнинг арифметик ўртача қиймати хатоси

$$m_x = \frac{s}{n} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \quad (64)$$

формула бўйича аниқланади.

N га нисбатан n жуда ҳам кичик бўлганда илдиз остидаги ифода бирга яқинлашади ва m_x нинг қиймати деярли ўзгармайди.

2-мисол: Маккажўхори экилган майдонда $N = 400$ та ўсимлик ичида 50 та ўсимликнинг баландлиги ўлчаниб, қуйидаги маълумотлар олинди: $\bar{x} = 15$ см; $S = 14,9$ см. m_x ни топамиз. (63) формула бўйича:

$$m_x = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{14,9}{\sqrt{50}} = 2,1 \text{ см}$$

(64) формула бўйича:

$$m_x = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} = \frac{14,9}{\sqrt{50}} \sqrt{0,875} = 2,0 \text{ см}$$

Улар орасидаги фарқ жуда озгина, уни эътиборга олмаса ҳам бўлади. лекин, агар $\bar{x}$ ва s миқдорлар $N=40$ шартда олиниб, $n=10$ бўлса, у вақтда (63) формула бўйича $m_x=4,7$ см бўлади, (64) формула бўйича эса $m_x=4,1$ см бўлади.

У ҳолда уларнинг фарқи сезиларли миқдорни ташкил этадики, уни ҳисобга олинмасдан иложи йўқ.

Агар кузатишлар сони кичик бўлса, у вақтда арифметик ўртача қиймат хатосини формуласи

$$m_x = \frac{s}{\sqrt{n-1}} \quad (65)$$

Кўринишда бўлади.

Хатонинг маъноси шундан иборатки, бош тўпلام ўртача қийматини танлама тўпلام ўртача қийматидан у ёки бу томонга учланган хато чегарасида бўлади:

$$\bar{x}_6 = \bar{x}_T \pm 3 m_x;$$

Бу ерда $\bar{x}_6$ – бош тўпلامнинг, $\bar{x}_T$ – танланма тўпلامнинг арифметик ўртача қиймати $\bar{x} + 3m_x$ ва $\bar{x} - 3m_x$ яъни $5000 + 3 \cdot 50 = 5150$ кг ва $5000 - 150 = 4850$ кг орасида бўлади, демакдир. Демак, танлама тўпلامда кузатишлар сони қанча катта бўлса, танламанинг ўртача қиймати бош тўпلام ўртача қийматига шунчалик яқин бўлади.

Масалан: 1-мисолда n 100 га эмас, балки 1000 га тенг бўлганда эди, у вақтда хатонинг миқдори кичик бўлиб, 50 кг эмас, балки 15,81 кг га

$$(m_x = \frac{500}{\sqrt{1000}} = 15,81 \text{ кг}) \text{ тенг бўлур эди.}$$

Тажриба аниқлигининг кўрсаткичи ёки танланманинг ўрта қиймати бош тўпلامнинг ўртача қийматини тўғри акс эттиришининг кўрсаткичи бўлиб, хато ўртача қийматдан неча марта кичиклигини кўрсатувчи муқаррарлик ўлчови

ўртача қиймат

$t = \frac{\text{ўртача қийматнинг хатоси}}{\text{ўртача қийматнинг хатоси}}$ хизмат қилади. Агар $t \geq 3$ бўлса, у вақтда

танланма ўртача қиймат бош тўпلامнинг ўртача қийматини тўғри акс эттирган бўлади ва бу ҳодисанинг эҳтимоли $P=0,997$ бўлади.

t – муқаррарлик ўлчови ва P эҳтимоллар бир-бири билан қуйидагича боғланади:

$t = 2$ га	$P = 0,955$
$t = 2,5$ га	$P = 0,988$
$t = 3$ га	$P = 0,997$
$t = 3,5$ га	$P = 0,9995$
$t = 4$ га	$P = 0,99994$

Тажрибанинг етарли аниқлиги $t = 3$ ва $P = 0,997$ да бўлади деб қабул қилинган. Далада ўтказиладиган тажрибаларда муқаррарлик ўлчовига қуйиладиган талабни $t = 2,5$ ($P = 0,988$) га тушириш мумкин.

Катта эҳтимолни талаб этадиган ишларга эса t нинг қиймати 4 дан ($P = 0,99994$) кам олинмайди. Масалан, дори дозаларининг одам организмга таъсирини ўрганишга оид ишларда муқаррарлик ўлчовини ошириш айниқса муҳимдир. Фараз қилайлик, 10 мг дори дозаси заҳарсиз ва ундан даволаш мақсадида фойдаланиш мумкинлиги тажрибаларда аниқланган бўлсин. Агар бу доза учун тажрибаларда хато $m = \pm 3$ мг бўлса, у вақтда муқаррарлик ўлчови $t = \frac{10}{3} \approx 3,3$ га тенг бўлади; бу $P = 0,997$ эҳтимолга мос келади, яъни шундай дозада

даволашда ҳар 1000 ҳолнинг учтасида заҳарланиш мумкин. Демак, 3,3 га тенг бўлган t кўрсаткич бундай тажриба учун етарли бўлмайди. Шунинг учун дозанинг заҳарсизлигини тасдиқловчи тажрибалар (кузатишлар) сонини ошириш зарур ва шу билан бирга ўрганилаётган дозанинг кўрсаткичи учун камайтирилган хато олиш ва шу билан топилган доза оммавий даволаш препарати бўлиб хизмат қилиши мумкинлигига ишонч ҳосил қилиш керак.

Статистик хатолар ва муқаррарлик ўлчови маълум даражада тажрибалар натижасини тасдиқлайди. Масалан, агар тажрибада $t = 2$ ни ($P = 0,955$) берувчи хато олинган бўлса, бу танланма тўплам ўртача қийматнинг кўрсаткичларидан фойдаланиш мумкин эмаслигини кўрсатади, чунки улар бош тўпламга ҳос бўлган ўртача миқдорни кучсиз даражада акс эттиради. Шунинг учун тажрибада олинган маълумотларга ўрганилаётган ҳодиса бўйича бош тўпламга тарқатилиши мумкин эмас.

Шундай қилиб, исталган статистик характеристика ёки бирор коэффицентни ҳисоблаш унинг статистик хатосини ва муқаррарлик ўлчовини ҳисоблаш билан бирга олиб бориш мумкин. Бу маълумотларсиз ҳосил қилинган ўртача қийматлар ҳеч қандай илмий аҳамиятга эга бўлмайди.

2. Ўртача квадратик фарқнинг хатоси.

Ўртача квадратик фарқнинг хатоси

$$m_G = \frac{s}{\sqrt{2n}}; \quad (66)$$

формула бўйича ҳисобланади. Бу миқдорнинг муқаррарлик ўлчови (критерийси)

$$t = \frac{s}{m_\sigma} \geq 3$$

бўлади. Масалан, 50 та кузатишдан иборат бўлган танлаума тўпланда ўртача квадратик фарқ 3,64 га тенг бўлди. Бу кўрсаткичнинг статистик хатоси $m_{\sigma}=3,64/\sqrt{100}=0,364$ бўлади. Демак, бош тўпламнинг ўртача квадратик фарқи $3,64-3\cdot 0,364$ дан $3,64+3\cdot 0,364$ гача ёки $3,64\pm 1,092$ орасида бўлади. бу мисол учун муқаррарлик критерийси $t=\frac{3,64}{0,364}=10$ бўлади.

3. Вариация коэффицентининг хатоси.

Вариация коэффицентининг ўртача хатоси қуйидаги тақрибий формула бўйича аниқланади:

$$m_v \approx \frac{V}{\sqrt{2n}} \sqrt{1+2\left(\frac{V}{100}\right)^2} \quad (67)$$

n катта сон бўлганда соддароқ формуладан фойдаланилади:

$$m_v = V / \sqrt{2n} \quad (68)$$

Бу микдорнинг муқаррарлик ўлчови $t=V/m_v \geq 3$ бўлади. масалан, II бобда қўрилган мисолда Ўрта Осиё ипакчилик илмий текшириш институтида олинган маълумотларга асосан 100 донa пилла энининг вариация коэффиценти 6,2% га тенг бўлди. Бу кўрсаткичнинг статистик хатоси

$$m_v = 6,2/\sqrt{2\cdot 100} = 6,2/1,42\cdot 10 \approx 0,43\%$$

бўлади. Демак, бош тўпламнинг вариация коэффиценти 6,2% - $3\cdot 0,43\%$ дан $6,2\% + 3\cdot 0,43\%$ гача ёки $6,2\% \pm 1,29\%$ орасида бўлади. Бу мисол учун муқаррарлик ўлчови (критерийси) $t=6,2/0,43 \approx 14,4$ бўлади.

4. Асимметрия ва эксцесс коэффицентларининг хатоси.

Асимметрия ва эксцесс коэффицентларининг ўртача хатоси қуйидаги тақрибий

$$m_{As} = \sqrt{\frac{6}{n}} \quad (69)$$

ёки

$$m_{As} = \sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}} \quad (70)$$

формула бўйича аниқроқ топилади.

Эксцесс коэффицентининг ўртача хатоси қуйидаги

$$m_{Ex} = 2\sqrt{\frac{6}{n}} \quad \text{ёки} \quad m_{Ex} = \sqrt{\frac{24}{n}} \quad \text{ёки} \quad m_{Ex} = \sqrt{\frac{24n(n-1)}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)}} \quad (71)$$

Масалан, 20 донa маълум нав пилланинг оғирлиги учун асимметрия коэффиценти $As=0,8111$ га тенг бўлди. Ўртача ҳатони топамиз:

$$m_{As} = \sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}} = \sqrt{\frac{6\cdot 20\cdot 19}{18\cdot 21\cdot 23}} = \sqrt{\frac{380}{1449}} \approx \frac{19,5}{38} \approx 0,5$$

Бу мисол учун муқаррарлик критерийси $t=0,8111/0,5\approx 1.6$ бўлади. муқаррарлик критерийси $t\approx 1,6 < 3$ демак, 20 кузатишдан иборат бўлган танланма бош тўпламнинг асимметрия коэффициентини тўғри акс эттирмайди.

15-16 амалий машғулотлар, 4-амалий мучтақил иш.

Мавзу: Арифметик ўртача қийматнинг муқаррарлигини кичик сонли кузатишларда Стъюдент усули бўйича аниқлаш.

Танлама тўпламлар ҳажми етарли катта бўлганда, уларнинг арифметик ўртача қийматлари нормал тақсимот қонунига бўйсунди. Лекин танлама ҳажми кичик ($n < 30$) бўлганда уларнинг арифметик ўртача қийматларининг тақсимот қонунлари қандай бўлади деган савол туғилади; бош тўплам ҳақида кичик танланма тўплам бўйича фикр юритишда катта шубҳа туғилади. Бу саволга инглиз математики Госсет (тахаллуси Стъюдент) амалда жавоб берди. Шунинг учун у томонидан ўрганилган тақсимот Стъюдентнинг t - тақсимооти деб ном олган. Ҳозирги вақтда кичик танлама тўпламлар таҳлили кенг эътироф этилган ва биологнинг ўзи энг содда ва амалда энг кўп учраб турадиган шу t – тақсимоотини тадбиқ эта билиши керак.

Боғлиқ бўлмаган кузатишлардан олинган ташланма тўплам маълумотларига кўра, шундай T (унинг қийматларини t орқали белгилаймиз) тасодифий миқдор тузатиш мумкинки, унинг тақсимот қонуни α ва g ноъмалум параметрларга боғлиқ бўлмайди, чунончи

$$T = \frac{\frac{\bar{x} - a}{s}}{\sqrt{n}} \quad (73^1)$$

шундай тасодифий миқдор бўлади, бу ерда n – тауланма ҳажми, $\bar{x}$ – танланма тўпламнинг арифметик ўртача қийматини, a – бош тўпламнинг арифметик ўртача қийматини, S – тузатилган ўртача квадратик фарқ.

T тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$S(t,n) = B_n \left(1 + \frac{t^2}{n-1} \right)^{-n/2} \quad (74)$$

эканлигини исботлаш мумкин. Бу ерда B_n коэффициент

$$B_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad (75)$$

тенглик билан аниқланади, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ эса гамма функциясидир.

Жумладан, $x=n+1$ (n – бутун мусбат сон) бўлса, у вақтда $\Gamma(n+1)=n!$ бўлади.

Стъюдент тақсимои танланма тўплам ҳажми n га боғлиқ, лекин α ва g боғлиқ эмас. $S(t, n)$ жуфт функция, шунинг учун $\left| \frac{\bar{x} - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right| < t_\gamma$ тенгсизликнинг амалга ошиши эҳтимоллиги

$$P\left(\left|\frac{\bar{x} - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma\right) = 2 \int_0^{t_\gamma} S(t, n) dt = \gamma \quad (76)$$

га тенг (76) формулани

$$P\left(\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma \quad (77)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Демак, Стъюдент тақсимоидан фойдаланиб, ноъмалум α параметрни γ эҳтимол билан ўз ичига олувчи $\left(\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ ишончли ораликни топдик.

Кузатишлар сони оз бўлганда, арифметик ўртача қиймат учун муқаррарлик критерийси (ўлчови) Стъюдент усули бўйича v озодлик даражалари сонини ҳисобга олиб, жадвал усули билан аниқланади. Бунда озодлик даражалари сони кузатишлар сонини бир га камайтириш, $v = n - 1$ деб олиш йўли билан ҳисобланади. Стъюдент жадвалининг ([1], иловадаги VI-жадвал) юқори сатрида P эҳтимолга мос t миқдорнинг қийматлари кўрсатилган; чапдаги четги устунда v озодлик даражалари сонининг қийматлари берилган. P ва v миқдорларга боғлиқ ҳолда уларнинг устун ва йўллариининг кесишишидаги катакларда муқаррарлик критерийсининг қийматлари келтирилган. Жадвалда фақат 0,95; 0,98; 0,99 ва 0,999 га тенг эҳтимоллар учун графалар келтирилган. Бу жадвал биологияда кенг қўлланилади. Бу жадвал (у ёки бу муҳимлилик даражасида) танланма тўпламнинг $\bar{x}$ арифметик ўртача қийматининг тасодифий тебранишининг энг қулай чегараларини аниқлашга, шунингдек, берилган бош тўпламнинг арифметик ўртача қиймати ётувчи ишончлилик чегараларини ҳам аниқлашга имкон беради.

Масалан, 8 та кузатишдан иборат тажрибада белгининг арифметик ўртача қиймати топилган: $16,4 \pm 0,62$ кг. Бу миқдор тасодифий тебранишнинг ишончли оралигининг муҳимлилик даражаси $P = 0,05$ бўлганда топайлик. Иловадаги IV-жадвалда $P = 0,95$ га мос графа ва $v = 8 - 1 = 7$ сатрнинг кесишишида $t = 2,36$ қийматни топамиз, бундан ишончли оралик $\bar{x} \pm t m_{\bar{x}} = 16,4 \pm 2,36 \cdot 0,62 = 16,4 \pm 1,46$ ёки 14,94 дан 17,86 гача бўлиши келиб чиқади.

Танланма тўплам ҳажми n чексиз ортиб борганда Стъюдент тақсимотининг нормал тақсимотга яқинлашишини исбот қилиш мумкин. (бу $\lim$

$B_n = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2} = e^{-t^2/2}$ дан келиб чиқади). Шу сабабли нормал тақсимланган белгининг математик кузатилишини баҳолашда $n > 30$ да

$$\underline{P(|T| < t_\gamma)} = 2 \int_0^{t_\gamma} S(t, n) dt$$

формулани тақрибан

$$\underline{P(|T| < t_\gamma)} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_0^{t_\gamma} e^{-t^2/2} dt = \gamma$$

формула билан алмаштириш мумкин. Бошқача айтганда, $n > 30$ да Стъудент тақсимооти ўрнига нормал тақсимоотдан фойдаланиш мумкин. Аммо ҳажми $n < 30$ бўлган танланма тўплamlарда (бундай тўплamlар кичик танланма тўплamlар дейилади) кўрсатиб ўтилган алмаштириш кўпол хатога, чунончи, ишончли оралиқнинг асоссиз торайишига, яъни баҳо аниқлигининг ортишига олиб келади. Масалан, $n=5$ ва $\gamma=0,99$ бўлсин, у вақтда Стъудент тақсимоотидан фойдаланиб, $t_\gamma = 4,6$ ни топамиз Лаплас формуласидан фойдаланиб эса $t_\gamma = 2,58$ ни топамиз. Кичик танланма тўплamlарда Стъудент тақсимооти унчалик аниқ бўлмаган натижалар (кенг ишончли оралиқ) бериши бу тақсимоотнинг кучсизлигини эмас, балки кичик танланма тўплaml бош тўплamlнинг бизни қизиқтирувчи белгиси ҳақида оз маълумот беришини билдиради. Шунинг учун катта танланма тўплamlдан фойдаланиш мумкин бўлмайдиган ёки мақсадга мувофиқ бўлмаган ҳоллардагина кичик танланма тўплamlга мурожаат қилинади.

Мавзу: Икки тўплaml ўртача фарқининг хатоси.

Экспрементал ишларда арифметик ўртача қийматлар (АЎҚ) фарқининг хатосини аниқлаш катта аҳамиятга эга, чунки кўпгина тажрибанинг асосий мақсади назорат ва тажриба қилинадиган гуруҳлар объектларининг АЎҚ кўрсаткичларида фарқ бор-йўқлигини аниқлашдан иборат бўлади. шу билан бирга тажриба ва контрол объектларнинг АЎҚ кўрсаткичлари (микдорлари) солиштирилади ва ҳосил бўладиган $d = \bar{x}_{\text{таж}} - \bar{x}_{\text{конт}}$ фарқ ўрганилаётган кўрсаткичларда силжиш бор-йўқлигини кўрсатади. Бу фарқнинг муқаррарлигини аниқлаш учун унинг m_d хатоси микдори қуйидаги формула ёрдами билан ҳисоблаб чиқиш талаб этилади:

$$m_d = \sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2} \quad (78)$$

бу ерда m_{x_1} – биринчи танлама тўплaml (тажриба) АЎҚ хатоси m_{x_2} иккинч танланма тўплaml (контрол) АЎҚ хатоси.

ЎАҚ орасидаги фарқнинг муқаррарлигини ўрганиш учун нормалланган четланишдан фойдаланиш керак. Нормалланган четланиш қуйидаги кўринишни олади:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2}} \text{ ёки } t = \frac{d}{m_d}$$

Бу ерда t **муқаррарлик критерийси** деб аталади. Бу критерийнинг қиймати [1] иловадаги IV жадвал бўйича қанақа танлама тўплам материаллари билан кўрилишига боғлиқ ҳолда баҳоланади. Қўлимизда жадвал бўлмаган ҳолда **уч** сигма қоидаси асос қилиб олинади: агар фарқ ўз хатосидан дярли **уч** марта ортиқ бўлса, у 0,99 дан кичик бўлмаган эҳтимол билан муқаррар бўлади.

Аммо юқорида айтилганларга кўра t нинг бундай юқори қийматига ҳеч қандай зарурат йўқ. Агар $n > 30$ бўлса, у вақтда $t = 2,58$ критерий фарқининг 0,99 эҳтимол билан муқаррарлигига кафолат беради.

1-мисол. Ультрабинафша нурлар билан нурлантирилган ҳайвонлар бир ой мобайнида $6,8 \pm 0,4$ кг, нурлантирилмаган ҳайвонлар эса (ҳар икки гуруҳлар ҳажми бир хилда) $5,2 \pm 0,3$ кг семирган. Нурлантириш оғирликни қанча орттиради? Ҳайвонларнинг иккала гуруҳлари орасида боғланиш йўқ. Шунинг учун

$$m_d = \sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2} = \sqrt{0,4^2 + 0,3^2} = \sqrt{0,16 + 0,09} = \sqrt{0,25} = 0,5 \text{ кг}$$

бундан $d \pm m_d = (6,8 - 5,2) \pm 0,5 \text{ кг} = 1,6 \pm 0,5 \text{ кг}$

демак, нурланиш эффектнинг 99% ишончли оралиғи $(1,6 - 2,58 \cdot 0,5; 1,6 + 2,58 \cdot 0,5)$ ёки $(0,3; 2,9)$ кг ни ташкил этади.

Агар гуруҳларнинг частоталари турлича бўлса, (78) формула қуйидаги формула билан алмаштирилади:

$$m_d = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n_x + n_y - 2} \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y} \right)} \quad (79)$$

Бунда n_x ва n_y биринчи ва иккинчи гуруҳларнинг мос частоталари. Бу формула орқали киритилган тузатиш (78) формулага нисбатан одатда кичик бўлади; агар иккала гуруҳ частоталари (5) унчалик кичик бўлмаса, соддароқ бўлган (78) формуладан фойдаланилса ҳам бўлади. $n_x = n_y$ бўлганда (79) формула (78) формулани беради.

2 - мисол. 50-жадвалда тажриба майдонларида ўғит солиниб (X) ўғит солинмасдан (Y) олинган гуруҳ ҳосиллари ҳақида маълумотлар келтирилган ва m_d ни топиш талаб қилинади.

50-жадвал

X	35, 50 32,66 30,56 36,63 42,28 35,78 40,20	жами 252,61	ўртачаси 36,08	$\sum_i \Sigma_i^2$ 99,9
Y	46,38 41,36 52,20 46,20	186,14	46,53	59,0

(78) формулага кўра

$$m_d = \sqrt{\frac{99,9}{6 \cdot 7}} + \sqrt{\frac{59,0}{3 \cdot 4}} = \sqrt{2,36 + 4,92} = 2,70$$

(79) формулага кўра

$$m_d = \sqrt{\frac{99,9 + 59,0}{7 + 4 - 2} \cdot \frac{7 + 4}{7 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{158,9 \cdot 11}{9 \cdot 28}} = \sqrt{6,94} = 2,64$$

Ўртача қийматлар фарқи $46,53 - 36,09 = 10,44$ кг бўлганида ўғит таъсири учун 99% ишончли оралиқ:

$(10,44 - 2,58 \cdot 2,64; 10,44 + 2,58 \cdot 2,64)$ ёки $(3,63; 17,25)$ кг бўлади

Боғлиқ бўлган танланмалар учун икки танланманинг АЎҚ орасидаги фарқ m_d хатосининг формуласи мураккаброқ кўринишига эга бўлди:

$$m_d = \sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 - 2m_{x_1} \cdot m_{x_2} \cdot \tau} \quad (80)$$

Бунда m_{x_1} ва m_{x_2} иккита танланма тўплам бўйича АЎҚ хатолари τ - икки тўплам вариантлари орасидаги корреляция коэффиценти. Бу формулага $2m_{x_1} \cdot m_{x_2} \cdot \tau$ ифоданинг киритилиши боғлиқ бўлган танланма тўпламлар фарқи хатосининг кўрсаткичини камайтиради, бу эса t муқаррарлик критерийсини юқорироқ беради. Аммо τ нинг қийматини ҳисоблаш имкони бўлмаса, бу ҳолда боғлиқ танлама тўпламлар учун ҳам $m_d = \sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2}$ формуладан фойдаланиш мумкинлигини назарда тутиш лозим; лекин бу ҳолда фарқ хатосининг кўрсаткичи бир оз оширилган бўлади, бу эса фарқнинг муқаррарлик даражасини пасайтиради.

3-мисол. Ғунижин сигирларнинг соғим сути ўртача ўз она сигирларининг сутларига нисбатан 500 кг ортиқ, ғунажин сигирлар билан она сигирлар соғим сутларининг боғлиқлигини кўрсатувчи корреляция коэффиценти эса $\tau = 0,4$ бўлсин; у вақтда бир букадан урчиган она сигирларнинг ғунажин сигирлари маҳсулдорлиги ошади деган селекция хулосасининг муқаррарлигини аниқланг.

51-жадвални тузамиз. Фарқнинг хатосини топиш формуласига қийматларни қўямиз:

$$m_d = \sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 - 2m_{x_1} \cdot m_{x_2} \cdot \tau} = \sqrt{50^2 + 40^2 - 2 \cdot 50 \cdot 40 \cdot 0,4} = \sqrt{2500} = 50 \text{ кг}$$

$$\text{бундан } d \pm m_d = 500 \pm 50; t_d = \frac{500}{50} = 10.$$

Бир-бири билан боғлиқ бўлган иккита танланма тўпламнинг арифметик ўртача қиймати орасидаги фарқнинг муқаррарлигини аниқлаш.

51-жадвал

Сигирлар гуруҳи	Солиштирилган жуфтлар сони	Ўртача соғим сути кг	S	$m_x = \frac{S}{\sqrt{n}}$
-----------------	----------------------------	----------------------	---	----------------------------

	(n)			
Ғунажин сигирлар	100	4500	500	50
Она сигирлар	100	4000	400	40
		d=500 (фарқи)		m _d =50

Муқаррарлик критерийсининг $t=10$ қиймати синалаётган буқа ўз наслининг маҳсулдорлигини она насли маҳсулдорлиги даражасига нисбатан ўртача 500 кг сутни оширишини тамомила муқаррарлигини кўрсатади.

Физиологик ва генетик тажрибаларда кўпинча учраб турадиган кичик танланма тўпламларда ($n < 30$) фарқнинг муқаррарлигини аниқлаш t нинг юқорида даражаларида амалга оширилади. Кичик сонли кузатишларда фарқнинг муқаррарлигини аниқлаш методи Стъюдент ва Фишер томонидан ишлаб чиқилган бўлиб, бу метод экспериментал тадқиқотларда статистик ҳисоблашлардан фойдаланишни анчагина камайтиришга имкон беради. Шу мақсадда кузатишнинг ва эҳтимолнинг турли даражалари учун t нинг муқаррарлик қийматлари берилган махсус жадвалдан фойдаланилади ([1], иловадаги V жадвал). Бу жадвалнинг тузилишидан кўринадики, фарқнинг муқаррарлигини ўзаро боғлиқ бўлган ва боғлиқ бўлмаган танлама тўпламлар учун аниқлаш мумкин. ўзаро боғлиқ бўлган ҳол учун унга сўнгги устунда боғлиқ танлама тўпламга кирган солиштирилаётган n та жуфтнинг сони ҳақида маълумотлар келтирилган, чапдаги сўнгги устунда эса ўзаро боғлиқ бўлмаган танлама тўпламлардаги солиштирилаётган (n_1+n_2) кузатишлар сонининг йиғиндиси ҳақидаги маълумотлар киритилган. Қолган учта устун t муқаррарлик критерийси қийматлари ҳақидаги маълумотлар билан тўлдирилган. Чапдан иккинчи устун t нинг $P=0,997$ эҳтимолини юқори даражадаги муқаррарлик қийматини кўрсатади, чапдаги учинчи устун t нинг $P=0,99$ эҳтимолини ўртача даражадаги муқаррарлик қийматини беради ва ундан кейинги устун t нинг дала ва ишлаб чиқариш тажрибаларида фойдаланилган, $P=0,95$ эҳтимолини пастроқ даражасига мос келган қийматини кўрсатади. Жадвалдан фойдаланишни мисолда кўриб чиқамиз.

4-мисол. Ҳароратнинг сигирларнинг нафас олиш тезлигига таъсирини ўрганиш бўйича физиологик тажрибалар шуни кўрсатдики, ҳарорат 25°C бўлганда 1-минутда нафас олиш ҳаракатларининг ўртача сони 45 га тенг, ҳарорат 10°C бўлганда эса нафас олишларнинг ўртача сони 30 гача тушади. Тажрибалар 5 бошли сигирлар гуруҳида ўтказилган, яъни танланма тўпламлар ўзаро боғлиқ ва корреляция коэффиценти $\Gamma=0,80$. Ишлаб чиқилгандан сўнг қуйидаги статистик маълумотлар ҳосил бўлган (52-жадвал).

Кичик сонли кузатишларда иккита ўзаро боғлиқ бўлган гуруҳнинг арифметик ўрта қийматлари орасидаги фарқнинг муқаррарлигини аниқлаш.

52-жавал

Ҳарорат фарқи ($^{\circ}\text{C}$ да)	Гуруҳдаги хайвонлар сони	Нафас олишнинг ўртача сони, $\bar{x}$	Статистик хато m_d	Муқаррарлик критерийси (t)
--	--------------------------------	--	----------------------	-----------------------------------

25 10	5 5	45 30	3 4	15 7,5
		d= 15 (фарқи)	$m_d = \sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 - 2m_{x_1} \cdot m_{x_2} \cdot \tau} =$ $= \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0,8} =$ $= \sqrt{5,80} = 2,41$	

Кўрилаётган мисолдаги солиштирилаётган ўзаро боғлиқ танланма тўплamlарда $n=5+5=10$. жадвалда ўнгдаги четки устундан $n=5$ қийматини топамиз ва сатр бўйича t нинг муқаррарлик қийматини аниқлаймиз. Эҳтимолнинг турли даражалари учун у қуйидагича бўлар экан:

$\underline{P}=0,997$ да $t=7,58$; $P=0,99$ да $t=4,60$; $\underline{P}=0,95$ $t=2,78$

Биз ҳисоблаб чиққан АЎҚларнинг фарқи учун t нинг қиймати 6,2 га тенг. Демак АЎҚ ларнинг ҳаво ҳароратининг пасайишида нафас олиш тезлигининг ўртача фарқи 15 та нафас олиш ҳаракатига камайиши кичик ва ўртача даражадаги $P=0,95$, $\underline{P}=0,99$ эҳтимолларда муқаррар эканки, бу шу типдаги физиологик тажрибаларга қўйилган муқаррарлик талаби учун тамомила етарлидир.

Иккита боғлиқ бўлмаган танланма тўплamlарнинг АЎҚ орасидаги фарқнинг муқаррарлиги шунга ўхшаш аниқланади. Бунга қуйидаги мисолни келтирамиз.

5-мисол. Жерсей ва Остфриз зотли сигирларнинг кислород исътемомл қилишларидаги фарқни муқаррарлигини аниқланг. Тажриба ва уни статистик ишлаб чиқиш нитажасида қуйидаги маълумотлар ҳосил қилинган (53-жадвал).

Кичик сонли кузатишларда иккита боғлиқ бўлмаган гуруҳ арифметик ўртача қийматлари орасидаги фарқнинг муқаррарлигини аниқлаш.

53-жадвал

Ҳайвонлар зоти	Ҳайвонлар	1 соатда кислород исътемомл қилиши (л/соат)	Хато, m	t
Жерсий	10	0,541	0,050	10,8
Остфриз	8	0,335	0,065	5,1
		D=0,206 (фарқи)	0,082	2,5

Иккила танланма тўплaml частоталарининг йиғиндиси $n=n_1+n_2=10+8=18$. боғлиқ бўлмаган танланма тўплamlлар учун чапдаги четки устундан олинган n нинг шундай қийматида $t=3,70$ ($P=0,997$ да) муқаррар микдор; $t=2,92$ ($\underline{P}=0,95$ да) муқаррар; t нинг келтирилган мисолда ҳисоблаб чиқилган қиймати $t=2,5$. Демак, ишлаб чиқариш шароитларида ўтказилган физиологик тажрибалар учун бўлган эҳтимолнинг кичик даражадаги икки зот сигирларда интенсив кислород исътемомл қилишда ҳосил бўлган фарқ статистик муқаррардир.

Мавзу: Дисперциялар орасидаги фарқнинг муқаррарлигини баҳолаш.

Арифметик ўртача қийматлар орасида кузатиладиган фарқни баҳолаш билан бир қаторда танланма тўплamlларнинг берилганларни солиштириш

тахлили белгилар вариацияларининг кўрсаткичлари асосида ҳам ўтказиш мумкин.

Аввало, озодлик даражаси сони тушунчасини киритамиз. Бирор параметрни топишда қатнашаётган ўзаро боғлиқ бўлмаган миқдорлар сони шу параметрнинг озодлик даражаси сони дейилади ва ν орқали белгиланади. Озодлик даражаси сони параметрни топишда қатнашадиган миқдорларнинг умумий сонидан шу миқдорларни боғловчи шартлар сонини айтирилганига тенг. Масалан, бизга n та варианта берилган бўлсин

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

$$n_1, n_2, \dots, n_k$$

$$\text{Дисперция куйидаги } \sum_s n_s = \sum_i n_i (x_i - \bar{x}) = 0$$

Битта шартбилан боғланган n та айирма бўйича ҳисобланади. Шунинг учун дисперциянинг озодлик даражаси $\nu = n - 1$ бўлади, ўртача қийматлар ҳеч қандай шартлар билан боғланмаган n та варианта бўйича ҳисобланади. Шунинг учун ўртача қийматнинг озодлик даражаси $\nu = n$ бўлади.

Нормал тақсимот қонуни учта $(n, \bar{x}, \sigma)$ параметр билан характерланади. Шунинг учун нормал тақсимот қонунининг озодлик даражаси $\nu = n - 3$ бўлади. Пуассон тақсимот қонунининг ҳам икки параметр (n, p) билан характерланганлиги учун унинг озодлик даражаси $\nu = n - 2$ бўлади.

Танланма тўплам ўртача қийматларини солиштириш ҳолларидаги айирманинг муқаррарлик критерийси

$$t = \frac{S_1 - S_2}{m_s} = \frac{d_s}{m_s} \quad (81)$$

формула бўйича баҳоланади. Бу ерда m_s куйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$m_s = \sqrt{\frac{S_1^2}{2n_1} + \frac{S_2^2}{2n_2}} \quad (82)$$

S_1 ва S_2 орасидаги фарқни $t \geq 3$ да, одатдагидек муҳим деб ҳисоблаш мумкин. аммо бир қатор назарий мулоҳазаларга кўра вариацияларни солиштириш ва таққослаётганда гуруҳлар орасидаги фарқнинг муқаррарлигини аниқлаш учун F – критерий (Фишернинг F - критерий) деб аталадиган анчагина аниқ методдан фойдаланилади. F – критерий сифатида кузатилган дисперциянинг ушбу

$$\text{нисбати олинади} \quad F = S_1^2 / S_2^2 \quad (83)$$

Катта дисперция касрнинг сурати қилиб олинади. Шунинг учун $F \geq 1$. Агар $F=1$ бўлса, бу дисперцияларнинг тенглигини кўрсатади. $F \neq 1$ ($F > 1$) бўлганда дисперциялар орасидаги фарқни тасодифий ёки тасодифий эмаслигини баҳолаш зарурати туғилади.

F миқдор қанча катта бўлса, дисперсиялар орасидаги фарқ шунча кўп бўлиши, ва аксинча, F нинг қиймати 1 га яқин бўлса, солиштириладиётган

вариациялар кўрсаткичлари орасидаги фарқ шунчалик оз бўлади. F – критерийнинг қийматлари муҳсус жадваллар бўйича баҳоланади: бу жадвалларда солиштирилаётган гуруҳларни ҳажмлари (бу гуруҳлар озодлик даражаларининг турли сонлари) ҳисобга олинади ва турли муҳимлик даражалари қабул қилинади. Бир оз қисқартирилган кўринишда улар (0,05 муҳимлик даражаси учун) [1] иловасидаги VI жадвал ва (0,01 муҳимлик даражаси учун) иловадаги VII жадвалда берилган. Агар F нинг ҳосил бўлган миқдори қабул қилинган муҳимлик даражасида жадвал қийматидан катта бўлса, у вақтда дисперциялар орасидаги фарқ муқаррар деб олинади, агар F нинг ҳосил бўлган миқдори жадвал қийматидан кичик бўлса, дисперциялар орасидаги фарқни тасодифий, муҳим эмас деб ҳисоблаш мумкин.

Статистиканинг бир қатор маҳсус бўлимларида, айниқса, дисперцион анализда F катта аҳамиятга эга. Биз F - критерийнинг умумий тушунчаси ва муқаррарликни баҳолаш учун иловадаги ([1]) VI ва VII жадваллардан фойдаланиш билан чекланамиз.

Мисол. Пахтанинг икки нави (54-жадвал) деярли бир хил ўртача ҳосилдорликка ($\bar{x}=20,4$; $\bar{x}=20,3$ ц/г) эга, лекин улардан бирига (А навга) об-ҳаво шароитларининг йилдан-йилга ўзгариши бошқасига қараганда камроқ таъсир қилади. $S_1^2=16,9$; $S_2^2=4,92$ деб оламиз, демак, $F = S_1^2/S_2^2 = 16,9/4,92=3,44$ бўлади. суратнинг озодлик даражаси сони $v = 8-1=7$, маҳражнинг озодлик даражаси сони $v_2=8-1=7$ [1] иловасидаги VI жадвалдан $F_{05}\left(\frac{7}{7}\right) = 3,44$ эканини топамиз. Ҳақиқий $F=3,44$ қиймат 5% ли чегара қийматидан кичик бўлгани учун дисперциялар орасидаги фарқ тасодифий экан, муҳим эмас экан.

54-жадвал

Йиллар	Ҳосилдорлик, (ц, ҳисобида)	
	А - нав	В - нав
1952		
1953	18.3	16.8
1954	19.6	17.2
1955	22.1	23.7
1956	24.0	26.1
1957	17.2	15.4
1958	20.9	21.3
1959	19.3	17.4
	21.8	24.5
Жами	163.2	162.4
Ўртачаси	20.4	20.3
S	2.22	4.11

8-назарий мустақил иш

Мавзу: Аниқ маълумотлар ва гипотеза. χ^2 квадрат критерийси.

Режа:

1. Аниқ маълумотлар ва гипотеза.
2. Тажрибавий тақсимотни назарий тақсимот билан таққослаш.
3. Иккита тажрибавий тақсимотни таққослаш.

Мавзунинг баёни. 1. Аниқ маълумотлар ва гипотеза.

Биологик ҳодисаларни сон жиҳатдан ўрганиш гипотезалар яратишни талаб қилади. Бу ҳодисаларни шу гипотезалар орқали тушунтириш мумкин бўлади.

Кўрилатган миқдорларни ёки бош тўпламларнинг тақсимот қонунлари ҳақидаги ҳар қандай фаразларни “статистик гипотезалар” деб атаيمиз.

Шунга ўхшаш фаразлар қилиб, биз улардан турли натижалар чиқарамиз ва улар тажрибада қанчалик тўғри чиқишини текширамиз. У ёки бу гипотезани текшириш учун кузатишлар орқали ёки махсус тажрибалар ўтказиш йўли билан аниқ маълумотлар олиш керак ва ушбу гипотезага мувофиқ назарий жиҳатдан кутилатган маълумотларни таққослаб кўриш керак. Агар олинган маълумотлар назарий жиҳатдан кўрилатган маълумотлар билан ҳақиқатдан ҳам мос келса, у вақтда бу факт ўша гипотезани қабул қилиш учун уни тўғрилигини тан олиш учун етарли асос бўлиши мумкин. Агар маълумотлар назарий жиҳатдан кутилатган маълумотларга етарли тўғри келмаса, у вақтда олинган гипотезанинг тўғрилигига шубҳа туғилади.

Олинган маълумотлар ва назарий жиҳатдан кутилатган маълумотлар орасидаги фарқни статистик баҳолаш масаласи, яъни қайси ҳолларда ва қандай эҳтимоллик даражасида бу фарқни муқаррар деб ҳисоблаш мумкин, аксинча бу фарқни муҳим бўлмаган, арзимас, тасодифий деб ҳисоблаш лозим деган масала келиб чиқади. Мавжуд маълумотлар ва назарий жиҳатдан кутилатган маълумотлар орасидаги фарқни муҳим бўлмаган, тасодифий деб ҳисоблаш, мумкин бўлган ҳолда фараз этилган гипотеза ўринли деб ҳисобланади. Мавжуд маълумотларни назарий жиҳатдан кутилатган маълумотларга мос келишини баҳолайдиган қатор усуллар мавжуд. Биз бу усуллардан факт биттасини – “Хи квадрат” (χ^2) усулини қисқача кўриб чиқамиз.

2. Тажрибавий тақсимотни назарий тақсимот билан таққослаш.

Тажрибалардан олинган материалларни ишлаб чиқишда бир қаторнинг частоталари билан бошқа қаторнинг частоталарини таққослаш ва иккала қатор частоталари орасидаги фарқнинг муҳим эмаслигининг эҳтимолини аниқлаш зарурати туғилади. Бу масалани ҳал қилиш учун машҳур инглиз олими статистиги К. Пирсон алоҳида критерий топган, буни “Хи квадрат” критерий ёки мувофиқлик критерийси дейилади. Бу критерийнинг қўлланилишини кўриб чиқамиз.

Тажрибада кузатилган $n_1, n_2, \dots, n_k$ тажрибавий частоталар қатори берилган бўлсин. Бирор мулоҳазаларга асосан мос $n_1, n_2, \dots, n_k$ назарий частоталар қатори ҳисобланади, бу қатор тажрибавий қатор билан бир хил бўлиши керак, ҳақиқатда эса ундан озми-кўпми фарқ қилади, бу фарқни тасодифий деб ҳисоблаш мумкинми ёки мумкин эмасми? Бу масалани ҳал қилиш учун “Хи квадрат” критерийсидан фойдаланамиз. Биз

$$\chi^2 = \frac{n_1 - n_1^1}{n_1^1} + \frac{n_2 - n_2^1}{n_2^1} + \dots + \frac{n_k - n_k^1}{n_k^1} \quad (72)$$

миқдорини тузамиз ва озодлик даражалари сонини аниқлаймиз. X^2 нинг қийматлари нолдан чексизгача ўсиши мумкин. Шунга мос равишда унинг эҳтимоли 1дан 0 гача камаяди. Агар $x^2 = 0$ бўлса, у ҳолда тажрибавий частоталар назарий частоталарга мос келади. Тажрибавий частоталар назарий частоталардан қанчалик фарқ қилса, x^2 нинг қиймати шунчалик катта бўлади. x^2 нинг ҳар бир қийматига аниқ эҳтимол P мос келади, шу билан бирга x^2 қанчалик катта бўлса, унинг эҳтимоллиги шунчалик кичик бўлади. x^2 ва унга мос эҳтимол орасидаги муносабат анча мураккаб бўлганидан бу критерийни тажрибада қўллаш учун тайёр жадваллардан фойдаланилади. Бундай жадвалларни [1]-[5] ва бошқа адбиётлардан илова қисмидан топиш мумкин. [1] нинг IX жадваладан фойдаланамиз. Бу жадвалнинг чап вертикал устунида озодлик даражалари берилган, ўнгда эса x^2 нинг турли эҳтимоллар ва турли озодлик даражалари учун охириги ёки чегара қийматлари берилган.

Амалда x^2 нинг маълум қийматига эҳтимолнинг қандай қиймати мос келишини билиш унчалик муҳим бўлмасдан, балки x^2 нинг ҳосил қилинган қиймати қай даражада муқаррарлигини билиш муҳим. Ноль гипотезаси деб ҳисобланган маълум гипотезани текшириш учун x^2 критерийсидан фойдаланилади. Ноль гипотеза ҳосил қилинган ва назарий ҳисоблаб чиқилган частоталар орасида ҳеч қандай фарқ йўқлини билдиради (H_0 гипотеза). x^2 нинг [1] иловадаги IX жадвалда бор қийматлари чегара қийматлар бўлиб, бу қийматларга бўлган x^2 нинг барча ҳосил қилинган қийматлари аниқ эҳтимоллар билан тасодикий фарқлар доирасида қолади, яъни қабул қилинган гипотезага шубҳа қилиш учун ҳеч қандай асос бўлмайди. X^2 нинг жадвал қийматларидан катта бўлган қийматлари гипотезанинг ўринсизлигини кўрсатади, яъни H_0 гипотезани рад этишга мажбур қилади. Одатда эҳтимолнинг мумкин бўлган чегараси деб 0,05 ни ҳисоблаш қабул қилинган. Демак, агар X^2 нинг ҳосил қилинган қийматини жадвалдаги 0,99 эҳтимолдан 0,10 эҳтимолгача графалардаги X^2 нинг ҳосил қилинган қийматларига яқин ёки бир оз каттароқ бўлса, амма 0,05 эҳтимолли графадаги X^2 нинг қийматидан катта бўлмаса, у вақтда H_0 гипотезасини рад этишга ҳеч қандай асос бўлмайди. Уни аввалгидек тўғри деб ҳисоблаш мумкин. агар X^2 нинг ҳосил қилган қиймати 0,05 эҳтимолли графадаги қийматдан катта бўлса, у вақтда H_0 гипотезасини рад этишга асос бор, чунки, унинг тўғрилигига фақат 0,05 (5%) имкон қолади. Агар X^2 нинг ҳақиқатда ҳосил қилган қиймати жадвалдаги 0,01 эҳтимолли графадаги қийматдан катта бўлса, H_0 гипотезасини рад этишга шунча кўп асос бўлади. Ноль гипотезасини рад қилиш – бу ҳақиқатда олинган ва назарий жиҳатдан кутилаётган частоталар орасидаги фарқнинг муқаррарлигини, муҳимлигини тан олиш демакдир.

Агар қўлимизда X^2 чегара қийматининг мувофиқлик критерийси ёрдами билан тез муҳокама қилиш мақсадида қуйидаги қоидадан фойдаланиш мумкин. ушбу

$$t_{x^2} = \frac{|x^2 - \nu|}{\sqrt{2\nu}} \quad (72)$$

миқдорни тузамиз; агар у 3 дан катта ёки 3 га тенг бўлса, у ҳолда назарий ва тажрибавий частоталар орасидаги фарқни тасодифий эмас деб ҳисоблаш зарур; агар у 3 дан кичик бўлса, бу фарқни тасодифий деб ҳисоблаш мумкин бўлади.

Энди шуни қайд қилиб ўтамизки, $v > 30$ қийматлари учун P эҳтимол $P = \frac{1}{2} [1 - \Phi(x)]$ тенгликдан топилади, бундаги $\Phi(x)$ қиймат x нинг $x = \sqrt{2x^2} - \sqrt{2v-1}$

га тенг қиймат учун иловадаги I жадвалдан олинади [1]. Мисол. Ҳар бирининг юзи 18,21 кв.м дан бўлган 840 та квадрат бўлакка бўлинган далага текшириш учун экилган буғдой ҳосилининг тажрибадан олинган тақсимооти берилган. Бу тақсимоотни 45-жадвалда келтирамиз. 45-жадвалнинг биринчи иккита устуни (X ва n_x) тажрибадан олинган буғдой ҳосили (ҳар бир метр кв. Дан олинган ўртача ҳосил ($\bar{x}$) ҳисобида) тақсимоотини кўрсатади.

Бу мисол учун нол гипотезаси деб нормал тақсимоот қонуни оламиз.

45-жадвал

x	N_x	n_x^1	$n_x - n_x^1$	$\frac{(n_x - n_x^1)^2}{n_x^1}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
70	1 4 7 } 12	0,1 0,9 6,0 } 7,0		
77			0,5	3,57
84				
91	19	25,2	-6,3	1,53
98	72	73,6	-2,1	0,03
105	141	147,1	-6,1	0,25
112	201	201,9	-0,9	0,00
119	203	189,4	-3,7	0,98
126	125	121,2	3,8	0,12
133	54	53,7	0,3	0,02
140	9 2 1 1 } 13	16,4 3,4 0,5 0,1 } 20,4		
147			-7,4	2,68
154				
161				
Жами	840	839,5		$x^2 = 9,18$

x^2 критерийни тўғри қўлланиш шароитларидан бири ҳар бир тажрибавий (n_x) ёки назарий (n_x^1) гуруҳда 5 тадан кам бўлмаган вариантларнинг бор бўлишидан иборатдир. Бунинг учун дастлаб биринчи учта ва охири 4 та гуруҳни бирлаштириб, частоталарни 5 тадан катта қилиб оламиз ва (71) тенглик билан x^2 ни ҳисоблаймиз. 45-жадвалнинг тўртинчи устунда кузатилган ва ҳисобланган (назарий $-n_x^1$) частоталар айирмалари, биринчи устунда эса бу айирмалар квадратларининг мос назарий тақсимоот қонуни ёрдами билан x нинг берилган қийматлари учун n_x^1 назарий частоталар ушбу

$$n_x^1 = \frac{nh}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

тенглик бўйича ҳисобланади. 45-жадвалдан фойдаланиб $\bar{x} = 114,32$ г; $\sigma = 11,389$ г; $n = 840$; $h = 7$ (гуруҳ оралиғи) қийматларини олиш қийин эмас. У вақтда назарий частоталар

$$n_x^1 = \frac{840 \cdot 7}{11,389} e^{-\frac{(x-114,32)^2}{2(11,389)^2}}$$

Формула бўйича ҳисобланади.

45-жадвалнинг бешинчи устуни йиғиндиси бизга x^2 ни беради: $x^2 = 9,18$

Энди ν овоздлик даражасини аниқлаймиз. Бирлаштирилган гуруҳларни бир гуруҳ деб ҳисобласак, бундай бирлаштириш гуруҳлар сонини 14 дан 9 гача камайтиради. Шунинг учун бизнинг мисолларримизда овоздлик даражаси $\nu = k - p - 1 = 9 - 2 - 1 = 9 - 3 = 6$ га тенг бўлади (бу ерда $p - F(x)$ тақсимотнинг параметрлар сони; нормал тақсимотда $p = 2$ та параметрлар мавжуд). Энди [1] нинг иловадаги IX жадвалга мурожаат қиламиз. x^2 нинг қийматини эҳтимоллари 0,25 ва 0,10 бўлган графалар орасида ётади. Демак, x^2 нинг эҳтимоли кичик эмас, демак n_x билан n_x^1 оралиғидаги фарқни муҳим эмас деб ҳисоблаш мумкин, яъни нормал тақсимот қонуни бизнинг тақсимотимизни етарли даражада қониқарли тасвирлайди деб ҳисоблаш мумкин. H_0 гипотезамиз тўғри экан. Энди соддалаштирилган (72) критерийни қўллаймиз:

$$t_{x^2} = \frac{|x^2 - \nu|}{\sqrt{2\nu}} = \frac{9,18 - 6}{\sqrt{12}} = \frac{3,18}{3,46} \approx 0,9$$

Бу сон 3 дан кичик ва шунинг юқорида баён этилган қоидага мувофиқ кузатилган тақсимот нормал тақсимот қонуни орасидаги фарқни тасодифий фарқ деб ҳисоблашимиз мумкин.

3. Иккита тажрибавий тақсимотни таққослаш.

Иккита тажрибавий тақсимотни ўзаро таққослашда назарий частоталарни ҳисоблаш билан боғлиқ иккита ишнинг энг оғир қисми қатнашмайди. Агар таҳлил иккита тажрибавий тақсимот биргина бош тўпламдан олинган танламалардан иборатлигини текшириш мақсадида бўлса, (лекин бу тақсимотларнинг параметрларини аниқлаш талаб этилиётган бўлса), у вақтда x^2 критерийни қўллаш мақсадга мувофиқ бўлади. x^2 миқдорини топиш масаласига келганда, тажрибавий тақсимот билан назарий тақсимотни таққослаш ушбу ҳолда бир оз бошқачароқ ўтказилади. Гап шундаки, иккита танланма тақсимот бош тақсимотдан турлича фарқ қилиши мумкин. шунинг учун иккита тажрибавий тақсимотни бир-бирига яқинлигига қўйиладиган талаб тажрибавий ва назарий тақсимотларни бир-бирига яқинлашишига қўйиладиган талабга

нисбатан тахминан икки марта “енгилроқ” бўлиши керак. Бу талаб қуйидаги мисолда:

Мисол. 46-жадвалда битта бош тўпладан олинган деган фараз остида иккита тажрибавий тақсимот келтирилган (иккичи ва учинчи устунлар). Бош тўпладан тақсимотининг частоталари номаълум: иккила тажрибавий тақсимотларнинг частоталари бош тўпладаннинг частоталаридан тасодифан фарқ қилиши мумкин. бош тўпладан частоталарига биринчи яқинлашиш сифатида вариантларнинг бир хил қийматларига тегишли бўлган иккала тажрибавий частоталарнинг йиғиндисини ярмини (яъни бу частоталарнинг ўрта қийматларини) олиш мумкин (бу сонлар жадвалнинг 4-устунида ёзилган).

46-жадвал

x_i	n_x^1	n_x^{11}	$\bar{n}_x$
1	2	3	4
2	5	9	7
4	6	4	5
6	8	10	9
8	10	6	8
10	6	6	6
жами	35	35	35

Энди 47-жадвални тузамиз. Иккала тажрибавий частоталар (n_x^1 , n_x^{11}) нинг барчасини биринчи устунда, мос назарий частоталарни эса иккинчи устунда ёзамиз ва одатдагича χ^2 ни ҳисоблаймиз.

47-жадвал

n_x	$\bar{n}_x$	$n_x - \bar{n}_x$	$\frac{(n_x - \bar{n}_x)^2}{\bar{n}_x}$
1	2	3	4
5	7	-2	0.57
9	7	+2	0.57
6	5	+1	0.20
4	5	-1	0.20
8	9	-1	0.11
10	9	+1	0.11
10	8	+2	0.50
6	8	-2	0.50
6	6	0	0.00
6	6	0	0.00
70	70	0	2.76

χ^2 миқдор

$$\frac{(n_x^1 - n_x)^2}{\bar{n}_x} + \frac{(n_x^{11} - \bar{n}_x)^2}{\bar{n}_x} \quad (*)$$

кўринишдаги К та қўшилувчидан ташкил топган, бу ерда $\bar{n}_z = \frac{1}{2}(n_x^1 + n_x^{11})^2$.

Агар n_x нинг қиймати (*) ифодага қўйилса, у вақтда қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$\frac{(n_x^1 - n_x^{11})^2}{2(n_x^1 + n_x^{11})} + \frac{(n_x^{11} - n_x^1)^2}{2(n_x^1 + n_x^{11})} = \frac{(n_x^1 - n_x^{11})^2}{n_x^1 + n_x^{11}}$$

шунинг учун

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_x^1 - n_x^{11})^2}{n_x^1 + n_x^{11}} \quad (73)$$

бу формула бўйича χ^2 ҳисоблаш биз кўраётган мисол 49-жадвалда кўрсатилган.

49-жадвал

n_x^1	n_x^{11}	$n_x^1 - n_x^{11}$	$n_x^1 + n_x^{11}$	$\frac{(n_x^1 - n_x^{11})^2}{n_x^1 + n_x^{11}}$
5	9	-4	14	1.14
6	4	2	10	0.40
8	10	-2	18	0.22
10	6	4	16	1.00
6	6	0	12	0.00
35	35	0	70	2.76

Энди озодлик даражаси сонини аниқлаймиз. 46-жадвалнинг 4-устунидаги 5 сонига (частоталарга битта шарт қўйилган: уларнинг йиғиндиси 35 га тенг бўлиши керак; бу бизга озодлик даражаси $v=5-1=4$ ни беради). шундай қилиб, $\chi^2 = 2.76$, $v=4$ бўлади. иловадаги [1] IX жадвалдан топамиз: $\chi_{05}^2(4) = 9.488$. бизда $\chi^2 < \chi_{05}^2$ бўлгани учун нол гипотеза H_0 рад этилмайди – иккала тажрибавий тўпламни битта бош тўпламдан олинган танланмаларни деб ҳисоблаш мумкин.

V боб бўйича машқ қилиш учун масалалар.

1. танланма тўпламдаги пиллаларнинг оғирликлари (г ҳисобида): 1.80; 1.70; 1.60; 1.65; 1.85; 1.90; 1.70; 1.75; 1.55; 1.85; 1.60; 1.60; 1.85; 2.0; 2.0; 1.75; 1.70; 1.75; 1.90; 1.65; бўлган. $\bar{x}$ σ ва m_x ни топинг. $\bar{x}$ нинг ишончлилик оралиқларини 0.99 ва 0.95 эҳтимолларда топинг.

2. Танланма тўпламдаги пиллаларнинг қобиклари оғирликлари (мг ҳисобида) 380; 354; 349; 318; 393; 409; 359; 330; 344; 350; 374; 403; 400; 384;

365; 376; 403; 345; 414 бўлган. $\bar{x}$ σ ва m_x ни топинг. Бош тўпламнинг арифметик ўртача қиймати учун 0,01; 0,02 ва 0,05 муҳимлик даражада ишончли оралиқларни топинг.

3. 150 эркак киши текширилганда ўртача бўйлари 167 см, ўртача квадратик фарқ эса $\sigma=6$ см бўлган. Бош тўпламнинг арифметик ўртача қиймати 0,99 ва 0,95 эҳтимолларда қайси чегараларда ётади?

4. 25 та пилланинг оғирлиги ўлчаниб, $\bar{x} = 1.60$, $\sigma^2=0.0271$, $v=10.4\%$ ҳосил қилинган. 0.05 ва 0.01 муҳимлилик даражада $\bar{x}$ ва v нинг ишончли оралиқларини топинг.

5. II ва IV бобларда берилган масалаларда ҳам турли эҳтимолларда ва муҳимлик даражада ишончли оралиқларни топинг.

6. Қуйида Ўзбекистон Миллий университети генетика кафедрасининг тажриба майдонида етиштирилган турли пахта навларидан тузилган вариацион қаторлар берилган. Уларнинг $\bar{x}$ арифметик ўртача қийматлари, статистик хатолари ва вариация коэффицентларини топинг.

1) ғўза мутант ва линиялараро дурагайлари кўсакларининг йириклиги (г ҳисобида) бўйича вариацион қаторлар таҳлили.

Материаллар (1970 йил)	Гуруҳлар (n)	5,5 - 5,9	6,0 - 6,4	6,5 - 6,9	7,0 - 7,4	7,5 - 7,9	8,0 - 8,4	8,5 - 8,9	9,0 - 9,4	9,5 - 9,9	10,0 - 10,4	10,5 - 10,9	$\bar{x} \pm m_x$	v
Л – 15	42	-	9	13	20									
F ₁ Л - 15ХЛ-44	52					13	17	16	6					
F ₁ Л - 44ХЛ-15	47					3	14	25	5					
F ₂ Л - 15ХЛ-44	400	2	12	24	72	95	101	63	22	8	1			
F ₂ Л - 44ХЛ-15	356	18	49	67	102	67	34	18	1					
Л-44	46						10	20	10	4	2			

2) Ғўзанинг мутант ва линиялараро дурагайлари 1000 та чигитнинг оғирлиги (г ҳисобида) бўйича вариацион қаторлар таҳлили.

Материаллар (1970 йил)	Гуруҳлар (n)	105,0-109,9	110,0-114,9	115,0-119,9	120,0-124,9	125,0-129,9	130,0-134,9	135,0-139,9	140,0-144,9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Л-15 F ₁ Л - 15ХЛ-44 F ₁ Л - 44ХЛ-15 F ₂ Л - 15ХЛ-44 F ₂ Л - 44ХЛ-15 Л-44		42 52 47 400 356 46	1 2 	7 2 4 	8 7 3 	15 2 21 22	10 2 26 27	1 8 10 53 46	5 9 67 52	14 10 61 51
145,0-149,9	150,0-154,9	155,0-159,9	160,0-164,9	165,0-169,9	170,0-174,9	175,0-179,9	180,0-184,9	185,0-189,9	$\bar{x} \pm m_x$	v
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
10 8 48 49	14 3 59 43 3	1 3 27 41 5	15 11 9	9 6 3	3 1 10	9	5	2		

3) Ғўзанинг мутант ва линиялараро дурагайларининг тола чиқими (% ҳисобида) бўйича вариацион қаторлар таҳлили.

Материаллар (1970 йил)			Гуруҳ (n)	29,0-29,9	30,0-30,9	31,0-31,9	32,0-32,9	33,0-33,9	34,0-34,9	
1			2	3	4	5	6	7	8	
Л-15			42	1	1	4	4	16	27	
F ₁ Л - 15ХЛ-44			52							
F ₁ Л - 44ХЛ-15			47							
F ₂ Л - 15ХЛ-44			400							
F ₂ Л - 44ХЛ-15			356							
Л-44			46		1	7	8	22		
35,0 - 35,9	36,0 - 36,9	37,0 - 37,9	38,0 - 38,9	39,0 - 39,9	40,0 - 40,9	41,0 - 41,9	42,0 - 42,9	43,0 - 43,9	$\bar{x} \pm m_x$	v
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

			20	13	20	9			
		3	2	19	4	4	2		
46	56	68	64	9	20	8	6	2	
41	54	31	68	45	42	18	6	2	
9	14	9	6	44	33	9	6	1	

4) Ғўзанинг мутант ва линиялараро дурагайлари кўсакларининг йириклиги (г, ҳисобида) бўйича вариацион қаторлар таҳлили.

Материаллар (1971 йил)	Уруғ чигит тукининг узунлиги	Гуруҳлар (n)	5,0-5,4	5,5-5,9	6,0-6,4	6,5-6,9	7,0-7,4	7,5-7,9	8,0-8,4	8,5-8,9	9,0-9,4	9,5-9,9	10,0-10,4	$\bar{x} \pm m_x$	v
Л-15	МС	53		5	8	21	17	2							
Л-15ХЛ - 44	МС	60	2	3	4	18	14	11	6	1	1				
	ПС	128	1	5	7	22	39	26	22	6					
	ОС	104		1	8	8	29	25	16	14	34				
Л-44ХЛ – 15	МС	51		2	5	13	13	10	6	1	1				
	ПС	181	1	4	16	23	40	44	31	15	6				
	ОС	143		4	6	10	33	40	25	14	8	3			
Л - 44	ОС	80							14	34	24	5	3		

V боб кўриб ўтилган асосий тушунчалар рўйхати.

Статистик хато, бош тўплам тақсимодининг параметрлари, статистик баҳо, силжимаган, эффектив ваа асосли баҳолар, ҳақиқатга ўхшашлик функцияси, ҳақиқатга ўхшашлик функцияси, ҳақиқатга максимал ўхшаш баҳо, бош тўпламнинг арифметик ўртача қиймати ва диспесиясини танлама тўпламнинг арифметик ўртача қиймати ва дисперсия бўйича баҳолаш, тузатилган дисперсия, баҳо аниқлиги, ишончлилик эҳтимоли, ишончли оралиқ, муҳимлилик даражаси, арифметик ўртача қийматнинг хатоси, ишончлилик чегаралари, муқаррарлик ўлчов, ўртача квадратик фарқнинг хатоси, вариация коэффицентининг хатоси, асимметрия ва эксцесс коэффицентларининг хатоси, кичик сонли кузатила ва Стъудент тақсимодининг, Стъудент тақсимодининг лимитик хоссаси, иккита тўплам ўртача фарқининг хатоси, муқаррарлик критерийси, дисперсиялар орасидаги фарқнинг муқаррарлигини баҳолаш, озодлик даражаси сони, F – критерий (Фишернинг F - критерийси), корреляция коэффицентларини таққослаш ва баҳолаш, корреляция коэффицентлари орасидаги фарқнинг тлигини аниқлаш, корреляцион нисбат ва репрессия коэффицентлари учун репрезентатив хатолар, тақрибий сон ва унинг манбалари, абсолят ва нисбий хатоликлар, тақрибий сонлар устида амаллар, статистик гипотезалар, “Хи квадрат” (χ^2) критерийси, тажрибавий тақсимодини назарий тақсимодин билан таққослаш, иккита тажрибавий тақсимодини таққослаш.

9-назарий мустақил иш

Мавзу: Тақрибий ҳисоблар. Абсолют ва нисбий хатолар. Тақрибий сонлар устида амаллар.

Режа:

1. Хатолар. Хатоликларнинг манбалари.
2. абсолют ва нисбий хатоликлар.
3. тақрибий сонлар устида амаллар.

Мавзунинг баёни: 1. Хатоликлар. Хатоликларнинг манбалари.

Микдорларнинг сонли қийматларини аниқлашда кўпинча улар тақрибий қийматларгина топилади. Агар x сон берилган микдорнинг ҳақиқий қиймати a га яқин бўлса, x сон шу a микдорини тақрибий қийматини ёки яқинлашиши деб аталади ва $a \approx x$ деб ёзилади.

Масалан, $\pi \approx 3.14159$; $e \approx 2.71828$; $1/3 \approx 0.3333$

Қисқалик учун микдорнинг тақрибий қиймати тақрибий сон, унинг ҳақиқий қиймати эса аниқ сон деб аталади.

Тақрибий сонлар чекли ўнли касрлар кўринишида тасвирланади.

Амалий масалаларни ҳал этишда пайдо бўладиган хатоликларни ва у демак тақрибий сонларнинг асосий манбалари қуйидагилардан иборат:

1⁰. Моделнинг хатолиги – моделлаштирилатган ҳодисага таъсир этаётган барча омилларнинг етарли тўла ҳисобга олинмаслиги. Бу омилларнинг ҳаммаси амалда ҳисобга олишнинг иложи йўқ.

2⁰. Бошланғич маълумотлардаги хатоликлар – масала шартига кирувчи микдорларнинг қийматларини ўлчаш натижасида ҳосил бўлади ва демак тақрибий характерда бўлади.

3⁰. Услубий хатоликлар. Бу қабул қилинган ўлчаш услуби натижаси бўлиб, унда одатда тақрибий формулалардан фойдаланилади.

4⁰. Амал хатоликлари – бу фойдаланиладиган ҳисоблаш воситалари билан боғлиқ, хусусан, ЭҲМ лар тақрибий сонлар устида амаллар бажаради.

Хатоликларни тўла таҳлил этиш учун уларнинг барча турларини тўла ҳисобга олиш лозим.

2. Абсолют ва нисбий хатоликлар.

Тақрибий сонларнинг асосий характерискалари абсолют ва нисбий хатоликлардир. Бирор микдорнинг тақрибий қиймати x , аниқ қиймати эса a бўлсин.

1- таъриф. $a-x$ айирма x тақрибий соннинг яқинлашиш хатолиги ёки хатолиги деб аталади.

Агар $x < a$ бўлса, x сон a соннинг ками билан олинган тақрибий қиймати деб аталади ва бу ҳолда хатолик $a-x > 0$ бўлади. агар $x > a$ бўлса, x сон a соннинг ортиғи билан олинган тақрибий қиймати деб аталади ва бу ҳолда хатолик $a-x < 0$ бўлади.

1-мисол. $\sqrt{2}$ сони учун 1.41 ками билан, 1.42 эса ортиғи билан олинган тақрибий қийматлари бўлади, чунки $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$. Шунга ўхшаш, 2.72 сони e сонининг ортиғи билан олинган тақрибий қиймати бўлади, чнки $e < 2.72$.

2- таъриф. $a \approx x$ яқинлашишнинг абсолют хатолиги Δ деб, хатоликнинг абсолют қийматига айтилади, яъни $\Delta = |a - x|$.

Бундан $a - x = \Delta$ ёки $a - x = -\Delta$ эканлиги келиб чиқади, яъни $a = x + \Delta$ ёки $a = x - \Delta$. Бундай ҳолларда қуйидагича ёзилади:

$$a = x \pm \Delta$$

a нинг тақрибий қиймати кўпинча ноъмалум бўлгани учун яқинлашиш хатолигини баҳолаш учун чегаравий абсолют хатолик тушунчаси киритилади.

3- таъриф. $a \approx x$ яқинлашишнинг чегаравий абсолют хатолиги деб, шундай $\Delta_a > 0$ сонни айтиладики, Δ абсолют хатолик ундан катта бўла олмайди, яъни

$$\Delta = |x - a| \leq \Delta_a$$

“Чегаравий” сўзи кўпинча тушириб қолдирилади. Бу тенгликдан

$$x - \Delta_a \leq a \leq x + \Delta_a$$

бўлиши келиб чиқади, демак, $x - \Delta_a$ – ками билан яқинлашиши $x + \Delta_a$ – ориғи билан яқинлашиш.

Агар чегаравий абсолют хатолик Δ_a берилган бўлса, у ҳолда x ни a нинг Δ_a гача аниқликдаги тақрибий қиймати деб аталади ва бундай ёзилади:

$$a = x \pm \Delta_a.$$

Тақрибий сонларни уларнинг кўриниши абсолют хатоликни кўрсатиб турадиган қилиб ёзиш қабул қилинган.

Ўнли каср кўринишида ёзилган x тақрибий соннинг рақами $a \approx x$ яқинлашишнинг Δ абсолют хатолиги бу рақам турган хона бирлигидан ортиқ бўлмаса, бу рақам ишонли рақам деб аталади. Акс ҳолда уни шубҳали рақам дейилади.

Барча математик жадвалларда сонларни фақат ишончли рақамлари билан ёзишдан фойдаланилади. Бу ҳолда тақрибий соннинг ёзувидан яқинлашиш хатолигини аниқлаш мумкин.

Масалан, 3.1416 соннинг ёзуви абсолют хатолиги 0.0001 дан ортиқ эмаслигини кўрсатади. 520 сони унинг абсолют хатолиги 1 дан ортиқ эмас. Агарда бу сон 0,01 дан кичик абсолют хатоликка эга бўлса, уни энди 520.00 деб ёзиш лозим. Шундай қилиб, 250; 520.0; 520.00 тақрибий сонларнинг абсолют хатоликлари 1; 0.1; 0.01 га тенг.

Агар бутун сон охирида ноллар бўлиб, улар ишончли рақамлар бўлмаса, бу нолларни 10^n кўпайтувчи билан алмаштирилади, бунда n - шундай ноллар сони. Масалан, Ердан Қуёшгача бўлган масофа $1495 \text{ км} \cdot 10^5 \text{ км}$ сон билан ифодаланади, бу ерда биринчи тўртта рақам ишончли, қолган барча ноллар эса шубҳали (чегаравий абсолют хатолик 100000 км).

Одатда ишончли рақамли тақрибий сонларни стандарт шаклда бундай ёзилади:

$$x = a_0, a_1, a_2, \dots a_k \cdot 10^n, \text{ бу ерда } n \in \mathbb{Z}, 1 \leq a_0 < 10$$

n – соннинг тартиби деб аталади. Масалан, $\Delta_a = 100$ бўлган 40000 сони стандарт шаклда бундай ёзилади: $4.00 \cdot 10^4$.

Тақрибий соннинг хатолигини у нечта ишончли қийматдор рақамга эғалигини кўрсатиш йўли билан баҳолаш мумкин.

4- таъриф. Соннинг ўнлик ёзувидаги нолдан фарқли биринчи рақамдан чапда турган барча ишончли рақамлар қийматдор рақамлар деб аталади. Масалан, 0.002080 сони тўртта қийматдор рақамга 2, 0, 8, 0 га эга; 370.0 сони ҳам тўртта қийматдор рақамга эга, $5.7 \cdot 10^2$ сони иккита қийматдор рақамга эга.

Агар тақрибий сон кўп миқдорда қийматдор рақамларга эга бўлса, уларни яхлитлаш лозим. Сонни яхлитлаш – уни кам миқдордаги қийматдор рақамлар билан ёзиладиган сонга алмаштириш демакдир.

Тақрибий сонни яхлитлаш қоидаси қуйидагича:

4 дан кичик бўлса, у ҳолда охириги қолдириладиган рақам ўзгартирилмайди.

- агар ташлаб юбориладиган рақамлардан биринчиси 5 га тенг ёки ундан катта бўлса, у ҳолда қолдириладиган охириги рақам 1 га орттирилади.

- агар фақат 5 рақами ёки 5 билан ноллар ташлаб юбориладиган бўлса, у ҳолда қолдириладиган охириги рақам жуфт бўлса, ўзгартирилмайди, агар у тоқ бўлса, 1 га орттирилади. Масалан, $\Delta_a = 0.001$ бўлса, $x = 60.5478$ ни 4 тақрибий ишончли рақамгача яхлитласак, $x = 60.548$ бўлади.

Ҳисоблаш натижалари аниқлагини ҳақиқий кўрсаткичи унинг нисбий хатолигидир.

5- таъриф. Берилган миқдор x тақрибий қийматининг δ нисбий хатолиги деб, бу сон абсолют хатолигини x тақрибий қиймат модулига нисбатини айтилади, яъни

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|}$$

x тақрибий қиймат a дан кам фарқ қилгани учун амалиётда $\delta = \Delta/|a|$ деб ҳам олинади.

Нисбий хатолик берилган яқинлашишнинг сифат кўрсаткичи бўлиб, уни кўпинча фоизларда ифодаланади.

6-таъриф. $a \approx x$ яқинлашишнинг чегаравий нисбий хатолиги деб, δ нисбий хатолик катта бўла олмайдиган δ_a мусбат сонни атилади, яъни

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|} \leq \delta_a \quad \text{бу ерда} \quad \Delta \leq \delta_a \cdot |x|$$

Шундай қилиб, чегаравий абсолют хатолик учун

$$\Delta_a = |x| \cdot \delta_a$$

ни олиш мумкин. демак, α аниқ сонни бундай ёзиш мумкин:

$$a = x \pm |x| \delta_a$$

2-мисол. Ушбу тенгликлардан қайси бирининг аниқлига катта:

$$a = \sqrt{46} = 6,78 \text{ ми ёки } y = 7/13 = 0,54 \text{ ми?}$$

$$\text{Ечиш: } x = \sqrt{46} \text{ учун } \Delta_a = 0,01; \quad \delta_a = \frac{0,01}{6,78} = 0,0015 \text{ (= 0,15\%),}$$

$$y = \frac{7}{13} \text{ учун } \Delta_a = 0,01, \quad \delta_a = \frac{0,01}{0,54} = 0,019 \text{ (1,9\%)} \cdot 0,15\% < 1,9\%$$

Демак биринчи тенгликнинг аниқлиги юқори.

3.Такрибий сонлар устида амаллар.

Такрибий сонлар устида амаллар натижаси яна такрибий сон бўлади. натижанинг хатолиги дастлабки маълумотларнинг хатоликлари орқали ушбу қоидалар ёрдамида аниқланади.

1⁰. Алгебраик йиғиндининг чегаравий абсолют хатолиги қўшилувчиларининг чегаравий абсолют хатоликларийиғиндисига тенг.

2⁰. Алгебрик йиғиндининг нисбий хатолиги қўшилувчиларнинг ёки мос равишда бўлинувчи ва бўлинманинг нисбий хатоликлари йиғиндисига тенг.

4⁰. Такрибий сон n – даражасининг нисбий хатолиги асоснинг нисбий хатолигини такрибий соннинг даража кўрсаткичига (n) кўпайтмасига тенг.

Масалан, такрибий сонлар кўпайтмаси: $x=25.3 \cdot 4.12=104.236$; кўпайтувчиларнинг чегаравий абсолют хатоликлари мос равишда 0.1 ва 0.01 га тенг. Кўпайтувчиларнинг барча рақамлари ишончли деб олсак, чегаравий нисбий хатолик бундай бўлади:

$$\delta_a = \frac{0,1}{25,3} + \frac{0,01}{4,12} = 0,0039 + 0,0024 = 0,0063$$

У ҳолда кўпайтманинг чегаравий абсолют хатолиги қуйидагича:

$$\Delta_a = \delta_a \cdot |x| = 0,0063 \cdot 104,236 = 0,657 < 1$$

Демак, жавобда фақат учта ишончли рақамни қолдириш лозим:

$$25,3 \cdot 4,12 = 104.$$

Амалиётда такрибий сонлар устида оммавий ҳисоблашларда ушбу соддароқ қоидалардан фойдаланилади.

1⁰. Ўнли касрни қўшиш ва айиришда ўнлик белгилари энг кам бўлган сонда нечта ўнлик белги бўлса, натижада шунча ўнлик белги қолдирилади (соннинг ўнлик белгилари деб, вергулдан ўнгга турган барча рақамларни айтилади).

2⁰. Бутун сонларни қўшиш ва айиришда уларни стандарт шаклда ёзилади ва ўннинг энг юқори даражасини қавсдан ташқарига чиқариб, юқоридаг иқоидадан фойдаланилади.

3⁰. Такрибий сонларни кўпатириш ва бўлишда энг кичик сонда нечта қийматдор рақам бўлса, натижада ҳам шунча қийматдор рақам қолдирилади.

4⁰. Квадратга ва кубга кўтаришда даража асосида нечта қийматдор рақам бўлса, натижада ҳам шунча қийматдор рақам қолдирилади.

5⁰. Квадрат ва куб илдиз чиқаришда илдиз остидаги ифодада нечта қийматдор рақам бўлса, натижада ҳам шунча қийматдор рақам қолдирилади.

6⁰. Оралиқ ҳисоблашларда юқоридаги қоидаларда тавсия қилинган битта ортик рақам қолдирилади. Якуний натижада бу рақам яхлитланади.

7⁰. Агар маълумотлар турли сонда ўнлик белгиларга эга бўлса (қўшиш ва айиришда) ёки турли сондаги қийматдор рақамларга эга бўлса (қолган амалларда), уларни энг кичик аниқликдаги сонгача битта қўшимча рақам билан яхлитланади, бу рақам якуний натижада яхлитланади.

25-амалий машғулот, 6-амалий мустақил иш.

Мавзу: Альтернатив белгилар учун корреляция коэффицентини ҳисоблаш. Сон ва сифат белгилари орасидаги боғланиш.

1. Альтернатив белгилар учун корреляция коэффицентини ҳисоблаш.

Сифат ўзгарувчанлигида боғланишни аниқлаш учун бир қанча усуллар мавжуд. Шулардан альтернатив ўзгарувчанликдаги энг содда мавжуд боғланишни кўриб чиқамиз. Бу ҳолда иккита сифат белгиси мавжудлигини мос келиши, ёки аксинча, мавжуд эмаслигини мос келиши, тасодифий сабабларга кўра бўлиш керак бўлган ҳолларда нисбатан тез-тез учраб турадими деган масала қўйилади. Бу ҳолда корреляцион панжара, 58-жадвалда кўрсатилганидек анча соддалашади. Корреляция коэффицентини қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\tau = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} \quad (108)$$

Гуруҳларга жуда кўпол ажралгани учун τ нинг қиймати бирмунча ортиқроқ чиқиши мумкин (108) формула қуйидагича:

$$\tau = \frac{|ad - bc| - n/2}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} \quad (108_a)$$

Ёзилса, корреляция коэффицентининг қиймати аниқроқ чиқади. Корреляция коэффицентининг ҳоссалари, унинг сонли баҳоси ва муқаррарлигининг баҳоси ҳақида IV бобда айтилганлар альтернатив ўзгарувчанликдаги корреляция коэффицентига ҳам тааллуқли бўлади. Мисол. Сифатида 100 та қуён юнгининг туси ва кўзининг рангги орасидаги боғланишга оид маълумотларни келтирамиз (61-жадвал).

Қуён юнгининг туси (Y) ва кўзининг $\frac{61 - \text{жадвал}}{\text{рангги}(X)}$ учун корреляцион панжара

Y	Қизил кўз	Қизилмас кўз	Жами
X			
Оқ ранг	29	11	40
Рангли юнг	1	59	60
Жами	30	70	100

Йиғиндининг ҳамма қийматларини жадвалдан формулага қўйсак, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\tau = \frac{29 \cdot 59 - 1 \cdot 11}{\sqrt{30 \cdot 70 \cdot 40 \cdot 60}} = +0,76$$

(108_a) формула бўйича тузатиш киритиш бу мисолда натижани жуда ҳам ўзгартиради, чунончи, $\tau^1=0.73$ бўлади. Кузатишлар сони (100) етарли катта бўлмаганидан τ^1 учун хато оддий формула бўйича ҳисобланиши мумкин:

$$m_{\tau} = (1 - \tau^2) / \sqrt{n} = (1 - 0.73^2) / \sqrt{100} = 0.047$$

$t=0.73/0.047=16.6$ муқаррарлик критерийси жадвалда кўрсатилган ўзининг чегара қийматидан анча катта бўлади. Демак, τ нинг муқаррарлиги ҳеч қандай шубҳа туғдирмайди.

2. Сон ва сифат белгилари орасидаги боғланиш.

Амалиётда бирисон қатори билан, бошқаси сифат қатори билан берилган сон ва сифат белгилари орасидаги боғланишни ўрганиш зарурати туғилади. Бу ҳолда ҳам корреляция коэффицентини ҳисоблаш одатдаги ҳисоблашдан фарқ қилмайди ва шартли ўртача қийматдан фойдаланиб, уни қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\tau = \frac{\sum n_{xy}(x - A_x)(y - A_y) - nb_x b_y}{n\delta_x \delta_y} \quad (109)$$

бу ерда A_x , A_y лар x ва y вариантларнинг энг кўп такрорланадиган қийматлари,

$$b_x = \frac{1}{n} \sum n_x (x - A_x); \quad b_y = \frac{1}{n} \sum n_y (y - A_y);$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum n_x (x - A_x)^2 - b_x^2}; \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum n_y (y - A_y)^2 - b_y^2}$$

Сон ва сифат ўзгарувчанликлари орасидаги корреляция коэффицентини ҳисоблашни Улуғбек номидаги Ўзбекисон Миллий университети дарвинизм кафедрасида бажарилган ишни мисол сифатида кўриб чиқамиз. Барги (Y) икки турли бўлган икки хил ғўза ўсимлигининг кўсак оғирлиги (X , г ҳисобида) бўйича боғланиши 62-жадвалда берилган.

62-жадвал

X	5.2	5.7	6.2	6.7	7.2	7.7	8.2	8.7	9.2	n_y
Y										
Кесик барг	2	9	13	13	25	29	15	8	6	120
Оддий барг	2	3	6	12	27	22	14	10	4	100
n_x	4	12	19	25	52	51	29	18	10	220

Шартли ўртача қийматларга ўтиб, корреляция коэффицентини ҳисоблаш 63-жадвалда келтирилган:

63-жадвал

X	5.2	5.7	6.2	6.7	7.2	7.7	8.2	8.7	9.2	n_y	$y - A_y$	$n_y(y - A_y)$	$n_y(y - A_y)^2$
Y													
Кесик барг	2 (0)	9 (0)	13 (0)	13 (0)	25 (0)	29 (0)	15 (0)	8 (0)	6 (0)	120	0	0	0

Оддий барг	2 (-5)	3 (-6)	6 (-9)	12 (-12)	27 (-13.5)	22 (0)	14 (+7)	10 (+10)	4 (+6)	100	1	+10 0	+10 0
n_x	4	12	19	25	52	51	29	18	10	220			
$x - A_x$	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	+0.5	+1	+1.5				
$n_x(x-A_x)$	-10	-24	-28.5	-25	-26	0	14.5	18	15	-66			
$n_x(x-A_x)^2$	25	48	42.75	25	13	0	7.25	18	22.5	201.5			
$\Sigma n_{xy}(x-A_x) \cdot (y-A_y)$	-5	-6	-9	-12	-13.5	0	+7	+10	+6	-22.5			

$$b_x = \frac{1}{n} \Sigma n_x (x - A_x) = \frac{-66}{220} = -0,3; \quad b_y = \frac{1}{n} \Sigma n_y (y - A_y) = \frac{+100}{220} \approx 0,45;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{201,5}{219} - (-0,3)^2} = \sqrt{0,92 - 0,09} = \sqrt{0,83} \approx 0,9;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{100}{219} - (-0,45)^2} \approx \sqrt{0,456 - 0,2025} = \sqrt{0,2535} \approx 0,5;$$

$$\tau = \frac{-22,5 - 220 \cdot (-0,3)(0,45)}{220 \cdot 0,9 \cdot 0,5} = \frac{-22,5 + 220 \cdot 0,135}{220 \cdot 0,45} = \frac{-22,5 + 29,7}{99} = \frac{72}{99} \approx 0,072$$

Корреляция коэффиценти $\tau \approx 0,07$ жуда кичик бўлгани учун икки хил ғўза ўсимлигида кўсак оғириги бўйича боғланиш йўқ экан деган хулосага келамиз.

23-24-амалий машғулотлар

Мавзу: Хи квадрат (χ^2) методи турли вариацион қаторлар такрорланишларининг мос келишлари эҳтимолининг ўлчови сифатида

Генетик ишларда кўпинча учраб турадиган, сифат белгиларининг эмперик ва назарий такрорланишлари орасидаги фаркни аниқлаш керак бўлади. Ана шу ҳолни кўрамиз.

Мисол. Ренгенга солинган жигар ранг сичқонлардан келиб чиқувчи F_1 дурагай ота-оналар формасини частиштиришдан ҳосил бўлган наслнинг F_2 иккинчи авлодида сичқонларнинг доминант ва рецессив рангги муносабатлари назарий ва эмприк белгиларга ажралиши солиштирилсин (57-жадвал).

57-жадвал

Сичқонлар юнгининг рангги	Сичқонлар юнгининг ранг бўйича тақсимланиши	
	Назарий (F_1)	Эмперик (F_2)
Жигар ранг	75 ($\underline{P}_1$)	65 ($\underline{P}_2$)
Оқ	25 ($\underline{P}_1$)	35 ($\underline{P}_2$)

P_1 ва P_2 контрол (назорат) ва тажриба қилинадиган сичқонлар юнгининг ранги бўйича мос такрорланиши.

Ечиш:

$$\chi^2 = \frac{(65 - 75)^2}{75} + \frac{(35 - 25)^2}{25} = \frac{(-10)^2}{75} + \frac{10^2}{25} = 1,33 + 4 = 5,33$$

$\chi^2=5,33$ қиймати баҳолаш учун [1] иловадаги ХІ жадвалдан фойдаланамиз. Кўрилаётган мисолда ν озодлик даражаси гуруҳлар сонидан битта кам, яъни $\nu=2-1=1$. Жадвал бўйича, $\nu=1$ ва $p=0,95$ қийматларда $\chi^2=3,84$ $p=0,99$ да у қиймат 6,63 га тенг. Кўрилаётган мисолда $\chi^2=5,33$; яъни у $p=0,99$ даги муқаррарликдан кичик. Эҳтимолга шундай талаб қўйилганда, тажрибаларда нурлантирилган сичқонларда ҳосил бўлган белгиларга ажралиш моногибрид чатиштиришда иккинчи авлоддаги назарий белгиларга ажратишдан муҳим фарқ қилмайди деган ҳулоса чиқади, ва демак, сичқонларнинг бошланғич формаларига қўлланган нурлантириш наслнинг иккинчи авлодида мерос бўлган юнгнинг рангини ўзгартирмаган.

Агар ν озодлик даражалари сони 30 дан катта бўлса, у вақтда χ^2 ни баҳолаш унинг муқаррарлик критерийсини ҳисоблаш учун қуйидаги $t_{\chi^2} = \sqrt{2\chi^2} \cdot \sqrt{2\nu - 1}$ формуладан фойдаланилади, шу билан бирга, агар $t_{\chi^2} > 2$ бўлса, у вақтда такрорланишлар орасидаги фарқ муҳим бўлади.

χ^2 критерий сифат белгиларининг турли ҳолатларини характерловчи икки ёки бир нечта альтернативларни қиёсий баҳолаш учун муваффақиятли қўлланилади. Айтайлик, тажриба натижалари 58-тўрт катакли жадвалга жойланган бўлсин.

Бу жадвалда нолинчи (0) ва биринчи (1) гуруҳ деб ёки иккита сифат белгиси (масалан, оқ ранг, қора ранг) ёки бирорта бир белгининг мавжудмаслиги ва мавжудлиги (масалан, шохли ва шохсиз) белгиланади. Сон белги ўзгаришидаги корреляцион панжарадаги каби катакларда индивиднинг у ёки бу белги билан бирга келиш сони кўрсатилади. Горизонтал сатрнинг йиғиндилари ўнгда, вертикал устунларнинг йиғиндиси эса паста ёзилади.

58-жадвал

Чанглаш	Корзинадаги уруғлар сони		Жами
	тўқ	пуч	
Табиий	113	42	155
Қўшимча	131	11	142
Жами	244	53	297

У вақтда критерийни қуйидаги формула:

$$\chi^2 = \frac{(ad - cb)^2 \cdot (a + b + c + d)}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)} \quad (106)$$

бўйича аниқлаш мумкин.

Масалан, кунгабоқарни қўшимча чанглашдан олинадиган эффектни ўрганишда қуйидаги натижалар олинган (58-жадвал).

Бу маълумотлар учун (106) формуладан фойдаланиб:

$$\chi^2 = \frac{(113 \cdot 11 - 131 \cdot 42)^2 \cdot 297}{244 \cdot 53 \cdot 155 \cdot 142} = 18,9$$

$p=0,95$ ишончли эҳтимол ва $v=(2-1)(2-1)=1$ озодлик даражаси учун иловадаги XI жадвал бўйича $\chi^2 = 3,8$ бўлади. Шу кўрсаткичнинг тажрибада олинган қиймати 95% эҳтимол учун ўзининг чегаравий қийматидан беш марта катта бўлаётир. Демак, табиий ва қўшимча чанглаш натижалари орасидаги фарқни муқаррар деб қабул қилиш керак.

Юқоридаги келтирилган мисол кўрсатадики, “тўрт катакли” оддий усул кўп хонали сонларни солиштиришда катта сонларни кўпайтириш билан боғлиқ, бу эса амалда қулай эмас. Бундай ҳолларда кузатишлар натижаларини қиёсий баҳолашни қуйидаги:

$$\chi^2 = \sum \frac{(P - P^1)^2}{P^1}$$

формула бўйича ўтказиш мумкин. бу ерда – p – эмприк такрорланиш, p^1 – кутилаётган ёки назарий такрорланиш.

Бундай ҳолда назарий такрорланишлар “тўрт катакли” жадвалнинг якуний сонлари бўйича аниқланади. Масалан, 59-жадвалнинг юқоридан иккинчи сатрининг чап қисмида жойлашган 127.3 такрорланиш қуйидаги равишда ҳосил бўлган: $(244 \cdot 155) : 297 = 127.3$ у билан ёнма-ён жойлашаган 116.7 такрорланиши эса бундай аниқланади: $(244 \cdot 142) : 297 = 116.7$ ва ҳ.к.

59-жадвал

Қийматлар	Тўқ уруғлар		Пуч уруғлар		Жами
	Табиий чангланиш	Қўшимча чангланиш	Табиий чангланиш	Қўшимча чангланиш	
(P) тажрибадан олинган маълумотлар	113	131	42	11	297
(P ¹) кутилаётган маълумотлар	127.3	116.7	27.9	25.3	297
$P - P^1 = d$ фарқ	14.3	14.3	14.3	14.3	-
d^2 – фарқнинг квадрати	204.49	204.49	204.49	204.49	-
d^2/P^1 нисбат	1.61	1.74	7.40	8.10	18.75

Биз биламизки, агар бирорта такрорланиш 5 дан кичик бўлса, χ^2 критерий қўлланилмайди. Бундан ташқари, агар иккита тўплам ҳажмининг 20-30 дан кичик бўлса ҳам, χ^2 критерий қўлланилмайди. Бундай ҳолларда битта бош тўпламдан олинган иккита танланма тўпламда берилган “тўрт катакли” тақсимот ҳосил бўлишининг эҳтимоли учун Фишернинг қуйидаги:

$$\underline{P} = \frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{n!a!b!c!d!} \quad (107)$$

формуласидан фойдаланиш мумкин.

Агар

$\underline{P} < 0.01$ бўлса, у вақтда нол гипотеза қабул қилинмайди; $\underline{P} \geq 0.05$ бўлганда нол гипотеза қабул қилинади.

Мисол. А усули билан даволанган 10 касалдан 3 тасининг аҳволи яхшиланди, 7 тасининг аҳволи ўзгаришсиз қолди. Б усул билан даволанган 7 касалдан 5 тасининг аҳволи яхшиланди ва 2 тасиники эса ўзгаришсиз қолди. Бу усулнинг афзаллиги исботланди деб ҳисоблаш мумкинми? Бу ҳол учун 60-жадвалга эга бўламиз.

60-жадвал

Яхшиланишнинг бирлиги	Даволаш усули		Жами
	А усул	Б усул	
+	3	5	8
-	7	2	9
Жами	10	7	17

Бу маълумотларни (107) формулага қўямиз:

$$\underline{P} = \frac{10!7!8!9!}{17!3!5!7!2!} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10)(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8)(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9)}{(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 17)(1 \cdot 2 \cdot 3)(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5)(1 \cdot 2)} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 9}{11 \cdot 13 \cdot 17} = 0,104$$

$\underline{P} = 0,104 > 0,05$. демак нол гипотезаси рад этилмайди. Демак, Б усулнинг афзаллиги исботланмади.

17-амалий машғулот.

Мавзу: Корреляция коэффицентларини таққослаш ва баҳолаш.

Икки ҳолни кўрамиз: корреляция коэффиценти кузатишлар сони катта бўлганда топилган ҳол (x нинг қийматларисони $n \geq 50$) ва корреляция коэффиценти кузатишлар сони кичик бўлганда топилган ҳол ($n < 50$).

Дастлаб $n \geq 50$ ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда корреляция коэффиценти тақрибан $m_\tau = (1 - \tau^2) / \sqrt{n}$ хатога эга, бу ерда τ танланма тўпламнинг корреляция коэффиценти, n – кузатишлар сони. Муқаррарлик критерийси маълум бўлган усул билан аниқланади:

$$t_\tau = \frac{\tau}{m_\tau} \geq 3$$

Бош тўпламнинг корреляция коэффиценти учланган хато чегарасида, чунончи $\tau_\delta = \tau \pm 3m_\tau$ бўлади. Масалан, 100 дона пилланинг узунлиги ва кенглиги орасидаги корреляция коэффиценти $\tau = 0.419$ бўлсин, у вақтда

$$m_{\tau} = \frac{1 - (0,419)^2}{\sqrt{100}} = \frac{1 - 0,176}{10} = 0,0824$$

Шундай қилиб, агар ҳамма пилланинг кенглиги ва узунлиги орасидаги ҳақиқий корреляция коэффицентини τ_{δ} деб фараз қилсак, у вақтда $\tau_{\delta} = 0.419 \pm 3 \cdot 0.0824 = 0.419 \pm 0.2472$ деб ёзиш мумкин. бошқача айтганда, катта (0,9 дан кичик бўлмаган) эҳтимол билан $0.419 - 0.247 = 0.172 < \tau_{\delta} < 0.419 + 0.247 = 0.666$ деб ҳисоблаш мумкин.

А. Иккита корреляция коэффицентини таққослаш.

Белгиларнинг n_1 ва n_2 ҳажмли иккита эркин кузатишлар қаторига кўра ҳосил қилинган иккита τ_1 ва τ_2 корреляция коэффицентини таққослаш масаласини кўрайлик. Бу белгилар иккала кузатишда бир хилдир. Масалан, иккита турли майдонда экилган маълум нав ғалла ўсимлиги учун $\tau_1 = 0,936$ ва $\tau_2 = 0,821$ ни мос тартибда $n_1 = 100$ ва $n_2 = 125$ кузатишга асосан топган бўлайлик. Бу иккита қийматнинг фарқини муҳим ёки тасодифий деб ҳисоблаш мумкинми?

Масала қуйидагича ечилади: $\tau_1 - \tau_2$ айирманинг хатоси τ_1 ва τ_2 нинг хатоси квадратлари йиғиндисининг квадрат илдизига тенг.

$$m_{\tau_1 - \tau_2} = \sqrt{m_{\tau_1}^2 + m_{\tau_2}^2} \quad (84)$$

Агар

$$\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{m_{\tau_1 - \tau_2}} \geq 3$$

бўлса, τ_1 ва τ_2 орасидаги фарқ муҳим,

$$\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{m_{\tau_1 - \tau_2}} < 3$$

бўлса, у фарқ тасодифий деб ҳисобланади. Бу қондани бизнинг мисолимизга тадбиқ этиб, қуйидагиларни топамиз:

$$m_{\tau_1}^2 = \frac{(1 - \tau_1^2)^2}{n_1 - 1} = \frac{[1 - (0,936)^2]^2}{99} = \frac{(0,124)^2}{99} = 0,0001553$$

$$m_{\tau_2}^2 = \frac{(1 - \tau_2^2)^2}{n_2 - 1} = \frac{[1 - (0,821)^2]^2}{124} = \frac{(0,326)^2}{124} = 0,0008571$$

демак,

$$m_{\tau_1 - \tau_2} = \sqrt{0,0001553 + 0,0008571} = \sqrt{0,0010124} = 0,0318$$

$$\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{m_{\tau_1 - \tau_2}} = \frac{|0,966 - 0,821|}{0,0318} = \frac{0,115}{0,0318} = 3,6 > 3$$

Бунда τ_1 ва τ_2 орасидаги фарқни муҳим деб ҳисоблаш зарур, деган натижага келамиз.

Кичик танлама тўпламларда корреляция коэффицентининг хатоси.

$$m_\tau = \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{n - 2}} \quad (85)$$

Формула билан ифодаланади ёки τ нинг муқаррарлигини аниқлаш учун “зет (Z) методи” дан фойдаланилади. Гап шундаки, $m_{\bar{x}}$ учун (63) формула ва шунга ўхшаш формулалар танланма тўпламлар параметрлари нормал тақсимланган деган фараз ҳосил қилинган, танланма тўплам корреляция коэффицентининг тақсимот қонуни эса нормал қонундан фарқ қилади, чунки τ коэффицент -1 билан +1 орасидаги қийматларнигина қабул қилади. Бош тўпламнинг корреляция коэффиценти τ_δ дан қутилиш мақсадида Р. Фишер τ билан ўзаро бир қийматни боғлаган

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \quad (86)$$

ёрдамчи миқдор киритишини тақлиф қилган: τ коэффицент -1 дан +1 гача ўзгарган нормал тақсимланган ҳар қандай миқдор каби z миқдор ҳам $-\infty$ дан $+\infty$ гача ўзгаради. τ_δ нинг ҳатто бирга яқин қийматларида ҳам z нинг тақсимот қонуни нормал қонунга яқин бўлади. Шунингдек, z нинг стандарт хатоси бўлади, бу ерда n – танланма ҳажми, шу билан бирга $n - 3$ сони z миқдор $m_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$ учун озодлик даражаси ҳамдир.

Z нинг муқаррарлик критерийси

$$t_z = \frac{z}{m_z} = z\sqrt{n-3}$$

бўлади.

Агар $t_z = z\sqrt{n-3}$ формуладан фойдаланилса, тузатишлар сони n маълум бўлганда z нинг ҳар бир қиймати учун муқаррарлигини аниқлаш мумкин. Бундан $n = 9/z^2 + 3$. Шунга кўра z нинг муқаррар миқдорини ва демак, унга мос бўлган τ корреляция коэффицентининг маълум қийматини берувчи n нинг қиймати ҳисобланади. Кузатишлар сони n маълум бўлганда z ва τ нинг муқаррар қийматларини кўрсатувчи ёрдамчи жадваллар ҳисоблаб чиқилган; бу жадваллар корреляция коэффицентлари қийматларининг муқаррарлигини аниқлашга имкон беради ([1] иловадаги VIII жадвал).

Бу жадвалдан қуйдагича фойдаланилади. Масалан, атрофдаги мухит ҳарорати ва нафас олиш тезлиги орасидаги боғланиш $\tau=0.65$ га тенг бўлган корреляция коэффиценти билан ифодаланган бўлсин. τ миқдорнинг муқаррарлигини топиш талаб қилинади. Бунинг учун иловадаги VIII жадвалдан τ нинг қийматини 18 та кузатишда муқаррарлигини топамиз. Мисолда эса $n=20$, демак, $\tau=0.65$ қиймат тамомила муқаррардир, чунки мавжуд бўлган кузатишлар сони τ нинг қийматида жадвалда берилган кузатишлар сонидан катта, яъни

$$n_{\text{танланма}} > n_{\text{ҳад}} \quad (20 > 18)$$

Б. Корреляция коэффицентлари орасидаги фарқнинг муқаррарлигини аниқлаш.

Z нинг аҳамияти яна шундаки, унинг билан икки корреляция коэффиценти орасидаги фарқ ёки ҳақиқатда ҳосил қилинган ва назарий итилаётган корреляция коэффицентлари орасидаги фарқнинг муқаррар ёки муқаррар эмаслигини ҳисобланган бир қанча танланма тўпламлар асосидаги маълумотларни бирлаштириши мумкин.

Масалан, қорамолларда яғрингача баландликлари ва тирик оғирликлари орасидаги корреляцияни ўрганишда қуйидаги корреляция коэффицентлари ҳосил бўлган: қора-чипор қорамоллар гуруҳида $\tau_1 = +0.675$; малла-чипор қорамоллар гуруҳида $\tau_2 = 0.761$

Ҳар бир гуруҳда кузатилган жуфтлар сони 100 га тенг. Иловадаги VIII жадвал бўйича τ нинг қийматларини z нинг қийматларига ўтказамиз. У вақтда $z_1 = +0.82$ ва $z_2 = +1.0$. z_1 ва z_2 орасидаги фарқ учун хато ушбу формула бўйича аниқланади.

$$m_d = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \text{ бунда } m_1 = m_2 = \frac{1}{\sqrt{97}} \text{ у вақтда } m_{d_1} = \sqrt{1/97 + 1/97} = 0.14$$

$$\text{бундан } t = \frac{|z_1 - z_2|}{m_{d_z}} = \frac{|-0.18|}{0.14} = 1.28$$

Жадвалга мурожаат қилмасдан ҳам фарқнинг муқаррар эмаслигини айтиш мумкин.

В. τ_δ учун ишончли чегаралар. Агар танланма тўплам корреляция коэффиценти τ нинг муқаррарлиги исбот этилган бўлса, у вақтда ўртача хато ёрдамида бош тўпламнинг τ_δ корреляция коэффиценти учун ишончли чегараларни кўрсатиш мумкин. Баъзи ҳолларда (n етарли катта, τ эса 0.5 га яқин бўлганда) χ_δ нинг ишончли чегараларини аниқлаш учун қўлланилган усул билан, яъни 2 (ёки 3) марта хатони айириш ёки қўшиш йўли билан ушбу

$$\tau - t_{m_\tau} \leq \tau_\delta \leq \tau + t_{m_\tau}$$

умумий муносабат бўйича τ_δ учун ишончли чегараларни аниқлаш мумкин. масалан, $\tau=0.38$ ва $m_\tau = 0.09$ ($n=100$) бўлганда $p=0.05$ муҳимлик даражаси учун ишончли чегаралар:

$$0.38 - 2 \cdot 0.09 < \tau_\delta < 0.38 + 2 \cdot 0.09; \quad 0.20 < \tau_\delta < 0.56$$

бўлади.

Аммо z микдорининг тақсимоти τ нинг тақсимотига қараганда нормал тақсимотга яқинроқ бўлгани ҳисобга олиб, ишончли чегараларни z нинг ёрдами билан ушбу

$$z - tm_z \leq z_\delta \leq z + tm_z \quad (88)$$

тенгсизликлар бўйича аниқлаш керак. Кейин z дан τ га ўтамиз. $n=12$ да $\tau=0.82$ ҳосил бўлган деб фараз қилайлик. У вақтда $z=1.16$ ва ўртача хато

$$m_z = \frac{1}{\sqrt{12-3}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} = 0.33$$

га тенг бўлади. $p=0.05$ да ишончли чегаралар учун $t=2$ олиш етарлидир. z_δ бош тўплам учун (88) бўйича чегараларни аниқлаймиз:

$$1.16 - 2 \cdot 0.33 < z_\delta < 1.16 + 2 \cdot 0.33; \quad 0.50 < z_\delta < 1.82$$

Энди τ нинг чегара қийматларини z бўйича тескари тартибда аниқлаймиз ва τ_δ учун ишончли чегаралар ҳосил қиламиз:

$$0.46 < \tau_\delta < 0.95$$

Бу чегаралар τ_δ учун жуда катта. Ундан ташқари, муҳими шундаки, танланма учун ҳосил қилинган $\tau=0.82$ қиймат максимумга яқин. Бу τ нинг тавсимооти асимметрик тақсимот демакдир. Айтилганлардан биологияда жуда муҳим бўлган қуйидаги ҳулоса келиб чиқади:

танланма тўплам корреляция коэффицентларининг муқаррар қийматларига абсолют маъно бермаслик керак ва айрим танланма тўпламлар бўйича мумкин бўлган ўзгаришларни ҳисобга олиш лозим.

Ў. η корреляцион нисбат ва R регрессия коэффицентлари учун репрезентатив хатолар.

η корреляцион нисбатнинг хатоси:

$$m_\eta = \frac{1-\eta^2}{\sqrt{n}}; \quad (89)$$

формула бўйича ҳисобланида.

Регрессия коэффицентларининг хатолари:

$$m_{R_{x/y}} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \sqrt{\frac{1-\tau^2}{n}} \quad \text{ва} \quad m_{R_{y/x}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \sqrt{\frac{1-\tau^2}{n}}; \quad (90)$$

формулалар билан ифодаланади, бунда σ_x ва σ_y лар X ва Y белгиларнинг мос ўртача квадратик фарқлари; τ эса X ва Y белгилар орасидаги корреляция коэффицентлари, n - кузатишлар сони.

Бу миқдорларнинг муқаррарлик критерийси:

$$t \geq 4$$

бўлади.

18-19 амалий машғулотлар

Мавзу: Вариантларнинг сифат белгилари бўйича статистик таҳлил қилиш.

Альтернатив вариация ва бунда арифметик ўртача қиймат ва ўртача квадратик фарқ (хато).

1. Умумий мулоҳазалар.

Вариацион (математик) статистика фақат сон белгилар ҳақидаги маълумотларни ишлаб чиқишга имкон бериб қолмасдан, балки сифат белгилар ҳақидаги маълумотларни ҳам, яъни масалан, ҳайвонлар мўйна терисининг ёки ўсимликлар гулининг ранги, мева ва уруғларнинг турли шакллари ва ранглари каби маълумотларни ҳам ишлаб чиқишга имкон беради.

Сифат ўзгаришида кузатишлар натижасини гуруҳлаш, уларни турли сифат белгилар бўйича гуруҳларга ажратишдан иборат бўлади. 2-жадвалда 500 тақрибий норка мўйнанинг ранглари бўйича тақсимланиш мисоли келтирилган эди (2-маърузада). Гуруҳлаш ҳар бир сифат гуруҳига тегишли бўлган индивидларни ҳисоблаш ва ҳар бир индивид сонини тўпламнинг умумий ҳажмида нисбий ҳисса сифатида ифодалашдан иборат бўлади; бу ҳисса 2-жадвалдаги каби ё фоизда ёки бирнинг улушларида ифодаланиши мумкин.

Сифат белгиларини ўрганишда биз қуйидаги миқдорлар билан иш қўрамыз: а) гуруҳларнинг абсолют сонлари – уларни P_0, P_1, P_2 , ва ҳ.к. символлар билан белгиланади; б) уларнинг ҳиссалари – бирнинг улушларида ёки фоизда ифодаланади (h, q, τ, s ва ҳ.к. билан белгиланади). Баъзи ҳолларда бирнинг улуши афзалроқ бўлади; биридан иккинчисига 100 га кўпайтириш билан ўтилади.

Белгининг ҳиссаси, вариация коэффиценти ва ҳиссанинг стандарт (квадратик) хатоси сифат ўзгаришида асосий статистик кўрсаткичлар (параметрлар)дан иборатдир.

Сифат белгиларини ва уларнинг вариацияларини сон белгиларига ўхшаш ҳолда ва ўша даражада статистик таҳлил қилиш мумкин ва уларга нисбатан ўша муаммолар туғилади, чунончи: белгининг энг типик қийматини топиш, унинг атрофида ўзгарувчанлик даражасини аниқлаш, сифат белгилари орасидаги ёки сифат ва сон белгилари орасидаги боғланишни аниқлаш ҳамма кўрсаткичларнинг муқаррарлигини баҳолаш.

Сифат белгилари, кўпинча, альтернатив кўринишда (яъни фақат икки ҳолга эга) ифодаланиши мумкин. Масалан, пигментли ёки албинос типдаги юнг, қипиқли ва қипиқсиз бошоқлар, турли морфологик белгиларнинг бор ёки йўқлиги ташқи муҳитнинг маълум тасирида организмнинг таъсирланиши ёки таъсирланмаслиги, ингичка ёки узун толали пахта, эртаги ёки кечки картошка ва ҳ.к.

Бунда ҳам тўпламни таҳлил қилишда математик статистика методларидан фойдаланиш жуда муҳимдир. Альтернатив вариацияни алоҳида кўриб чиқамиз.

2. Альтернатив вариация

Альтернатив вариация сифат вариациянинг энг содда ҳолидир. Бунда тўплам фақат 2 та гуруҳдан иборат бўлади:

Бири маълум белгига эга, бошқаси эса унга эга бўлмайди. Биринчи гуруҳнинг сонини P_1 орқали, иккинчи гуруҳнинг сонини эса P_0 орқали белгилаш мумкин. У вақтда текширилаётган белгига эга бўлган индивидларни ҳиссаси

$$P = P_1/n \quad (91)$$

бўлади, ўша белгига эга бўлмаган индивидларнинг ҳиссаси эса

$$q = P_0/n \quad (92)$$

бўлади. лекин $p+q=1$ бўлгани учун $q=1-p = P_0/n$;

бундай p ва q дарҳол эҳтимолликни эслатади. Ҳақиқатдан ҳам, нисбий ҳисса эҳтимолни маълум маънода ифодалайди. Агар нисбий белгига эга бўлган тўплам ҳадларнинг ҳиссаси P га тенг бўлса (жуда катта ёки бош тўплам кўзда тутилади), у вақтда тўпламнинг бирор ҳадини таваккалига олинади, у ҳудди ўрганилаётган белгили бўлиб чиқиш эҳтимоли P га тенг бўлади. альтернатив ўзгарувчанлик билан ишлаш осон бўлгани учун бир қанча сифатли гуруҳларни айлантириш мақсадга мувофиқдир. Масалан, агар турли тусдаги қуёнлар бўлса, шулар ичида оқлари (албинослари) ҳам бўлса, у вақтда қуёнларни икки гуруҳларга ажралиши мумкин.

3. Альтернатив вариацияларда арифметик ўртача қиймат ва ўртача квадратик фарқ (хато).

Аввало бу ҳолда вариацион қатор қандай бўлишини кўриб чиқамиз. Альтернатив ўзгарувчанликда берилган маълумотлар умумий кўринишда иккита гуруҳга: маълум белгига эга бўлмаган вариантларни ўз ичига олган “0” ва кўринишида берилиши мумкин.

Иккита гуруҳдан иборат бўлган, қисқартирилган вариацион қаторда ҳисоблашлар ҳудди сонли ўзгарувчанликдаги қаторга ўхшаш бажарилиш мумкин. (55-жадвал).

Сифат ўзгаришли қаторда ҳисоблашларнинг умумий схемаси

55-жадвал

Гуруҳлар	Такрорланиш	Шартли ўртача қийматдан фарқи	$n_i U$	$n_i U^2$
----------	-------------	-------------------------------	---------	-----------

0	$\underline{P}_0$	0	0	0
1	$\underline{P}_1$	1	$\underline{P}_1$	$\underline{P}_1$
h=1	$\underline{P}_0 + \underline{P}_1 = n$		$\Sigma = \underline{P}_1$	$\Sigma = \underline{P}_1$

Одатдаги

$$\bar{x} = a + b = a + h \cdot \frac{\sum n_i U_i}{n} \quad \text{ва} \quad \sigma = h \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_i n_i U_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_i n_i U_i \right)^2}$$

Формулани тадбиқ этиб $\bar{x} = \underline{P}_1/n = 0 + \underline{P}_1/n = \underline{P}_1/n$ ни ҳосил қиламиз.

Аслид, $\bar{x}$ маълум белгили гуруҳнинг умумий тўпламдаги ҳиссаси бўлгани учун $\bar{x}$ харф ўрнига $\underline{P}$ ёзиш мумкин, яъни:

$$\bar{x} = \underline{P} = \frac{\underline{P}_1}{n} \quad (93)$$

Шундай қилиб, берилган маълум белгига эга бўлган индивидлар тўпламида нисбий ҳисса, сон ўзгарувчанлигидаги арифметик ўртача қийматга мос келади.

Ўртача квадратик фарқ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\underline{P}_1}{n} - \left(\frac{\underline{P}_1}{n} \right)^2}$$

Миқдор билан ифодаланади. Лекин $n = \underline{P}_0 + \underline{P}_1$ бўлгани учун илдиз остидаги ифодани қуйидагича алмаштириш мумкин:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n \underline{P}_1}{n^2} - \frac{\underline{P}_1^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{(\underline{P}_0 + \underline{P}_1)}{n^2} \underline{P}_1 - \underline{P}_1^2} = \sqrt{\frac{\underline{P}_0 \underline{P}_1}{n^2}} = \frac{\sqrt{\underline{P}_0 \underline{P}_1}}{n} \quad (94)$$

бу ерда $\underline{P}_0$ тайин белгига эга бўлмаган вариантлар такрорланишининг абсолют кўрсаткичи; $\underline{P}_1$ – тайин белгига эга бўлган вариантлар такрорланишининг абсолют кўрсаткичи; n – кузатишлар сони.

Агар такрорланишларнинг ўзаро фоиз муносабатлари маълум бўлса, у вақтда бу формулани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\sigma = \sqrt{\underline{P}_0(\%) \underline{P}_1(\%)} \quad (94 \text{ a})$$

$\underline{P}_1/n = p$, $\underline{P}_0/n = q$ бўлганлиги учун ўртача квадратик фарқни

$$\sigma = \sqrt{p(1-p)} \quad (95)$$

ва дисперцияни

$$\sigma^2 = pq \quad (96)$$

деб ёзиш мумкин.

Мисол. Келтирилган бу формулаларни туберкулёзга қарши эмланган 284 сигир ҳақида берилган маълумотларга тадбиқ қиламиз. 201 сигир манфий реакция ва 83 сигир мусбат реакция берган (56-жадвал).

56-жадвал

Сигирларнинг туберкулёзга реакцияси бўйича тақсимооти

Гуруҳлар	Такрорланиш	Шартли ўртача қийматдан фарқи	$n_i U$	$n_i U^2$
0	201	0	0	0
1	83	1	83	83
	$n=284$		$\Sigma=83$	$\Sigma= 83$

Бу ҳолда $p=83/284=0.29$; $q=201/284=0.71$

p ва q нинг қийматларини (%)да ҳам иаодалаш мумукин: 29% ва 71%, шунингдек

$$\sigma = \sqrt{0.29 \cdot 0.71} = \sqrt{0.2059} = 0.45 \quad (\text{ёки } 45\%)$$

Альтернатив белгилар учуч ўзгарувчанлик кўрсаткичининг энг катта қиймати 50% га тенг, яъни $P_0 = P_1 = n/2$ эканлигини назарда тутиш лозим.

Масалан, агар $P_0=100\%$, $P_1=0$ бўлса, у вақтда $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0} = 0$; агар $P_0=10\%$, $P_1=90\%$, бўлса, у вақтда $\sigma = \sqrt{10 \cdot 90} = 30\%$; агар $P_0=P_1=50\%$ бўлса, у вақтда $\sigma = \sqrt{50 \cdot 50} = 50\%$; яъни бу ҳолда ўзгарувчанлик кўрсаткичи ўзининг энг катта қийматига эга бўлади. Юқоридагиларни (94) ва (94 а) формулалардан иккитадан кўп бўлган сифат белгиларида ҳам фойдаланиш мумкин.

Масалан, ўзгарувчанлик кўрсаткичининг қиймати:

$$\sigma = \sqrt[k]{P_1 \cdot P_2 \dots P_k}$$

формула бўйича аниқланади; бу ерда P_1 , P_2 ва ҳ.к. белгиларнинг умумий тўпламдаги ҳиссалари (ёки уларнинг фоиз қийматлари): K – белгилар гуруҳларининг сони.

Мисол. Иккинчи гибрид бўғинда помидор меваси рангининг ўзгарувчанлигини аниқланг. Помидорнинг 558 та меваси текширилган бўлиб, улардан 39 донаси ($\approx 7\%$) сарик, 121 донаси ($\approx 22\%$) пушти ранг, 105 донаси ($\approx 19\%$) қизил, 293 донаси ($\approx 52\%$) оқ бўлган.

Меванинг умумий сонидан маълум рангдагисини олгандан қолган мева микдори, ушбу рангга нисбатан бошқа рангли мевалар сонини ташкил этади ва қуйидаги сонлар билан ифодаланади; сарик рангга нисбатан 519 дона (93%), пушти рангга нисбатан 437 дона (87%), қизил рангга нисбатан 453 дона (81%), оқ рангга нисбатан 265 дона (48%) Энди помидор меваси рангининг ўзгарувчанлигини аниқлаш мумкин:

$$\sigma = \sqrt{7 \cdot 93} \approx 25\% \quad \text{сарик рангли учун}$$

$$\sigma = \sqrt{22 \cdot 78} \approx 41\% \quad \text{пушти рангли учун}$$

$$\sigma = \sqrt{19 \cdot 81} \approx 39\% \quad \text{кизил рангли учун}$$

$$\sigma = \sqrt{52 \cdot 48} \approx 50\% \quad \text{ок рангли учун}$$

Помидорнинг ок ранглиги энг кўп ўзгарувчан экан, бунда $\sigma \approx 50\%$, сарик ранглиги эса кам ўзгарувчан экан, бунда $\sigma \approx 25\%$.

20 – амалий машғулот. 5-амалий мустақил иш

Мавзу: Статистик хато. Ҳисса учун ишончли чегаралар. Танланма тўпламнинг зарур бўлган ҳажмини аниқлаш.

1. Статистик хато. Сонли ўзгарувчанликдаги каби сифат белгисининг ўзгарувчанлиги бирнинг улушларида ёки фоизда ифодаланади. Сифат белгиси конкрет танланма тўпламни ўрганиш асосида аниқлангани учун ўзининг статистик хатосига эга бўлади. Сифат вариациясида статистик хато қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$m_p = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \quad (97)$$

Агар ҳисса фоизда ифодаланган бўлса, у вақтда

$$m_p = \sqrt{\frac{P(100-P)}{n}} \quad (98)$$

бўлади.

Сигирларни туберкулёзга реакцияси ҳақида юқорида келтирилган мисол учун

$$m_p = \sqrt{\frac{0.29 \cdot 0.71}{284}} = \sqrt{0.0007} = 0.027$$

бўлади. Реакция кўрсатган ва кўрсатмаган сигирларни ҳиссалари учун ўртача хато биргина бўлади:

$$p \pm m_p = 0.29 \pm 0.027; \quad q \pm m_q = 0.79 \pm 0.027$$

ҳиссалари ва уларнинг хатолари фоизларда ҳам ифодаланиши мумкин:

$$29\% \pm 2.7\%; \quad 79\% \pm 2.7\%$$

р ва q миқдорлар йиғиндиси 1 га тенг бўлганлигидан, n нинг ҳар бир берилган қиймати учун ўртача хато

$$\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} = \sqrt{\frac{0.25}{n}}$$

миқдордан катта бўлмайди. р нинг ҳосил қилинган қийматининг аниқлигига баъзи сабабларга кўра ишонч бўлмаса, у ҳолда хато сифатида р нинг бўлиши мумкин бўлган катта қийматини олган яхши.

2. Бош ва танланма тўплamlарнинг ҳажмлари орасидаги муносабатга тузатиш киритиш.

Ҳисса аниқланган танлама тўплamlнинг ҳажми бош тўплaml ҳажмига нисбатан жуда кичик бўлган ҳолларда (97) формула тадбиқ этилади.

Агар танланма тўплaml бош тўплamlнинг деярли кўп қисмини ташкил қилса (зоологияда кам сонли турларни ўрганишда ёки тиббиётда нисбатан кам учрайдиган касалликларни ўрганишда бу ҳол бўлиши мумкин) (97) формулади илдиз остидаги ифодага $1 - \frac{n}{N}$ кўпайтувчи киритиш керак: бу ерда n – танланма ҳажми, N – бош тўплaml ҳажми. Бу ҳолда ҳисса учун хатонинг формуласи қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$m_p = \sqrt{\frac{pq}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} \quad (97a)$$

56-жадвалда келтирилган мисол учун (97) формулани тузатиш киритмасдан қўллаш мумкин, чунки 284 сигирдан иборат бўлган танланма тўплaml, сигирлар бош тўплamlининг жуда кичик қисмини ташкил этади. Қуйидаги мисолда иш бошқача бўлади: фараз қилайлик, олий ўқув юртида 6400 талаба сиртдан ўқисин. Улардан 1000 кишидан иборат бўлган танланма (қайтарилмайдиган) тўплaml олинган, улар ичида 200 киши техникумларни (коллежларни) тугатган бўлиб чиқсин. Улуғ Ватан уруши қатнашчиларининг ҳиссаси $p=0.20$ (ёки 20%) ни ташкил этади.

Ҳисса хатосини ҳисоблашда 1000 талабадан иборат бўлган танланмада сиртдан ўқиётган талабаларнинг умумий сонидан иборат бўлган бош тўплamlнинг каттагина қисмини ташкил қилишини ҳисобга олиш керак. Тузатиш $1 - n/N = 1 - 1000/6400 = 1 - 0.16 = 0.84$ га тенг бўлади. У вақтда

$$m_p = \sqrt{\frac{0.20 \cdot 0.80}{1000} \cdot 0.84} = \sqrt{0.000134} = 0.012 \quad (\text{ёки } 1.2\%)$$

бўлади.

3. Ҳисса учун ишончли чегаралар.

Бош тўплaml ҳиссасининг (уни $\underline{P}_0$ орқали белгилаймиз) қийматлари ётиши мумкин бўлган чегаралар

$$p - tm_p < \underline{P}_0 < p + tm_p \quad (99)$$

формула бўйича аниқланади.

Бу формулани (88) формулага ўхшашлиги ўз-ўзидан тушунарли. t га ишончли эҳтимолларга тегишли (0.95 ёки 0.99 га) аниқ қийматларни бериб, бош тўплaml ҳиссасининг ишончли чегараларини аниқлаш мумкин.

Мисол. Шик реакцияси ёрдамида болаларнинг дифтерияга нисбатан иммунитетини аниқланади. Текширилган болаларнинг 10% ида (ҳаммаси бўлиб,

1600 бола текширилган эди) реакция мусбат бўлган. Дифтерияга нисбатан мусбат реакцияли болалар фоизи қайси чегараларда ётишини аниқлаш талаб қилинади. 10% учун хато $m_p = \sqrt{10 \cdot 90 / 1600} = 0.75$ га тенг бўлади. (99) формула учун t нинг қийматлари ишончли чегаралар учун қабул қилинган муҳимлик даражаси билан аниқланади. $p=0.05$ учун $t=1.96$ ни олиш етарли, $p=0.01$ учун $t=2.56$ бўлиши керак. Амалда, ортиқча ҳисоблашлардан қутилиш мақсадида, t нинг яхлит қийматлари 2; 2.5 ва 3 ни олинади.

Агар $t=3$ олинса (бу ҳолда $p<0.01$) у вақтда

$$10-3 \cdot 0.75 < \underline{p}_0 < 10+3 \cdot 0.75$$

бўлади. Дифтерияга нисбатан мусбат реакция берувчи болалар фоизи учун ишончли чегаралар: 7.75-12.25 бўлади.

Юқорида кўрсатилган усул билан хисса учун аниқланган ишончли чегаралар p 0.5 га яқин бўлган ҳоллардагина деярли аниқ натижа, p нолга ва бирга яқин бўлган ҳолларда нотўғри натижа беради. Буни тўғрилаш мақсадида Р.А. Фишер қуйидаги:

$$p = \sin^2 \frac{\omega}{2}, \quad \omega = 2a \pi \sin \sqrt{p} \quad (100)$$

тенглик билан боғланан ω ёрдамчи миқдордан фойдаланишни таклиф этди. Миқдор p нинг ҳудди $p=0$ ва $p=1$ қийматларидаги ўзгаришларга айниқса, сезгир. ω миқдор (n унчалик кичик бўлмаганда) нормал қонунга яқин тақсимотга эга. Унинг стандарт хатоси фақат танлама тўпламнинг n ҳажмига жуда содда (агар ω ни радианларда ўлчанса) равишда боғлиқлиги айниқса қулай. P нинг ҳар бир маълум қийматига тегишли бўлган ω нинг қийматини синусларнинг оддий жадвалидан (100) формула бўйича топиш мумкин. Аммо p нинг берилган қиймати бўйича ω нинг тегишли қийматини топишда иловадаги ([1]) X жадвалдан фойдаланиш қулайдир. Ҳиссанинг ишончли чегараларини топиш учун x жадвалдан ω ни топиш керак ва

$$\omega \pm t m_{\omega} = \omega \pm \frac{t}{\sqrt{n}}$$

ни ҳисоблаш керак, сўнгра яна X жадвал бўйича

$$\omega_{\text{куйи}} = \omega - \frac{t}{\sqrt{n}} \quad \text{ва} \quad \omega_{\text{юк}} = \omega + \frac{t}{\sqrt{n}}$$

га тегишли бўлган $p_{\text{куйи}}$ ва $p_{\text{юкори}}$ қийматларни топиш керак.

Мисол. Қутидаги консерваларни текширишда 64 банкасида 3 банкаси дефектли (яроқсиз) бўлиб чиқди. Яроқсиз банкаларнинг ҳиссаси учун 95% ишончли интервал қандай бўлади?

Ечиш: Бу ерда $p = \frac{3}{64} \cdot 100 = 4.7\%$, демак, Х жадвалга асосан $\omega = 0.437$ бўлади.

$$tm_p = \frac{1.96}{\sqrt{n}} = \frac{1.96}{8} = 0.245 \text{ бўлгани учун ишончли интервалнинг чегаралари:}$$

$$\omega_{\text{куйи}} = 0.437 - 0.245, \omega_{\text{юкори}} = 0.437 + 0.245 = 0.683$$

Иловадаги Х жадвалдан фойдаланиб,

$$p_{\text{куйи}} \approx 0.92\%, p_{\text{юкори}} = 11.2\%$$

эканини топамиз, (97) формула бўйича ҳисобланганда

$$m_p = \sqrt{4.7 \cdot 95.3 / 64} \approx 2.6\%$$

ва $P_{\text{куйи}} = 4.7 - 2.00 \cdot 2.6 = -0.5\%$, $P_{\text{юкори}} = 4.7 + 2.00 \cdot 2.6 = 9.9\%$ ҳосил бўлади.

4. Гуруҳларнинг абсолют частоталари учун хатони аниқлаш.

Баъзан у ёки бу белгининг ҳиссасини (ёки фоизини) эмас, балки конкрет сонининг мумкин бўлган тебранишларини баҳолаш зарурати туғилади. У вақтда хато формуласида p ва q ҳиссаларининг қийматини $\underline{P}_1$ ва $\underline{P}_0$ абсолют частоталар билан алмаштириш, хатонинг миқдорини эса ҳиссаларнинг абсолют частоталарига ўтказиш учун n га қўпайтириш керак, хатолар формуласи қуйидагича бўлади:

$$m\underline{P}_1 = m\underline{P}_0 = \sqrt{\frac{\underline{P}_1(1-\underline{P}_1)}{n}} \quad (101)$$

Юқорида келтирилган мисолда туберкулёз касалига нисбатан мусбат реакция берган сигирларнинг сони (284 умумий сонидан) 83 та эди.

У вақтда

$$m\underline{P}_0 = m\underline{P}_1 = \sqrt{\frac{83 \cdot 201}{284}} = 7.7 \approx 8$$

Сигирларнинг конкрет сонларини бу сонларнинг хатолари билан қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\underline{P}_1 \pm m\underline{P}_1 = 83 \pm 8; \underline{P}_0 \pm m\underline{P}_0 = 281 \pm 8$$

5. Танланма тўпламнинг зарур бўлган ҳажмини ҳисоблаш.

Танланма тўпламнинг ҳажми

$$n = t^2 pq / S^2 \quad (102)$$

формула бўйича ҳисобланади.

Биологик ва қишлоқ хўжалик тадқиқотларида танланма тўпламнинг энг катта хатосининг миқдори учун $t \approx 2.0$ қийматда 95% ли эҳтимол даражаси олиниши юқорида кўрсатиб ўтилган эди. Ушбу ҳолда қабул қилинган 95% ли эҳтимол даражаси учун танланма тўпламнинг ҳажми

$$n = 4pq / m_p^2 \quad (103)$$

формула бўйича аниқланади. Бу формулада p , q ва m_p лар бир бирликда – фоизларда ёки бирнинг улушида ифодаланган бўлиши керак. (103) формуладан фойдаланиш учун p миқдор олдиндан аниқланган, ҳеч бўлмаганда тахминан аниқланган бўлиши керак. Агар биолог ихтиёрида p нинг мумкин бўлган миқдори ҳақида тахминий маълумотлар бўлса, улардан фойдаланиш керак. Агар бундай маълумотлар бўлмаса, яхшиси $p(1-p)$ кўпайтманинг мумкин бўлган энг катта қийматини олиш керак. Бундай максимум қиймат $p=0.5$ да бўлади: $p(1-p)=0.25$. p нинг бундан бошқа ҳамма (0.5 дан катта ёки кичик) қийматларида $p(1-p)$ кўпайтма 0.25 дан кичик бўлади. Масалан, дастлабки текширишда қанд лавлаги ўсимлигининг 10% и илдиз заҳари касали билан шикастланганлиги аниқланган. Лавлагининг шу касаллик билан шикастланишини тажриба вариантлари бўйича кузатишни режалаштиришда танланма тўплам ҳажмини шундай белгилаш керакки, танланма ўртача қийматлар $p=0.95$ эҳтимол билан $\pm 3\%$ атрофида хатолик билан аниқлансин. Ҳисоблашлар танлама тўплам ҳажмини қуйидагича беради:

$$n = \frac{4pq}{m_{p^2}} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 90}{3^2} = 400 \text{ та ўсимлик.}$$

21-22-амалий машғулотлар.

Мавзу: Танланма ҳиссалар орасидаги фарқнинг муқаррарлигини аниқлаш. Бош ва танланма тўпламлар ҳиссалари орасидаги фарқнинг муқаррарлиги

1. Танланма ҳиссалар (улушлар) орасидаги фарқнинг муқаррарлигини аниқлаш Бизга маълумки. (V боб), иккита кўрсаткич орасидаги фарқнинг муқаррарлигини (ўлчовини) аниқлаш учун d фарқни, унинг хатоси m_d ва $t=d/m_d$ ни билиш керак. Бу умумий қоидалар ҳиссалар (ёки фоизлар) орасидаги фарқнинг муқаррарлигини аниқлашга ҳам тааллуқлидир. Аммо ушбу икки ҳолни ажратиш лозим:

- а) солиштирилган ҳиссалар битта танланма тўплам материалида аниқланади;
- б) солиштирилган ҳиссалар турли танланма тўпламлар материалида аниқлашда материалида аниқланади;

Биринчи ҳолда фарқ ва унинг хатосини аниқлашда қуйидаги формулалардан фойдаланиш мумкин:

$$D=p_x - p_y; m_d = \sqrt{m_{p_x}^2 + m_{p_y}^2}; \quad t = d / m_d$$

Мисол. 28 макаки резус маймундан 16 таси А вируси билан ва 12 таси В вируси билан заҳарланган. Биринчи гуруҳда 4 маймун, иккинчи гуруҳда эса 6 маймун касал бўлиб қолган. Заҳарланиш даражасидаги фарқ тасодифийми?

Ечиш:

$$P_x = \frac{4}{16} = 0.25; \quad m_{p_x} = \sqrt{0.25 \cdot 0.75 / 16} = 0.11$$

$$P_y = \frac{6}{12} = 0.50; \quad m_{p_y} = \sqrt{0.5 \cdot 0.5 / 12} = 0.14$$

У вақтда

$$d = |P_x - P_y| = 0.18; m_d = \sqrt{0.11^2 + 0.14^2} = \sqrt{0.317} = 0.18; t = 0.25/0.18 = 1.4$$

Жадвалдан (қаранг: П.Ф.Рокицкий “биологическая статистика”, Минск, 1967 й) $p=0.84$ ва $p=0.16$ эканлигини аниқлаймиз. Бундан кўринадик, заҳарланиш даражасидаги фарқ муқаррар эмас. Ҳиссалар турли тўпламларда аниқланадиган иккинчи ҳолда ҳиссалар фарқининг муқаррарлигини аниқлаш мураккаброқ бўлади. Бу ҳолда фарқлар хатоси қуйидаги формула бўйича аниқланади:

$$m_{d(P_x P_y)} = \sqrt{pq \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y} \right)} \quad (104)$$

бу ерда n_x ва n_y лар p_x ва p_y ҳиссалар аниқланган иккала тўплам сонлари. Аммо бу формулани қўллаш учун аввало p ни p_x ва p_y лардан вазний арифметик ўртача қиймат сифатида

$$p = \frac{p_x n_x + p_y n_y}{n_x + n_y} \quad (105)$$

формула бўйича ёки бир тўплам бўйича индивидларнинг абсолют сонларидан бевосита фойдаланиб,

$$p = \frac{p_{1x} + p_{1y}}{n_x + n_y} \quad (105 \text{ а})$$

формула бўйича топиш керак.

Мисол. 2 гуруҳ сигирни туберкулёз реакцияси бўйича солиштирамиз. 284 сигирдан иборат бўлган гуруҳда 83 сигир (P_{1x}) реакция кўрсатган, 50 сигирдан иборат бўлган бошқа гуруҳда 6 сигир (P_{1y}) реакция кўрсатган. Бу ҳолда

$$P_x = \frac{83}{284} = 0.29 \text{ ва } p_y = 6/50 = 0.12; d = |P_x - P_y| = 0.17$$

Иккала гуруҳдан олинган маълумотларни бир-бири билан эмас, балки бир 284 сигирдан, бошқаси эса 50 сигирдан иборат бўлган танланма тўплamlар олинган деб фараз этилган ягона назарий тўплам кўрсаткичлари билан солиштириш керак.

Бундай тўплам учун p ни (105) ёки (105 а) формулалар бўйича ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда

$$p = \frac{83 + 6}{284 + 50} = 0.27$$

Шунинг учун иккала гуруҳ ўртача қийматларининг хатоларини, айрим P_x ва P_y га асосланиб эмас, балки бош тўплам p сини асос қилиб олиб ҳисоблаш лозим. Фарқнинг хатоси учун (104) формулага эга эдик. Бу формулага конкрет қийматларни қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$m_d = \sqrt{0.27 \cdot 0.73 \cdot (1/284 + 1/50)} = 0.068$$

бундан $t = 0.17/0.068 = 2.52$

Эҳтимолнинг интеграл жадвали бўйича t нинг қиймати 0.9883 эҳтимолни ва 0.0117 муҳимлик даражасини беради. Бундан, иккала сигирлар гуруҳи туберкулёзга реакциясида муҳим фарқ қилади деган ҳулоса чиқариш мумкин.

Ўрганилаётган гуруҳларнинг сонлари ўзаро анча фарқ қилса, кўрсатилган икки методни қўллаш анча фарқ қилувчи натижалар бериши мумкинлигини таъкидлаб ўтамиз. Агар n_x ва n_y бир-биридан унчалик фарқ қилмаса, m_d ни аниқлаш учун $m_d = \sqrt{m_{p_x}^2 + m_{p_y}^2}$ энг содда формулани қўллаш мумкин.

2. Бош ва танланма тўпламлар ҳиссалари орасидаги фарқнинг муқаррарлиги.

Назарий ҳисса, яъни бош тўплам учун ҳиссанинг қандайлиги ҳақида маълум мулоҳазалар бўлиши мумкин; амалда олинган ҳиссани, яъни танланма тўплам ҳиссасини ўша назарий ҳисса билан солиштириш керак.

Масалан, маълум чатиштиришлар зотда (ёки популяцияда) амалда ҳосил бўлган белгилашга ажралиши Мендел қонунлари бўйича (ёки популяция генетик тузилишининг маълум формулалари бўйича) назарий кутилаётган белгиларга ажратиш билан солиштириш мумкин.

Амалда олинган ҳисса ва назарий ҳисса орасидаги фарқнинг муқаррарлигини аниқлаш учун шу фарқнинг хатосини ҳисоблаб чиқиш керак. Аммо фарқ хатосининг формуласи

$$m_d = \sqrt{m_{p_x}^2 + m_{p_y}^2}$$

даги иккинчи хато бош тўплам ҳиссасининг хатоси бўлиши керак. Бош тўплам ҳиссаси бош тўплам арифметик ўртача қиймати каби хатога эга эмас,

шунинг учун $m_d = \sqrt{m_{p_x}^2}$. Сўнгра хатони эмприк p ва q асосида эмас, балки назарий p ва q лар асосида ҳисоблаб чиқиш мумкин.

Бу ҳолда фарқнинг хатоси

$$m_d = m_{p_j} = m_p = \sqrt{pq/n}$$

бўлади.

Мисол. Калтақулоқ қўйларнинг бир-бири билан чатиштиришидан (биринчи авлоди узунқулоқ қўйларни қулоқсиз қўйлар билан чатиштиришидан ҳосил бўлган) 7 та узунқулоқ, 9 та калтақулоқ қўйлар билан ва 6 та қулоқсиз қўйлар олинган. Белгиларга ажралишнинг 1:2:1 муносабатда бўлиши кутиляпти. Калтақулоқ (гетерозигота шакл) қўйларнинг амалда ҳосил бўладиган сони назарий кутилаётган ундан фарқ қиладими? Шуни аниқлаш керак.

Ечиш: $p_x = 9/22 = 0.41$; $p = 0.50$; $d = 0.09$

$$m_d = m_p = \sqrt{0.5 \cdot 0.5 / 22} = \sqrt{0.01} = 0.1; \quad t = 0.09 / 0.10 = 0.9$$

Демак, назарий кутилаётган ва амалда ҳосил бўлган гетерозигот ҳиссалари орасида фарқ йўқ.

Биринчиси

132, 1, 130, 3, 128, 5, 126, 7, 124, 9, 122, 11, 120, 13, 118, 15, 116, 17, 114, 19, 112, 21, 110, 23, 108, 25, 106, 27, 104, 29, 102, 31, 100, 33, 98, 35, 96, 37, 94, 39, 92, 41, 90, 43, 88, 45, 86, 47, 84, 49, 82, 51, 80, 53, 78, 55

76, 57, 74, 59, 72, 61, 70, 63, 68, 65

Кейинги

66, 67, 64, 69, 62, 71, 60, 73, 58, 75, 56, 77, 54, 79, 52, 81, 50, 83, 48, 85, 46, 87, 44, 89, 42, 91, 40, 93, 38, 95, 36, 97, 34, 99, 32, 101, 30, 103, 28, 105, 26, 107, 24, 109, 22, 111, 20, 113, 18, 115, 16, 117, 14, 119, 12, 121

10, 123, 8, 125, 6, 127, 4, 129, 2, 131