М и н и с т е р с т в о в ы с ш е г о и с р е д н е г о
с п е ц и а л ь н о г о   о б р а з о в а н и я
Р е с п у б л и к и У з б е к и с т а н
Т а ш к е н т с к и й г о с у д а р с т в е н н ы й
т е х н и ч е с к и й   у н и в е р с и т е т
им. А б у Р а й х а н а   Б е р у н и

Уравнения математической физики.

Учебное пособие
для бакалавров высших технических учебных заведений

Т а ш к е н т 2006

Уравнения математической физики. Учебное пособие / Р.Р.Абзалимов, А.Алибоев. Ташкент, Ташк. гос. техн. ун-т; 2006 г. 56 с..

Данное пособие охватывает следующие разделы уравнения математической физики: классификация уравнений с частными производными второго порядка, постановка основной задачи, уравнения колебаний, уравнения теплопроводности и диффузии, уравнения Лапласа.

В каждом разделе даются теоретические сведения материала. Типовые задачи приводятся с подробными решениями. Пособие рассчитано для студентов – бакалавров высших технических учебных заведений и написана в объёме аудиторных занятии: лекция -10 ч., практика -10 ч., на основе учебной программы по предмету "Высшая математика", утвержденного министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан. 27.05.2002 году, и соответствует Гос.стантарту 460100 (коду) при подготовке инженеров-бакалавров по направлению в области образования и знания.

Кафедра “Высшая математика ”

Печатается по решению научно-методического совета Ташкентского государственного технического университета имени Абу Райхана Беруни.

Рецензенты:
к.ф.м.н., доцент   Т.Х.Т.И.   Р. Максудов

к.ф.м.н., доцент   Таш.ГТУ   Б. Миршаходжаев

Введение.

В предлагаемом учебном пособии уравнения математической физики освещается первоначальными общими сведениями, которые необходимы для дальнейшему изучению данного раздела математики в соответствии с конкретной специальностью. Авторы исходили из того, что читатель знаком только с обычным курсом высшей математики, изучаемым в наших высших технических учебных заведениях. Мы учитывали то обстоятельство, что читатель может интересоваться только теми задачами, которые имеют большое значение в его специальности. В соответствии с этим пособие построено так, что отдельные ее части могут изучаться сравнительно независимо друг от друга. В частности, важнейший метод решения многих задач математической физики - метод Фурье - изложен с одинаковой степенью подробности, как и для уравнения колебаний, так и для уравнения теплопроводности.

.

§1. Классификация уравнений с частными производными второго порядка.

Уравнением с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными x и y называется соотношение между неизвестной функцией u(x,y) и ее частными производными второго порядка включительно:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

Уравнение называется линейным относительно старших производных, если

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad (1)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

Уравнение называется линейным, если оно линейно как относительно старших производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, так и относительно функции U и ее первых производных u_x, u_y:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0 \quad (2)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ и f функции только от x и y. Если они не зависят от x и y, то линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Если f=0, то уравнение однородное. С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$$

допускающие обратное преобразование мы получаем новое уравнение эквивалентное исходному уравнению.

Естественно поставить вопрос: как выбрать ξ и η, чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее простую форму? На этот вопрос мы дадим ответ относительно уравнения (1). Преобразуя производные к новым переменным, получаем:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_x$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \xi_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} \qquad (3)$$

Подставляя значения производных из (3) в уравнение (1), будем иметь

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0 \quad (4)$$

где

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2.$$

а функция $\bar{F}$ не зависит от вторых производных.

Выберем переменные ξ и η так, чтобы коэффициент $\bar{a}_{11}$ был равен нулю. Рассмотрим уравнение с частными производными первого порядка

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0 \quad (5)$$

Пусть $z = \varphi(x, y)$ - какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить ξ =φ(x,y), то коэффициент $\bar{a}_{11}$ очевидно, будет равен нулю. Таким образом, упомянутая выше задача о выборе новых независимых переменных связана с решением уравнения (5).

Лемма:

1). Если z=y(x,y) является частным решением уравнения

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0$$

то соотношение y(x,y)=C представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \quad (6)$$

2). Если φ(x,y)=C представляет собой общий интеграл обыкновенного уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0$$

то функция z=φ(x,y) удовлетворяет уравнению (5).

Уравнение (6) называется характеристическим для уравнения (1), а его интегралы характеристиками.

Полагая ξ=φ(x,y), где φ(x,y)=const есть общий интеграл уравнения (6), мы обращаем в нуль коэффициент при $u_{\xi\xi}$ в (4). Если ψ(x,y)=const является другими общим интегралом уравнения (6), не зависимым от φ(x,y), то пологая η=ψ(x,y), мы обратим в нуль также и коэффициент при $u_{\eta\eta}$ в (4).

Уравнение (6) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (8)$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0$$

Это уравнение мы будем называть в точке M(x,y) уравнением:

- гиперболического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}, a_{22} > 0$
- эллиптического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}, a_{22} < 0$
- параболического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}, a_{22} = 0$.

В различных точках области определения уравнение может принадлежать различным типам.

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Через каждую точку области G проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнений эллиптического типа - комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают между собой.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности:

1. Для уравнения гиперболического типа $a_{12}^2 - a_{11}, a_{22}$>0 и правые части уравнений (7) и (8) действительны и различны. Общие интегралы их $\varphi(x,y)=C$ и $\psi(x,y)=C$ определяют действительные семейства характеристик. Если положить $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, то коэффициенты $\bar{a}_{11}$ и $\bar{a}_{22}$ в уравнении (4) будут равны нулю и получим после деления на коэффициент при $u_{\xi\eta}$ следующее уравнение:

$$u_{\xi\eta} = \phi\text{, где } \phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}};$$

Это - каноническая форма уравнений гиперболического типа. Часто пользуются второй канонической формой.

Положим

$$\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$$

т.е.

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \beta = \frac{\xi - \eta}{2}$$

где α и β новые переменные. Тогда:

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta),$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

В результате уравнение (4) примет вид:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \phi_{1,} (\phi_1 = 4\phi).$$

2. Для уравнений параболического типа $a_{12}^2 - a_{11}, a_{22}$=0 уравнения (7) и (8) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (6): φ(x,y) =const.

Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \eta(x, y)$$

где η=η(x,y)- любая функция, не зависимая от φ(x,y).
При таком выборе переменных коэффициент

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0,$$

так как $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$; отсюда следует, что

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_y) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$

$$= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0.$$

После деления уравнения (4) на коэффициент при $u_{\eta\eta}$ получим каноническую форму для уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta} = \phi, (\phi = -\frac{\bar{F}}{q_{22}}).$$

3. Для уравнения эллиптического типа $a_{12}^2 - a_{11}, a_{22}$<0 и правые части уравнений (7) и (8) комплексные. Значит характеристики комплексные и комплексно сопряжены $(\varphi(x, y) = \overline{\psi(x, y)})$.

Положим

$$\xi = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) + \psi(x, y)) = \operatorname{Re}\varphi(x, y). \text{ и}$$

$$\eta = \frac{1}{2i}(\varphi(x, y) - \psi(x, y)) = \operatorname{I\overline{m}}\varphi(x, y),$$

В этом случае в (4) имеем

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} \text{ и } \bar{a}_{12} = 0.$$

После деления на коэффициент при $u_{\xi\xi}$ уравнение (4) принимает вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \phi, (\phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}).$$

Таким образом, в зависимости от знака выражения $a_{12}^2 - a_{11}, a_{22}$ имеют место следующие канонические формы:

- $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} > 0$ (гиперболический тип): $u_{xx} - u_{yy} = \phi$ или $u_{xy} = \phi$
- $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} < 0$ (эллиптический тип) $u_{xx} + u_{yy} = \phi$
- $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0$ (параболический тип) $u_{xx} = \phi$.

Рассмотренный метод приведения уравнения (1) к каноническому виду и решение полученного уравнения носит название метода характеристик. Так как для каждого типа канонических уравнений разработаны определенные методы как аналитического, так и численного решения, то задача приведения уравнения (1) к каноническому виду представляет практический интерес.

§2. Основные типы уравнений математической физики.

Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными. Наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения 2-го порядка. Пусть нам дано функция двух переменных

U=U(x,t).

Примеры:

1. Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

К исследованию этого уравнения приводит рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводе, колебаний газа и т.д. Эти уравнения являются простейшим уравнением гиперболического типа.

2. Уравнение теплопроводности, или уравнение Фурье:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2)$$

К исследованию этого уравнения приводит рассмотрение процессов распространения тепла, фильтрации жидкости и газ в пористой среде, некоторые вопросы теории вероятностей и т.д. Это уравнение является простейшим уравнением параболического типа.

3.Уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

К исследованию этого уравнения приводит, рассмотрение задач об электрических и магнитных полях, о стационарном тепловом состоянии, задач гидродинамики, диффузии и т.д. Это уравнение является простейшим уравнением эллиптического типа.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Решение.

Здесь

$a_{11}=x^2,\qquad a_{12}=0,\qquad a_{22}=-y^2,\qquad a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}=x^2y^2>0;$

следовательно, уравнение гиперболического типа. Составляем уравнение характеристик

$x^2dy^2-y^2dx^2=0,$ или $(xdy+ydx)(xdy-ydx)=0;$ получаем два дифференциальных уравнения: $xdy+ydx=0;$ и $xdy-ydx=0;$

после разделения переменных имеем $\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0$ и $\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0.$

Проинтегрируем уравнения: $\ln y+\ln x=\ln C_1$ и $\ln y-\ln x=\ln C_2$.

После потенцирования получаем $xy=C_1$ и $\frac{y}{x}=C_2$ - уравнения двух семейств характеристик. Вводим новые переменные

$$\xi=xy,\qquad \eta=\frac{y}{x}.$$

Выражаем частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=x\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial x}\left(y\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=y\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)-$$

$$\frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta}=y\left(y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)-$$

$$\frac{y}{x^2}\left(y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+$$

$$+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=$$

$$=x\cdot\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)+\frac{1}{x}\cdot\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=$$

$$=x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Значения вторых производных подставляем в данное дифференциальное уравнение:

$$x^2\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot y^2-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)-$$

$$y^2\cdot\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=0,$$

т.е. $\quad -4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+2\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$ или $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{1}{2}\frac{1}{xy}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{2\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0,$$

т.е. уравнение приведено к каноническому виду.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$\sin^2 x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y\sin x\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Решение.

Здесь $a_{11} = \sin^2 x, \qquad a_{12} = -y\sin x, \qquad a_{22} = y^2.$

Так как

$$a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} = y^2\cdot\sin^2 x - y^2\cdot\sin^2 x = 0,$$

то данное уравнение параболического типа.

Уравнение характеристик имеет вид

$$\sin^2 x\cdot dy^2 + 2y\cdot\sin x\cdot dxdy + y^2\cdot dx^2 = 0,$$

или

$$(\sin x\cdot dy + ydx)^2 = 0.$$

Разделяя в уравнении

$$\sin x\cdot dy + ydx = 0.$$

переменные, имеем

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\sin x} = 0.$$

После интегрирования получаем

$$\ln y + \ln \mathrm{tg}\frac{x}{2} = \ln C,$$

т.е.

$$y\cdot \mathrm{tg}\frac{x}{2} = C.$$

Сделаем замену переменных: $\xi = y\cdot \mathrm{tg}\frac{x}{2}, \qquad \eta = y$

(произвольная функция):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial \xi}=$$

$$=\frac{1}{4}y^2\sec^4\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=$$

$$=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial \xi}=$$

$$=\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}\right)+\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}$$

Значения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ подставляем в дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{4}y^2\sec^4\frac{x}{2}\sin^2 x\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sin^2 x\frac{\partial z}{\partial \xi}-$$

$$-y^2\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\sin x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}\right)-y\sec^2\frac{x}{2}\sin x\frac{\partial z}{\partial \xi}+$$

$$+y^2\cdot\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right)=0.$$

Можно легко показать, что члены, содержащие $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$, взаимно уничтожаются, и уравнение принимает вид

$$\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sin^2 x\frac{\partial z}{\partial\xi}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}-y\sec^2\frac{x}{2}\sin x\frac{\partial z}{\partial\xi}=0,$$

или

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\cdot\sin x,$$

но

$$\sin x=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\xi}{\eta},$$

т.е.

$$\sin x=\frac{2\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial\xi}.$$

Пример 3. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Решение.

Здесь $a_{11}=1,\qquad a_{12}=-1,\qquad a_{22}=2,\qquad {a_{12}}^2-a_{11}a_{22}=-1<0.$

Т.е. уравнение эллиптического типа. Уравнение характеристик $dy^2+2\cdot dxdy+2\cdot dx^2=0$, или $y'^2+2y'+2=0.$

Отсюда $y'=-1\pm i;$ получаем два семейства мнимых характеристик: $y+x-ix=C_1$ и $y+x+ix=C_2$.

Произведем замену переменных $\xi=y+x,\qquad \eta=x;$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial\eta};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\eta\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Подставив найденные значения частных производных в дифференциальное уравнение, получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}=0.$$

т.е.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=0.$$

Пример 4. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Ответ. $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=0, \qquad \xi=\frac{y}{x}, \qquad \eta=y.$

Пример 5. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}-3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}+6\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Ответ. $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{\partial z}{\partial \xi}=0, \qquad \xi=x+y, \qquad \eta=3x+y.$

Пример 6. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Ответ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0, \qquad \xi=y^2, \qquad \eta=x^2.$$

§3. Постановка основной задачи: задача Коши, граничные задачи, смешанные задачи.

При математическом описании физического процесса, надо, прежде всего, поставить задачу, т.е. сформулировать условия, достаточные для однозначного определения процесса. Дифференциальные уравнения с обыкновенными и, тем более, с частными производными имеют, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Поэтому в том случае, когда физическая задача приводится к уравнению с частными производными, для однозначной характеристики процесса, необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия.

В случае обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, решение может быть определено начальными условиями, т.е. заданием значения функции и ее первой производной при "начальном" значении аргумента (задача Коши).

Для уравнения с частными производными, возможны также различные формы дополнительных условий.

Рассмотрим сначала простейшую задачу о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах. В этой задаче u(x,t) дает отклонение струны от оси x. Если концы струны $0 \le x \le 1$ закреплены, то должны выполняться "граничные условия".

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \quad (1)$$

Так как процесс колебаний струны зависит от ее начальной формы и распределения скоростей, то следует задать "начальные условия":

$$\begin{cases} u(x,t_0) = \varphi(x) \\ u_t(x,t_0) = \psi(x) \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, дополнительные условия состоят из граничных и начальных условий, где φ(x) и ψ(x)- заданные функции точки. Эти условия вполне определяют решение уравнения колебаний струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (3)$$

Возможны и другие типы граничных условий.

Граничные условия (1) наложенными на значение функции u(x,y) называют условиями первого рода.

Граничные условия, наложенные на значение производной $u'_x(x,t)$:

$$\begin{cases} u'_x(0,t)=0 \\ u'_x(l,t)=0 \end{cases} \qquad (4)$$

называют условиями второго рода.

Граничные условия как на значение функции u(x,y), так и на значения производной $u'_x(x,t)$,

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\Big|_{x=0}=0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\Big|_{x=1}=0 \end{cases} \qquad (5)$$

называют условиями третьего рода.

Помимо этих условий, в дальнейшем мы будем говорить о трех основных типах граничных условий:

- граничное условие первого рода

$$u(0,t)=\mu(t) - \text{заданный режим,}$$

- граничное условие второго рода

$$u_x(0,t)=\nu(t) - \text{заданная сила,}$$

- граничное условие третьего рода

$$u_x(0,t)=h\left[u(0,t)-\theta(t)\right] - \text{упругое закрепление.}$$

Аналогично задаются граничные условия и на втором конце x=l. Если функции, задаваемые в правой части $(\mu(t), \nu(t),$ или $\theta(t))$, равны нулю, то граничные условия примут вид (1), (4) и (5), которые называются однородными.

Сформулируем первую краевую задачу для уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$:

Найти функцию u(x,y), определенную в области 0≤x≤l, t≥0, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t): \text{для } 0<x<l, t>0.$$

граничным $\begin{cases} u(0,t)=\mu_1(t), \\ u(l,t)=\mu_2(t) \end{cases} \qquad t>0$

и начальным условиям $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$ $\qquad 0 < x < l.$

Если на обоих концах берутся граничные условия второго или третьего рода, то соответствующие задачи называются второй или третьей краевыми задачами. Если граничные условия при x=0 и x=l имеют различные типы, то такие краевые задачи называют смешанными.

Если нас интересует явление в течение малого промежутка времени, когда влияние границ еще не существенно, то вместо полной задачи можно рассматривать предельную задачу с начальными условиями для неограниченной области:

- Найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \text{ для } -\infty < x < \infty, t > 0.$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}, \qquad \text{при } -\infty < x < \infty$$

Эту задачу часто называют задачей Коши.

§4. Корректность постановки задач математической физики.

Уравнения гиперболического и параболического типов возникают чаще всего при изучении процессов, протекающих во времени. Это были уравнения колебаний, распространение электрических волн, распространение тепла, диффузии. В одномерном случае всегда участвовала одна координата x и время t.

Поэтому канонические уравнения этих типов обычно записываются так

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + cu = g(x,t) \quad \text{(гиперболический тип)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = g(x,t) \quad \text{(параболический тип)}$$

Для задач, приводящих к таким уравнениям, дополнительные условия разделяются на начальные и краевые. Начальные условия, как мы видели, состоят из задания при $t=0$ значений искомой функции U и ее производной (в гиперболическом случае) или только значений самой функции (в параболическом случае). Краевые условия для этих задач заключаются в том, что указываются значения неизвестной функции $u(x,t)$ на концах интервала изменения координаты.

Если процесс протекает в бесконечном интервале изменения координаты x, то краевые условия отпадают, и получается задача только с начальными условиями, или, как ее часто называют, задача Коши.

Если ставится задача для конечного интервала, то должны быть заданы и начальные и краевые условия, тогда говорят о смешанной задаче.

Уравнения эллиптического типа возникают обычно при исследовании стационарных процессов. Время t в эти уравнения не входит и обе независимые переменные являются координатами точки.

Для задач такого типа ставятся только краевые условия, т.е. указывается поведение неизвестной функции на контуре области. Это может быть задача Дирихле, когда заданы значения самой функции задача Неймана, когда заданы значения нормальной производной искомой функции, и наконец, задача когда на контуре задана линейная комбинация функции и ее нормальной производной.

В задачах математической физики именно физические соображения подсказывали, какие дополнительные условия следует поставить в той или иной задаче, чтобы получить единственное ее решение, отвечающее характеру изучаемого процесса. Кроме того, следует иметь в виду того, что все уравнения отражают лишь наиболее существенные черты процесса. Функции, входящие в начальные и краевые условия, в физических задачах определяются из экспериментальных данных и могут считаться известными лишь приближенно. Таким образом, важно чтобы малые изменения данных задачи вызывали лишь малые изменения в ее решении во всей области, в которой эти решения рассматриваются. В этом случае говорят об устойчивости задачи относительно начальных и краевых условий. Все задачи, рассмотренные нами, принадлежат к типу задач, имеющих единственное решение, устойчивое относительно исходных данных.

§5. Метод распространяющихся волн для решения волнового уравнения уравнение колебаний струны. Формула Даламбера.

Изучение методов построения решений краевых задач для уравнений гиперболического типа мы начинаем с задачи с начальными условиями для неограниченной струны

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \qquad (1)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad (2)$$

Преобразуем это уравнение к каноническому виду, содержащему смешанную производную: $u_{xt} = 0$

Уравнение характеристик

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

распадается на два уравнения

$$dx - adt = 0, \qquad dx + adt = 0$$

интегралами, которых являются прямые

$$x - at = c_1, x + at = c_2$$

Вводя, как обычно, новые переменные

$$\xi = x + at, \eta = x - at$$

уравнение колебаний струны преобразуем к виду

$$u_{\xi\eta} = 0 \qquad (3)$$

Найдем общий интеграл последнего уравнения(3)

$$u_\eta(\xi,\eta) = f^*(\eta)$$

где $f^*(\eta)$ - некоторая функция только переменного η. Интегрируя это равенство по η при фиксированном ξ, получим:

$$u(\xi,\eta) = \int f^*(\eta)d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \qquad (4)$$

где f_1 и f_2 являются функциями только переменных ξ и η. Обратно, каковы бы ни были дважды дифференцируемые функции f_1 и

f_2, функция $u(\xi,\eta)$, определяемая формулой (4), представляет собой решение уравнения (3). Следовательно, функция

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) \qquad (5)$$

является общим интегралом уравнения (1). Допустим, что решение рассматриваемой задачи существует; тогда оно дается формулой (5). Определим функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \qquad (6)$$

$$u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) \qquad (7)$$

Интегрируя второе равенство, получим:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha + c,$$

где x_0 и C- постоянные. Из равенства

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha + c$$

находим

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha + \dfrac{c}{2} \\ f_2(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x) - \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha - \dfrac{c}{2} \end{cases} \qquad (8)$$

Таким образом, мы определи функции f_1 и f_2 через заданные функции φ и ψ, причем равенства (8) должны иметь место для любого значения аргумента. Подставляя в (5) найденные значения f_1 и f_2, получим:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\int_{x_0}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha - \int_{x_0}^{x-at}\varphi(\alpha)d\alpha\right)$$

или

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha \qquad (9)$$

Формулу (9), называемую формулой Даламбера, мы получили, предполагая существование решение поставленной задачи. Эта формула доказывает единственность решения.

Пример 7. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{если} \quad u\Big|_{t=0}=x^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=o}=0.$$

Решение.

Так как $a=1$ а $\psi(x)=0$, то $u=\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$,

где $\varphi(x)=x^2$.

Таким образом, $u=\dfrac{(x-t)^2+(x+t)^2}{2}$,

или окончательно $u=x^2+t^2$.

Пример 8. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{если} \quad u\Big|_{t=0}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=o}=x.$$

Решение.

Здесь

$$a=2, \varphi(x)=0, \psi(x)=x.$$

Отсюда

$$u=\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} z dz=\frac{1}{8}z^2\Big|_{x-2t}^{x+2t}=\frac{1}{8}\left[(x+2t)^2-(x-2t)^2\right],$$

т.е. $u=xt$.

Пример 9. Найти форму струны, определяемой уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

в момент $t=\frac{\pi}{2a}$, если $u\Big|_{t=0}=\sin x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=o}=1.$

Решение.

Имеем $$u=\frac{\sin(x+at)+\sin(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}dz,$$ т.е.

$u=\sin x\cdot\cos at+\frac{1}{2a}\cdot z\Big|_{x-at}^{x+at}$, или окончательно $u=\sin x\cdot\cos at+t.$

Если $t=\frac{\pi}{2a}$, то $u=\frac{\pi}{2a}$, т.е. струна параллельна оси абсцисс.

Пример 10. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если

$$u\Big|_{t=0}=x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=o}=-x.$$

Ответ. $u=x(1-t)$.

Пример 11. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если

$$u\Big|_{t=0}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=o}=\cos x.$$

Ответ. $u=\frac{\cos x\cdot\sin at}{a}$.

Пример 12. Найти форму струны, определяемой уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

в момент $t=\pi$, если $u\Big|_{t=0}=\sin x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=o}=\cos x.$

Ответ. $u=-\sin x$

§6. Метод разделения переменных для волнового уравнения.

Будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad (1)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0,t) = 0, u(\ell,t) = 0 \qquad (2)$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad (3)$$

Уравнение (1) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения. Имея достаточно большое число частных решений, можно попытаться при помощи суммирования их с некоторыми коэффициентами найти искомое решение. Поставим основную вспомогательную задачу:

Найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(\ell,t) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

и представимое в виде произведения

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \qquad (5)$$

где X(x)- функция только переменных x, T(t)- функция только переменных t.

Подставляя (5) в (1), получим

$$X''T = \frac{1}{a^2} T''X$$

или, после деления на $X \cdot T$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} \qquad (6)$$

Чтобы (5) было решением (1), равенства (6) должно удовлетворяться тождественно, т.е. для всех значений независимых переменных $0<x<\ell$, t>0. Правая часть (6) является функцией только от t, а левая- только x. Фиксируя, например, некоторые значения x и меняя t (или наоборот), получим, что правая и левая части равенства (6) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \qquad (7)$$

где λ- постоянная, которую для удобства последующих выкладок берем со знаком минус, ничего не предполагая при этом о ее знаке.

Из соотношения (7) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций X(x) и T(t):

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, X(x) \neq 0 \qquad (8)$$

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, T(t) \neq 0 \qquad (9)$$

Граничные условия (4) дают

$$u(0,t) = X(0)\cdot T(t) = 0$$

$$u(\ell,t) = X(\ell)\cdot T(t) = 0$$

Отсюда следует, что X(x) должно удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0) = X(\ell) = 0 \qquad (10)$$

так как иначе мы имели бы

$$T(t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad U(x,t) \equiv 0$$

в то время как задача состоит в нахождении нетривиального решения. Для функции T(t) в основной вспомогательной задаче никаких дополнительных условий нет. Таким образом, в связи с нахождением функции X(x) мы приходим к простейшей задаче о собственных значениях:

найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения - собственными функциями задачи (11).

Сформулированную таким образом задачу часто называют задачей Штурма - Лиувилля.

Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр λ отрицателен, равен нулю или положителен.

1. При $\lambda<0$ задача не имеет нетривиальных решений. Действительно, общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$X(l) = c_1 e^{\alpha} + c_2 e^{-\alpha} = 0, (\alpha = \ell\sqrt{-\lambda})$$

$$c_1 = -c_2 \quad \text{и} \quad c_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0.$$

Но в рассматриваемом случае α- действительно и положительно, так что $e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$. Поэтому

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = 0$$

и, следовательно $X(x) \equiv 0$.

2. При $\lambda=0$ также не существует нетривиальных решений. Действительно, в этом случае общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X(x) = c_1 x + c_2$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = [c_1 x + c_2]_{x=0} = c_2 = 0$$

$$X(\ell) = c_1 \cdot \ell = 0$$

т.е. $c_1 = 0, c_2 = 0$ и, следовательно, X(x)=0

3. При $\lambda>0$ общее решение уравнения может быть записано в виде

$$X(x) = D_1 \cos\sqrt{\lambda}x + D_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = D_1 = 0$$

$$X(\ell) = D_2 \sin\sqrt{\lambda}\ell = 0$$

Если X(x) не равно тождественно нулю, то $D_2 \neq 0$, поэтому

$$\sin\sqrt{\lambda}\ell = 0 \text{ или } \sqrt{\lambda}\ell = \frac{\pi n}{\ell}; \qquad (12)$$

где n- любое целое число.

Следовательно, нетривиальные решения задачи (11) возможны лишь при

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = D_n \sin\frac{\pi n}{\ell} x,$$

где D_n произвольная постоянная. Итак, только при значениях λ, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \qquad (13)$$

существуют нетривиальные решения задачи (11)

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{\ell} x \qquad (14)$$

определяемые с точностью до произвольного множителя, который мы положили равным единице. Этим же значениям λ_n соответствуют решения уравнения (9)

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n}{\ell} at + B_n \sin\frac{\pi n}{\ell} at$$

где A_n и B_n - произвольные постоянные.

Возвращаясь к задаче (1)-(3), заключаем что функции

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= x_n(x)\cdot T_n(t) = \\ &= (A_n \cos\frac{\pi n}{\ell} at + B_n \sin\frac{\pi n}{\ell} at)\sin\frac{\pi n}{\ell} x \end{aligned} \qquad (16)$$

являются частными решениями уравнения (1) удовлетворяющие граничным условиям (4) и представимыми в виде произведения (5) двух функций, одна из которых зависит только от x, другая- от t.

Эти решения могут удовлетворить начальным условиям (3) нашей исходной задачи только для частных случаев начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Обратимся к решению задачи (1)-(3) в общем случае.

В силу линейности и однородности уравнения (1) сумма частных решений

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi n}{\ell}at+B_n\sin\frac{\pi n}{\ell}at\right)\cdot\sin\frac{\pi n}{\ell}x \qquad (17)$$

также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (2). Начальные условия позволяют определить A_n и B_n. Потребуем, чтобы функция (17) удовлетворяла условиям (3)

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi n}{\ell}x \\ u_t(x,0)=\psi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{\ell}aB_n\sin\frac{\pi n}{\ell}x \end{cases} \qquad (18)$$

Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция f(x), заданная в промежутке $0\le x\le \ell$, разлагается в ряд Фурье

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi n}{\ell}x \qquad (19)$$

где $$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(\xi)\sin\frac{\pi n}{\ell}\xi d\xi \qquad (20)$$

Если функции φ(x) и ψ(x) удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье, то

$$\begin{cases} \varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\pi n}{\ell}x \\ \varphi_n=\frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{\ell}\xi d\xi \end{cases} \qquad (21)$$

$$
\begin{cases}
\psi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_n \sin\frac{\pi n}{\ell}x \\
\psi_n=\frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{\ell}\xi d\xi
\end{cases} \qquad (22)
$$

Сравнение этих рядов с формулами (18) показывает, что для выполнения начальных условий надо положить

$$
A_n=\varphi_n, \qquad B_n=\frac{1}{\pi na}\psi_n \qquad (23)
$$

чем полностью определяется функция (17), дающая решение исследуемой задачи.

Мы оперидили решение в виде бесконечного ряда (17). Если ряд (17) расходится или функция, определяемая этим рядом, не является дифференцируем, то он, конечно, не может представлять решение нашего дифференциального уравнения.

Пример 13. Струна, закрепленная на концах $x=0, x=\ell$, имеет в начальный момент форму параболы $u=\frac{4h}{\ell^2}\cdot x(\ell-x)$. Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют (рис.1).

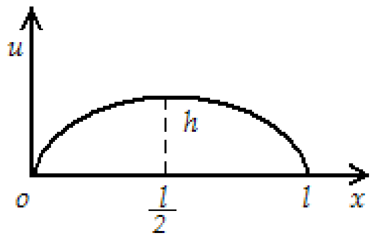

рис.1

Решение.

Здесь $\varphi(x)=\frac{4h}{\ell^2}\cdot x(\ell-x), \psi(x)=0.$

Находим коэффициенты ряда, определяющего решение уравнения колебания струны:

$$a_к = \frac{2}{\ell}\cdot\int_0^\ell \varphi(x)\cdot\sin\frac{к\pi x}{\ell}dx = \frac{8h}{\ell^3}\cdot\int_0^\ell(\ell x - x^2)\cdot\sin\frac{к\pi x}{\ell}dx, \qquad b_к = 0.$$

Для нахождения a_k применяем интегрирование по частям:

$$u_1 = \ell x - x^2,\ d\upsilon_1 = \sin\frac{k\pi x}{\ell}dx,\ du_1 = (\ell - 2x)dx,$$

$$\upsilon_1 = -\frac{\ell}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell};$$

$$a_k = -\frac{8h}{\ell^3}(\ell x - x^2)\cdot\frac{\ell}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}\Bigg|_0^\ell + \frac{8h}{k\pi\ell^2}\cdot\int_0^\ell(\ell - 2x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx,$$

$$\text{т.е. } a_k = \frac{8h}{k\pi\ell^2}\cdot\int_0^\ell(\ell - 2x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx;\ u_2 = \ell - 2x,$$

$$d\upsilon_2 = \cos\frac{k\pi x}{\ell}dx,\ du_2 = -2dx,\ \upsilon_2 = \frac{\ell}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell};$$

$$a_k = -\frac{8h}{k^2\pi^2\ell}(\ell - 2x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\Bigg|_0^\ell + \frac{16h}{k^2\pi^2\ell}\cdot\int_0^\ell\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = ,$$

$$= -\frac{16h}{k^3\pi^3}\cdot(\cos k\pi - 1) = \frac{16h}{k^3\pi^3}\cdot[1-(-1)^k]$$

Так как

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty\left(a_k\cdot\cos\frac{k\pi at}{\ell} + b_k\cdot\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell},$$

то

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty\frac{16h}{k^3\pi^3}\cdot[1-(-1)^k]\cdot\cos\frac{k\pi at}{\ell}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}.$$

Но при k=2n $1-(-1)^k=0$, а при k=2n+1 $1-(-1)^k=2$, поэтому находим окончательно:

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\cdot\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi at}{\ell}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\ell}.$$

Пример 14. Дана струна, закрепленная на концах $x=0, x=\ell$. Пусть в начальный момент форма струны имеет вид ломанной ОАВ, изображенной на рис.2. Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости отсутствуют.

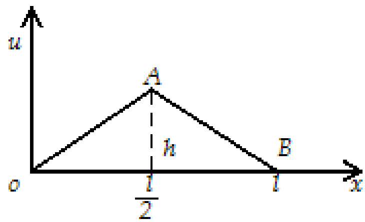

рис.2

Решение.

Угловой коэффициент прямой ОА равен $\dfrac{h}{\ell/2}=\dfrac{2h}{\ell}$. Следовательно, уравнение этой прямой $u=\dfrac{2h}{\ell}\cdot x$. Прямая АВ отсекает на осях координат отрезки ℓ и $2h$, поэтому уравнение этой прямой $\dfrac{x}{\ell}+\dfrac{u}{2h}=1$, или $u=\dfrac{2h}{\ell}(\ell-x)$. Итак

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2h}{\ell}x, \text{если } 0\le x\le\dfrac{\ell}{2};\\ \dfrac{2h}{\ell}(\ell-x), \text{если } \dfrac{\ell}{2}\le x\le\ell\end{cases}, \qquad \psi(x)=0.$$

Находим

$$a_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx=$$

$$=\frac{4h}{\ell^2}\cdot\int_0^{\frac{\ell}{2}}x\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx+\frac{4h}{\ell^2}\cdot\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}(\ell-x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx, b_k=0$$

Интегрируя по частям, получаем

$$a_k = -\frac{4h}{k\pi\ell}\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}\Big|_0^{\frac{\ell}{2}} - \frac{4h}{k\pi l}\cdot\int_0^{\frac{\ell}{2}}\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx - \frac{4h}{k\pi\ell}(\ell - x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}\Big|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} -$$

$$\frac{4h}{k\pi\ell}\cdot\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx = -\frac{2h}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\cdot\Big|_0^{\frac{\ell}{2}} + \frac{2h}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi}{2} -$$

$$-\frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\Big|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} = \frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2} + \frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{8h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}$$

Следовательно, $u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\cdot\cos\frac{k\pi at}{\ell}$.

Выпишем несколько членов ряда:

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}(\sin\frac{\pi x}{\ell}\cdot\cos\frac{\pi at}{\ell} - \frac{1}{3^2}\cdot\sin\frac{3\pi x}{\ell}\cdot\cos\frac{3\pi at}{\ell} +$$
$$+\frac{1}{5^2}\cdot\sin\frac{5\pi x}{\ell}\cdot\cos\frac{5\pi at}{\ell} - \frac{1}{7^2}\cdot\sin\frac{7\pi x}{\ell}\cdot\cos\frac{7\pi at}{\ell} + \ldots).$$

Пример 15. Пусть начальные отклонения струны, закрепленной в точках $x = 0, x = \ell$, равны нулю, а начальная скорость выражается формулой

$$\frac{du}{dt} = \begin{cases} \upsilon_0(\text{const}), \text{если } \left|x - \frac{\ell}{2}\right| < \frac{h}{2}; \\ 0, \qquad\qquad \text{если } \left|x - \frac{\ell}{2}\right| > \frac{h}{2} \end{cases}$$

Определить форму струны для любого момента времени t.

Решение.

Здесь $\varphi(x) = 0$, а $\psi(x) = \upsilon_0$ в интервале $\left(\frac{\ell - h}{2}, \frac{\ell + h}{2}\right)$ и $\psi(x) = 0$ вне этого интервала. Следовательно, $a_k = 0$;

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\cdot\int\limits_{\frac{1}{2}(\ell-n)}^{\frac{1}{2}(\ell+n)} \upsilon_0\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx = -\frac{2\upsilon_0}{k\pi a}\cdot\frac{\ell}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}\Bigg|_{\frac{1}{2}(\ell-n)}^{\frac{1}{2}(\ell+n)} =$$

$$= \frac{2\upsilon_0\ell}{k^2\pi^2 a}\cdot\left[\cos\frac{k\pi(\ell-h)}{2\ell}-\cos\frac{k\pi(\ell+h)}{2\ell}\right] = \frac{4\upsilon_0\ell}{k^2\pi^2 a}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\cdot\sin\frac{k\pi h}{2\ell}$$

Отсюда $\quad u(x,t) = \frac{4\upsilon_0\ell}{\pi^2 a}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\cdot\sin\frac{k\pi h}{2\ell}\cdot\sin\frac{k\pi at}{\ell}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}$,

или

$$u(x,t) = \frac{4\upsilon_0\ell}{\pi^2 a}\cdot(\sin\frac{\pi h}{2\ell}\cdot\sin\frac{\pi at}{\ell}\cdot\sin\frac{\pi x}{\ell} -$$

$$-\frac{1}{3^2}\cdot\sin\frac{3\pi h}{2\ell}\cdot\sin\frac{3\pi at}{\ell}\cdot\sin\frac{3\pi x}{\ell} +$$

$$+\frac{1}{5^2}\cdot\sin\frac{5\pi h}{2\ell}\cdot\sin\frac{5\pi at}{\ell}\cdot\sin\frac{5\pi x}{\ell} - ...)$$

Пример 16. Струна закреплена на концах $x=0$ и $x=3$. В начальный момент форма струны имеет вид ломанной OAB, изображенной на рис.3: O(0;0), A(2;-0,1), B(3;0). Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости точки отсутствуют.

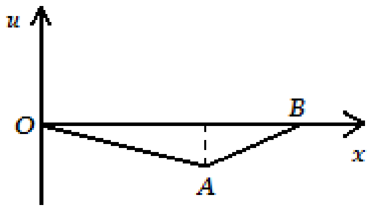

рис.3

Ответ. $u(x,t) = -\frac{0{,}9}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sin\frac{2\pi k}{3}\cdot\sin\frac{k\pi x}{3}\cdot\cos\frac{k\pi at}{3}$.

Пример 17. Струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=1$, в начальный момент имеет форму $u = h(x^4 - 2x^3 + x)$. Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости отсутствуют.

Ответ. $u = \frac{96 \cdot h}{\pi^5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^5} \cdot \cos(2k+1) \cdot \pi \cdot a \cdot t \cdot \sin(2k+1) \cdot \pi \cdot x.$

Пример 18. Струна закреплена в точках $x = 0$ и $x = l$. Начальные отклонения точек струны равны нулю, а начальная скорость выражается формулой

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = \begin{cases} \cos \frac{\pi(x - \frac{\ell}{2})}{h}, \text{если} \left|x - \frac{\ell}{2}\right| < \frac{h}{2}; \\ 0, \qquad\qquad , \text{если} \left|x - \frac{\ell}{2}\right| > \frac{h}{2}, \end{cases}.$$

Найти форму струны для любого момента времени t.

Ответ.

$$u(x,t) = \frac{4h\ell^2}{\pi^2 a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi k}{2} \cdot \cos \frac{k\pi h}{\ell}}{\ell^2 - k^2 h^2} \cdot \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cdot \sin \frac{k\pi a t}{\ell}$$

§8. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности на отрезке.

Будем искать решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < \ell, \qquad 0 < t \le T \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le \ell \qquad (2)$$

и однородным граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \qquad u(\ell,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T \qquad (3)$$

Для решения этой задачи рассмотрим, как принято в методе разделения переменных, сначала основную вспомогательную задачу:

- Найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \qquad u(\ell,t) = 0 \qquad (3)$$

и представимое в виде

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \qquad (4)$$

где X(x)- функция от x, T(t)- функция только от t. Подставляя (4) в уравнение (1) и производя деление обоих частей равенства на $a^2 X \cdot T$ получим:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \qquad (5)$$

где λ=const, так как левая часть равенства зависит только от t, а правая только от x. Отсюда следует, что

$$X'' + \lambda \cdot X = 0 \qquad (6)$$

$$T' + a^2\lambda \cdot T = 0 \qquad (7)$$

Граничные условия (3) дают

$$X(0) = 0, X(\ell) = 0 \qquad (8)$$

Таким образом, для определения функции X(x) мы получили задачу о собственных значениях (задачу Штурма-Лиувилля).

$$X'' + \lambda \cdot X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(\ell) = 0 \qquad (9)$$

исследованную при решении уравнения колебаний. При этом было показано, что только для значений параметра λ, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2, \qquad n = 1,2,... \qquad (10)$$

существуют нетривиальные решения уравнения (6), равные:

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{\ell}x \qquad (11)$$

Этим значениям λ_n соответствуют решения уравнения (7)

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{\ell}x \qquad (12)$$

где C_n -не определенные пока коэффициенты. Возвращаясь к основной вспомогательной задаче, видим, что функции

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{\ell}x \qquad (13)$$

являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими нулевым граничным условиям.

Обратимся теперь к решению задачи (1)-(3). Составим формально ряд

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{\ell} x \qquad (14)$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий, получим:

$$\varphi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{\ell} x \qquad (15)$$

т.е. C_n являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ при разложении ее в ряд по синусам на интервале $(0,\ell)$:

$$C_n=\varphi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{\ell}\xi d\xi \qquad (16)$$

Теперь сформулируем условия для функции $\varphi(x)$ таких при которых ряд в (14) удовлетворял всем условиям задачи (1) - (3).

Если функция $\varphi(x)$- непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0)=0$ и $\varphi(\ell)=0$, то ряд (14) определяет непрерывную функцию при $t\geq 0$.

Пример 19. Решить уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если начальное распределение температуры стержня определяется равенством

$$u(x,t)\big|_{t=o}=f(x)=\begin{cases} u_0, & x_1<x<x_2; \\ 0, & x<x_1, \quad \text{или} \quad x>x_2 \end{cases}.$$

Решение. Имеет бесконечный стержень, а поэтому решение запишется в виде интеграла Пуассона:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int(\xi)\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Поскольку $f(x)$ в интервале (x_1, x_2) равна постоянной температуре u_0, а вне интервала температура равна нулю, то решение примет вид

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

Полученный результат можно преобразовать к так называемому интегралу вероятностей: $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\mu^2} d\mu.$

Действительно, полагая

$$\frac{x - \xi}{2a\sqrt{t}} = \mu, \qquad d\xi = -2a\sqrt{t} \cdot d\mu$$

получим.

$$u(x,t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{x - x_1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x - x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{x - x_1}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{x - x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu.$$

Таким образом, решение выразится формулой

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2} \cdot [\Phi(\frac{x - x_1}{2a\sqrt{t}}) - \Phi(\frac{x - x_2}{2a\sqrt{t}})].$$

Графиком функции $\Phi(z)$ является кривая, изображенная на рис.4

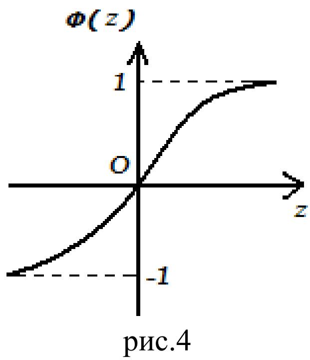

рис.4

Пример 20. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $u\big|_{t=0} = f(x) = u_0$

и краевому условию $u\big|_{x=0} = 0$.

Решение.

Здесь мы имеем дифференциальное уравнение теплопроводности для полубесконечного стержня. Решение, удовлетворяющее данным условиям, имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^{\infty} u_0 \cdot [e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4t}}]d\xi,$$

или

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^{\infty} [e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4t}}]d\xi.$$

а) Полагая $\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}} = \mu, d\xi = -2\sqrt{t} \cdot d\mu$,

преобразуем первый интеграл, пользуясь интегралом вероятностей,

т. е. $\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} d\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{u_0}{2} \cdot [1 + \Phi(\frac{x}{2\sqrt{t}})]$.

в)Полагая

$$\frac{x+\xi}{2\sqrt{t}} = \mu, d\xi = 2\sqrt{t} \cdot d\mu,$$

получим

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4t}} d\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{u_0}{2} \cdot [1 - \Phi(\frac{x}{2\sqrt{t}})].$$

Таким образом, решение принимает вид $u(x,t) = u_0 \cdot \Phi(\frac{x}{2\sqrt{t}})$.

Пример 21. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $(0<x<\ell), t>0$,удовлетворяющее начальным условиям:

$$u\Big|_{t=0}=f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } 0<x\le\frac{\ell}{2}; \\ \ell-x, & \text{если } \frac{\ell}{2}\le x<\ell. \end{cases}$$

и краевым условиям: $u\big|_{x=0}=u\big|_{x=\ell}\equiv 0$. Решение задачи Коши, удовлетворяющее указанным краевым условиям, будет искать в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\cdot e^{-(\frac{k\pi}{\ell})^2\cdot t}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell},$$ где

$$b_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\frac{\ell}{2}} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\frac{\ell}{2}} x\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx+\frac{2}{\ell}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}(\ell-x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx.$$ Проинтегрируем по частям, положив

$u=x, d\upsilon=\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx, du=dx, \upsilon=-\frac{1}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}$; получим

$$b_k=\frac{2}{\ell}\left(-\frac{\ell x}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}+\frac{\ell^2}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\Bigg|_0^{\frac{\ell}{2}}+$$

$$+\frac{2}{\ell}\left(-\frac{\ell^2}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}+\frac{\ell x}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}-\frac{\ell^2}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\Bigg|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}=$$

$$=\frac{4\ell}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$u(x,t)=\frac{4\ell}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\cdot e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{\ell^2}}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell},$$

или

$$u(x,t)=\frac{4\ell}{\pi^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 t}{\ell^2}}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\ell}.$$

Пример 22. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x,t)\Big|_{t=0}=f(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{\ell}, \text{если } 0\le x\le \ell\\ 1+\frac{x}{\ell}, \text{если } -\ell\le x\le 0;\\ 0 \quad ,\text{если } x\ge \ell \text{ и } x\le -\ell.\end{cases}$$

У к а з а н и е. Решение выразится формулой

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-\ell}^{0}(1+\frac{\xi}{\ell})\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{0}^{\ell}(1-\frac{\xi}{\ell})\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$$

Заменой $\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}}=\mu$ упростить ответ.

Ответ.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[(1+\frac{x}{\ell})\Phi(\frac{x+l}{2\sqrt{t}})-2\cdot\frac{x}{\ell}\cdot\Phi(\frac{x}{2\sqrt{t}})-(1-\frac{x}{\ell})\Phi(\frac{x-l}{2\sqrt{t}})]+$$

$$+\frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\cdot[e^{-\frac{(x+l)^2}{4t}}-2e^{-\frac{x^2}{4t}}+e^{-\frac{(x-l)^2}{4t}}].$$

Пример 23. Найти решение уравнения теплопроводности, если левый конец $x=0$ полубесконечного стержня теплоизолирован, а начальное распределение температуры

$$u\Big|_{t=0}=f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0;\\ u_0, \text{если } 0<x<\ell;\\ 0 \ ,\text{если } \ell<x.\end{cases}$$

Ответ.

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\cdot[\Phi(\frac{x+\ell}{2a\sqrt{t}})-\Phi(\frac{x-\ell}{2a\sqrt{t}})].$$

Пример 24. Дан тонкий однородный стержень длиной ℓ, изолированный от внешнего пространства, начальная температура которого равна $f(x)=\frac{cx(\ell-x)}{\ell^2}$. Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t>0$.

У к а з а н и е. Закон распределения температуры стержня описывается уравнением $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, начальным условием $u\big|_{t=0}=f(x)\frac{cx(\ell-x)}{\ell^2}$ и краевыми условиями $u\big|_{x=0}=u\big|_{x=\ell}=0$.

Ответ.

$$u(x,t)=\frac{8c}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{\ell^2}}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\ell}.$$

§8. Уравнения эллиптического типа. Постановка краевых задач.

Наиболее распространенным уравнением этого типа является уравнение Лапласа:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y}=0 \quad (1)$$

Функция u(x,y) называется гармонической в области T, если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до второго порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Уравнение (1) стационарно по времени t, поэтому параметр t не участвует. При наличии источников тепла получаем уравнение

$$\Delta u=-f, \qquad f=\frac{F}{K} \quad (2)$$

где F- плотность тепловых источников, а К- коэффициент теплопроводности. Неоднородное уравнение Лапласа (2) часто называют уравнением Пуассона.

Рассмотрим некоторую область Т, ограниченную границей Σ. Задача о стационарном распределении температуры u(x,y) внутри области Т формулируется следующим образом:

- найти функцию u(x,y), удовлетворяющую внутри Т уравнению

$$\Delta u = -f(x, y) \quad (2)$$

и граничному условию, которое может быть взято в одном из следующих видов:

$$\text{I. } u = f_1 \text{ на} \sum \quad \text{(1-ая краевая задача)}$$

$$\text{II. } \frac{\partial u}{\partial n} = f_2 \text{ на} \sum \quad \text{(2-ая краевая задача)}$$

$$\text{III. } \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0 \text{ на} \sum \quad \text{(3-ая краевая задача)}$$

где f_1, f_2, f_3, h -заданные функции, $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по внешней нормали к границе $\sum$.

Первую краевую задачу для уравнения Лапласа часто называют задачей Дирихле, а вторую задачу - задачей Неймана.

Если ищется решение в области T_0, внутренней (или внешней) по отношению к границе $\sum$, то соответствующую задачу называют внутренней (или внешней) краевой задачей.

§9. Двумерное уравнение Лапласа и задача Дирихле для круга. Метод разделения переменных.

В этом пункте мы решим методом разделения переменных задачу Дирихле для круга т.е. когда область Т есть круг. Радиус круга обозначим через r, центр поместим в начало координат. Очевидно, что целесообразно решать задачу в полярных координатах. Тогда задача формулируется так:

ищется решение u=u(r,φ) уравнения Лапласа

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial \varphi})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \quad (1)$$

для r<R, принимающее на границе круга, т.е. при r=R, заданные значения

$$u\big|_{r=R}=\tilde{u}(\varphi) \quad (2)$$

Метод разделения переменных заключается в том, что мы сначала ищем решения уравнения (1) в виде u=U(r)Φ(φ), где неизвестные функции U(r) и Φ(φ) зависят только от r и φ соответственно. Тогда для этих неизвестных функций из уравнения (1) находим:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dU}{dr})\Phi=-\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}U$$

$$\text{или}\ \frac{r}{u}\frac{d}{dr}(r\frac{dU}{dr})=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0 \quad (3)$$

Так как левая часть (3) не зависит от φ, а правая от r, то ни левая, ни правая части этого равенства не могут зависеть ни от φ, ни от r, т.е. являются постоянными:

$$\frac{r}{\Phi}\frac{d}{dr}(r\frac{dU}{dr})=\lambda, \qquad \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-\lambda \quad (4)$$

где λ-постоянная разделения.

Постоянная λ, как мы сейчас увидим, должна быть неотрицательной.

Второе из уравнений (4), $\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-\lambda\Phi$, имеет общее решение

$$\Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi \quad (5)$$

где A и B - произвольные постоянные.

Покажем, теперь что λ не может принимать любые значения. Это вытекает из того, что увеличение λ на 2π возвращает точку (r,φ) в исходное положение; а значит, все функции от φ, которые мы рассматриваем, должны быть периодическими по φ с периодом 2π. Таким образом, и Φ(φ+2π)=Φ(φ), а это по формуле (5) означает, что $\sqrt{\lambda}$ должен равняться целому числу n=0,1,2,... Отрицательные n мы можем отбросить, так как знак n влияет только на знак произвольной постоянной B. Итак $\lambda = n^2$ (собственные числа) и

$$\Phi(\varphi) = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi \qquad (6)$$

Вернемся теперь к первому уравнению (4), в котором заменим λ на n^2

$$\frac{r}{u}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = n^2$$

откуда

$$r^2\frac{d^2U}{dr^2} + r\frac{dU}{dr} - n^2U = 0$$

Это уравнение для функции U(r) может быть решено подстановкой $U = r^\alpha$, причем для показателя α легко получаем уравнение

$$\alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2r^\alpha = 0$$

или $\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0$

$$\alpha^2 = n^2, \Rightarrow \alpha = \pm n$$

Следовательно,

$$U(r) = r^n, \text{ либо } \quad U(r) = r^{-n}$$

Второе из этих решений мы должны отбросить, так как при n>0 оно обращается в бесконечность в центре круга r=0.

Окончательно

$$u_n(r,\varphi) = r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)$$

Полученное частное решение уравнения Лапласа (1) которое мы искали в виде u=U(r)Φ(φ), обозначено через u_n, так как оно зависит от n; произвольные постоянные A_n и B_n тоже зависят от n.

В силу линейности и однородности уравнения Лапласа сумма частных решений

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) \qquad (7)$$

будет также решением уравнения Лапласа, это уравнение содержит две бесконечные последовательности неопределенных коэффициентов A_n и B_n.

Что бы придать решению (7) вид, напоминающий ряд Фурье, положим

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, A_n = a_n, B_n = b_n, (n = 1,2,.....)$$

Тогда u(r,φ) может быть записано в виде

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \qquad (8)$$

Неопределенные коэффициенты a_0, a_n, b_n мы определим из граничного условия (2), в котором заданная функция $\tilde{u}(\varphi)$ также должна быть периодической с периодом 2π. Полагая в решении (8) r=R, получим граничное условие в виде соотношения

$$\tilde{u}(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (R^n a_n \cos n\varphi + R^n b_n \sin n\varphi)$$

которое представляет собой разложение $\tilde{u}(\varphi)$ в ряд Фурье. По известным формулам для коэффициентов Фурье мы можем теперь установить, что

$$R^n a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\psi) \cos n\psi d\psi$$

и

$$R^n b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\psi) \sin n\psi d\psi$$

т.е.

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\psi) \cos n\psi d\psi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\psi) \sin n\psi d\psi \qquad (9)$$

Чтобы получить решение задачи Дирихле для круга, остается только подставить формулы для коэффициентов (9) в выражение (8).

§10. Разделение переменных в трехмерном уравнении Лапласа в сферических координатах.

Применим теперь метод разделения переменного к трехмерному уравнению Лапласа в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

Мы рассмотрим здесь наиболее простой и важный случай , когда u не зависит от φ: u=u(r,θ). Это- так называемый осе симметричный случай, в котором u постоянно на каждом круге широты: r=const,θ=const,0≤φ≤π.

Тогда уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})=0 \qquad (1)$$

Посмотрим, каковы могут быть решения этого уравнения вида

$$u=U(r)\Phi(\theta) \qquad (2)$$

ограниченные в шаре радиуса R с центром в начале координат. Подставляя (2) в (1) находим

$$\frac{1}{U}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dU}{dr})=-\frac{1}{\Phi\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Phi}{d\theta}) \qquad (3)$$

По стандартному для метода разделения переменных рассуждению, обе части (3) должны быть постоянными

а) $\frac{1}{U}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dU}{dr})=\lambda$

б) $\frac{1}{\Phi\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Phi}{d\theta})=-\lambda \qquad (4)$

где λ-const, которую опять будем считать неотрицательной.

Для удобства вычислений положим

$$\lambda=\nu(\nu+1),$$

где ν=произвольная константа, тогда а) из равенства (4) получим:

$$r^2\frac{d^2U}{dr^2}+2r\frac{dU}{dr}-\nu(\nu+1)U=0$$

Полагая U=r получим

$$\alpha(\alpha-1)+2\alpha-\nu(\nu+1)=0 \Rightarrow \alpha(\alpha+1)=\nu(\nu+1)$$

Решение этого уравнения $\alpha=\nu, \alpha=-\nu-1$.

Считая $\nu\geq 0$, мы можем второй корень отбросить, поскольку функция $U(r)=r^{-\nu-1}$ обращается в ∞ при $r=0$. (напомним, что наша цель - найти ограниченные решения).

Таким образом, остается решение

$$U(r)=r^{\nu}$$

Вернемся теперь к б) из равенства (4) получим:

$$\frac{1}{\Phi\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Phi}{d\theta})=-\nu(\nu+1)$$

так как $0\leq\theta\leq\pi$, то мы должны искать решения уравнения (5) ограниченные для всех таких θ .

В (5) положим вместо переменной θ новую независимую переменную

$$x=\cos\theta \tag{6}$$

$$0<\theta<\pi \Rightarrow -1\leq x\leq 1$$

В силу подстановки (6)

$$\frac{d\Phi}{d\theta}=\frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\frac{d\Phi}{dx},$$

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Phi}{d\theta})=\sin\theta\frac{d}{dx}(\sin^2\theta\frac{d\Phi}{dx)},$$

и уравнение (5) должно быть записано в форме

$$\frac{d}{dx}(\sin^2\theta\frac{d\Phi}{dx})=-\nu(\nu+1)\Phi$$

$$\text{или} \quad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Phi}{dx}\right]+\nu(\nu+1)\Phi=0$$

Если мы кроме того, обозначим зависимую переменную Φ как функцию от $x=\cos\theta$ через y

$$\Phi(\theta)=\Phi(\arccos x)=y(x)$$

то получим для определения искомой функции y уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$

называемое уравнением Лежандра. Решения этого уравнения играют важную роль во многих прикладных вопросах. Точки $x=\pm1$ являются особыми для дифференциального уравнения (7), и поэтому не все решения уравнения Лежандра будут ограничены на отрезке $-1\le x\le 1$. Можно показать, что уравнение Лежандра имеет ограниченные решения только в том случае когда $\nu=n=$ целому числу ($n\ge 0$). Для таких ν ограниченными решениями уравнения Лежандра (7) являются некоторые многочлены, называемые многочленами Лежандра. Эти многочлены имеют довольно простое замкнутое выражение

$$y=P_n(x)=\frac{1}{2^2 n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \qquad (8)$$

Таким образом, мы установили, что в качестве $\Phi(\theta)$ следует взять $P_n(x)=P_n(\cos\theta)$ и что, следовательно, ограниченными решениями вида $U(r)\Phi(\theta)$ уравнения Лапласа (1) будут функции

$$u_n(r,\theta)=U_n(r)\Phi_n(\theta)=r^n P_n(\cos\theta) \qquad (9)$$

Таким образом, мы установили, что для n=0,1,2,.... решениями уравнения (1) являются функции (9): $r^n P_n(\cos\theta)$.

Ввиду линейности и однородности уравнения Лапласа его решением будет также функция

$$u(r,0)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n r^n P_n(\cos\theta) \qquad (10)$$

где c_n – произвольные постоянные коэффициенты, которые мы определим так чтобы функция (10) удовлетворяло граничному условию

$$u(r,0)\big|_{r=R}=\tilde{u}(\theta) \qquad (11)$$

Для этого надо потребовать, чтобы по θ, $0\le\theta\le\pi$, тождественно имело место соотношение

$$\tilde{u}(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n R^n P_n(\cos\theta)$$

В предположении, что тождество (12) имеет место мы можем эти коэффициенты найти, воспользовавшись свойством ортогональности многочленов Лежандра (многочлены Лежандра ортогональные на интервале (-1,1), т.е. для $n \neq m$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

Умножим тождества (12) на $P_m(\cos\theta)$, где $m \geq 0$-некоторое фиксированное целое число, и проинтегрируем его по граничной сфере радиуса R

$$\oiint \tilde{u}(\theta)P_m(\cos\theta)d\delta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n \oiint P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)d\delta \quad (13)$$

Элемент площади поверхности сферы $d\delta = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ и интегрирование по сфере означает интегрирование по θ в пределах от 0 до π и по φ в пределах от 0 до 2π.

Поэтому

$$\oiint P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)d\delta = 2\pi R^2 \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2\pi R^2 \dfrac{2}{2m+1}, & n = m \end{cases}$$

(так как $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \dfrac{2}{2n+1}, n = 0,1,2,.....$)

Таким образом, в правой части равенства (13) все члены суммы равны нулю, кроме одного, это член при n=m. Следовательно, правая часть равенства (13) равна

$$C_m R^m \frac{4\pi R^2}{2m+1}$$

откуда следует; что

$$C_m \frac{1}{R^m}(2m+1)\frac{1}{4\pi R^2}\oiint \tilde{u}(\theta)P_m(\cos\theta)d\delta \quad (14)$$

Заменяя m на n и подставляя (14) в (10) мы получим окончательное решение задачи Дирихле для шара радиуса R.

Пример 25. Найти стационарное распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня

$$u\big|_{x=0} = u_0, u\big|_{x=\ell} = u_\ell .$$

Решение. Задача Дирихле для одномерного случая состоит в нахождении из уравнения Лапласа $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ функции u, удовлетворяющей краевым условиям $u\big|_{x=0} = u_0, u\big|_{x=\ell} = u_\ell$. Общее решение указанного уравнения есть $u = Ax + B$, а учитывая краевые условия, получим

$$u = \frac{u_\ell - u_0}{\ell} x + u_0 ,$$

т.е. стационарное распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью линейно.

Пример 26.Найти стационарное распределение тепла в пространстве между двумя цилиндрами с общей осью OZпри условии, что на поверхностях цилиндров поддерживается постоянная температура.

У к а з а н и е. Перейти к цилиндрическим координатам, считая, что u не зависит от θ и z.

Ответ:

$$. \ u = u_a + (u_b - u_a) \cdot \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}} .$$

Пример 27.

Найти стационарное распределение температуры на однородной тонкой круглой пластинке радиуса R, верхняя половина которой поддерживается при температуре 1 градусе, а нижняя – при температуре 0 градусе.

Решение:

Для $-\pi < \tau < 0$ $\quad f(\tau) = 0$ и для $0 < \tau < \pi$ $\quad f(\tau) = 1$.

Распределение температуры выражается интегралом:

$$u(r,\Theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\tau-\Theta)+r^2}d\tau$$

Пусть точка $(r;\Theta)$ расположена в верхнем полукруге, т.е. $0<\Theta<\pi$, тогда $\tau-\Theta$ изменяется от $-\Theta$ до $\pi-\Theta$, и этот интервал длины π не содержит точек $\pm\pi$. Поэтому введем подстановку:

$$\operatorname{tg}\frac{\tau-\Theta}{2}=t,\qquad \cos(\tau-\Theta)=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad d\tau=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Тогда получаем

$$u(r,\Theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}}^{\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}}\frac{R^2-r^2}{(R-r)^2-(R+r)^2\cdot t^2}dt=\frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\cdot t\right)\Bigg|_{-\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}}^{\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}}=$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\cdot\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right)\right\}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\frac{R+r}{R-r}\left(\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right)}{1-\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\Theta}$$

или

$$\operatorname{tg}(u\pi)=-\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\Theta}.$$

Так как правая часть отрицательна, то это означает, что u при $0<\Theta<\pi$ удовлетворяет неравенствам $\frac{1}{2}<u<1$. Для этого случая получаем решение

$$\operatorname{tg}(\pi-u\pi)=-\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\Theta},$$

или

$$u=1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\Theta}\quad(0<\Theta<\pi).$$

Если же точка расположена в нижнем полукруге $\pi < \Theta < 2\pi$, то интервал $(-\Theta, \pi - \Theta)$ изменения $\tau - \Theta$ содержит точку $-\pi$, но не содержит 0, и мы можем сделать подстановку:

$$\mathrm{ctg}\frac{\tau - \Theta}{2} = t, \cos(\tau - \Theta) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, d\tau = -\frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Тогда для этих значений Θ

$$u(r,\Theta) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\mathrm{ctg}\frac{\Theta}{2}}^{\mathrm{tg}\frac{\Theta}{2}} \frac{R^2 - r^2}{(R+r)^2 + (R-r)^2 \cdot t^2} dt = -\frac{1}{\pi}\left\{\mathrm{arctg}(\frac{R-r}{R+r} \cdot \mathrm{tg}\frac{\Theta}{2}) + \right.$$

$$\left. + \mathrm{arctg}(\frac{R-r}{R+r} \cdot \mathrm{ctg}\frac{\Theta}{2})\right\}.$$

Производя аналогичные преобразования, найдем

$$u = -\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{R^2 - r^2}{2Rr\sin\Theta} \quad (\pi < \Theta < 2\pi).$$

Так как правая часть теперь положительна $(\sin\Theta < 0)$, то

$$0 < u < \frac{1}{2}.$$

Пример 28. Найти решение уравнения Лапласа для внутренней части кольца $1 \le r \le 2$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u\big|_{r=1} = 0, u\big|_{r=2} = y.$$

У к а з а н и е. Ввести полярные координаты.

Ответ. $u(r,\Theta) = \frac{8}{3}\mathrm{sh}(\ln r) \cdot \sin\Theta.$

Приложения.
Вывод уравнений и постановка задач математической физики.

Многие задачи механики, физики, широкий круг инженерно-технических задач приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, являющихся частным случаем так называемых уравнений математической физики.

Их вывод опирается на механические или физические законы. Из всего многообразия таких задач мы ограничимся лишь несколькими простейшими, иллюстрирующими некоторые методы построения математических моделей реальных физических или механических процессов.

Пример 1. Вывести уравнения распространения тепла в изотропном теле.

Обозначим температуру тела в точке $M(x, y, z)$ в момент времени t символом $u(x, y, z, t)$. Как известно, в теле происходит движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. В теории теплопроводности принято, что количество тепла ΔQ, проходящего через некоторый элемент поверхности $\Delta\sigma$, лежащий внутри данного тела, пропорционально $\Delta\Pi \cdot \Delta t$, где $\Delta\Pi$ - поток вектора $\mathrm{grad}(u)$ через элемент $\Delta\sigma$, т.е.

$$\Delta Q = k \cdot \Delta\Pi \cdot \Delta t \qquad (1)$$

Здесь $k = k(x, y, z)$ - коэффициент теплопроводности тела.
Выделим внутри тела произвольный объём V, ограниченный гладкой замкнутой поверхностью Σ, и составим уравнение теплового баланса для выделенного объёма. Пусть Q_1 - количество тепла, входящего в V через поверхность Σ за промежуток времени $(t; t + \Delta t)$. Тогда из (1) следует, что

$$Q_1 = \oiint_{\Sigma} k(M) \cdot (\mathrm{grad}(u), d\sigma) \cdot \Delta t\,.$$

Обозначим Q_2 количество тепла, выделяемого или поглощаемого в объёме V за промежуток $(t; t + \Delta t)$ вследствие имеющихся в этом объёме источников (или стоков), плотность которых, т.е. количество поглощаемого или выделяемого тепла за единицу времени в единице объёма, обозначим $F(x, y, z, t)$. Ясно, что

$$Q_2 = \iiint\limits_V div(k \cdot grad(u))dv\Delta t + \iiint\limits_V F(x, y, z, t)dv\Delta t ,$$

А тогда, используя формулу Грина-Остроградского, для общего количества тепла, приходящего в объём V за промежуток времени $(t; t + \Delta t)$, получаем выражение

$$Q_1 + Q_2 = \iiint\limits_V div(k \cdot grad(u))dv\Delta t + \iiint\limits_V F(x, y, z, t)dv\Delta t \qquad (2)$$

С другой стороны, на изменение температуры объёма тела V за время $(t; t + \Delta t)$ на величину

$$\Delta_t u = u(x, y, z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t) \approx \frac{\partial u(M, t)}{\partial t}\Delta t$$

Необходимо затратить следующее количество тепла:

$$Q_3 = \iiint\limits_V [u(x, y, z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t)] \cdot \gamma(x, y, z) \cdot \rho(x, y, z)dv \approx$$
$$\approx \iiint\limits_V \gamma \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dv \cdot \Delta t \qquad (3)$$

где $\gamma = \gamma(M)$ - теплоемкость вещества, а $\rho = \rho(M)$ - его плотность.
Но $Q_1 + Q_2 = Q_3$, а потому из (2) и (3) следует соотношение

$$\iiint\limits_V [\gamma \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - div(k \cdot grad(u)) - F(x, y, z, t)]dv = 0 .$$

Так как объём V произволен, а подынтегральная функция непрерывна, то отсюда следует, что в любой момент времени t должно выполняться соотношение

$$\gamma \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = div(k \cdot grad(u)) + F(M, t) \qquad (4)$$

Это уравнение (4) называется уравнением теплопроводности неоднородного изотропного тела. Если тело однородно, то γ, ρ и k постоянные и уравнение (4) запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t) \qquad (5)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}}, \qquad f(x,y,z,t) = \frac{1}{\gamma\rho} F(x,y,z,t).$$

Для вычисления температуры тела u(x,y,z,t) в любой точке тела и в любой момент времени t недостаточно решения уравнения (4) или (5). Из физических соотношений следует, что необходимо знать еще распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие) и тепловой режим на границе тела (граничное условие). Точно так же и для решения других задач математической физики требуется знание начальных (если процесс нестационарный) и граничных условий. Поэтому под постановкой задачи в дальнейшем подразумевается выбор функции, характеризующей исследуемый физический процесс, вывод (или выбор) соответствующего этому процессу уравнения, установление граничных условий и формулировка начальных условий.

Пример 2.

Поставить задачу об определения температуры однородного изотропного стержня $0 \le x \le \ell$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура есть некоторая функция x, а на конце стержня подается извне заданный тепловой поток.

Температура стержня зависит только от координаты точки $x \in (0,\ell)$ и времени t, т.е. $u = u(x,t)$. Внутри стержня источники тепла отсутствует, т.е. $F(x,y,z,t) \equiv 0$. Поэтому уравнение (5) принимает вид $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, где $a^2 = \dfrac{k}{\gamma\rho}$.

Начальное условие записывается в виде

$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le \ell,$ где $\varphi(x)$ - заданная функция. Граничные условия имеют вид

$$u'_x(0,t) = -\frac{1}{k\sigma} q_1(t)$$

$$u'_x(\ell,t) = \frac{1}{k\sigma} q_2(t) \qquad\qquad 0 < t < \infty,$$

где σ - площадь поперечного сечения стержня, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ - тепловые потоки (количество тепла, поступающего в единицу времени) в стержень через его концы. Таким образом, имеем задачу:

Найти решение $u(x,y)$ уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad a^2 = \frac{k}{\gamma\rho}, \tag{6}$$

$$0 \le x \le \ell, \qquad 0 < t < \infty$$

удовлетворяющее условиям:

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$$\begin{cases} u'_x(0,t) = -\dfrac{1}{k\sigma} q_1(t) \\ u'_x(\ell,t) = \dfrac{1}{k\sigma} q_2(t) \end{cases} \tag{7}$$

Рассмотренная в примере 2 задача относится к так называемым смешанным задачам, в которых участвуют как начальные, так и граничные условия. Граничные условия (7), наложенные на значение производной $u'_x(x,t)$ называют условиями второго рода. Рассматриваются также задача с условиями первого рода, наложенными на значения функции $u(x,t)$,

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \varphi_1(t) \\ u(\ell,t) &= \varphi_2(t) \end{aligned} \tag{8}$$

и с условиями третьего рода, наложенными как на значения функции $u(x,t)$, так и на значения производной

$$u'_x(x,t), \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \delta u\right)\Big|_{x=0} = \Psi_1(t) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \delta u\right)\Big|_{x=\ell} = \Psi_2(t) \end{cases} \tag{9}$$

Условие (9) означает упругое закрепление в точках $x = 0$ и $x = \ell$. Кроме смешанной задачи достаточно часто встречается задача Коши, состоящая в отыскании решения $u(x,t)$ в области

$-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$, удовлетворяющего только начальным условиям.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по мА тематической физике.-М.; Изд-во МГУ, 1993.
2. Solohitdinov M. Matematik fizika tenglamalari.Toshkent, Uz bekiston, 2002.
3. www.books.ru Владимиров В.С., Жариков В.В. Уравнения мА тематической физики. Москва. 2002.
4. www.books.ru Голоскоков Д. Уравнения математической физики. Решение задач. В системе Maple. Учебник для вузов. Санкт-Питербург, 2004.

Содержание.

Редактор: Покачалова Н.С.