

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA‘LIM VAZIRLIGI**

O‘RTA MAXSUS KASB-HUNAR TA‘LIMI MARKAZI

Q. SAFAEVA, F. SHOMANSUROVA

IQTISODIYOTDA MATEMATIKA

Kasb-hunar kolleji talabalari uchun o‘quv qo‘llanma

Toshkent
«IQTISOD-MOLIYA»
2010

Taqrizchilar: TMI, “Matematika” kafedrası
professori, f.m.f.n. **E. Mamurov**
TDIU “Axborot texnologiyalari va menedjment”
fakulteti dekani, i.f.d., prof. **B. Begalov**

Safaeva Q

Iqtisodiyotda matematika. Kasb-hunar kollejlari uchun o‘quv qo‘llanma / Q. Safaeva, F. Shomansurova; O‘zR Oliy va o‘rta maxsus ta’limi vazirligi, O‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi markazi.-T.: «IQTISOD-MOLIYA», 2010, – 240 bet.

BBK 65B6я722

I. Shomansurova F.

Ushbu kitob iqtisodiyotda matematika kursidan o‘zbek tilida yozilgan birinchi o‘quv qo‘llanma bo‘lib, unda sonlar ustida amallarni bajarish va protsentlarni hisoblashdan tortib to chiziqli dasturlash, ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaga doir asosiy tushunchalar hamda ular asosida yechiladigan iqtisodiy masalalar keltirilgan.

O‘quv qo‘llanma 3340100-«Statistika» ta’lim yo‘nalishidagi 3340106-«Statistika» mutaxassisliklari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, undan iqtisodiyot yo‘nalishlaridagi OTMlari talabalari, professor-o‘qituvchilari, aspirant va izlanuvchilari ham foydalanishlari mumkin.

KIRISH

Har qanday iqtisodiyot yo'nalishdagi zamonaviy fanlarni o'qitishda matematik usullar keng qo'llaniladi. Boshqacha qilib aytganda, matematik usullar har qanday iqtisodiy fanning, shu jumladan iqtisodiy nazariyaning tarkibiy qismiga aylangan. Masalan, ma'lum bir iqtisodiy ko'rsatkichlarni hisoblash matematik formulalar yordamida amalga oshiriladi; turli iqtisodiy faktorlar orasidagi bog'liqlik darajasi grafiklar yordamida tahlil qilinadi; statistik ma'lumotlar matematik usullar bilan qayta ishlanib, muhim iqtisodiy yechimlar topiladi.

Iqtisodiy fanlarni o'qitishda matematika apparatidan keng foydalanish yo'li bilan qabul qilinadigan iqtisodiy yechimlarni oydinlashtirish va asoslash mumkin bo'ladi. Boshqa tomondan, matematika fanlarini iqtisodiy amaliyotga bog'lab o'qitish jarayonida matematik tushunchalar va qonuniyatlar amaliy iqtisodiyotga daxldor ekanligi isbotlanadi, matematik apparat ham ma'lum ma'noda takomillashadi.

Mazkur kitob "Iqtisodiyotda matematika" kursi bo'yicha kasb-hunar kollejlari uchun yaratilgan o'quv dasturi asosida o'zbek tilida yaratilgan birinchi o'quv qo'llanma bo'lib, unda iqtisodiy mazmundagi matematik masalalarni yechish va tahlil qilish muammolari atroflicha o'rganilgan.

O'quv qo'llanma iqtisodiy jarayonlar mohiyatini matematik usullar bilan tahlil qilish asosida chuqurroq o'rganish, matematikaning amaliy iqtisodiyotdagi tatbig'i bilan yaqindan tanishish, o'quvchilarning iqtisodiy-matematik tafakkurini oshirish, mantiqiy fikrlash xususiyatlarini tarbiyalash vazifasini amalga oshirishga xizmat qiladi.

O'quv qo'llanma matematikaning deyarli barcha sohalarini qamrab olgan. U 8 bobdan iborat bo'lib, jumladan, sonlar va ularning iqtisodiyotda qo'llanishi (I bob), algebraik ifodalar va ularning

iqtisodiyotda qo'llanishi (II bob), sonli ketma – ketliklarning iqtisodiyotda qo'llanishi (Sh bob), matematik tahlil (analiz)ning iqtisodiyotda qo'llanishi (IV-VI boblar), chiziqli dasturlash masalalari (VII bob), ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlarining iqtisodiyotda qo'llanishi (VIII bob) boblarida o'z aksini topgan.

Har bir bob mavzuga doir zarur matematik tushuncha va faktlarni yoritishdan boshlanadi. Har bir bobning paragraflarida esa mavzuga doir turli iqtisodiy masalalar, ularning matematik modellari va yechish usullari akslantirilgan. Har bir paragraf tayanch so'z va iboralar, nazorat savollari va mustaqil yechish uchun masalalar bilan yakunlanagan. Shuningdek, har bir bob so'ngida mustaqil yechish uchun aralash masalalar keltirilgan.

O'quv qo'llanma statistika yo'nalishidagi kasb-hunar kollejlari talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, undan iqtisodiy yo'nalishdagi akademik litseylari o'quvchilari, OTM talabalari, magistr va aspirantlari hamda iqtisodiyotda matematik usullarni qo'llash bilan shug'ullanuvchi mutaxassislar foydalanishlari mumkin.

I bob. SONLAR VA ULARNING IQTISODIYOTDA QO‘LLANISHI

Zarur matematik tushuncha va faktlar

1. Sonlar haqida tayanch ma’lumotlar. Jismlarni sanash natijasida vujudga keladigan 1, 2, 3, 4,... ketma-ketlikka **natural sonlar** deb ataladi. Natural sonlar to‘plami $N=\{1,2,3,4,\dots\}$ ko‘rinishda belgilanadi. Bir nechta sondan yangi sonni hosil qilish **arifmetik amal** deyiladi. Arifmetikada qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish, darajaga ko‘tarish va ildizdan chiqarish kabi oltita amal qaraladi. Natural sonlar ustidan qo‘shish, ko‘paytirish va natural darajaga ko‘tarish amallari bajariladi. Ikki yoki bir nechta sonning qo‘shilish natijasida hosil bo‘lgan son **yig‘indi**, sonlarning o‘zlari esa **qo‘shiluvchilar** deyiladi.

Qo‘shish amali qo‘yidagi qonunlarga bo‘ysunadi:

a) ikki ixtiyoriy a va b sonlar uchun

$$a + b = b + a$$

tenglik (o‘rin almashtirish qonuni) o‘rinlidir;

b) ixtiyoriy a , b , s natural sonlar uchun

$$(a+b)+s=a+(b+s)$$

tenglik (guruhlash qonuni) o‘rinli;

v) ikki a va b sonlarning ayirmasi shunday x sonki, bunda x va b sonlarning yig‘indi a ga teng bo‘ladi, ya’ni

$$a-b=x \Rightarrow a=b+x$$

Bu yerda x son a va b sonlarning ayirmasi, a -kamayuvchi, b -ayiriluvchi deb ataladi.

Natural sonlar uchun ayirish amali har doim ham bajarilavermaydi, masalan, $10-15$, $3-3$ ayirmalar natural son emas.

a sonni b songa **ko‘paytirish** deb, har bir qo‘shiluvchisi a ga teng bo‘lgan b ta sonlar yig‘indisiga aytiladi.

Ko‘paytma a b ko‘rinishda yoziladi hamda a va b sonlar **ko‘paytuvchilar** deb aytiladi.

Ko‘paytirish amali qo‘yidagi qonunlarga bo‘ysunadi:

a) ixtiyoriy a , b va s natural sonlar uchun

$$a \cdot b = b \cdot a;$$

$$(a \cdot b) \cdot s = a \cdot (b \cdot s);$$

$$(a+b) \cdot s = a \cdot (b+s);$$

tengliklar o‘rinlidir.

a sonni b songa bo‘lish shunday x sonni topishdan iboratki, uni b songa ko‘paytirilganda a son hosil bo‘ladi, ya’ni

$$a:b=x, \text{ agar } x \cdot b=a \text{ bo‘lsa.}$$

Bunda a – bo‘linuvchi, b – bo‘luvchi, x – bo‘linma deb ataladi.

Ikki natural sonning bo‘linmasi har doim natural son bo‘lavermaydi.

Masalan, $3:9=\frac{1}{3}$ natural son emas.

Faqat o‘ziga va birga bo‘linadigan sonlar **tub sonlar** deb ataladi. «1» tub son ham emas, murakkab son ham emas, «2» – soni yagona tub – juft sonidir.

Eng katta umumiy bo‘luvchisi 1 ga teng bo‘lgan sonlar **o‘zaro tub sonlar** deyiladi. Masalan, 9 va 8 yoki 14 va 45 va hokazo.

2. Oddiy kasrlar va ular ustida amallar. Birlikning bir yoki bir nechta teng ulushiga **oddiy kasr** deb ataladi. Oddiy kasr umumiy holda $\frac{a}{b}$ ko‘rinishda belgilandi. Bunda b son birlikni bir necha qismlarga bo‘linganligini ko‘rsatsa, a soni shu qismlardan nechitasi olinganligini ko‘rsatadi va ular mos ravishda kasrning **mahraji** va **surati** deb ataladi.

Agar kasrning surati mahrajidan kichik bo‘lsa, u **to‘g‘ri kasr** deyiladi.

Masalan: $\frac{1}{3}, \frac{12}{15}, \frac{50}{101}, \frac{35}{47}, \frac{57}{260}, \dots$ – to‘g‘ri kasrlar.

Agar kasrning surati mahrajidan katta bo‘lsa, u **noto‘g‘ri kasr** deyiladi.

Masalan: $\frac{3}{2}, \frac{19}{7}, \frac{113}{65}, \frac{119}{90}, \frac{135}{119}, \dots$ – noto‘g‘ri kasrlar.

Oddiy kasrlar ustida qo‘shish (ayirish), ko‘paytirish (bo‘lish) amallarini bajarish mumkin. Bu amallar qo‘yidagi formulalar yordamida amalga oshiriladi.

$$1. \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{bd}.$$

$$2. \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{bd}.$$

$$3. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$4. \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

3. O‘nli kasrlar. Davriy kasrlar. O‘nli kasrlar deb, mahraji 10^n ($n \in N$) ko‘rinishdagi oddiy kasrlarga aytiladi.

Masalan, $\frac{3}{10} = 0,3$; $\frac{117}{100} = 1,17$; $\frac{5}{1000} = 0,005$.

O‘nli kasrlarni oddiy kasrlar ko‘rinishida yozish uchun suratga o‘nli kasrdagi vergul va undan keyingi nollarni tashlab, qolgan raqamlarni butun son ko‘rinishida yozish, mahrajga esa, bir va undan keyin nollar yoziladi. Nollarning soni o‘nli kasrdagi verguldan keyingi raqamlar soniga teng bo‘ladi.

Oddiy kasrni o‘nli kasrga aylantirish uchun suratni mahrajga butun sonlarni bo‘lish qoidasiga asosan bo‘lib yozish kerak. Masalan,

$$\frac{7}{25} = 0,28; \quad \frac{2}{5} = 0,4; \quad \frac{11}{100} = 0,11.$$

Ma’lum xonasidan boshlab, raqamlari davriy takrorlanadigan cheksiz o‘nli kasrlar **davriy o‘nli kasrlar** deyiladi.

Masalan, $0,777... = 0,(7)$; $6,24343... = 6,2(43)$; $4,071151515... = 4,071(15)$

Ixtiyoriy oddiy kasrni chekli yoki cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida yozish mumkin.

4. Foizlar. Har qanday sonning 100 dan bir bo‘lagiga shu sonning **bir foizi** (protsenti) deyiladi va % belgi bilan belgilanadi.

Foizlarga doir asosiy masalalar qo‘yidagilardan iborat.

1. Berilgan sonning berilgan foizini topish. a sonning r foizi

$$\frac{a \cdot p}{100} \quad (1)$$

formula orqali topiladi.

Masalan, 70 sonning 20 foizi $\frac{70 \cdot 20}{100} = 14$ ga teng bo‘ladi.

5. Foizga ko‘ra sonni topish. Agar a sonning r foizi b ga teng bo‘lsa, u holda berilgan son

$$a = \frac{b \cdot 100}{p} \quad (2)$$

tenglik orqali topiladi. Masalan, biror x sonning 30 foizi 750 ga teng bo‘lsa, u holda bu son $x = \frac{750 \cdot 100}{30} = 2500$ ga teng bo‘ladi.

1-misol. 5000 so‘mni kreditga berish oqibatida 20 % daromad olgan firmaning daromadi qancha so‘mni tashkil qiladi?

Yechish. Firmaning daromadini x bilan belgilaymiz. U holda (1)

formulaga asosan, $x = \frac{5000 \cdot 20}{100} = 1000$ ni topamiz.

Javob: firmaning daromadi 1000 so'm.

2-misol. Agar A shaxs ma'lum miqdordagi pulni bankka 20 % foiz stavkasi bilan qo'yib, bir yildan so'ng 20 000 so'm qo'shimcha daromadga ega bo'lgan bo'lsa, uning dastlabki qo'yilmasi qancha bo'lgan?

Yechish. (2) formuladan foydalanib,

$$x = \frac{20000 \cdot 100}{20} = 100000 \text{ ni topamiz.}$$

Javob: 100 000 so'm.

Ikki sonning foiz nisbati deb, bu sonlar nisbatini 100% ga ko'paytmasiga, ya'ni

$$\frac{a}{b} \cdot 100 \% . \text{ ga aytiladi.}$$

Masalan, 4500 va 900 sonlarning foiz nisbati $45/9 \cdot 100 \% = 500 \%$ ga teng bo'ladi. Bu esa 4500 soni 900 dan 500 foiz yoki 5 marta kattaligini bildiradi.

Murakkab foiz. Agar yillik r foiz stavkasi boshlangich qo'yilmaga qo'shib borilsa, dastlabki a qo'yilmaning t yildan keyingi qiymati quyidagi formula orqali topiladi:

$$N = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

Bunday formula orqali aniqlanadigan foiz **murakkab foiz** deb ataladi.

Misol. A shaxs jamg'arma bankiga 150 000 so'm pulni 20 % yillik foiz stavkasi bilan 2 yilga qo'ygan. Ikkinchi yilning oxirida A shaxsning jamg'armasi qancha bo'ladi?

Yechish. Birinchi yilning oxirida jamg'arma $150\,000 + 150\,000 \cdot 0,2 = 180\,000$ so'm bo'ladi.

Ikkinchi yilning oxirida esa jamg'armaning miqdori $N = 180\,000 + 180\,000 \cdot 0,2 = 216\,000$ so'm bo'ladi. Bu natijaga yuqorida keltirilgan formuladan foydalanib ham erishish mumkin:

$$N = 150000 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right)^2 = 216000 .$$

6. Nisbat. Proportsiya. a sonning b songa **nisbati** deb, a ni b ga bo'lishdan hosil bo'lgan $\frac{a}{b}$ bo'linmaga aytiladi. Nisbat $a : b$ yoki $\frac{a}{b} : \frac{a}{b}$ ko'rinishda belgilanadi. Ikki nisbatning tengligi proportsiya deb ataladi

va u quyidagicha yoziladi:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

bu proportsiyada a va d lar **chetki**, b va s lar esa **o'rta hadlar** deb ataladi.

Proportsiyaning asosiy xossalari. Proportsiyaning chetki hadlar ko'paytmasi uning o'rta hadlari ko'paytmasiga teng, ya'ni agar $a : b = c : d$ bo'lsa, u holda $a \cdot d = b \cdot c$ bo'ladi.

Misol. Quyidagi proportsiyalardan x ni toping:

$$3 : \frac{6}{5} = \frac{5}{6} : x$$

Yechish. Proportsiyaning asosiy xossasiga ko'ra: $3x = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

1.1-§. Chiqim, daromad, foyda va zarar.

Mahsulot tannarxi va samaradorlik

Bozor iqtisodiyotiga doir tushunchalardan biri va asosiysi bu daromaddir. Bozor iqtisodiyoti sub'ektlarining asosiy maqsadi ham daromadni oshirishdan iborat. Bunga erishish maqsadida turli qimmatli qog'ozlar, birjalar, soliq va banklar, kredit va huquqlar o'ylab topiladi.

Daromad korxonadan yoki boshqa iqtisodiy faoliyatdan olinadigan pul yoki moddiy ne'matdir. Daromadlar umumiy va pul daromadidan iborat bo'ladi.

Umumiy daromadga oylik maosh, dividendlar, aktsiyalar, turli imtiyozlar, bepul davolanish, xizmat mashinasi va boshqalar kiradi.

Pul daromadi esa ma'lum bir davr oralig'ida (bir yil yoki bir oyda) olinadigan pul miqdoridan iborat bo'ladi.

Daromat oluvchi sub'ektlar ayrim shaxslardan, oiladan, korxonadan, mahalliy hokimiyatdan va davlatdan iborat bo'ladi. Turli sub'ektlarning daromad manbalari turlicha bo'ladi. Masalan, shaxsiy (oilaviy) daromadning 80% i oylik maoshdan va kichik biznesdan, qolgan 20% i esa shaxsiy mulkdan va turli to'lovlardan iborat bo'lishi mumkin.

Hamma sub'ektlarning daromadi o'zaro bog'liq bo'ladi. Ayrim sub'ektlar uchun daromad boshqa sub'ektlar uchun chiqim bo'lishi mumkin. Masalan, yollangan ishchilarning oylik maoshi ular uchun daromad bo'lsa, ish beruvchilar uchun bu chiqim bo'ladi.

Chiqim – ma'lum bir maqsad yo'lida sarf qilingan xarajatlar, iste'mol qilingan ne'matlar miqdoridir.

Har bir sub'ekt o'z daromadini oshirishga intiladi. Bunga esa

chiqimlarni kamaytirish yo‘li bilan erishish mumkin.

1-misol. Ahmad har kuni dadasidan yo‘l kira va ovqatlanish uchun 1500 so‘m pul oladi. Maktab Ahmadning uyidan avtobusda 2 bekat masofada joylashgan. Har kuni Ahmad dadasi bergan 1500 so‘m pulning 800 so‘mini yo‘l kiraga va 700 so‘mini ovqatlanishga sarf qiladi. Ahmad o‘zining cho‘ntak pullari bo‘lishini orzu qiladi. U bu orzuni amalga oshirish uchun qanday yo‘l tutgani ma‘qul?

Yechish. Ahmad ovqat emasdan har kuni 700 so‘m tejashi mumkin. Lekin buning uchun u maktabda och yurishi kerak bo‘ladi. Bu esa yomon oqibatlarga olib kelishi (oshqozon-ichak kasalligiga duchor bo‘lishi va ochlik ta‘sirida darslarni o‘zlashtirishi susayishi) mumkin. Agar Ahmad maktabga piyoda borsa, kuniga 800 so‘m, haftasiga $800 \cdot 6 = 4800$ so‘m, oyiga $800 \cdot 24 = 19200$ so‘m va yiliga $800 \cdot 360 = 230400$ so‘m hamyon puliga ega bo‘ladi. Buni hisoblab ko‘rib, Ahmad har kuni maktabga piyoda borishga qaror qildi.

Moliyaviy hisob-kitoblarda daromad va chiqimlarni nazarga olish bilan bir qatorda, ularni solishtirish zaruriyati tug‘iladi.

Ma‘lum bir vaqt oralig‘ida daromad va chiqimlarni aniqlashga mo‘ljallangan moliyaviy hisob **byudjet** deb ataladi.

Daromad bilan chiqimlar o‘zaro teng bo‘lgan byudjet **balanslangan byudjet** deb ataladi.

Agar byudjetdagi chiqimlar daromadlardan ko‘p bo‘lsa, bunday byudjet **kamyob** (defitsit) **byudjet** deyiladi.

Byudjetlar uy xo‘jaligida, korxona va firmalardagi moliyaviy ahvolni tekshirishga xizmat qiladi.

2-misol. Yuqoridagi 1-misolda Ahmadning kunlik daromadi 1500 so‘m, chiqimlari ham $700+800=1500$ so‘m. Demak, uning byudjeti balanslangan byudjetdan iborat. Agar chiqimlarga maktab xarajatlari (qalam, ruchka, daftar va boshqalarni) sotib olishni kiritsak, u holda Ahmadning byudjeti kamyob byudjetga aylanadi.

Xo‘jalik ob‘ektining daromadi bilan chiqimlari (xarajatlari) ayirmasi **foyda** deyiladi. Turli korxonalar, firmalar va xo‘jalik ob‘ektlarining daromadi sarf qilingan xarajatlardan kam bo‘lsa, u holda bu xo‘jalik ob‘ekti xarajatlar bilan daromad ayirmasiga teng miqdorda zarar ko‘radi.

Korxonaning mahsulotini ishlab chiqarish va sotish bilan bog‘liq xarajatlarning pul ifodasi **mahsulot tannarxi** deb ataladi. Tannarx mahsulotni ishlab chiqarishda sarflangan ishlab chiqarish vositalarining

qiymati, ish haqi, boshqaruv va boshqa xarajatlardan tarkib topadi.

Mahsulot tannarxini pasaytirish xalq turmushi darajasini oshirish omillaridan biri bo'lib, unga mehnat samaradorligini oshirish va ishlab chiqarish xarajatlarini kamaytirish yo'li bilan erishish mumkin.

Korxona, firma va boshqa ishlab chiqarish ob'ektlarining foydaolish ishlashi **samaradorlik** deyiladi. Samaradorlik foyda olish darajasini ko'rsatadi va foiz hisobida ifodalanadi. Samaradorlik tayin bir vaqtda qo'lga kiritilgan foyda miqdorining mahsulot tannarxiga foiz nisbati sifatida hisoblanadi, ya'ni

$$P = F(t) : x(t) \cdot 100\%,$$

bu erda P – samaradorlik belgisi, $F(t)$ – t bosqichda qo'lga kiritilgan foyda, $x(t)$ – t bosqichdagi mahsulot tannarxi.

3-misol. Firma bolalar etikchalarini ishlab chiqarish bilan shug'ullanadi. Oldingi yil natijasiga ko'ra, firmada ishlab chiqarilgan mahsulotlar tannarxi 4 mln. so'mni, korxonaning daromadi esa 5 mln. so'mni tashkil qilgan. Firmaning ishlab chiqarish samaradorligini hisoblang.

Yechish. O'tgan yil hisobotiga ko'ra, firma 5 000 000 – 4 000 000 = 1 000 000 so'm foyda ko'rgan. Uning rentabelligi (samaradorligi)

$$P = \frac{1000000}{4000000} \cdot 100\% = 25\%$$

bo'ladi.

4-misol. Jamol yoz kunlarining birida o'zida mavjud bo'lgan 120 dollar pulini xarajat qilib limonad tayyorladi va uni sotib, 250 dollar pulga ega bo'ldi. Jamolning ish haqi va foydasi nimaga teng bo'ladi?

Yechish. Jamolning kichik biznesidan tushgan pul (daromad) 250 dollarni tashkil qiladi. Daromaddan sarf qilingan xarajatlarni ayirsak, Jamolning ish haqi va foydasini topamiz. U 130 doll. ni tashkil qiladi.

Tayanch so'z va iboralar

Daromad, umumiy daromad, pul daromadi, chiqim, byudjet, kamyob (defitsit) byudjet, foyda, zarar, mahsulot tannarxi, samaradorlik

Nazorat savollari

1. Daromad nima?
2. Umumiy va pul daromadlarini ta'riflang.
3. Daromad oluvchi sub'ektlar qanday bo'lishi mumkin?

4. Daromad manbalari qanday bo‘ladi?
5. Chiqim nima?
6. Byudjet nima?
7. Balanslangan byudjet qanday bo‘ladi?
8. Kamyob byudjetni ta’riflang.
9. Xo‘jalik ob’ektlarining foydasi nima?
10. Zarar nima?
11. Mahsulot tannarxini ta’riflang.
12. Rentabellik (samaradorlik) nima?

Masalalar

1. Mansur yozgi ta’til davrida pul ishlab, yangi velosiped sotib olishni maqsad qilib qo‘ydi. Buning uchun u dadasidan 150 000 so‘m pul qarz olib, har biri 5 000 so‘mdan bo‘lgan 20 ta jo‘jani 100 000 so‘mga sotib oldi. Qolgan 50 000 so‘mni jo‘jalarni boqish va parvarish qilish sarf qildi. Natijada ularni xatosiz katta qilishga erishdi. So‘ngra jo‘jalarning har birini 15 000 so‘mdan sotdi. Agar Mansur jo‘jalarni sotish uchun 10 000 so‘m xarajat qilgan bo‘lsa, uning daromadi va foydasini aniqlang. Mahsulot tannarxini va samaradorlikni hisoblang.

Javob: Daromad – 300 000 so‘m, foyda – 140 000 so‘m; samaradorlik – 87%.

2. Oilangiz byudjetini hisoblang va uning balanslangan yoki kamyob ekanligini aniqlang.

3. Firma sopol idish tovoqlar ishlab chiqarishga yo‘naltirilgan. O‘tgan yilgi hisobotga ko‘ra, mahsulotni ishlab chiqarish va sotishga sarf qilingan umumiy xarajatlarning pul qiymati 200 000 so‘mni, daromadi esa 500 000 so‘mni tashkil qilgan. Firmaning foydasini, firma faoliyatining samaradorligini hisoblang.

Javob: 300 000 so‘m, 150%

4. Firma 500 birlik mahsulot ishlab chiqaradi. Mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan o‘rtacha o‘zgarmas xarajat 0,5 dollarni va umumiy xarajat 2,5 dollarni tashkil qiladi. Agar firma mahsulotlarni 3,5 dollardan pullasa, uning daromadi va foydasi qancha bo‘ladi?

Javob: 750 dollar.; 250 dollar.

5. Nonvoy har kuni 100 kilogramm undan 500 ta non yopadi va har bir nonni 400 so‘mdan sotadi. Agar nonvoy har bir kilogramm unga 1050 so‘m, har bir sotilgan non uchun sotuvchiga 50 so‘m va boshqa xarajatlarga kuniga 2000 so‘m sarf qilsa, uning daromadi va foydasi qancha bo‘ladi?

Javob: Daromadi 200 000 so‘m, foydasi 68 000 so‘m.

1.2-§. Mehnat unumdorligi va hosildorlik O‘rtacha miqdorlar

Mehnat unumdorligi resurslardan samarali foydalanishni ko‘rsatuvchi o‘lchovdir. Mehnat unumdorligi bir birlik (1 soat, 1 kun, 1 hafta, 1 oy, 1 yil va hokazo) vaqt ichida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori bilan o‘lchanadi.

1-misol. " Ruff Manufacturing Inc" uyushmasi velosiped ishlab chiqarish bilan shug‘ullanadi. Uyushmada 5 ta ishchi bo‘lib, ularning har biri haftasiga 40 soat ishlaydi. Agar uyushma bir haftada 200 ta velosiped ishlab chiqarsa, bu uyushmaning mehnat unumdorligini toping.

Yechish. Hamma ishchilar bir haftada jami 200 soat ($5 \cdot 40 = 200$) mehnat qiladi va 200 ta velosiped ishlab chiqaradi. Demak, uyushmaning mehnat unumdorligi $MY = 200 : 200 = 1$ bo‘ladi, ya’ni bir soatda 1 ta velosiped ishlab chiqaradi.

2-misol. "Ride-m-Bicycle" uyushmasida 10 ta odam ishlaydi va haftada 600 ta velosiped ishlab chiqaradi. Agar har bir ishchi haftada 40 soatdan ishlasa, uyushmadagi mehnat unumdorligini toping.

Yechish. Uyushmadagi ishchilar bir haftada jami $40 \times 10 = 400$ soat mehnat qiladilar va 600 ta velosiped ishlab chiqaradilar. Demak, uyushmadagi mehnat unumdorligi $MY = 600 : 400 = 1,5$ bo‘ladi, ya’ni bir soatda 1,5 ta velosiped ishlab chiqarilgan ekan.

Hosildorlik – har bir gektar erdan olingan mahsulot miqdoridir. Tayin bir mahsulot hosildorligini hisoblash uchun ishlab chiqarilgan jami mahsulot miqdorini jami er maydoniga bo‘linadi.

3-misol. Fermer 50 gektar erga paxta ekib, 1250 tsentner hosil olgan. Fermer xo‘jaligining paxta hosildorligini hisoblang.

Yechish. Paxta hosildorligi (X)

$$X = 1250 : 50 = 25 \frac{\text{ts}}{\text{ga}} \text{ bo‘ladi.}$$

Demak, fermer xo‘jaligida paxta hosildorligi har bir gektardan 25 sentnerni tashkil qiladi.

Iqtisodiyotda ko‘p ishlatiladigan ko‘rsatkichlardan biri **o‘rtacha miqdordir**. Masalan, yuqorida ko‘rilgan 3-misolda paxta hosildorligini hisoblashda ham o‘rtacha miqdor ko‘rsatkichidan foydalanilgan. Chunki 50 gektar erning har biridan 25 sentner hosil olinmasligi mumkin. Masalan, 50 gektar erning 10 gektaridan 30 sentnerdan, 15 gektaridan 25 sentnerdan, 15 gektaridan 15 sentnerdan va 10 gektaridan 35 sentnerdan hosil olingan bo‘lsin. U holda jami

$$X = 10 \cdot 30 + 15 \cdot 25 + 15 \cdot 15 + 10 \cdot 35 = 1250$$

sentner paxta olingan. Bu holda paxtaning oʻrtacha hosildorligi

$$\bar{X} = \frac{10 \cdot 30 + 15 \cdot 25 + 15 \cdot 15 + 10 \cdot 35}{10 + 15 + 15 + 10} = \frac{1250}{50} = 25 \frac{\text{ts}}{\text{ga}} \text{ boʻladi.}$$

Iqtisodiyotda **absolyut va nisbiy koʻrsatkichlar** mavjud boʻladi. Masalan, ishlab chiqarilgan jami mahsulot miqdori, ishlab chiqarishdan olinadigan jami daromad va jami foyda absolyut koʻrsatkichlarda hisoblanadi. Oʻrtacha va limit (marjinal) daromad, foyda, xarajat, hosildorlik va boshqalar nisbiy koʻrsatkichlarda hisoblanadi.

Oʻrtacha mahsulot – umumiy mahsulotni ushbu mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan vaqt, ish kuni, xomashyo va boshqa oʻzgaruvchan ishlab chiqarish omillari sarfiga nisbati bilan aniqlanadi:

$$AP = \frac{Q}{F},$$

bu yerda Q – umumiy mahsulot miqdori, F -sarflangan resurslar, AP -resurslar birligiga mos keluvchi oʻrtacha mahsulot miqdorini bildiradi.

4-misol. Firma bir hafta ichida jami 500 000 soʻmlik mahsulot ishlab chiqargan va 400 kishi/soat ish kuchi sarf qilgan. Har bir ish kuchiga toʻgʻri keluvchi oʻrtacha mahsulot miqdorini aniqlang.

Yechish. Masalada $Q=500000$, $F=400$.

Demak,

$$AP = \frac{500000}{400} = 1250.$$

Javob: Har bir ishchi haftada oʻrtacha 1250 soʻmlik mahsulot ishlab chiqaradi.

5-misol. Firma bir oyda 1 000 000 soʻmlik mahsulot ishlab chiqaradi va 250 000 soʻmlik xom ashyo sarf qiladi. Xarajat birligiga mos keluvchi oʻrtacha mahsulot miqdorini toping.

Yechish. Masalada $Q=1\,000\,000$, $F=250\,000$

$$AP = \frac{1000000}{250000} = 4.$$

Javob: Bir birlik xom ashyoga toʻgʻri keluvchi oʻrtacha mahsulot miqdori 4 birlikni tashkil qiladi.

Tayanch soʻz va iboralar

Mehnat unumdorligi, hosildorlik, oʻrtacha miqdorlar, absolyut va nisbiy koʻrsatkichlar.

Nazorat savollari

1. Mehnat unumdorligi nima?
2. Mehnat unumdorligi qanday yoʻl bilan hisoblanadi?

3. Hosildorlik nima?
4. Iqtisodiyotda absolyut ko'rsatkichlar qanday?
5. Nisbiy ko'rsatkichlarga nimalar kiradi?
6. O'rtacha mahsulot nima?
7. Mahsulot birligiga to'g'ri keluvchi o'rtacha resurslar miqdori qanday aniqlanadi?

Masalalar

Firma futbolkalar ishlab chiqarishga mo'ljallangan. Unda 5 ta ishchi ishlaydi va ularning har biri haftasiga 48 soatdan mehnat qiladi. Agar firma bir haftada 400 ta futbolka ishlab chiqarsa, uning mehnat unumdorligini toping.

Javob: $MY=1,67$.

Koorxonada dastlab 3 ta ishchi faoliyat yuritgan va ular soatiga 12 ta mahsulot tayyorlagan. Bir yildan so'ng firmada 6 ta ishchi ishlab, ular bir soatda 30 ta mahsulot ishlab chiqargan. Firmada mehnat unumdorligi qachon yuqori bo'lgan?

Javob: Ikkinchi yili.

Mebel fabrikasida 50 ta ishchi ishlaydi va ular bir oyda 2 000 000 so'mlik mahsulot ishlab chiqaradi. Agar ishchilar haftada 40 soatdan mehnat qilsa, fabrikadagi mehnat unumdorligi toping.

Javob: $MY=1000$ so'm.

Dehqon xo'jaligida 12 gektar er bo'lib, undan 30 tonna paxta hosili olindi. Xo'jalikdagi mehnat unumdorligini toping.

Javob: 25 ts/ga.

Dehqon xo'jaligi bog'ida 20 tup o'rik daraxti bo'lib, ulardan jami 2,5 tonna hosil yig'ildi. Xo'jalikdagi o'rik daraxtining o'rtacha hosildorligi qancha bo'ladi?

Javob: 125 kg.

Dehqon xo'jaligida 10 gektar erga paxta ekilgan. Har bir gektar urning hosildorligi mos ravishda qo'yidagilarga teng: 34, 38, 32, 32, 38, 35, 38, 34, 35, 34. Ushbu ma'lumotlar asosida dehqon xo'jaligida o'rtacha paxta hosildorligini toping. Ma'lumotlar qatori uchun moda va medianani aniqlang.

Javob: 35 ts/ga.

1.3-§. Foizga doir iqtisodiy mazmundagi aralash masalalar

I. Oddiy foizlar

1. 127 sonining 30% ni toping.

Yechish. $\frac{127 \cdot 30}{100} = 12,7 \cdot 3 = 38,1$.

Javob: 38,1.

2. Korxonadagi 500 ta ishchidan 40 % i 5-razryadli ishchilardan iborat. Korxonadagi 5-razryadli ishchilar soni nechta ?

Yechish. 5-razryadli ishchilar sonini X bilan belgilaymiz. U holda

$$X = \frac{500 \cdot 40}{100} = 200.$$

Javob: 200 ta ishchi.

3. Xo‘jalikdagi erdan 8 gektari past hosildorlik erlar hisoblanadi. Xo‘jalikdagi past hosildorlik erlar necha foizni tashkil qiladi?

Yechish. $P = \frac{8 \cdot 100}{25} = 32$.

Javob: 32 %.

II. Murakkab foizlar

1-misol. A shaxs 25 000 so‘mni jamg‘arma bankka yillik 15 % stavkasi bilan 3 yilga qo‘ygan. 3 yildan so‘ng A shaxsning jamg‘armasi qancha bo‘ladi?

Yechish. A shaxsning 3 yildan keyingi jamg‘armasini N bilan belgilaymiz va uni

$$N = a \left(1 + \frac{P}{100} \right)^t$$

formula yordamida topamiz. Ushbu masalada $a=25\ 000$, $R=15\ %$, $t=3$, demak,

$$N = 25000 \left(1 + \frac{15}{100} \right)^3 = 38021,875.$$

Javob: 38021,875 so‘m.

2-misol. Ahmadning jamg‘arma bankka yillik 10 % stavkasi bilan qo‘ygan puli 5 yildan so‘ng 16105 so‘m 10 tiyin bo‘lgan. Ahmad qancha pulni jamg‘arma bankka qo‘ygan edi?

Yechish. Masalada $N=16105,1$; $R=10\ %$; $t=5$. Yuqoridagi (1) formuladan:

$$a = N \left(1 + \frac{P}{100} \right)^{-t} \text{ yoki } a = 16105,1 \cdot \left(1 + \frac{10}{100} \right)^{-5} = 10000.$$

Javob: 10 000 so‘m.

Masalalar

Fermer xo'jaligidagi 70 gektar erning 12 gektariga kartoshka ekilgan. Kartoshka ekilgan er maydoni xo'jalikdagi er maydonlarining necha foizini tashkil qiladi?

Javob: 17,145 %.

Tikuv fabrikasidagi 30 ta ishchining 60 % i yuqori malakali tikuvchilar hisoblanadi. Fabrikadagi yuqori malakali tikuvchilar soni nechta?

Javob: 18 ta.

Dehqon xo'jaligi bir yilda erishgan 500 000 so'm daromadning 30 % ini jamg'arma bankka kreditni qoplash uchun to'laydi. Xo'jalik jamg'arma bankka yiliga qancha so'm pul o'tkazadi?

Javob: 150 000 so'm.

Mebel magaziniga keltirilgan 90 ta shkaftan 4 tasi yaroqsiz chiqdi. Yaroqsiz shkaflar necha foizni tashkil qiladi?

Javob: 44 %.

Aziz 6000 so'm pulni jamg'arma bankka bir yilga qo'yib, 45 % daromad olgan. Azizning daromadi qancha so'mni tashkil qiladi?

Javob: 2700 so'm.

Mansur 10 000 so'm pulni jamg'arma bankka 35 % oddiy foiz stavkasi bilan yarim yilga qo'ygan. Agar Mansur yarim yildan so'ng jamg'arma bankdan olgan pulini yillik 40 % stavkasi bilan yana yarim yilga qo'ysa, u bir yildan so'ng qancha pulga ega bo'ladi?

Javob: 18 900 so'm.

Bahrom o'z pulini yillik 40 % stavkasi bilan jamg'arma bankka qo'yib, bir yildan so'ng 14 000 so'mga ega bo'ldi. Bahrom jamg'arma bankka qancha pul qo'ygan?

Javob: 10 000 so'm.

Agar Xurshid ma'lum miqdordagi pulni yillik 40 % stavkasi bilan bir yilga jamg'arma bankka qo'yib, yilning oxirida 28 000 so'm pulga ega bo'lgan bo'lsa, Xurshidning dastlabki qo'yilmasi qancha bo'lgan?

Javob: 20 000 so'm.

Karim 12 000 so'm pulni yillik 35 % stavkasi bilan 3 oyga qo'ygan. 3 oydan so'ng yig'ilgan jamg'armani yana 3 oyga 35 % stavka bilan qo'yishga qaror qildi. Shu yo'l bilan Karim 6 oydan so'ng qancha pulga ega bo'ladi?

Javob: 72641,342 so'm.

Binoning dastlabki qiymati 300 mln soʻmni tashkil qiladi. Bino ekspluatatsiya qilina boshlagandan soʻng har oy uning qiymati 5 % ga kamayadi. 10 yildan soʻng binoning qiymati qancha boʻladi?

Javob: 179 700 000 soʻm.

1.4-§. Aralash masalalar

1. Firma oyiga 750 ta bolalar aravachalarini ishlab chiqaradi. Har bir aravachaning narxi 20 000 soʻmdan iborat. Agar firmaning bir oylik xarajatlari

5 000 000 soʻmni tashkil qilsa, firmaning bir oylik daromadi, foydasi qancha boʻladi?

Javob: 10 000 000 soʻm.

2. Firmada 8 ta ishchi faoliyat yuritib, ular bir haftada 720 ta krossovka ishlab chiqaradi. Agar har bir ishchi haftada 40 soatdan ishlasa, firmadagi mehnat unumdorligi qanday boʻladi?

Javob: 2,25.

3. Korxonada 5 ta stanok boʻlib, ular yordamida bir kunda 1920 ta detal ishlab chiqariladi. Agar har bir stanok bir kunda 48 soat ishlasa, har bir stanokning mehnat unumdorligani toping.

Javob: 40.

4. Dehqon xoʻjaliga 10 gektar erdan 40 tonna kartoshka olgan. Dehqon xoʻjaligidagi kartoshka hosildorligi qanday?

Javob: 4 ts/ga.

5. Agar paxta hosildorligi 30 ts/ga boʻlib, jamoa xoʻjaligida 50 gektar erga paxta ekilgan boʻlsa, u holda bu xoʻjalikda qancha paxta tayyorlanadi?

Javob: 1500 sentner.

6. Fermer xoʻjaligidagi 6 gektar erga paxta ekilib, mos ravishda quyidagi hosildorlikka erishilgan: 25, 29, 30, 25, 24, 24... Fermer xoʻjaligidagi paxtaning oʻrtacha hosildorligini toping. Maʼlumotlar qatori uchun moda va medianasini aniqlang.

Javob: 9,5; 27.

7. Sinfdagi 25 ta oʻquvchilardan 40 % maktabga piyoda keladi. Maktabga turli transportlarda keladigan oʻquvchilar soni qancha?

Javob: 15 ta.

8. Agar magazinga keltirilgan 500 ta velosipedning 75 % i sotilgan boʻlsa, magazinda yana nechta velosiped qolgan?

Javob: 125 ta.

9. Jamg'arma bankning yillik murakkab foiz stavkasi 15 %. Ahmad kontrakt asosida o'qishga kirgan va har yili o'qish uchun institutga 500 000 so'm pul o'tkazishi kerak. Ana shunday summani 4 yil davomida institutga o'tkazib turishi uchun Ahmad bankka qancha pul qo'yishi kerak?

Javob: 1 250 000 so'm.

10. Jamg'arma bank har bir qo'yilma uchun birinchi yili 15 %, keyin har bir yil uchun 5 % dan oshirib yillik foiz stavka to'laydi. Jamg'arma bankka qo'yilgan 20 000 so'm pul uch yildan so'ng qancha bo'ladi?

Javob: 32 000 so'm.

II bob. ALGEBRAIK IFODALAR VA ULARNING IQTISODIYOTDA QO‘LLANISHI

Zarur matematik tushunchalar va faktlar

1. Sonlar, o‘zgaruvchilar va ularning darajalari ko‘paytmalaridan iborat ifoda **birhad** deyiladi. Masalan: $3ax^5$, $-4b^3$, $\frac{1}{2}y^4$, x , 7 .

2. **Birhadning standart ko‘rinishi** deb, oldida yagona son koeffitsienti va o‘zgaruvchilari daraja ko‘rinishida yozilgan birhadga aytiladi.

Masalan, $3x^4y^2$, $5a$, $\frac{3}{4}xy^3$ – standart birhadlar.

3. **Birhadning darajasi** deb, o‘zgaruvchilar daraja ko‘rsatkichlari yig‘indisiga aytiladi. Masalan, $-3x^4y^2$ – oltinchi darajali birhad, $5x$ – birinchi darajali birhad, 2 – nolinch darajali birhaddir.

4. Son koeffitsienti bilangina farq qila oladigan yoki o‘zaro teng bo‘lgan birhadlar **o‘xshash birhadlar** deyiladi.

5. Birhadlarning algebraik yig‘indisi **ko‘phad** deyiladi.

Masalan, $2ax^3 - \frac{3}{5}a^2 - b$ ifoda uchhad, $\frac{7x^2y - 4xy + 1}{2x}$ ifoda esa ko‘phad emas.

6. O‘xshash birhadlar yig‘indisi birhaddir. Masalan,

$$2x^2y - 3x^2y = -x^2y \text{ – birhad.}$$

7. O‘xshash birhadlar yig‘indisini yagona birhad ko‘rinishida ifodalash birhadni **ixchamlash** deyiladi.

8. Ko‘phadlar yig‘indisini (ayirmasini) standart shaklga keltirish uchun qavslarni ochish va o‘xshash hadlarni ixchamlash kerak. Masalan,

$$\begin{aligned} & (3x^2y + 7xy^2) - (x^2y - 2xy^2) = \\ & = 3x^2y + 7xy^2 - x^2y + 2xy^2 = 2x^2y + 9xy^2. \end{aligned}$$

9. Ko‘phadlarni birhadga ko‘paytirish uchun ko‘hadning har bir hadini birhadga ko‘paytirib, natijalarni qo‘shish kerak.

10. Ko‘phadni ko‘phadga ko‘paytirish uchun birinchi ko‘phadlarning har bir hadini ikkinchi ko‘phadning har bir hadiga ko‘paytirish va natijalarni qo‘shish kerak. Masalan:

$$\begin{aligned} & 2a(3a - b) + (2a + b)(a - 4b) = \\ & = 6a^2 - 2ab + 2a^2 - 8ab + ab - 4b^2 = 8a^2 - 9ab - 4b^2. \end{aligned}$$

11. Ko'phadni ko'phadga bo'lish uchun quyidagi algoritmdan foydalanish kerak:

a) bo'linuvchi va bo'luvchi ko'phadlarni darajalari kamayib borish tartibida yozib olinadi;

b) bo'linuvchining birinchi hadini bo'luvchining birinchi hadiga bo'lish kerak. Natija bo'linma ko'phadning birinchi hadi bo'ladi.

v) bo'luvchini hosil bo'lgan natijaga ko'paytirib, bo'linuvchidan ayiriladi;

g) qoldiqning birinchi hadini bo'luvchining birinchi hadiga bo'lish kerak. Natija bo'linma ko'phadning ikkinchi hadi bo'ladi;

d) bo'luvchini bo'linmaning ikkinchi hadiga ko'paytirib, birinchi qoldiqdan ayiriladi;

e) qoldiq nolga aylanguncha yoki bo'linuvchidan kichik darajada bo'lguncha g) va d) punktlardagi ko'rsatmani mos ravishda keyingi qoldiqlar uchun bajariladi.

Misol. $(6x^4 - 13a^3 + 13a^2x^2 - 13a^3x - 5a^4) : (2x^2 - 3ax - a^2)$

$$\begin{array}{r|l}
 6x^4 - 13ax^3 + 13a^2x^2 - 13a^3x - 5a^4 & 2x^2 - 3ax - a^2 \\
 - 6x^4 - 9ax^3 - 3a^2x^2 & \hline
 - 4ax^3 + 16a^2x^2 - 13a^3x - 5a^4 & \\
 - 4ax^3 + 6a^2x^2 + 2a^3x & \hline
 10a^2x^2 - 15a^3x - 5a^4 & \\
 - 10a^2x^2 - 15a^3x - 5a^4 & \hline
 0 &
 \end{array}$$

Javob: $(6x^4 - 13a^3 + 13a^2x^2 - 13a^3x - 5a^4) : (2x^2 - 3ax - a^2) = 3x^2 - 2ax + 5a^2$.

12. Qisqa ko'paytirish formulalari:

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

2) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

3) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

4) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;

5) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;

6) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

13. Ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish. Ko'phadni ikki yoki bir necha ko'phadlar ko'paytmasi bilan almashtirish **ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish** deb ataladi. Ko'phadni ko'paytuvchilarga quyidagi usullar bilan ajratish mumkin:

1) umumiy ko'paytuvchilarni qavsdan tashqariga chiqarish yo'li bilan ko'paytuvchilarga ajratish:

$$4x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 6x = 2x(2x^3 - 4x^2 + x - 3);$$

2) guruhlash usuli. Agar ko‘phadning hadlari umumiy ko‘paytuvchilarga egaligi yaqqol ko‘rinsa, u holda uning hadlarini guruhlarga birlashtirib, ko‘paytuvchilarga ajratish mumkin. Masalan,

$$3(x-2y)^2 - 3x + 6y = 3(x-2y)^2 - 3(x-2y) = 3(x-2y)(x-2y-1).$$

14. Bir o‘zgaruvchili ko‘phadlar. Ushbu

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

ko‘rinishidagi ko‘phad x o‘zgaruvchiga nisbatan n – darajali **standart ko‘rinishdagi ko‘phad** deyiladi, bu erda $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – haqiqiy sonlar ko‘phadning koeffitsientlari deyiladi.

15. Bezu teoremasi. $R_n(x)$ ko‘phadni $(x-a)$ ga bo‘lishdan hosil bo‘lgan qoldiq ko‘phadning $x=a$ da erishiladigan qiymatga teng, ya’ni, agar $R_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x) + R$ bo‘lsa, $R = R_n(a)$ bo‘ladi.

16. Agar $x=a$ da $R_n(a)=0$ bo‘lsa, a son $R_n(x)$ ko‘phadning ildizi deyiladi.

17. a son $R_n(x)$ ning ildizi bo‘lgandagina $R_n(x)$ ko‘phad $(x-a)$ ga qoldiqsiz bo‘lanadi.

18. $(x^n - a^n)$ ko‘rinishdagi ko‘phad ixtiyoriy natural n uchun $(x-a)$ ga qoldiqsiz bo‘linadi.

19. $(x^{2n} + a^{2n})$ va $(x^{2n+1} + a^{2n+1})$ ko‘rinishidagi ko‘phadlar ixtiyoriy natural n uchun $(x+a)$ ga bo‘linadi.

2.1-§. Yalpi milliy mahsulot

Butun bir mamlakat iqtisodiyotini ikki qismga bo‘lish mumkin:

1) iste’molchilar (uy xo‘jaligi) va 2) ishlab chiqaruvchilar (biznes). Bu qismlar orasida doimiy ayriboshlash mavjud. Ishlab chiqaruvchi birlashmalar iste’molchilarga (ishlab chiqarish faktorlari egalariga) er, mehnat, kapital va ishbilarmonlik uchun haq to‘laydi. Iste’molchilarning birlashmalardan olgan daromadlari ularning ehtiyojlarini qondiruvchi tovar va xizmatlar sotib olish uchun yana biznesga qaytariladi. Bundan ko‘rinadiki, iste’molchilarining daromadlari ular tomonidan yaratilgan tovar va xizmatlarni sotib olish uchun sarf qilingan xarajatlarga teng bo‘ladi. Boshqacha aytganda, tovar va xizmatlarning bahosi ish haqi, renta, foyda va foizlar yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Yalpi milliy mahsulot – bir yil (1 oy, 1 chorak) davomida mamlakatda ishlab chiqarilgan pirovard mahsulot va xizmatlarning bozor bahosida hisoblangan qiymatidir.

Ushbu ta’rifdan «pirovard mahsulot va xizmatlarning bahosi» degan ibora yalpi milliy mahsulot (*YaMM*) mamlakatda barcha ishlab chiqarilgan mahsulot va xizmatlarning qiymatini o‘lchaydi, degan ma’noni bildiradi.

Pirovard mahsulotni ishlab chiqarish bir necha bosqichlardan iborat bo‘lib, har bir bosqichda pirovard mahsulot ishlab chiqarishda ishlatilgan oraliq mahsulotlar ishlab chiqariladi. Bu oraliq mahsulotlarning qiymati *YaMM*ga qo‘shilmaydi, balki har bir bosqichdagi qo‘shimcha qiymatlar hisoblab boriladi va natijada qo‘shilgan qiymat hosil bo‘ladi. Masalan, non pirovard mahsulotdir. Uning qiymati *YaMM*ga kiritiladi. Lekin, nonni ishlab chiqarishda ishlatiladigan bug‘doy, un, xamirning qiymatlari *YaMM*ga qo‘shilmaydi. Non ishlab chiqarish jarayonining turli bosqichlarida qo‘shilgan qiymatlar hosil bo‘ladi. Quyidagi jadvalda yana shunday qo‘shilgan qiymatlarni hosil qilish jarayoni ko‘rsatilgan.

2.1-jadval

Ishlab chiqarish bosqichi	Sotishdan olingan tushum	Oraliq mahsulotlar qiymati	Qo‘shimcha qiymat (oylik, maosh, foyda va boshqalar)
Bug‘doy	4	0	4
Un	16	4	2
Non	12	6	6
Iste’molchilarga tashilgan non	20	12	8
Jami:	42	22	20

Pirovard mahsulotni ishlab chiqarish jarayonining har bir bosqichida qo‘shilgan qiymatlar yig‘indisi **sof milliy mahsulot (SMM)** deb ataladi.

Demak, *YaMM*ga ishlab chiqarishning har bir bosqichida qo‘shilgan qiymat hisoblab boriladi. Buning uchun mahsulotni sotishdan olingan tushumdan ushbu bosqichda ishlab chiqarilgan yoki tashqaridan sotib olingan mahsulotlarning qiymati chegiriladi. Yuqoridagi misolda qo‘shilgan qiymatlar yig‘indisi va *SMM* 20 birlikni tashkil qiladi.

Iqtisodiyot rivojlanayotgan fandir. Shuning uchun ham u hali inson faoliyatining barcha tomonlarini tahlil qilish darajasiga etmagan. Masalan, insoniyat uchun zarur bo‘lgan, lekin tovar formasiga ega bo‘lmagan mahsulot va xizmatlarni yaratish manbasi bo‘lib xizmat qilgan uy xo‘jaliklari *YaMM*da hisoblanmaydi. *YaMM*ga yana eski, ishlatilgan tovar va xizmatlar, oldinroq qurilgan inshootlarni sotish ham kiritilmaydi. Chunki ular oldingi yildagi *YaMM*larda hisoblangan bo‘ladi. *YaMM*ga turli nafaqalar va to‘lovlar (transfertlar) ham kiritilmaydi, chunki ular oldin yaratilgan *YaMM*ni qayta taqsimlashdan iborat. *YaMM*ni ikki xil usul bilan hisoblash mumkin:

- a) Ushbu yilda yaratilgan barcha pirovard mahsulot va xizmatlarni

sotib olish uchun sarf qilingan xarajatlarni hisoblash usuli.

b) Ushbu yilda yaratilgan pirovard mahsulot va xizmatlardan ishlab chiqarish faktorlari egalarining olgan daromadlarini hisoblash usuli.

Eng avval xarajatlarni hisoblash usuli bilan tanishamiz. Dastlab davlat boshqarmasi, shuningdek, tashqi aloqasi yo‘q bo‘lgan soddalashtirilgan iqtisodiyotni ko‘ramiz. Bunday iqtisodiyotda ishlab chiqarilgan jami pirovard mahsulotlar miqdorini Y bilan, iste‘molni S bilan va investitsiya xarajatlarini I bilan belgilaymiz. U holda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$Y=C+I. \quad (1)$$

Bu formula soddalashtirilgan iqtisodiyotda ishlab chiqarilgan mahsulot bilan realizatsiya qilingan mahsulot orasidagi bog‘liqlikni ifodalaydi, hamda ishlab chiqarilgan mahsulot iste‘mol bilan investitsiyaga sarf qilinishini ko‘rsatadi. Davlat boshqarmasi, shuningdek, tashqi savdo aloqasi mavjud bo‘lgan mamlakat iqtisodiyoti uchun quyidagi formula o‘rinli bo‘ladi:

$$Y=C+I+Q+N_X, \quad (2)$$

bu yerda Q – davlat tomonidan sotib olinadigan tovar va xizmatlar qiymati, N_X – sof eksport (eksport minus import) qiymati.

Ushbu formula mamlakatda ishlab chiqarilgan yalpi mahsulot iste‘molga, investitsiyaga, davlat xarajatlari va sof eksportga sarf qilinishini ko‘rsatadi.

Enda $YaMM$ ni daromadlarni hisoblash usuli bilan topishni ko‘ramiz. Bu usulda $YaMM$ ishlab chiqarilgan barcha mahsulot va xizmatlardan olinadigan daromadlar yig‘indisi sifatida qaraladi. Bu holda $YaMM$ quyidagilarni o‘z ichiga oladi:

Iste‘mol qilingan kapital hajmi yoki amortizatsiya (A); (Yalpi investitsiya-asosiy ishlab chiqarish fondlariga sarf qilinadigan investitsiya; sof investitsiyalar – kapitalni o‘rishiga sarf qilinadigan investitsiya; amortizatsiya – yalpi investitsiya bilan sof investitsiya orasidagi farq);

Biznesga egri soliqlar (mahsulot sotishdan olinadigan soliqlar aksizlar, mulkka soliqlar, litsenziya soliqlari, bojxona bojlari); bunday soliqlar tovar va xizmatlar narxiga qo‘shilgani uchun ular $YaMM$ ga kiritiladi (T).

Yollangan ishchilarning ish haqi (W).

Ijara haqi (R_I) (ijaraga berilgan binolar, uy joylar, asbob – uskunalar, er va boshqalardan olinadigan daromadlar).

Foiz daromadlari (R).

Mulkdan olinadigan daromad – bu alohida mulkchilikda va korporatsiyada bo‘lgan korxonalar daromadi (R).

Korporatsiya foydasi quyidagilarga bo‘linadi:

- a) soliqlar (hukumatga);
- b) aktsionerlarga dividendlar;
- v) korporatsiyaning taqsimlanmagan foydasi.

Demak, daromadlar usuli bilan hisoblanganda $YaMM$ quyidagi formula bilan topiladi:

$$Y=A+T+W+R_1+R+P. \quad (3)$$

Quyidagi jadvalda $YaMM$ ni aniqlashda ikki xil yondashuv aniq misolda ko‘rsatilgan.

2.2-jadval

№	$YaMM$ ni hisoblashning turli usullari va ularga mos $YaMM$ parametrlari	Shartli belgilar	Miqdor
I. $YaMM$ ni xarajatlar usuli bilan hisoblash			
1	Uy xo‘jaliklarining iste‘mol harajatlari	C	65
2	Biznesga investitsiya xarajatlari yoki yalpi xususiy ichki investitsiyalar	I	17
3	Tovar va xizmatlar bo‘yicha davlat xaridi	Q	20
4	Sof eksport	N_X	-2
Jam i	$YaMM=S+I+Q+N_I$	Y	100
II. $YaMM$ ni daromadlar usuli bilan hisoblash			
1	Iste‘mol qilingan kapital hajmi	A	10
2	Biznesga egri soliqlar	T	8
3	Yollanma ishchilarning ish haqi	W	59
4	Ijara haqi	R_I	0.5
5	Foiz daromadlar	R	8
6	Yakka qo‘yilmalardan daromadlar	P_I	7
7	Korporatsiyalar foydasiga soliqlar	TK	4
8	Dividendlar	P_2	2
9	Korporatsiyalarning taqsimlanmagan foydalari	P_3	1.5
Jam i	$YaMM=A+T+W+R_I+R+P_I+TK+P_2+P_3$	Y	100

Bu jadvaldan ko‘rinadiki, iste‘molchilarning bir yildagi tovar va xizmatlarni sotib olish uchun sarflagan xarajatlari ($Y=C+I+Q+N_X$) ishlab chiqarish jarayonida qatnashuvchilarning bir yilda olgan daromadlariga ($A+T+W+R_I+R+P_I+TK+P_2+P_3$) teng bo‘ladi.

1-misol. Jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida *YaMM*ni daromadlar usuli bilan hisoblang.

2.3-jadval

№	Ko'rsatkichlar	Miqdor
1	Kreditga foizlar	12
2	Yalpi investitsiya	55
3	Ish haqi va maoshlar	218
4	Korporatsiyalar foydasi	113
5	Xususiy tadbirkorlar tomonidan to'lanadigan soliqlar, soliq bo'lmagan boshqa to'lovlar, tarnsfert to'lovlar	22
6	Ijaraga olingan buyumlar uchun mulkdorlarga ijara to'lovlar	20
7	Davlat tomonidan sotib olingan tovar va xizmatlar	90
8	Korporatsiyalar foydasidan to'lovlar	50
9	Sof eksport	9
10	Sof shaxsiy investitsiya	45
11	Mulk daromadi	21
12	Davlat korxonalari uchun sof subsidiyalar	2
13	Aholiga transfert to'lovlar	23
14	Iste'mol xarajatlari	21

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra, ish haqi $W=218$ mlrd. dollarni, mulkdan olingan daromad $P=21$, egri soliqlar $T=22$, foiz daromalar $R=12$, ijara haqi $R_I=20$, mulk daromadi $R=21$, korporatsiyalar foydasi – 113, kapitaldan foydalanganligi uchun to'lovlar (yalpi investitsiya–sof investitsiya) $A=55-45=10$ mlrd. dollarni tashkil qiladi.

Shuning uchun *YaMM*ni hisoblashda yuqoridagi parametrlarni qo'shib, yig'indidan davlat korxonalari uchun sof subsidiyalarni, ya'ni 2 ni ayirish kerak.

$$Y=10+22+248+20+12+21+113-2=414$$

Javob: *YaMM*=414 mlrd. doll.

Tayanch so'zlar va iboralar

Yalpi milliy mahsulot, oraliq pirovard mahsulot, yalpi milliy mahsulotni topishda daromadlar usuli, yalpi milliy mahsulotni xarajatlar usuli bilan topish, sof eksport, biznesdagi egri soliqlar, sof milliy mahsulot, qo'shilgan qiymat

Nazorat savollari

1. Yalpi milliy mahsulot nima?
2. Qo'shilgan qiymat nima?

3. Pirovard mahsulot nima?
4. Sof milliy mahsulot nima?
5. YaMMga nimalar kiritilmaydi?
6. YaMMni qanday usullar bilan hisoblash mumkin?
7. Xarajatlarni hisoblash usuli bilan *YaMM* qanday topiladi?
8. Daromadlarni hisoblash usuli bilan *YaMM* qanday topiladi?
9. Sof eksport nima?
10. Yalpi investitsiya nima?
11. Sof investitsiya nima?
12. Amortizatsiya qanday hisoblanadi?
13. Biznesdagi egri soliqlar nima uchun *YaMM*ga kiritiladi?

Masalalar

1. Yuqoridagi 2.3-jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida *YaMM*ni xarajatlar usuli bilan toping.

Javob: *YaMM*=414 mlrd. doll.

2. Quyida keltirilgan jadvaldagi ma'lumotlar asosida I va II yillar uchun *YaMM*ni hisoblang.

№	Ko'rsatkichlar (mlrd. doll.)	I yil	II yil
1	Yalpi qurilish bahosi	5	5
2	Ishlab chiqarilgan uskunalar bahosi	10	10
3	Ishlab chiqarilgan iste'mol tovarlari bahosi	110	90
4	Iste'mol qilingan tovarlar bahosi	90	110
5	Binolarni amortizatsiya qilish	10	10
6	Uskunalarini amortizatsiya qilish	10	10
7	Yil boshidagi iste'mol tovarlari zaxirasi	30	50
8	Yilning oxiridagi iste'mol tovarlari zaxirasi	50	30

Javob: I yil – 125 mlrd. doll. II yil – 105 mlrd. doll.

3. Quyidagi jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida *YaMM*ni xarajatlar va daromadlarni hisoblash usuli bilan toping.

№	Ko'rsatkichlar (mlrd. doll.)	Miqdor mlrd. doll.
1	Eksport	367
2	Dividendlar	60
3	Amortizatsiya	307
4	Ish haqi	1442
5	Davlat tomonidan sotib olingan tovar va xizmatlar	577
6	Rentalar	33
7	Egri soliqlar	255

8	Ish haqiga to'lanadigan qo'shimcha to'lovlar	280
9	Yalpi shaxsiy investitsiya	437
10	Korporatsiyalar foydasiga soliq	88
11	Transfert to'lovlar	320
12	Kapitalga foizlar	201
13	Shaxsiy mulk egalarining daromadlari	132
14	Iste'mol xarajati	1810
15	Import	338
16	Sotsial sug'urtaga to'lovlar	148
17	Taqsimlanmagan foyda	55
18	Shaxsiy daromaddan soliqlar	372

Javob: $YaMM=1722$ mlrd. doll.

2.2-§. Iqtisodiy o'sish

Iqtisodiy taraqqiyotni ifodalovchi asosiy me'zonlardan biri iqtisodiy o'sishdir. Iqtisodiy o'sish milliy iqtisodiyotning rivojlanish harakatini ko'rsatadi va shu sababli ma'lum bir davr oralig'idagi makroiqtisodiy ko'rsatkichlarini ($YaMM$, $YaIM$ va SMM) taqqoslash yo'li bilan o'lchanadi. Iqtisodiy o'sish ikki usul bilan o'lchanadi:

1. real yalpi milliy mahsulot hajmining o'tgan davrga nisbatan o'zgarishi (o'sishi) ni hisoblash;

2. aholi jon boshiga to'g'ri keladigan real $YaMM$ hajmining o'sishini hisoblash.

Iqtisodiy o'sishga ta'sir etuvchi omillar quyidagilardan iborat:

Tabiiy resurslarning miqdori va sifati.

Mehnat resurslarining sifati va miqdori.

Asosiy kapital hajmi.

Texnologiya.

Bu omillarni ishlab chiqarish omillaridan kapital (K), mehnat (L) va texnologik taraqqiyot (A) deb qarash mumkin.

Demak, iqtisodiy o'sish istiqbolini belgilash uchun

$$Y=AF(K,L) \quad (1)$$

ko'rinishdagi ishlab chiqarish funksiyasidan foydalanish mumkin. Bu funksiya ishlab chiqarish hajmi (Y), kapital (K), ish kuchi (L) va texnologiyaga bog'liq ekanligini ko'rsatadi.

Kapital, ish kuchi sarfining hamda mehnat unumdorligi o'sish sur'atining ishlab chiqarishning o'sish sur'atiga ta'sirini quyidagi formula

orqali ifodalash mumkin:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = (1 - \theta) \frac{\Delta L}{L} + \theta \frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta A}{A} \quad (2)$$

Bu erda θ -kapitalni, $1 - \theta$ – mehnatning daromaddagi hissasini ko'rsatuvchi miqdorlar:

$\frac{\Delta L}{L}$ – mehnat sarfining o'sish sur'ati;

$\frac{\Delta K}{K}$ – kapital sarfining o'sish surati;

$\frac{\Delta A}{A}$ – mehnat unumdorligi (tehnologiya) ning o'sish sur'ati;

$\frac{\Delta Y}{Y}$ – ishlab chiqarish hajmining o'sish sur'ati.

1 – misol. Kapitalning daromaddagi hissassi 0,25, mehnatning daromaddagi hissassi 0,75 ga teng. Agar mehnat sarfining o'sish sur'ati 1,2 %, kapitalning o'sish sur'ati 3 %, mehnat unumdorligining o'sish sur'ati 1,5 % bo'lsa, ishlab chiqarishning o'sish sur'atini aniqlang.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra:

$$\theta = 0,25; 1 - \theta = 0,75; \frac{\Delta K}{K} = 3 \% ; \frac{\Delta L}{L} = 1,2 \% ; \frac{\Delta A}{A} = 1,5 \%$$

(2) formuladan foydalanib,

$$\frac{\Delta Y}{Y} = 0,75 \cdot 1,2\% + 0,25 \cdot 3\% + 1,5\% = 3,15\%$$

ni topamiz.

Javob: ishlab chiqarishning o'sish sur'ati 3,15 %.

Aholi jon boshiga to'g'ri keladigan real $YaMM$ hajmi $\frac{Y(t)}{N(t)}$ nisbat orqali aniqlanadi, bu erda $Y(t)$ – real $YaMM$ ning t yildagi hajmi, $N(t)$ – shu yildagi aholi soni.

Aholi jon boshiga to'g'ri keladigan real $YaMM$ hajmining bazis yilga nisbatan mutlaq o'sishi $\frac{Y(t_i)}{N(t_i)} - \frac{Y(t_0)}{N(t_0)}$ ayirma orqali aniqlanadi. t_i yildagi jon boshiga to'g'ri keladigan real $YaMM$ hajmining t_{i-1} yildagiga nisbatan mutlaq o'sishi $\frac{Y(t_i)}{N(t_i)} - \frac{Y(t_{i-1})}{N(t_{i-1})}$ ayrima orqali aniqlanadi. $YaMM$

hajmining o'sish sur'atini (foizlarda) bazis yilga nisbatan $\frac{Y(t_i)}{Y(t_0)}$ nisbat

orqali, t_{i-1} yilga nisbatan $\frac{Y(t_i)}{Y(t_{i-1})}$ nisbat orqali aniqlanadi. Bu nisbatlardan

birinchisi **bazis o'sish sur'ati**, ikkinchisi esa **zanjirsimon o'sish sur'ati**

deb ataladi.

$YaMM$ ning qo'shimcha bazis o'sish sur'ati $\frac{Y(t_i) - Y(t_0)}{Y(t_0)}$ nisbat yordamida aniqlanadi.

2 – misol. Quyidagi jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida:

a) jon boshiga to'g'ri keluvchi real $YaMM$ hajmini toping va ularni jadvalga joylashtiring;

b) 2-yilda 1-yildagiga nisbatan $YaMM$ ning mutlaq o'sish sur'atini aniqlang;

v) 4-yilda 3-yildagiga nisbatan $YaMM$ ning o'sish sur'atini (foizlarda) hisoblang;

g) 7-yilda 6- yilga nisbatan aholi jon boshiga to'g'ri keluvchi $YaMM$ hajmining o'sish sur'atini hisoblang.

2.4-jadval

Yillar	Aholi soni (mln. kishi) (N)	$YaMM$ hajmi (mlrd. doll.) (Y)	Aholi jon boshiga to'g'ri keluvchi $YaMM$ (ming doll.) (Y_N)
1	30	9	300
2	60	24	400
3	90	45	500
4	120	66	550
5	150	90	600
6	180	99	550
7	210	105	500

Yechish.

a) 1 -yilda: $Y_{N1} = \frac{9 \text{ mlrd. doll.}}{30 \text{ mln. kishi}} = 300 \text{ ming. doll.}$

2 -yilda: $Y_{N2} = \frac{24 \text{ mlrd. doll.}}{60 \text{ mln. kishi}} = 400 \text{ ming. doll.}$

3 -yilda: $Y_{N3} = \frac{45 \text{ mlrd. doll.}}{90 \text{ mln. kishi}} = 500 \text{ ming. doll.}$

4 -yilda: $Y_{N4} = \frac{66 \text{ mlrd. doll.}}{120 \text{ mln. kishi}} = 550 \text{ ming. doll.}$

5 -yilda: $Y_{N5} = \frac{90 \text{ mlrd. doll.}}{150 \text{ mln. kishi}} = 600 \text{ ming. doll.}$

6 -yilda: $Y_{N6} = \frac{99 \text{ mlrd. doll.}}{180 \text{ mln. kishi}} = 550 \text{ ming. doll.}$

7 -yilda: $Y_{N7} = \frac{105 \text{ mlrd. doll.}}{210 \text{ mln. kishi}} = 500 \text{ ming. doll.}$

b) $24 - 9 = 15$ mlrd. doll.;

v) $\frac{66 - 45}{45} \cdot 100\% = \frac{21}{45} \cdot 100\% = 0,47 \cdot 100\% = 47\%$;

$$g) \frac{500 - 550}{550} \cdot 100\% = \frac{-50 \cdot 100\%}{550} = -\frac{1}{11} \cdot 100\% = -9,1\%.$$

Javob: a) 300 ming doll.; 400 ming doll.; 500 ming doll.; 550 ming doll.; 600 ming doll.; 550 ming doll.; 500 ming doll.

b) 15 mlrd. dol.

v) 47 %.

g) – 9,1 %.

Tayanch so‘z va iboralar

Iqtisodiy o‘lish, iqtisodiy o‘lish usullari, mehnat sarfining o‘lish sur‘ati, kapital sarfining o‘lish sur‘ati, mehnat unumdorligi (texnologiya) ning o‘lish sur‘ati, YaMM ning o‘lish sur‘ati, aholi jon boshiga to‘g‘ri keladigan YaMM hajmi, bazis o‘lish sur‘ati, zanjirsimon o‘lish sur‘ati.

Nazorat savollari

1. Iqtisodiy o‘lish nima?
2. Iqtisodiy o‘lishni hisoblash usullari qanday?
3. Iqtisodiy o‘lishga ta‘sir etuvchi omillar qanday?
4. Iqtisodiy o‘lish istiqbolini qanday ishlab chiqarish funktsiyasi orqali ifodalash mumkin?
5. Ishlab chiqarishning o‘lish sur‘ati mehnat, kapital va texnologiyaning o‘lish sur‘atiga qanday bog‘langan bo‘ladi?
6. Aholi jon boshiga to‘g‘ri keladigan real YaMM hajmi qanday aniqlanadi?
7. Aholi jon boshiga to‘g‘ri keladigan real YaMM hajmining mutlaq va foizli o‘lish darajasi qanday o‘lchanadi?

Masalalar

1-masala. Quyidagi jadvalda keltirilgan ma‘lumotlar asosida:

a) har yilgi real YaMM hajmini toping va jadvalga yozing.
b) 2 -yilda 1 -yilga nisbatan mehnat unumdorligi qancha foizga va uning natijasida real YaMM hajmi necha foizga oshgan?

v) 3 -yilda 2 -yildagiga nisbatan ish kuchi qancha foizga va uning natijasida real YaMM hajmi qancha foizga oshgan?

g) 3 -yildan 1 -yilga nisbatan real YaMM hajmi necha foizga oshgan?

Yillar	Mehnat resurslari (soat)	Mehnat unumdorligi (doll.)	YaMM hajmi (doll.)
1	1000	100	100000
2	1000	105	105000
3	1100	105	115500

Javoblar: a) 100000; 105000; 115500.

b) 5 %; 5 %;

v) 10 %; 10%;

g) 15,5 %.

2-masala. Agar kapitalning mahsulotga bo'lgan nisbati 3 ga teng bo'lsa ($\frac{K}{Y}=3$), u holda 10 mlrd. doll.dan iborat investitsiya to'la ishlatilganda *YaMM* qanday o'zgaradi?

Javob: $3\frac{1}{3}$ mln. doll.ga oshadi.

3-masala. *YaMM* tarkibida jamg'arma 5% ni tashkil qiladi. Kapitalning mahsulotga bo'lgan nisbati 3 ga teng ($\frac{K}{Y}=3$) bo'lgan holda *YaMM*ning o'sish sur'atini toping.

Javob: $1\frac{2}{3}$ %.

4-masala. Daromaddagi kapitalning hissasi 0,4, mehnatning hissasi esa 0,6 ga teng. Kapital yilida daromad 6% oshgan, ish kuchi esa 2% ga kamaygan. Ishlab chiqarishining o'sish sur'atini (mehnat unumdorligining o'sish sur'ati 0 ga teng bo'lganda) aniqlang.

Javob: 1,2 %.

5-masala. Daromaddagi kapitalning hissasi 0,3, mehnatning hissasi esa 0,7 ga teng. Agar kapital sarfi 2,5 % ga kamaygan, ish kuchi sarfi 3 % ga oshgan bo'lsa, u holda *YaMM*ning o'sish sur'ati qanday bo'ladi?

Javob: 1,35 % ga oshadi.

6-masala. Daromaddagi kapital hissasi 0,75, mehnatning hissasi 0,25 ga teng. Agar mehnat sarfining o'sish sur'ati 2%, kapital sifatining o'sish sur'ati 3%, mehnat unumdorligining o'sish sur'ati 5% bo'lsa, ishlab chiqarish hajmining o'sish sur'atini toping.

Javob: 7,75 %.

2.3-§. Inflyatsiya darajasini hisoblash. Narx indeksleri

Narxlar o'sishi va u bilan bog'liq ravishda pul birligi xarid quvvatining tushib ketishi **inflyatsiya** deb ataladi. Bunday holat makroiqtisodiy barqarorligini aks ettirib, barcha mamlakatlarda jiddiy muammolarni keltirib chiqardi.

Odatda inflyatsiyani ikki turga – **talab inflyatsiyasi** va **taklif inflyatsiyasi**ga ajratadilar.

Iqtisodiyotda talabning keskin oshib ketishi va uni real ishlab

chiqarish hajmi bilan qondirish mumkin bo'lmagan paytda talab inflyatsiyasi ro'y beradi. Bunday holatda oshgan talab narxlarning ko'tarilishiga olib keladi.

Agar iqtisodiyotda tovar va xizmatlar taklifi kamayib borsa va uning oqibatida narxlar ko'tarilsa, taklif inflyatsiyasi paydo bo'ladi.

Pul muammolari bilan bevosita bog'liq bo'lgan inflyatsiya, iqtisodiyotning barcha sohalarida (ishlab chiqarish, iste'mol, jamg'arish, davlat moliyasi, investitsiya va boshqalarda) buzilish jarayonini keltirib chiqaradi. Shu sababli inflyatsiya darajasini o'lchash va uni pasaytirishga qaratilgan chora tadbirlar har bir mamlakatning iqtisodiy siyosatida muhim rol o'ynaydi.

Inflyatsiya ko'rsatkichlaridan biri **deflyator** bo'lib, u asosan real va nominal yalpi milliy mahsulot (*YaMM*) lar yordamida hisoblanadi.

Nominal *YaMM* deb, joriy t yilda ishlab chiqarilgan barcha mahsulot va xizmatlarning shu yil narxlardagi qiymatiga aytiladi. Deylik, joriy yilda mamlakatda n ta moddiy ne'matlar ishlab chiqarilgan bo'lsin. Jumladan, har bir i – mahsulot $X_i(t)$ miqdorda ishlab chiqarilgan bo'lib, uning joriy yildagi narxi $S_i(t)$ ga teng bo'lsin. U holda nominal *YaMM*

$$X(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t) \cdot C_i(t). \quad (1)$$

formula orqali aniqlanadi. Aniq bir davr oralig'idagi har bir yilga *YaMM*ni hisoblash va solishtirish uchun ularni o'zgarmas narxlarda yoki bazis yil narxlarida hisoblash kerak bo'ladi. Masalan, agar joriy yilda *YaMM* oldingi yilga nisbatan 4 % ga oshgan bo'lsa, bu hali ishlab chiqarish hajmining oshishi hisobiga ro'y beradi, degan gap emas. Chunki *YaMM* narxlar ko'tarilishi hisobiga ham oshishi mumkin. Shu sababli joriy yilda ishlab chiqarilgan moddiy ne'matlarning real hajmini aniqlash talab qilinadi.

Joriy t -yildagi *YaMM*ning bazis (t_0) yildagi narxlarda hisoblangan qiymati **real *YaMM*** deb ataladi. Real *YaMM*ni quyidagi formula orqali ifodalash mumkin:

$$X_{real}(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t) \cdot C_i(t_0). \quad (2)$$

Masalan, 1995 yillarda ishlab chiqarilgan barcha ne'matlarni 1990 yil narxlarda hisoblash orqali 1995 yildagi real *YaMM*ni hisoblash mumkin. Bazis yil sifatida qaysi yilni olish kerakligi iqtisodchilar tomonidan belgilanadi. Masalan, milliy hisoblar tizimida AQShning real *YaMM*ni 1987 yil baholarida hisoblanadi, demak bazis yil sifatida 1987

yil qabul qilingan.

Joriy (t) yildagi nominal $YaMM$ ning real $YaMM$ ga bo'lgan nisbati **deflyator** deb ataladi.

Deflyator narxlarning o'sishi natijasida $YaMM$ ning o'zgarishini ko'rsatadi. Agar joriy (t) yildagi $YaMM$ deflyatorini $D(t)$ bilan belgilasak, u quyidagiga teng bo'ladi:

$$D(t) = \frac{X(t)}{X_{real}(t)} = \frac{X_n(t)}{X_r(t)}. \quad (3)$$

Deflyatorni hisoblashda $YaMM$ ning tarkibiga kiruvchi barcha tovarlar va xizmatlarni tekshirish imkoniyati bo'lmagani uchun, undan $YaMM$ ning tarkibidagi tovar va xizmatlarni asosiy qismini o'z ichiga oluvchi "bozor savati" ajratiladi hamda nominal, real $YaMM$ va deflyatorni "bozor savati"ga kiruvchi tovar va xizmatlar uchun hisoblanadi.

1-misol. Shartli ravishda faraz qilaylik, "bozor savati"ga 2 ta mahsulot – banan va apelsinlar kiritilgan bo'lib, 1982 yilda banandan 15 birlik, apelsindan 50 birlik etishtirilgan bo'lsin. Shu yildagi banan va apelsinlarning narxi mos ravishda 0,20 va 0,22 dollardan iborat bo'lsin. U holda etishtirilgan barcha bananlarning pul qiymati

$$15 \cdot 0,20 = 3 \text{ doll.}$$

apelsinlarning pul qiymati esa

$$50 \cdot 0,22 = 11 \text{ doll.}$$

bo'ladi. Demak, 1982 yildagi nominal $YaMM$ $3+11=14$ doll. bo'ladi. 1990 yildagi etishtirilgan banan va apelsinlarning umumiy hajmi mos ravishda 20 va 60 birlikdan, ularning narxlari esa mos ravishda 0,30 va 0,25 dollardan iborat bo'lsin. U holda nominal $YaMM$

$$X_N(1990) = 20 \cdot 0,30 + 60 \cdot 0,25 = 21 \text{ doll.}$$

bo'ladi. Demak, 1990 yilda $YaMM$ 1982 yilga nisbatan 7 dollar (50%) ga oshgan. $YaMM$ ning nima hisobiga oshganligini aniqlash uchun 1990 yilda etishtirilgan banan va apelsinlar miqdorini ularning 1982 yildagi narxlarga ko'paytirib qo'shamiz, ya'ni 1990 yilga real $YaMM$ qiymatini topamiz:

$$X_R(1990) = 20 \cdot 0,20 + 60 \cdot 0,22 = 17,20 \text{ doll.}$$

Bundan ko'rinib turibdiki, 1990 yilda 1982 yilga nisbatan real $YaMM$ 3,20 dollarga, ya'ni 23 % ga oshgan. Demak, ishlab chiqarish hajmining oshishi hisobiga 1990 yilda $YaMM$ 23 % ga oshgan.

Endi mahsulotlar narxining ko'tarilishi hisobiga $YaMM$ qiymati qanchaga o'zgarishini aniqlash uchun $YaMM$ ning deflyatorini

hisoblaymiz:

$$D(1990) = \frac{X_N(1990)}{X_R(1990)} \cdot 100\% = \frac{21}{17,20} \cdot 100\% = 122\%.$$

Demak, narx-navo oshishi hisobiga 1990 yillarda *YaMM* qiymati 22 % ga oshgan. Bu holda 1982-1990 yillardagi narx-navoning oshishi, ya'ni inflyatsiya darajasi 22 % ga teng deb qaraladi.

Inflyatsiya deflyator bilan bir qatorda iste'mol narxlar indeksi (*INI*) ham xuddi deflyatordek hisoblanadi. Faqat bu erda aholi iste'moli uchun ishlatiladigan tayin tovar va xizmatlar guruhi, ya'ni "iste'mol savati" dan foydalaniladi.

INI joriy yilda bazis yilga nisbatan "iste'mol savati" qiymati qanchalik o'zgarganligini ko'rsatadi. Demak, *INI* yordamida aholining hayot kechirish qiymati yoki turmush darajasi qanchaga o'zgarganini aniqlash mumkin. *INI* quyidagi nisbat orqali aniqlanadi:

$$J(t) = \frac{X_u(t)}{X_u(t_0)} \cdot 100\%. \quad (4)$$

Masalan, "iste'mol savati" ning 1982 yil narxlardagi qiymati $X_u(1982) = 17,2$ doll. 1990 yilgi narxlardagi qiymati esa $X_u(1990) = 21$ dollardan iborat bo'lsin. U holda (1982-1990) yillar orasida inflyatsiya indeksi (4) formulaga asosan quyidagiga teng bo'ladi:

$$J(1982, 1990) = \frac{X_u(1990)}{X_u(1982)} = \frac{21}{17,2} = 1,22.$$

Javob: inflyatsiya indeksi 1,22.

Inflyatsiyaning o'sish sur'atini quyidagi formula yordamida hisoblash mumkin:

$$h(t_1, t_0) = \frac{J(t) - J(t_0)}{J(t_0)} \cdot 100\%, \quad (5)$$

bu erda $J(t)$ - t -yildagi *INI*, $J(t_0)$ – bazis yildagi *INI*. Yuqoridagi masaladagi ko'rsatkichlar bo'yicha 1982-1990 yillar orasidagi inflyatsiya sur'atini hisoblaymiz:

$$h(1982, 1990) = \frac{(21 - 17,2)}{17,2} = 22\%.$$

Demak, 1982-1990 yillardagi inflyatsiya sur'ati 22 % bo'lgan.

2-misol. Deylik, 1995 yilda narxlar 1990 yildagiga nisbatan 10 marta oshgan, ya'ni iste'mol narxlar indeksi 1000 % ga teng bo'lsin. Agar 1994 yilda bu indeks 800 % ga teng bo'lsa, u holda (1994, 1995) yillar orasidagi inflyatsiyaning o'sish sur'atini toping.

Yechish. Masalaning shartiga asosan:

$J(1995)=1000\%$, $J(1994)=800\%$.

Demak, bu holda (5) formulaga asosan,

$$h(1994, 1995) = \frac{(1000\% - 800\%)}{800\%} \cdot 100\% = 25\%.$$

Javob: inflyatsiya sur'ati 25%.

Inflyatsiya miqdorini o'lchash uchun "70 kattaligi qoidasi" usulidan ham foydalaniladi. Bu usul narxlarni barqaror o'sish sharoitida inflyatsiya darajasi necha yilda ikki barobar oshishini aniqlash imkonini beradi. Bu usulda quyidagi formula ishlatiladi:

$$m_2 = \frac{70}{h_t}, \quad (6)$$

bu erda m_2 – inflyatsiya sur'ati ikki marta ko'payishi uchun zarur bo'lgan yillar soni; $h(t)$ - t yildagi narxlarning yillik o'sish darajasi (%).

3-misol. Aniq bir t yildagi inflyatsiya su'ati 15 % ni tashkil qiladi. Inflyatsiya sur'ati ikki marta ko'payishi uchun necha yil kerakligini aniqlang.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra: $h(t)=15\%$, u holda $m_2 = \frac{70}{15} = 4,6$.

Javob: 4,6 yil.

Deylik, h – inflyatsiyaning yillik inflyatsiya sur'ati bo'lsin. Demak, X summali narx 1 yildan so'ng $X(1+h)$ ga, yana bir yildan so'ng bu narx $X(1+h)^2$ ga teng bo'ladi va hokazo, n yildan so'ng bu narx $X(1+h)^n$ ga teng bo'ladi.

Agar $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ bo'lsa, u holda (t_0, t_n) intervaldagi inflyatsiya indeksi (t_0, t_u) intervalni tashkil etuvchi (t_{i-1}, t_i) intervallardagi inflyatsiya indekslar ko'paytmasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$H(t_0, t_n) = 1 + h(t_0, t_n) = \prod_{i=1}^n [1 + h(t_{i-1}, t_i)]. \quad (7)$$

Endi $(t-1, t)$ birlik intervaldagi inflyatsiya indeksi $H(t)$ va inflyatsiya sur'atini $h(t)$ bilan belgilaymiz. U holda

$$H(t) = \frac{X(t)}{X(t-1)}, \quad (8)$$

$$h(t) = H(t) - 1 \quad (9)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bundan

$$X(t) = X(t-1) H(t)$$

yoki

$$X(t) = X(t-1) [1+h(t)]$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

4-misol. Oylik inflyatsiya sur'ati 8 % bo'lsa, yillik inflyatsiya sur'atini toping.

Yechish. Shartga ko'ra inflyatsiya sur'ati 8 %. Demak, 1 oyda narx-navo $1,08=(1+0,08)$ marta oshadi. (7) formulaga asosan, bir yilda narxlar $(1+0,08)^{12}=2,52$ marta oshadi. Demak, yillik inflyatsiya sur'ati 2,52 % ni tashkil etadi.

Javob: 2,52 %.

Tayanch so'z va iboralar

Inflyatsiya, talab inflyatsiyasi, taklif inflyatsiyasi, nominal YaMM, real YaMM, deflyator, iste'mol narxlar indeksi, inflyatsiya indeksi, inflyatsiya sur'ati, "70 kattalik qoidasi"

Nazorat savollari

1. Inflyatsiya nima?
2. Inflyatsiyaning qanday turlari mavjud?
3. Talab inflyatsiyasi nima va u qachon ro'y berishi mumkin?
4. Taklif inflyatsiyasi nima va u qachon ro'y beradi?
5. Deflyator nima va u qanday aniqlanadi?
6. "Bozor savati" deganda nimani tushunasiz?
7. "Iste'mol savati" nima?
8. Iste'mol narxlari indeksi nima va u qanday topiladi?
9. Inflyatsiya indeksi nima va u qanday topiladi?
10. Inflyatsiya sur'ati nima va u qanday topiladi?
11. "70 kattaligi qoidasi" qanday va uning yordamida nimani aniqlash mumkin?
12. Oylik inflyatsiya indeksi ma'lum bo'lsa, yillik inflyatsiya indeksi nimaga teng bo'ladi?

Masalalar

1. Iqtisodiyotda 2 ta X va Y tovar mahsulot ishlab chiqariladi. Iste'molchilar barcha daromadlarining yarmini X tovarni, qolgan yarmini esa Y tovarni sotib olishga sarf qiladi. Agar bir yilda X tovar narxi 5 % ga, Y tovar narxi esa 15 % ga oshgan bo'lsa, iste'mol narxlar indeksini toping (oldingi yil narx indeksleri 100 % deb hisoblansin).

Javob: 110.

2. Jadvalda turli yillardagi narxlar indeksi keltirilgan:

Yillar	Narxlar indeksi, %	Inflyatsiya sur'ati
1	100	
2	112	
3	123	
4	129	

- a) har bir yil uchun inflyatsiya sur'atini toping;
 b) "70 kattaligi qoidasi"ga asoslanib, necha yilda inflyatsiyaning 2 marta oshishini aniqlang.

Javob: a) 12 %; 10 %; 5 %. b) 5,83; 7; 14.

3. Jadvalda "iste'mol savati"ga kiritilgan tovar mahsulotlar miqdori va ularning joriy t_n va bazis t_0 yildagi narxlari berilgan:

"Iste'mol savati"ga kiritilgan tovarlar turi	"Iste'mol savati"dagi tovar mahsulotlar miqdori	Tovar mahsulotlarning joriy yildagi narxi, (t)	Bazis yildagi tovar mahsulotlar narxi, (t_0)
X_1	50	4.3	3
X_2	20	5.5	5
X_3	75	7.7	7
X_4	100	13.2	12

- a) IN ni toping;
 b) (t_0 , t) yillar oralig'idagi inflyatsiya indeksi va inflyatsiya sur'atini toping.
 c) Inflyatsiya indeksi necha yilda 2 marta oshadi?

Javob: a) 112 %; b) 1,129; 12 %; v) 5,83.

4. Jadvalda "bozor savati"ga kiritilgan tovar mahsulotlarning turlari, ularning joriy t yildagi va bazis t_0 yildagi narxlari va ishlab chiqarish hajmlari berilgan.

"Bozor savati"ga kiritilgan tovarlar turi	Joriy yildagi ishlab chiqarish hajmi	Bazis t_0 yildagi ishlab chiqarish hajmi	Joriy t yilda tovar mahsulot narxi	Bazis t_0 yilda tovar mahsulotlar narxi
X_1	15	12	15	10
X_2	27	25	25	20
X_3	35	30	58	50
X_4	50	55	70	60

- a) joriy t yildagi nominal va real $YaMM$ ni toping;
 b) joriy t yildagi $YaMM$ deflyatorni toping;

Javob: a) 440; 6430; b) 118 %.

2.4-§. Pul muomalasi qonuni. Fisher tenglamasi

Pul hamma boshqa tovarlar uchun umumiy ekvivalent vazifasini bajaruvchi va tez almashtirish (likvidlik) xususiyatiga ega bo'lgan tovardir. Pul umumiy ekvivalent vazifasini bajaruvchi tovar bo'lganligi uchun o'zida ijtimoiy mehnatni mujassamlashtiradi va shu sababali tovarlar qiymatini o'lchay oladi. Buyumlarning og'irligi kilogramm, ularning eni va bo'yi metr bilan o'lchanganligi singari, tovarlarning narxi pul bilan o'lchanadi.

Bugungi kunda muomalada aniq, haqiqiy qiymatga ega bo'lgan pullarning quyidagi turlari mavjud:

- 1) tanga pul;
- 2) qog'oz pul;
- 3) kredit shaklidagi pullar (banknotlar, veksellar, cheklar, kredit kartochkalari);
- 4) elektron pullar.

Muomaladagi **naqd pul massasi** deb, muayyan bir vaqt oralig'ida muomalada mavjud bo'lgan naqd pullarning yig'indisiga aytiladi. U quyidagilardan tashkil topgan bo'ladi:

- 1) ish yurituvchi sub'ektlar hamda jamoa tashkilotlarining kassa qoldiqlari;
- 2) barcha banklarning oborot kassalaridagi naqd pulk qoldiqlari;
- 3) aholi qo'lidagi naqd pul.

Ish yurituvchi sub'ektlar, jamoa tashkilotlari va banklar kassalaridagi naqd pul qoldiqlari limit bilan chegaralanadi. Ular kassa qoldiqlarining limitdan ortiqcha qismini banklarga topshiradilar. Banklar esa oborot kassalaridagi limitdan ortiqcha naqd pul mablag'larini rezerv fondiga o'tkazadi. Banklarning rezerv fondidagi naqd pullar muomaladagi naqd pul massasiga kirmaydi.

Iqtisodiyotda mavjud bo'lgan pul massasining asosiy tashkil etuvchilari **pul agregati** deb ataladi. Pul agregatlari quyidagilardan tashkil topadi:

M_0 – muomaladagi naqd pul massasi;

$M_1 = M_0 +$ banklarning turli xil schetlaridagi foiz to'lanmaydigan muddatsiz depozitlar qoldig'i;

$M_2 = M_1 +$ banklardagi foiz to'lanadigan schetlardagi muddatsiz depozitlar qoldig'i;

$M_3 = M_2 +$ banklarning foiz to'lanadigan schetlaridagi muddatli depozitlar qoldig'i.

Demak, pul agregatiga naqd pullar, ma'lum muddatga yoki muddatsiz bankka qo'yilgan pullar, cheklar, sertifikatlar va boshqalar kiradi.

Bank tizimidan tashqaridagi barcha mavjud naqd pullar va xo'jalik sub'ektlari tomonidan bitimlar tuzish uchun ishlatilishi mumkin bo'lgan depozitlar **pul taklifi** deb ataladi. Pul taklifini quyidagi formula orqali ifodalash mumkin:

$$M=C+D, \quad (1)$$

bu yerda M -pul taklifi; C -aholi qo'lidagi naqd pullar miqdori; D -bank tizimi joriy hisoblaridagi mablag'lar.

Pul insonlarga o'zlarining, kundalik ehtiyojlarini qondirish va jamg'arish uchun kerak. Shu sababli pulga bo'lgan talab bitimlar uchun pulga talab bilan moliyaviy aktivlar uchun pulga bo'lgan talablarning yig'indisidan iborat bo'ladi.

Bitimlar uchun pulga bo'lgan talab – bu aholiga va korxonalarga tovar va xizmatlarni xarid qilish uchun zarur bo'lgan pul miqdoridir.

Moliyaviy aktivlar uchun pulga bo'lgan talab pulning jamg'arish vositasi sifatidagi funktsiyasiga asoslangan. Bunda odamlar o'zlarining moliyaviy aktivlarini aksiyalar, obligatsiyalar, bankdagi omonatlari ko'rinishida qo'llarida tutib turadi.

Agar pul taklifi talabdan kam bo'lsa, ya'ni zarur bo'lgan pul massasi muomalaga kiritilmasa, u holda to'lov krizisi yuzaga keladi. Natijada pul muomalasi izdan chiqadi.

Agar pul taklifi unga bo'lgan talabdan ortiq bo'lsa, ya'ni muomaladagi pul miqdori tovarlar massasidan ortib ketsa, u holda pul qadrsizlanib inflyatsiya yuzaga keladi.

Pul bozoridagi muvozanat deganda pulga bo'lgan talab bilan pul taklifi o'zaro teng bo'lgan holat tushuniladi. Bunday holat

$$M \cdot V = P \cdot Y \quad (2)$$

tenglama orqali ifodalanadi. Bu erda M -muomaladagi pul massasi; V -pulning aylanish tezligi; R - $YaMM$ deflyatori; Y -real $YaMM$.

Ushbu tenglama **pulning miqdoriy nazariyasi tenglamasi** deb ataladi. Uning chap qismi real pul zaxirasini (pul taklifini), o'ng qismi esa nominal $YaMM$ ni, ya'ni pulga bo'lgan talabni ifodalaydi.

Masalan, iqtisodiyotda 1000 birlik pul muomalada bo'lib, har bir pul birligi yil davomida 3 marta qo'ldan qo'lga o'tsa, u holda pul taklifi 3000 birlikka teng bo'ladi. Pul bozori muvozanatda bo'lishi uchun $YaMM$ hajmi (PY), ya'ni pulga bo'lgan talab ham 3000 birlikka teng bo'lishi kerak.

Xo'jalik harakatida pulning doimo aylanishda bo'lishi, uning o'z vazifalarini uzluksiz bajarib borishi **pul muomalasi** deb ataladi.

Pul muomalasi naqd va naqd bo'lmagan pullarning o'z vazifalarini bajarishidagi harakati oqibatida paydo bo'ladi.

Naqd pul bankdan chiqqach, korxona, tashkilotlar kassasiga va aholi qo'lga o'tadi. Oldi-sotdi va to'lov harakatlari bajarilgach, yana bankka qaytadi.

Naqd bo‘lmagan pul muomalasiga firma, korxona, tashkilotlarning bankdagi hisobida turgan pullarning harakati kiradi. Bunday muomala chek, kredit kartochkasi, veksel, obligatsiya, sertifikat va boshqa vositalar harakati shaklida bo‘ladi.

Daromad bo‘yicha **pul muomalasi tezligi** deb, har yilgi daromadlar oqimini moliyalashtirish shartida pul massasining 1 yil davomidagi aylanishlar soniga aytiladi. U

$$V = \frac{P \cdot Y}{M} = \frac{Y_N}{M}$$

formula orqali aniqlanadi. Bu erda Y_N – nominal $YaMM$ miqdori; M – muomaladagi pul miqdori (massasi); V – daromad bo‘yicha pul muomalasi tezligi. Masalan, 1988 yilda AQShning $YaMM$ 4860 mlrd. dollar bo‘lib, naqd pul massasi o‘rtacha 775 mlrd. dollar bo‘lgan bo‘lsa, u holda daromad bo‘yicha pul muomalasi tezligi

$$V = \frac{4860}{775} = 6,27$$

bo‘ladi. Demak, pul zaxirasidagi 1 dollar 6,27 dollarlik xarajatlarni moliyalashtiradi (ta‘minlaydi).

Aholining har 1 dollarlik daromadining qanchasini kelgusi xarajatlar uchun saqlanishi (jamg‘arish) ni

$$\frac{1}{V} = \frac{M}{Y_N}$$

nisbat orqali aniqlash mumkin. Yuqoridagi masalada

$$\frac{1}{V} = \frac{M}{Y_N} = \frac{775}{4860} = 0,17.$$

Demak, aholi o‘zining 1 dollarlik daromadidan 0,17 dollarini jamg‘arar ekan. Odatda pul muomalasi tezligi butun bir iqtisodiyot uchun hisoblanadi. Lekin ayrim hollarda uni alohida olingan bir individ uchun ham hisoblash mumkin.

Masalan, A shaxs bir yilda 200 000 p.b. daromad olib, bir yil davomida o‘rtacha 20 000 p.b. naqd pul qoldig‘iga (jamg‘armaga) ega bo‘lgan bo‘lsa, u holda ushbu shaxs uchun daromad bo‘yicha pul muomalasi tezligi

$$V = \frac{200000}{20000} = 10$$

bo‘ladi.

Miqdoriylik nazariyasini rivojlantirishga amerikalik iqtisodchi-matematik olim Irving Fisher katta hissa qo‘shgan. U miqdoriylik nazariyasini matematik yo‘l bilan aniqlab bergan. Fisher pulning xarid

quvvatiga ta'sir etuvchi asosiy omillar quyidagi

$$MV=PQ \quad (3)$$

tenglama orqali uzviy bog'langanligini isbotlagan. Bu tenglamada M -muomaladagi naqd pul miqdori; V -pulning aylanish tezligi; R -baholarning tortilgan o'rtacha darajasi; Q -tovar va xizmatlar miqdori.

Fisherning fikriga ko'ra, tovarlar bozorga kiringunga qadar o'zining haqiqiy bahosiga ega bo'lmaydi. Tovar bozorga kirkandan so'ng, bozordagi pul massasining miqdoriga qarab, o'z bahosiga ega bo'ladi. Demak, muomaladagi pul massasi tovar bahosini belgilaydi va unga proportsional ravishda o'zgaradi.

Fisher tenglamasining tahlili yana shuni ko'rsatadiki, muayyan vaqt oralig'idagi pul massasi pul muomalasi tezligiga teskari proportsional bo'ladi. Demak, agar pul muomalasi tezligi qancha katta bo'lsa, muomaladagi pul miqdori (massasi) shuncha kam bo'ladi va, aksincha, pul muomalasi tezligi qancha past bo'lsa, muomaladagi pul massasi shuncha ko'p bo'ladi.

1-misol. Agar $YaMM$ miqdori 100 mlrd. dollar bo'lib, pul taklifi bilan unga bo'lgan talab o'zaro teng bo'lsa va 24 mlrd. dollarni tashkil qilsa, u holda pul muomalasi tezligi qancha bo'ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra:

$$Y_n = 100 \text{ mlrd. doll.}$$

$$M_s (\text{pul taklifi}) = M_d (\text{pulga bo'lgan talab}) = 24 \text{ mlrd. doll.}$$

U holda pul muomalasi tezligi

$$V = \frac{Y_n}{M_s} = \frac{100 \text{ mlrd}}{24 \text{ mlrd}} = 4,17$$

ga teng bo'ladi. Demak, 1 yilda pul 4,17 marta aylanadi (muomalaga chiqadi).

Javob: pul muomalasi tezligi 4,17 ga teng.

2-misol. Agar narx darajasi $R=6$ bo'lib, ishlab chiqarilgan tovar va xizmatlar miqdori 150 birlik hamda pul muomalasi tezligi $V=5$ bo'lsa, u holda muomaladagi pul miqdori qancha bo'ladi?

Yechish. (3) ga asosan quyidagi tenglikni topamiz:

$$M = \frac{P \cdot Q}{V}.$$

Masalaning shartiga ko'ra, $P=6$, $Q=150$, $V=5$.

Demak,

$$M = \frac{6 \cdot 150}{5} = 180.$$

Javob: muomaladagi pul miqdori 180 birlikni tashkil qiladi.

Tayanch soʻz va iboralar

Pul, muomaladagi naqd pul massasi, pul agregati, pul taklifi, pulga boʻlgan talab, pul muvozanati, pulning miqdoriy nazariyasi, pul muomalasi, daromad boʻyicha pul muomalasi tezligi, Fisherning miqdoriylik nazariyasi.

Nazorat savollari

1. Pul nima?
2. Pulning qanday turlari mavjud?
3. Muomaladagi pul massasi nima va uning tashkiliy qismlari qanday?
4. Qanday pullar muomaladagi pul massasiga kirmaydi?
5. Pul agregati nima va uning tarkibiy qismlari qanday?
6. Pul taklifi nima?
7. Pulga boʻlgan talab qanday?
8. Toʻlov krizisi nima va u qachon roʻy beradi?
9. Pul bozoridagi muvozanat nima?
10. Pulning miqdoriy nazariyasi qanday tenglama yordamida ifodalanadi?
11. Pul muomalasi nima?
12. Naqd pul muomalasi nima?
13. Naqd boʻlmagan pul muomalasi qanday?
14. Daromad boʻyicha pul muomalasi tezligi nima?
15. Fisherning miqdoriylik nazariyasi qanday va u qanday tenglama yordamida ifodalanadi?
16. Fisher nazariyasiga koʻra muomaladagi pul massasi bilan pul muomalasi tezligi oʻzaro qanday bogʻlangan?

Masalalar

Agar muomaladagi pul massasi 778 mlrd. dollardan 850 mlrd. dollarga oʻzgarib, V pul muomalasi tezligi va K tovar miqdori oʻzgarmasa, u holda qanday holat roʻy berishi mumkin?

Javob: baho oshadi.

$YaMM$ hajmi 2000 mlrd. dollarga va pul muomalasi tezligi 4 ga teng boʻlsa, u holda pulga boʻlgan talab qanday boʻladi?

Javob: $M=500$ mlrd.doll.

Agar pul bir yilda 5 marta muomalaga chiqsa, u holda pulga boʻlgan talab qanday boʻladi?

Javob: *YaMM*ning 20 % ini tashkil qiladi.

Agar *YaMM*ning nominal hajmi 20000 mlrd. dollar bo'lib, muomaladagi pul massasi 5000 mlrd. dollar bo'lsa, u holda muomaladagi pul tezligi qanday bo'ladi?

Javob: 4.

Agar muomaladagi pul tezligi 2 marta oshib, *YaMM* hajmi 4 marta oshsa, u holda muomaladagi pul massasi qanday o'zgaradi?

Javob: 2 marta oshadi.

Agar muomaladagi pul massasi *YaMM* hajmining 10 % ini tashkil qilsa hamda *YaMM* hajmi 450 mlrd. dollardan iborat bo'lsa, u holda aholi har 1 dollar daromadidan qanchasini jamg'aradi?

Javob: 0,1 dollar.

Agar muomaladagi pul massasi 40 % ga kamayib, narxlar 20 % oshsa, u holda muomaladagi pul tezligi qanday o'zgaradi?

Javob: 2 marta oshadi.

Jamiyatlardagi tovar va xizmatlar hajmi o'zgarmagan holda muomaladagi pul massasi hamda narxlar darajasi 20 % ga oshsa, u holda muomaladagi pul tezligi qanday o'zgaradi?

Javob: O'zgarmaydi.

2.5-§. Real va nominal ish haqi

Bozor iqtisodiyotida ishchi kuchi boshqa har qanday tovar kabi o'z bahosiga ega. Bu baho ish haqi ko'rinishida ifodalanadi.

Ish haqi nominal, real va eng kam miqdordagi ish haqi ko'rinishida bo'ladi.

Nominal ish haqi ishlovchining ma'lum bir vaqt oralig'i (soat, kun, oy, hafta, yil) da qilgan mehnati evaziga olingan pul miqdorini bildiradi. Nominal ish haqining haqiqiy xarid quvvatini baholish uchun amaldagi narxlar darajasini hisobga olish lozim.

Nominal ish haqining mavjud narx darajasiga nisbati **real ish haqi** deb ataladi. Real ish haqi quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$Y = \frac{W}{P}, \quad (1)$$

bu yerda W – nominal ish haqi, P – narxlar darajasi (joriy yilda narx – navoning bazis yilga nisbatan necha marta o'zgarishini belgilab beradi).

1 – misol. Asqar bir oyda 500 000 so'm maosh oladi. Agar shu oydagi narxlar darajasi 5 ga teng bo'lsa (narx – navolar bazis yilga nisbatan 5 barobar oshgan bo'lsa), u holda uning real ish haqi qancha

bo`ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko`ra, $W=500\ 000$, $P=5$. U holda (1) formulaga asosan

$$Y = \frac{500000}{5} = 100000$$

bo`ladi. Demak, Asqarning real oylik maoshi 100 000 so`mni tashkil qiladi.

Javob: 100 000 so`m.

Ish haqi yollanma ishchilar uchun mehnat narxi ya`ni daromad bo`lgani uchun real daromadning o`zgarishini ifodalovchi quyidagi sxema orqali ifodalash mumkin:

$$(RD\ O') = (NoD\ O') - (NaD\ O'),$$

bu yerda:

$RD\ O'$ – real daromadninr o`zgarishi (foizda);

$NoD\ O'$ – nominal foydaning o`zgarishi (foizda);

$NaD\ O'$ – Narxlar darajasining o`zgarishi (foizda).

Yuqoridagi sxemani real ish haqining o`zgarishini aniqlashda ham qo`llash mumkin:

$$\Delta Y = \Delta W - \Delta P, \quad (2)$$

bu yerda ΔY – real ish haqining foizdagi o`zgarishi;  $\Delta W$  – nominal ish haqining foizdagi o`zgarishi; ΔP – narxlar darajasining foizdagi o`zgarishi.

2-misol. Joriy yilda o`tgan yilga nisbatan nominal ish haqi 40 % ga oshgan bo`lib, narxlar darajasi 25 % ga oshgan bo`lsa, real ish haqi qanchaga o`zgargan?

Yechish. Masalaning shartiga ko`ra,

$$\Delta W = 40\ %, \ \Delta P = 25\ \%$$

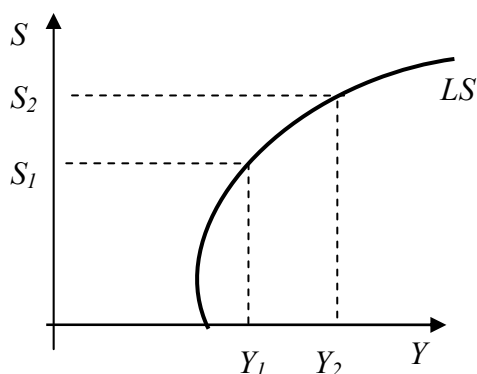
u holda,

$$\Delta Y = 40\% - 25\% = 15\%$$

Javob: 15 %.

Odamlar pulni tovar va xizmatlarni sotib olish uchun ishlab topadilar. Shu sababli ular qancha ishlash kerakligini aniqlashda nominal ish haqi emas, balki haqiqiy, real ish haqidan foydalanadilar. Demak, mehnat taklifi real ish haqi darajasi bilan belgilanadi (2.1-shakl).

Bu shakldan ko`rinadiki, agar peal ish haqi ( $Y$ ) qanchali yuqori bo`lsa, u



2.1-shakl. Mehnat taklifi egri chizig`i.

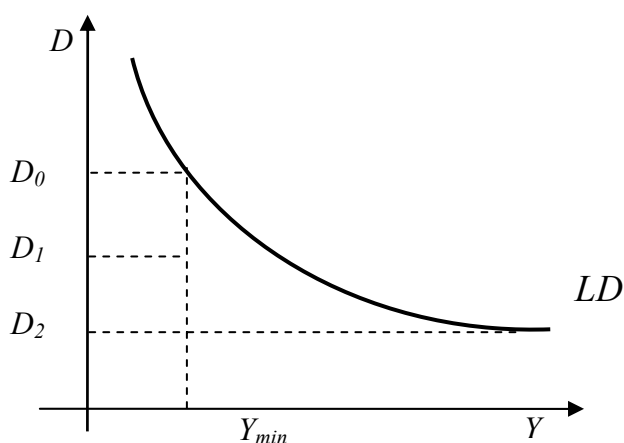
holda ish kuchi taklifi (S) ham shunchali yuqori bo`ladi.

Mehnatga bo`lgan talab egri chizio`ini quyidagi 2.2- shakldagidek tasvirlash mumkin.

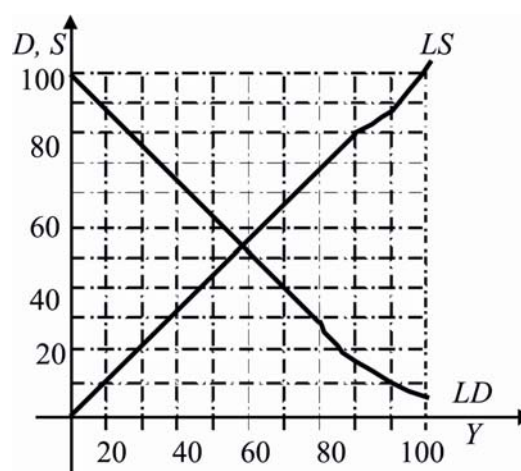
Bu shakldan ko`rinadiki, agar real ish haqi ( $Y$ ) qanchalik past bo`lsa, u holda

mehnatga bo`lgan talab ( $D$ ) shunchali yuqori bo`ladi.

Yuqoridagi shakllarda D – mehnatga bo`lgan talab;  $S$  – mehnat taklifi;  $LS$  – mehnat taklifi egri chizio`i; LD – mehnatga bo`lgan talab egri chizio`i; $Y_{\min}$ – ish haqining eng kam miqdori.



2.2- shakl. Mehnatga bo`lgan talab egri chizig`i.



2.3-shakl. Mehnatga bo`lgan talab va taklif egri chiziqlari.

Ish haqining eng kam miqdori – ish haqiga qonun asosida o`rnatilgan quyi chegara bo`lib, yollanma ishchiga undan kam miqdorda maosh to`lash mumkin emas.

3-misol. Quyida keltirilgan ma`lumotlar asosida mehnat taklifi va mehnatga bo`lgan talab egri chiziqlarini yasang.

2.5-jadval

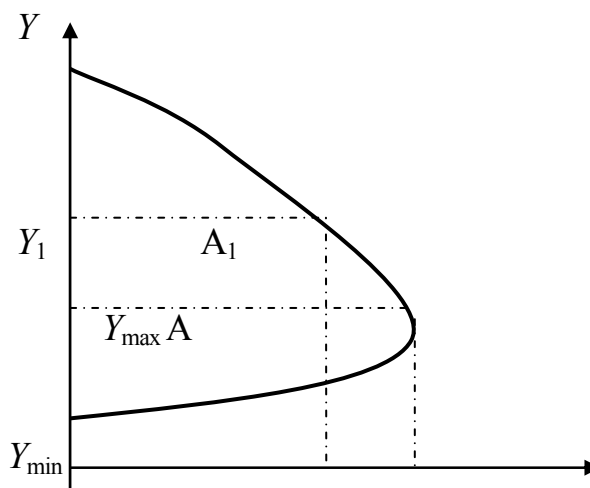
Real ish haqi, (Y) (doll.)	Mehnatga bo`lgan talab, (D)	Mehnat taklifi
100	10	100
90	20	80
80	30	70
70	40	60
60	50	50
50	60	40
40	70	30
30	80	20
20	90	10

2.3-shakldan ko`rinadiki, real ish haqi  $Y=60$  bo`lganda mehnatga bo`lgan talab va taklif o`zaro teng bo`ladi. Bu holda $Y=60$ dollardan

iborat ish haqi muvozanat ish haqi deyiladi.

Yuqorida biz real ish haqi oshgan sari mehnat taklifi shuncha oshadi deb ko'rsatib o'tdik. Lekin, real ish haqining cheksiz ravishda oshirish mumkin emas. Chunki uning ma'lum bir darajasidan so'ng uning oshishi mehnat taklifini kamayishiga (mehnatni bo'sh vaqtga almashtirish holatiga) olib keladi. Bu aytilganlarni quyidagi shakl yordamida tasdiqlash mumkin:

Bu shaklda A nuqta eng yuqori mehnat taklifiga mos keladi. Bu mehnat taklifi eng katta real ish haqiga mos keladi. Agar real ish haqini $Y_{\max}$ dan yuqori, masalan Y_1 darajada belgilansa, u holda mehnat taklifi S_1 darajaga kamayadi.



Tayanch so'z va iboralar

Nominal ish haqi, real ish haqi, mehnat taklifi egri chizig'i, mehnatga bo'lgan talab egri chizig'i, ish haqining eng kam miqdori.

S_1 $S_{\max}$ S
2.4-shakl. Ish haqining yuqori darajasida mehnat taklifi egri chizig'i.

Nazorat savollari

1. Bozor iqtisodiyotida ishchi kuchi qanday belgilanadi?
2. Ish haqining qanday turlari mavjud?
3. Nominal ish haqi nima?
4. Real ish haqi nima?
5. Real ish haqi qanday aniqlanadi?
6. Real ish haqi ishning foizlardagi qiymatini qanday aniqlaydi?
7. Mehnat taklifi bilan real ish haqi orasida qanday bog'lanish bor?
8. Mehnatga bo'lgan talab bilan real ish haqi orasida qanday bog'lanish bor?
9. Mehnatga bo'lgan talab va taklif egri chizig'ining ko'rinishlari qanday?
10. Ish haqining eng kam miqdori nima?
11. Ish haqini chek siz ravishda oshirib borish qanday oqibatlarga olib kelishi mumkin?

Masalalar

1. Agar Mansur yozgi ta'til davrida (iyun, iyul, avgust oylarida) kichik biznes bilan shug'ullanib 400 000 so'm pul ishlagan bo'lsa, hamda bu oylar ichida inflyasiya darajasi 8 ga teng bo'lsa, u holda Mansurning real ish haqi qancha bo'lgan?

Javob: 50 000 so'm.

2. Bahrom chet el firmasida bir oy ishlab 720 000 so'm pul ishlagan. Agar shu oydagi inflyatsiya darajasi 12 ga teng bo'lsa, u holda Bahromning ish haqi qancha bo'lgan?

Javob: 60 000 so'm.

3. Anvar biznes bilan shug'ullanib bir kunda 12 000 so'm pul ishlagan. Agar joriy yildagi narx darajasi 6 ga teng bo'lsa, u holda Anvarning real ish haqi qancha bo'ladi?

Javob: 2000 so'm.

4. Joriy oyda o'tgan oyga nisbatan nominal ish haqi 30 % ga oshgan bo'lib narxlar darajasi 20 % ga oshgan bo'lsa, u holda real ish haqi qanchaga o'zgargan?

Javob: 10 % ga oshgan.

5. Joriy yilda nominal ish haqi o'tgan yilga nisbatan 60 % ga oshgan bo'lib narxlar darajasi 40 % ga oshgan bo'lsa, u holda real ish haqi qanchaga o'zgargan?

Javob: 20 foizga oshgan.

6. Joriy kunda oldingi kunga nisbatan nominal ish haqi 20 % ga oshgan, narxlar darajasi esa 10 % ga kamaygan bo'lsa, real ish haqi qanchaga o'zgaradi?

Javob: 30 % ga oshgan.

2.6-§. Soliqlar. Ish haqidan olinadigan daromad solig'ini hisoblash

Soliqlar milliy daromadni taqsimlash va qayta taqsimlash jarayonida uning bir qismini davlat ixtiyoriga majburiy olish shaklidir. Soliq byudjetni (pul fondini) tashkil etishda asosiy vosita hisoblanadi.

Soliqlarning majburiyligi O'zbekiston Respublikasi Oliy Majlisi tomonidan tasdiqlangan huquqiy va me'yoriy qonunlar bilan ta'minlanadi. Demak, soliqlarni to'lamaslikka na yuridik, na jismoniy shaxslarning haqqi yo'q. Soliq to'lash xo'jalik sub'ekti bilan davlat o'rtasidagi iqtisodiy aloqaning asosiy shakli, daromadning xo'jalik

sub'ekti bilan davlat o'rtasida taqsimlash vositasi hisoblanadi.

Soliqlarni zarurligi davlat oldida turgan aholining kam ta'minlangan qismi (talabalar, nafaqaxo'rlar, nogironlar va boshqalar)ni ijtimoiy himoya qilish, mamlakat mudofaasini ta'minlash, mamlakat fuqarolarining tinch mehnat qilishi va yashashini ta'minlash, iqtisodiyotni boshqarish, xorijiy mamlakatlar bilan iqtisodiy, madaniy, siyosiy aloqalarni o'rnatish va boshqa shu kabi zaruriyat va vazifalardan kelib chiqadi.

Bu vazifalarni amalga oshirish nihoyat katta moliyaviy resurslarni talab qiladi. Bu resurslarni esa faqat soliqlar orqali hosil qilish mumki.

Soliq olinadigan daromadlar, mol-mulklar, iqtisodiy faoliyatlar **soliq ob'ekti** deb ataladi. Masalan, iqtisodiy faoliyatlardan olinadigan foyda, ish haqi, qo'shilgan qiymat, er, imorat, transport va boshqalar soliq ob'ekti hisoblanadi.

Soliq munosabatlarida qatnashuvchi tomonlar **soliq sub'ektlari** deyiladi. Bunday tomonlarga, asosan, soliq undiruvchilar va soliq to'lovchilar kiradi. Amaliyotda esa soliq sub'ekti deganda soliq to'lovchilar tushuniladi.

Soliq to'lovchilar ikkiga bo'linadi:

1) huquqiy (yuridik) shaxslar, ya'ni korxona, firma, tashkilot, birlashmalar va hokazo;

2) aholi, ya'ni ayrim jismoniy shaxslar, masalan, qo'shilgan qiymat solig'i, aktsiz yoki foydaga soliq solishda soliq sub'ekti bo'lib huquqiy shaxslar hisoblansa, er, mol-mulk va transport vositalariga soliq solishda esa nafaqat huqukiy shaxslar, balki u bilan birga jismoniy shaxslar ham soliq sub'ekti hisoblanadi.

Soliq nima hisobidan to'lansa, o'sha soliq manbai hisoblanadi. Masalan, erga soliq solinayotganda er maydoni soliq ob'ekti bo'lsa, er keltiradigan daromad soliq maibai bo'ladi.

Soliq ob'ektining bir birligi **soliq birligi** deb ataladi. Masalan, aholi ixtiyoridagi erdan soliq olinayotganda har bir gektar er soliq birligi bo'ladi.

Soliq stavkalari proportsional, progressiv va regressiv ko'rinishda bo'ladi.

Proportsional soliq stavkasida bir xil miqdordagi daromad va foydaga ega bo'lgan huquqiy va jismoniy shaxslar bir xil proportsiyada soliq to'lashadi. Bunda soliq stavkasi qat'iy o'rnatilgan bo'lib, soliq manbaining hajmi kattalashib borgan sari olinadigan soliq hajmi ham proportsional ravishda oshib boradi. Masalan, fuqaro mol-mulkining

qiymati 2000000 so'm bo'lib, undan undirilgan soliq stavkasi 2 % deb belgilangan bo'lsa, u holda soliq 40000 so'mni ($2000000 \cdot 0,02$), 5000000 so'm bo'lsa, soliq summasi 100000 so'mni ($5000000 \cdot 0,02$) tashkil qiladi.

Daromad yoki foyda ortib borishi bilan soliq stavkasi ham ortib borishi ko'zda tutilgan bo'lsa, bunday stavka **progressiv soliq stavkasi** deb ataladi. O'zbekiston Respublikasi aholisi daromadidan olinayotgan soliq stavkasi progressiv soliq stavkasi hisoblanadi. Hozirgi kunda aholi daromadi (ish haqi)dan 1–6 ish haqi minimumiga teng bo'lgan qismidan 12%, 7–10 ga minimal ish haqiga teng bo'lgan qismidan 17% va 10 dan oshgan minimal ish haqiga teng bo'lgan qismidan 22% soliq stavkasi belgilanadi. Demak, ishchining daromadi qancha oshib borsa, shuncha soliq hajmi katta bo'ladi.

Regressiv soliq stavkasida daromad oshishi bilan soliq stavkasi kamaya boradi. Bunday stavkalar biror faoliyat yoki mahsulot ishlab chiqarishni ko'paytirishni rag'batlantirish maqsadida o'rnatiladi. Bunday stavkalar O'zbekiston qonunchiligida 1995 yil 1 yanvardan boshlab foydaga tortiladigan soliqqa nisbatan qo'llana boshlandi. Unga binoan, korxona foydasidan 38% soliq undirib olinishi ko'zda tutilgan. Hozirgi kunda bunday soliq 10% ni tashkil qiladi. Lekin korxona ishlab chiqarish hajmining oshib borishi bilan bu soliq stavkasi kamayib boradi.

Asosiy ish joyidan oladigan daromaddan tashqari boshqa tadbirkorlik yoki ishbilarmonlik yo'li bilan topilgan daromad to'g'risida har bir huquqiy va jismoniy shaxslar soliq axborotnomasini yozishi kerak. Bunday axobrotnoma **soliq deklaratsiyasi** deb ataladi. Deklaratsiyada huquqiy va jismoniy shaxslarning yil davomida qilgan xarajat va daromadlari ko'rsatiladi. Soliq deklaratsiyasi huquqiy va jismoniy shaxslarning olgan sof daromadlarini aniqlash va uni soliqqa tortishga yordam beradi.

Huquqiy va jismoniy shaxslarni soliqdan ozod etish, ular to'laydigan soliq miqdorini kamaytirish yoki soliq to'lash shartini engilashtirish soliq qonunchiligida **soliq imtiyozi** deb ataladi. Imtiyozlar soliqni rag'batlantirish vazifasini kuchaytirishga qaratilgan. Ayrim soliqlarda turli imtiyoz guruhlari mavjud. Ularni ikki turga ajratish mumkin:

1. soliqdan batamom ozod etiluvchilar;
2. soliqdan qisman ozod etiluvchilar;

Iqtisodiy mehnatga qarab soliqlar egri va to'g'ri soliq'larga bo'linadi.

To'g'ri soliqlar bevosita daromad oluvchi mulk egasining daromadidan olinadi. Bunday soliqlar huquqiy va haqiqiy soliq to'lovchi bitta shaxs bo'ladi. Soliq oldindan aniq belgilangan bo'ladi. Foizdagi (daromadga) soliq, er soliqlari to'g'ri soliq'larga misol bo'ladi.

Egri soliqlar korxona va tashkilotlarning moliyaviy yakuniga bog'liq bo'lmaydi. Ular sotilayotgan tovarlar bahosiga yoki xizmatlar tarifiga ustama qilib belgilanadi. Ular tovar qiymati va xizmat summasini oshiradi. Egri soliqlarni mahsulot sotuvchi yoki xizmat ko'rsatuvchilar emas, balki iste'molchilar to'laydi. Egri soliq'larga qo'shilgan qiymat solig'i, cheklangan tovarlarga aktsiz solig'i kiradi.

Aktsiz – keng iste'molchi uchun muhim bo'lmagan ayrim toifadagi aholining tanlangan talab-ehtiyojlarini qondirishda undiriladigan egri soliqdir. Aktsiz solig'ining ob'ekti bo'lib realizatsiya qilinadigan ayrim tovarlarning (aroq, vino, pivo, tamaki mahsulotlari va boshqalar) qiymati hisoblanadi.

Byudjetga o'tkazish nuqtai nazaridan soliqlar davlat soliqlari va mahalliy soliq'larga bo'linadi.

Davlat byudjetiga tushadigan barcha soliqlar **davlat soliqlari** deyiladi. Bunday soliq'larga qo'shilgan qiymat solig'i, aktsizlar, aholining daromad solig'i, respublika tasarrufida bo'lgan va unga itoat etuvchi korxonalardan tushadigan foydaga va daromadga soliqlar hamda fuqarolarning daromad solig'i kiradi.

O'zbekiston Respublikasining «mahalliy soliqlar va yig'imlar» to'g'risidagi qonuniga binoan mahalliy byudjetlarga to'liq tushadigan va boshqa byudjetlarga taqsimlanmaydigan soliqlar **mahalliy soliqlar** deb ataladi. Bunday soliq'larga er solig'i, mol-mulk solig'i, transport vositasi egalaridan olinadigan soliqlar, reklama solig'i va boshqalar kiradi.

Aholi soliqlari deganda aholining daromadlari, mol-mulki qiymatlari, foydalanayotgan erlari, transport vositalari uchun davlat byudjetiga qonun bo'yicha to'lanadigan majburiy to'lovlar tushuniladi.

Aholi daromadlarini soliqqa tortish tartibi quyidagicha: fuqarolarning asosiy ish joyi mehnat daftarchasi saqlanadigan korxona, tashkilot va muassasa hisoblanadi. Shu erda fuqaroning olgan yalpi daromadi soliqqa tortiladi.

Fuqaroning yalpi daromadi:

- mehnat majburiyatlarini bajarish bilan bog'lik bo'lgan ish haqi;

- mukofotlar;
- aktsiyalardan olinadigan dividendlar;
- korxona, tashkilotlarning foydasini taqsimlash natijasida olinadigan daromad;
- belgilangan me'yordan ortiq miqdorda korxona tomonidan fuqaroga berilgan pul va moddiy yordam summolari;

Fuqaroning asosiy ish joyidan tashqarida topgan qo'shimcha daromadi ham, soliq deklaratsiyasi asosida, uning yalpi daromadiga qo'shilgan holda soliqqa tortiladi.

Ish haqidan olinadigan daromad solig'ini hisoblash

Fuqarolarniig daromadidan olinadigan soliq O'zbekistoi Respublikasi Davlat Soliq qo'mitasining 1990 yil 21 may 33/24 – sonli yo'riqnomasi va unga kiritilgan o'zgartirishlarni hisobga olgan holda, 1995 yildan boshlab har oyda hisoblab boriladi. Bunda progressiv soliq stavkasidan foydalaniladi.

Progressiv soliq stavkasining g'oyasi quyidagidan iborat:

Joriy oyda fuqaroning ish haqidan olinadigan soliq miqdorini aniqlash uchun:

1. yilning boshidan joriy oygacha bo'lgan oylarda barcha maoshlari qo'shiladi va umumiy daromad miqdori aniqlanadi;
2. joriy oygacha bo'lgan barcha oylardagi eng kam ish haqi miqdorlari qo'shib, ularning yig'indisi topiladi va joriy oy uchun umumiy minimal ish haqi darajasi deb qabul qilinadi;
3. umumiy daromadning 1-6 umumiy minimal ish haqi darajasiga teng bo'lgan qismidan 12%, 7-10 umumiy minimal ish haqi darajasiga teng bo'lgan qismidan 17% va 10 dan oshgan, umumiy, minimal ish haqi darajasiga teng bo'lgan qismidan 22% soliq olinadi;
4. topilgan miqdor fuqaroning yilning boshidan to joriy oygacha bo'lgan barcha daromadidan olinadigan soliq miqdorini ko'rsatadi. Bu miqdordan joriy oydan oldingi oygacha bo'lgan barcha daromatlardan olingan soliq miqdorini ayirib, joriy oydagi ish haqi uchun olinadigan soliq miqdori aniqlanadi.

Demak, yilning k -oyida fuqaroning ish haqidan olinadigan soliq miqdori quyidagi ifodalar yordamida topiladi:

$$\overline{DC}_k = 6(m_1 + m_2 + \dots + m_k) \cdot 0,12 + 4(m_1 + m_2 + \dots + m_k) \cdot 0,17 +$$

$$+ [D_1 + D_2 + \dots + D_k - 10(m_1 + m_2 + \dots + m_k)] \cdot 0,22 \quad (1)$$

$$DC_k = \overline{DC_k} - \overline{DC_{k-1}}, \quad (2)$$

bu erda D_i – fuqaroning i – oyidagi daromadi, m_i – i – minimal ish haqi miqdori; DC – fuqaroning $1-k$ oylar ichida topgan umumiy daromadidan olingan umumiy soliq miqdori; DC_k – fuqaroning k -oydagi ish haqidan olinadigan soliq miqdori:

Xususan, yilning birinchi oyidagi fuqaroning olgan maoshidan olinadigan soliq miqdori quyidagi formula yordamida topiladi:

$$DC_1 = 6m_1 \cdot 0,12 + 4m_1 \cdot 0,17 + [D_1 - 10m_1] \cdot 0,22, \quad (3)$$

bu erda m_1 – yanvar oyidagi eng kam ish haqi, D_1 – shu oyidagi daromad.

Agar $D_1 < 10m_1$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, ya’ni fuqaroning daromadi 10 ta minimal ish haqidan kam bo‘lsa, quyidagi formuladan foydalanishi mumkin.

$$DC_1 = 6m_1 \cdot 0,12 + [D_1 - 6m_1] \cdot 0,17. \quad (4)$$

1-masala. Fuqaroning yanvar oyidagi ish haqi 250 000 so‘m bo‘lib, shu oyda eng kam ish haqi darajasi 28 040 so‘m bo‘lsa, u holda fuqaroning daromadidan olinadigan soliq miqdori qancha bo‘ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko‘ra, $D_1=250\,000$, $m_1=28\,040$.

$D_1=250\,000 < 10m_1=280\,400$ shart o‘rinli bo‘lgani uchun yuqoridagi (4) formuladan foydalanamiz.

$$DC_1 = 6 \cdot 28040 \cdot 0,12 + (250000 - 6 \cdot 28040) \cdot 0,17 = 34088.$$

Javob: 34088 so‘m.

Fuqaroning ikkinchi (fevral) oyidagi ish haqidan olinadigan soliq miqdori quyidagicha topiladi:

$$\overline{DC_2} = 6(m_1 + m_2) \cdot 0,12 + 4(m_1 + m_2) \cdot 0,17 + [D_1 + D_2 - 10(m_1 + m_2)] \cdot 0,22 \quad (5)$$

$$DC_2 = \overline{DC_2} - DC_1; \quad (6)$$

$$D_1 + D_2 > 10(m_1 + m_2), \quad (7)$$

bu yerda: $\overline{DC_2}$ – fuqaroning yilning birinchi ikki oyidagi umumiy daromadidan olinadigan soliq miqdori; D_1 , D_2 – fuqaroning mos ravishda yanvar va fevral oylaridagi daromadi; m_1 , m_2 – mos ravishda yanvar va fevral oylaridagi eng kam ish haqi darajasi.

2-masala. Yuqorida 1-masalada yanvar oyi uchun keltirilgan shartlar fevral oyi uchun ham saqlangan bo‘lsa, u holda fuqaroning fevral oyida to‘laydigan daromad solig‘i qancha bo‘ladi?

Yechish. Masalaniig shartiga ko'ra:

$$m_1+m_2=28040, D_1=D_2=250000.$$

Masaladagi

$$D_1+D_2=250000+250000=500000,$$

$$m_1+m_2=28040+28040=56080$$

ko'rsatkichlar mos ravishda fuqaroning 2 oydagi umumiy daromadi va umumiy minimal ish haqini ifodalaydi. Bu ko'rsatkichlarni solishtirib

$$D_1+D_2 < 10(m_1+m_2)$$

tengsizlik o'rinli ekanligini ko'rish mumkin. Demak, fuqaroning fevral oyidagi daromad solig'ini quyidagi formula yordamida topish mumkin:

$$\overline{DC_2} = 6(m_1+m_2) \cdot 0,12 + [D_1+D_2-6(m_1+m_2)] \cdot 0,17 \quad (8)$$

Bu formulaga asosan:

$$\overline{DC_2} = 6 \cdot 56080 \cdot 0,12 + [500000 - 6 \cdot 56080] \cdot 0,17 = 68176.$$

Demak, fevral oyidagi daromad solig'i:

$$DS_2 = \overline{DC_2} - DS_1 = 68176 - 34088 = 34088.$$

Javob: 34088 so'm.

3-masala. Agar fuqaroning mart oyidagi oylik maoshi hamda eng kam ish haqi darajasi yuqoridagi misoldagidek bo'lib, u mart oyida 100000 so'm mukofot va aktsiyalardan 50000 so'm dividend olgan bo'lsa, u holda bu fuqaro mart oyidagi daromadidan qancha soliq to'laydi?

Yechish. Fuqaro yanvar-mart oylaridagi umumiy daromadi

$$250000+250000+250000+100000+50000=900000 \text{ so'm}$$

bo'ladi. Shu oylardagi eng kam ish haqi darajalarining yig'indisi 84120 so'm bo'ladi.

Demak, $D_1+D_2+D_3=900000 > 10(m_1+m_2+m_3) = 841200$ shart o'rinli. Bu holda (1) va (2) formulalardan ($k=3$ bo'lgan hol uchun) foydalanib topamiz:

$$\overline{DC_3} = 6(m_1+m_2+m_3) \cdot 0,12 + 4(m_1+m_2+m_3) \cdot 0,17 + [D_1+D_2+D_3-10(m_1+m_2+m_3)] \cdot 0,22,$$

$$\overline{DC_3} = 84120 \cdot 0,72 + 84120 \cdot 0,68 + 58800 \cdot 0,22 = 130704,$$

bundan:

$$DC_3 = \overline{DC_3} - \overline{DC_2} = 130704 - 68176 = 62528.$$

Javob: 62528 so'm.

4-masala. Agar aprel oyidagi minimal ish haqi 28040 so'mligicha

saqlanib, fuqaroning oylik maoshi 450000 so‘m bo‘lgan bo‘lsa, u holda uning aprel oyidagi daromad solig‘i qancha bo‘ladi?

Yechish. Fuqaroning yanvar-aprel oylaridagi umumiy daromadi $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 1350000$ so‘m, shu oylardagi eng kam ish haqlarining yig‘indisi 112160 so‘m bo‘ladi. (1) va (2) formulalardan $k=4$ bo‘lgan hol uchun foydalanib,

$$\begin{aligned} \overline{DC}_4 &= 6 \cdot 112160 \cdot 0,12 + 4 \cdot 112160 \cdot 0,17 + [1350000 - 10 \cdot 112160] 0,22 = \\ &= 80755,2 + 76268,8 + 50248 = 207272 \end{aligned}$$

ni topamiz. Bundan

$$DC_4 = \overline{DC}_4 - \overline{DC}_3 = 207272 - 130704 = 76568.$$

Javob: 76568 so‘m.

Tayanch so‘z va iboralar

Soliqlar, soliq ob‘ekti, soliq sub‘ekti, soliq manbai, soliq birligi, soliq stavkasi, proportsional soliq stavkasi, progressiv soliq stavkasi, regressiv soliq stavkasi, soliq deklaratsiyasi, soliq imtiyozi, to‘g‘ri soliqlar, egri soliqlar, davlat soliqlari, mahalliy soliqlar, aholi soliqlari.

Nazorat savollari

1. Soliqlar nima?
2. Soliqlarning zaruriyligi nimadan iborat?
3. Soliqlarning majburiyligi nimadan iborat?
4. Soliq ob‘ekti nima?
5. Soliq sub‘ekti nima?
6. Soliq to‘lovchilarning qanday turlari mavjud?
7. Soliq manbai nima?
8. Soliq birligi nima?
9. Soliq stavkasi nima va uning turlari qanday?
10. Proportsional soliq stavkasi qanday?
11. Progressiv soliq stavkasi qanday?
12. Regressiv soliq stavkasi qanday?
13. Soliq deklaratsiyasi nima?
14. Soliq imtiyozi nima va uning qanday turlari mavjud?
15. To‘g‘ri soliqlar deganda nimani tushunasiz?
16. Egri soliqlar deganda nimani tushunasiz?
17. Aktsiz solig‘i nima?
18. Davlat solig‘i nima?
19. Mahalliy soliqlar deganda nimani tushunasiz?
20. Aholi soliqlari deganda nima tushunasiz?

21. O'zbekistonda ish haqidan daromad solig'i
22. qanday hisoblanadi?

Masalalar

1. Yilning boshida Ravshanning oylik maoshi 300000 so'm bo'lib, eng kam ish haqi darajasi 20000 so'm bo'lgan bo'lsa, yanvar oyida Ravshan qancha soliq to'laydi?

Javob: 50000 so'm.

2. Fevral oyida Ravshanning oyligi 360000 so'm bo'lgan. Eng kam ish haqi darajasi 25000 so'm bo'lgan bo'lsa, fevral oyida Ravshan qancha soliq to'laydi?

Javob: 59200 so'm.

3. Mart oyida Ravshanning oylik maoshi hamda eng kam ish haqi fevral oyi darajasida saqlangan. Lekin Ravshan bu oyda aktsiyalardan 18000 so'm dividend olgan. Bu oydagi Ravshanning to'lashi kerak bo'lgan daromad solig'i qancha bo'ladi?

Javob: 63000 so'm.

4. Agar aprel oyida ham eng kam ish haqi darajasi va Ravshanning oylik maoshi fevral oyidagidek bo'lsa hamda Ravshan aprel oyida 100000 so'm mukofot olgan bo'lsa, u holda uning to'laydigan solig'i qancha bo'ladi?

Javob: 84200 so'm.

5. May oyida Ravshanning oylik maoshi va eng kam ish haqi darajasi aprel oyidagiga nisbatan 12 % ga oshgan bo'lsa, u holda may oyida Ravshan qancha soliq to'laydi?

Javob: 51568 so'm.

6. Iyun oyida Ravshanning oylik maoshi va eng kam ish haqi may oyi darajasida saqlangan, lekin bu oyda u 20000 so'm qo'shimcha daromadga ega bo'lgan bo'lsa, u bu oyda qancha soliq to'laydi?

Javob: 69968 so'm.

7. Iyul oyida ham eng kam ish haqi darajasi va Ravshanning oyligi 5-masala shartidagidek bo'lgan bo'lsa, u holda iyul oyidagi soliq miqdori qancha bo'ladi?

Javob: 65560 so'm.

8. Avgust oyida eng kam ish haqi darajasi hamda Ravshanning oyligi iyul oyi darajasida saqlangan va Ravshan bu oyda 100000 so'm mukofot olgan. Avgust oyida Ravshan qancha daromad solig'i to'laydi?

Javob: 87568 so'm.

2.7-§. Ishsizlik darajasini hisoblash

Ish kuchi yoki **yosh iqtisodiy faol aholi** deb, aholining mehnatga layoqatli yoshdagilar tarkibiga kiruvchi ishlayotgan va ishsizlarning umumiy soniga aytiladi.

Bozor iqtisodiyoti sharoitida ishchi kuchi ham boshqa mehnat mahsulotlari kabi, tovar shakliga ega bo'lib, tovar – pul munosabatlarida faol ishtirok etadi.

Mamlakatda yashovchi barcha aholini uch guruhga ajratish mumkin.

Birinchi guruhga 16 yoshgacha bo'lgan bolalar hamda maxsus muassasalarda saqlanayotgan shaxslar kiradi. Masalan, ruhiy kasalliklar shifoxonasida, ahloq tuzatish muassasalarida bo'lganlar. Aholining bu qismi daromad keltiruvchi ijtimoiy foydali faoliyat bilan shug'ullana olmaydi.

Ikkinchi guruhga ishlashi mumkin, lekin bir qator sabablarga ko'ra ishlamaydigan aholi kiradi. Ularga o'quvchilar, uyda mehnat bilan shug'ullanuvchilar kiradi.

Uchinchi guruhga qolgan barcha aholi kiradi va ular ishchi kuchini tashkil etib, o'z navbatida ishlayotganlar va ishsizlarga bo'linadi.

Ishlayotgan yoki **band bo'lgan aholi** deb, mehnatga layoqatli yoshdagi ijtimoiy ishlab chiqarishda band bo'lgan aholiga aytiladi.

Ishsizlar bu ishchi kuchlarining bir qismi bo'lib, ijtimoiy ishlab chiqarishda band bo'lmagan, lekin ishlashni xohlovchi va ish qidirayotganlardir.

Har bir mamlakat ishlayotganlar va ishsizlarni o'zining qonunchiligida belgilab qo'yilgan me'yorlarga muvofiq hisobga oladi.

Ishsizlik darajasi, ya'ni iqtisodiyotda ishchi kuchlaridan foydalanish darajasi quyidagi formula orqali aniqlandi:

$$U = \frac{n}{N} \cdot 100\%, \quad (1)$$

bu erda U – ishsizlik darajasi, n – ishsizlar soni, N – ish kuchi soni.

1-misol. Agar biror mamlakatning barcha aholisi soni 30 mln. kishini tashkil qilib, ular ichida 16 yoshga to'lmaganlar va maxsus muassasalardagi shaxslar soni 10 mln. kishi, ish kuchi tarkibidan chiqib ketganlar esa 8 mln. kishi, ijtimoiy mehnatda band bo'lganlar 11,4 mln. kishi hamda ishsizlar soni 0,6 mln. kishini tashkil qilsa, ushbu mamlakatdagi ishsizlik darajasi qanday bo'ladi?

Yechish. Masalaning berilganlaridan foydalanib, mamlakatdagi ishchi kuchi sonini topamiz. Buning uchun barcha aholi sonidan, ishchi kuchi safidan chiqib ketganlar soni bilan 16 yoshga to'lmaganlar va maxsus muassasalardagi shaxslar sonini ayiramiz, ya'ni

$$N=30 \text{ mln.} - 10 \text{ mln.} - 8 \text{ mln.} = 12 \text{ mln.}$$

Masalaning shartiga ko'ra, mamlakatdagi ishsizlar soni $n=0,6$ mln. kishidan iborat. Endi yuqoridagi (1) formulaga asosan

$$U = \frac{0,6}{12} \cdot 100\% = 5\%$$

ni topamiz.

Javob: mamlakdagi ishsizlik darajasi 5 %.

Mehnat faqat ishlab chiqarish jarayonini amalga oshirishning zarur sharti bo'lmasdan, balki inson uchun daromad olishning asosiy manbaidir. Shuning uchun ham ishsizlik darajasi mamlakatning ijtimoiy – iqtisodiy rivojlanishini aks ettiruvchi muhim makroiqtisodiy ko'rsatkichlardan biri hisoblanadi.

Ishsizlikning friksion, strukturaviy va davriy turlari mavjud.

Friksion ishsizlik ish qidirish yoki kutish bilan bog'liq bo'lgan ishsizlikdir. Bunda aholi turar joyining almashishi, o'quv yurtlarini tugallashi yoki mavsumiy ishlarning tugallanishi kabi sabablarga ko'ra vaqtincha ishsizlar qatorida bo'ladi.

Strukturaviy ishsizlik. Bunday ishsizlik ishlab chiqarishning qisqarishi va buning oqibatida ish kuchlariga bo'lgan talabning kamayishi natijasida paydo bo'ladi. Barcha mamlakatlarda friksion va strukturaviy ishsizlik ma'lum darajada mavjud bo'ladi va bunday holat iqtisodiyotning rivojlanishiga, ma'lum ma'noda, turtki bo'ladi.

Davriy ishsizlik esa iqtisodiy inqirozni boshidan kechirayotgan mamlakatlarda vujudga keladi.

Friksion va strukturaviy ishsizliklarning yig'indisi **ishsizlikning tabiiy darajasi** deyiladi.

Ishsizlikning haqiqiy darajasi, odatda ishsizlikning tabiiy darajasidan yuqori bo'ladi. Faqat ayrim hollarda, masalan, urush paytida, ishsizlikning haqiqiy darajasi uning tabiiy darajasidan past bo'lishi mumkin.

Hozirgi davrda ishsizlikning tabiiy darajasi 6-7 % atrofida qabul qilingan.

Ishsizlikning tabiiy darajasi holatida iqtisodiyotda ishlab chiqarilgan barcha mahsulotlar hajmi iqtisodiyotning **ishlab chiqarish potentsiali** deb ataladi.

Odatda mahsulotning haqiqiy ishlab chiqarish hajmi bilan potentsial ishlab chiqarish hajmi teng bo'ladi. Lekin, iqtisodiy pasayish davrida haqiqiy ishlab chiqarish hajmi potentsial ishlab chiqarish hajmidan past,

iqtisodiy o'sish davrida esa undan yuqori bo'ladi.

Mahsulotning potentsial va haqiqiy ishlab chiqarilishi orasidagi farq **yalpi milliy mahsulot hajmining uzilishi** yoki **orqada qolishi** deb ataladi. Yalpi milliy mahsulot hajmining uzilishi foizlarda quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$\Delta Y_N = \frac{Y_{\Pi} - Y_x}{Y_x} \cdot 100\%, \quad (2)$$

bu erda ΔY_N – yalpi milliy mahsulot hajmining uzilishi, Y_{Π} – mahsulotni potentsial ishlab chiqarish hajmi, Y_x – haqiqiy mahsulot ishlab chiqarish hajmi.

2-misol. Mamlakatda joriy yilda haqiqiy ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori 450 mlrd. dollarni tashkil qiladi. Agar ishsizlikning tabiiy darajasida ushbu mamlakatda 500 mlrd. dollarlik mahsulot ishlab chiqarilishi mumkin bo'lsa, u holda yalpi milliy mahsulot hajmining uzilishi qanday bo'ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra:

$$Y_{\Pi} = 500 \text{ mlrd. doll.}$$

$$Y_x = 450 \text{ mlrd. doll.}$$

U holda (2) formulaga asosan topamiz:

$$\Delta Y_N = \frac{500 - 450}{450} \cdot 100\% = 11\%.$$

Demak, agar mamlakatda ishsizlik tabiiy darajada bo'lganda undagi mahsulot ishlab chiqarish hajmi 11 % ga oshgan bo'ladi.

Javob: 11 %.

Milliy mahsulotning haqiqiy va potentsial hajmi teng bo'lgandagi ishsizlikning tabiiy darajasi muqobil hisoblanadi. Shu darajadan har qanday oshib ketish jamiyatdagi iqtisodiy ijtimoiy yo'qotishlarga olib keladi.

Ishsizlikning haqiqiy darajasi uning tabiiy darajasidan qanchalik yuqori bo'lsa, $YaMM$ uzilishi shuncha ko'p bo'ladi.

$YaMM$ uzilishi bilan ishsizlik darajasi orasidagi bog'liqlik taniqli olim Artur Ouken tomonidan aniqlangan va iqtisodiy adabiyotlarda Ouken qonuni sifatida keng tarqalgan. Bu qonunga asosan, agar ishsizlikning haqiqiy darajasi uning tabiiy darajasidan 1% ga oshsa, $YaMM$ hajmi uzilishi 2,5% ni tashkil qiladi. Bu qonunni quyidagi formula ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$\Delta Y_N = -2,5(U_t - U_x), \quad (3)$$

bu erda ΔY_N – $YaMM$ uzilishi, U_t – ishsizlikning tabiiy darajasi, U_x –

ishsizlikning haqiqiy darajasi.

3-misol. Joriy yilda A mamlakatda ishsizlikning tabiiy darajasi 6,5 % bo'lib, uning haqiqiy darajasi 8,5 % bo'lsin. U holda ushbu mamlakatda $YaMM$ uzilishi qanday bo'ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra:

$$U_t = 6,5 \%, U_x = 8,5 \%.$$

U holda (3) formulaga asosan:

$$\Delta Y_N = -2,5(6,5\% - 8,5\%) = 5\%.$$

Bu yechim shuni ko'rsatadiki, agar joriy yilda A mamlakatda ishsizlikning tabiiy darajasi ta'minlangan bo'lsa, u holda $YaMM$ hajmi 5 % ga o'sgan bo'lar edi.

Javob: 5 %.

$YaMM$ ning pastroq darajasi, o'z navbatida, ishlab chiqarishda qatnashuvchilar daromadlarining nisbatan kamroq bo'lishiga va, demak, iqtisodiyot taraqqiyotini investitsiyalash darajasining ham qisqarishini bildiradi.

Tayanch so'z va iboralar

Ish kuchi, ishlab chiqarishda band bo'lgan aholi, ishsizlar, ishsizlik darajasi, friksion ishsizlik, strukturaviy ishsizlik, davriy ishsizlik, ishsizlikning tabiiy darajasi, iqtisodiy ishlab chiqarish potentsiali, $YaMM$ uzilishi, Ouken qonuni.

Nazorat savollari

1. Ish kuchi nima?
2. Mamlakatda yashovchi barcha aholini qanday guruhlariga ajratish mumkin?
3. Ishlayotgan yoki band bo'lgan aholi deganda nimani tushunasiz?
4. Ishsizlik nima?
5. Ishsizlik darajasi nima va u qanday o'lchanadi?
6. Ishsizlikning qanday turlari mavjud?
7. Friksion ishsizlik nima?
8. Strukturaviy ishsizlik nima?
9. Davriy ishsizlik qanday?
10. Ishsizlikning tabiiy darajasi qanday?
11. Iqtisodiyotning ishlab chiqarish potentsiali nima?
12. $YaMM$ hajmining uzilishi qanday?
13. Qanday holda ishsizlikning tabiiy darajasi muqobil hisoblanadi?
14. $YaMM$ uzilishi bilan ishsizlik darajasi orasida qanday bog'liqlik bor?

Masalalar

1. Jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida rejalashtirilayotgan davrning birinchi va beshinchi yillaridagi ishsizlik soni va ishsizlik darajasini aniqlab, jadvalning bo'sh joylarini to'ldiring.

Iqtisodiy ko'rsatkichlar	Birinchi yil	Beshinchi yil
Ish kuchi, ish bilan band bo'lganlar	84889	95453
Ishsizlar	80796	87524
Ishsizlik darajasi		

Javob: 1 -yil: 4093, 4,8 %,

5 -yil: 7929, 8,3 %.

2. Agar ish bilan band bo'lganlar soni 90 mln. bo'lib, ishsizlar soni 10 mln. bo'lsa, u holda ishsizlik darajasi qanday bo'ladi?

Javob: 10 %.

3. Agar 90 mln. ish bilan band bo'lganlardan 0,5 mln. kishi ishdan bo'shatilgan, ishsizlar ro'yxatidagi 10 mln. kishi ish qidirishdan voz kechgan bo'lsa, u holda a) ish bilan band bo'lganlar soni qancha? b) ishsizlar soni qancha? v) ishsizlik darajasi qanday?

Javob: a) 89,5 mln.; b) 9,5 mln.; v) 9,6 %.

4. Agar tabiiy ishsizlik haqiqiy ishsizlikka nisbatan 2% ga oshgan bo'lsa, u holda *YaMM* uzilishi qanday bo'ladi?

Javob: 5 %.

5. Quyidagi ma'lumotlar asosida ishsizlik darajasini hisoblang:

1) Aholi soni – 500 mln. kishi;

2) 16 yoshga to'lmaganlar va maxsus muassasadagilar – 20 mln. kishi;

3) Ishchi kuchi tarkibidan chiqqanlar – 150 mln. kishi;

4) ishsizlar – 33 mln. kishi.

Javob: 12,5 %.

2.8-§. Import va eksport. Davlat to'lov balansi

Har qanday mamlakatdagi tashqi savdo tovar va xizmatlarni olib kelish (import) va olib ketish (eksport)dan va ular bilan bog'liq bo'lgan xalqaro moliya, valyuta va kredit munosabatlaridan tashkil topadi.

Tashqi savdoning paydo bo'lishining sabablaridan biri mamlakatlarda tabiiy xom-ashyo resurslarining notekis taqsimlanishidadir. Masalan, Yaqin Sharq mamlakatlarida jahon neft zaxirasining 66% i joylashgan. Ayrim mamlakatlar gaz va boshqa nodir resurslarga boy bo'lsa, ayrim mamlakatlarda bunday resurslarga muhtojlik seziladi. Tashqi savdoning

zarurligini belgilovchi ikkinchi sabab jahon mamlakatlarida ishlab chiqaruvchi kuchlarning notekis taqsimlanganligidir. Buning natijasida turli mamlakatlardagi tovar va xizmatlar ishlab chiqarish samaradorligi turlicha bo'ladi. Bu esa, o'z navbatida, tovar va xizmatlarni olib kelish (import) va olib ketish (eksport) oqibatida qo'shimcha daromad topish imkoniyati yaratiladi.

Tashqi savdoni ifodalash uchun eksport va import hajmi, ya'ni tashqi savdo oboroti, ularning harakati, shuningdek, *YaIM*dagi ulushi, tovarlar tarkibi va boshqa ko'rsatkichlar ishlatiladi.

Mamlakatning tashqi savdo aloqalari "Davlat to'lov balansi" deb ataluvchi hujjatda aks ettiriladi. **Davlat to'lov balansi** deb, bir yil davomida mamlakatda amalga oshirilgan xalqaro iqtisodiy hisoblar natijasiga aytiladi.

Shunday qilib, bir tomondan, xorijdan tushadigan barcha tushumlarni, boshqa tomondan, mamlakatning xorijga to'laydigan barcha to'lovlarini ko'rsatuvchi hujjatni to'lov balansi deb ataladi. Debet va kredit summolari orasidagi farq milliy iqtisodiyotning xalqaro bozordagi faoliyati natijasini ko'rsatadi. Mamlakat to'lov balansining tushumlarini faqat eksport orqali, ya'ni milliy tovarlarni xorijiy valyutaga ayirboshlash orqali ta'minlash mumkin. To'lov balansining chiqimlarini esa xorijiy tovar va xizmatlarni sotib olish, ya'ni import bilan bog'liq bo'lgan xarajatlar belgilaydi.

Mamlakat to'lov balansini (taqribiy raqamlarda) quyidagi jadval orqali tasvirlash mumkin.

2.6-jadval

T.r.	Moddalar	Kredit(+) yoki eksport hisobiga tushumlar	Debet (-) yoki import xarajatlari	Sof kredit(+) yoki sof debet(-)
I	Joriy operatsiyalar hisobi			
1	Tovarlar	+125	-205	-80
2	Tashqi savdo balansining qoldig'i			-80
3	Xizmatlar	+35	-37	-2
4	Investitsiyalar daromadi (foizlar va dividendlar)	+17	-10	+7
5	Pul jo'natmalari	+1	-8	-7
6	Joriy operatsiyalar bo'yicha balans qoldig'i			-82
II	Kapitallar harakati hisobi			
7	Investitsiya va boshqa o'rta va uzoq muddatli	+90	-37	+53

	kapital			
8	Kapitallar harakati balans qoldig'i			+53
9	Joriy operatsiyalar va kapitallar harakati bo'yicha balans qoldig'i			-29
III	Rasmiy rezervlar (oltin, SDR, Xalqaro Valyuta Fondi (XVF))dagi rezerv pozitsiyalari, xorijiy valyutalar, XVF rezervlari	+29		+29

Jadvaldan ko'rinadiki, barcha tashqi iqtisodiy operatsiyalar ikkita katta guruhga bo'linadi: joriy operatsiyalar va kapital harakati bilan bog'liq operatsiyalar.

Joriy operatsiyalarning asosiy moddasi – tovarlar eksporti va importi hisoblanadi. Ular o'rtasidagi farq tashqi **savdo balansining qoldig'i** yoki **sof eksport** deb ataladi.

Tashqi savdo balansining qoldig'i quyidagi formula orqali topiladi:

$$X_T - M_T = NX_T, \quad (1)$$

bu erda X_T – tovarlar eksporti, M_T – tovarlar importi, NX_T – tashqi savdo balans qoldig'i (sof eksport) hajmi 125 birlikni, import hajmi esa 205 birlikni tashkil qiladi. Demak, tashqi savdo balansining qoldig'i:

$$NX_T = 125 - 205 = -80$$

birlikka teng bo'ladi.

Tovarlar eksporti va importining yig'indisi **tashqi savdo aylanmasi** yoki **tovar aylanmasi** deb ataladi. U quyidagicha topiladi:

$$X_T + M_N = T_a, \quad (2)$$

bu erda T_a – tovar aylanmasi. 2.6-jadvalda to'lov balans aks ettirilgan mamlakatning tovar aylanmasi

$$T_a = 125 + 205 = 330$$

birlikka teng bo'ladi.

Joriy operatsiyalar bo'yicha **balans qoldig'i** deb, tovarlar, xizmatlar, investitsiya daromadlari, pul jo'natmalari (transfertlar) bo'yicha barcha tushumlar (X) va chiqimlar (M) orasidagi farqqa aytiladi. U quyidagi formula yordamida topiladi:

$$X - M = NX, \quad (3)$$

bu erda NX -joriy operatsiyalar bo'yicha balans qoldig'i. Jadvalda

keltirilgan misolda joriy operatsiyalar bo'yicha barcha tushumlar

$$X=125+35+17+1=178$$

birlikni, barcha chiqimlar esa

$$M=205+37+10+8=260$$

birlikni tashkil qiladi. Bu holda joriy operatsiyalar bo'yicha balans qoldig'i

$$NX=178-260=-82$$

birlikka teng bo'ladi. Bu holda import xarajatlari eksport tushumlaridan oshiq ekanligi ko'rinadi. Bunday vaziyatda mamlakat joriy operatsiyalar bo'yicha taqchillikka ega bo'ladi va uni qoplash uchun u qarz oladi yoki o'zining ko'chmas mulkini va moliyaviy aktivlarini (aktsiyalar va obligatsiyalarini) sotadi.

Agar mamlakat joriy to'lov balansining musbat qoldig'iga ega bo'lsa, u holda uning eksport tushumlari import chiqimlaridan oshib ketadi. Demak, mamlakatda ortiqcha xorijiy valyutalar paydo bo'ladi va ularni xorijdan ko'chmas mulk yoki moliyaviy aktivlarni sotib olishga sarf qilinishi mumkin.

Investitsiyalash va kreditlash bilan bog'liq bo'lgan operatsiyalar to'lov balansining kapitallar harakati hisobida aks ettiriladi. Mamlakat moliya aktivlarini tashqi davlatlarga sotish unga valyutalar oqib kelishini ta'minlaydi. Aksincha, boshqa mamlakatlardan aktivlarni sotib olish valyuta xarajatlari bilan bog'liq bo'lib, mamlakatdan kapitalni chiqib ketishini bildiradi. Mamlakatga keltirilgan va undan chiqib ketgan kapitallar orasidagi farq **kapital harakatining balans qoldig'i** deyiladi.

$$S - J = S_n, \quad (4)$$

bu erda S -mamlakatga kapital oqimi, J -mamlakatdan kapital oqimi, S_n – kapital harakatining balans qoldig'i. 1-jadvalda keltirilgan misolda $S=90$, $J=37$. Demak, kapital harakatining balans qoldig'i (kapitalning sof oqib ketishi) $S_n=90-37=53$ birlikni tashkil qiladi.

Joriy operatsiyalar va kapitallar harakati balansi o'zaro bog'liq bo'lib, ulardan birinchisining taqchilligi kapitalning sof oqib kelishi bilan moliyalashtiriladi. Bu ikki bo'lim bir – birini muvozanatlashtirib turishi lozim. Lekin bunday muvozanat har doim ham bajarilmaydi. Shuning uchun mamlakatning Markaziy bankida valyuta zaxiralari tashkil qilinadi va ular **valyuta rezervlari** deb ataladi. Bunday rezervdan umumiy to'lov balansini tartibga solishda va uning qoldig'ini nolga aylantirishda foydalaniladi.

Joriy operatsiyalar va kapitallar harakati bo'yicha balans qoldiqlari yig'indisi **umumiy to'lov balansining qoldig'i** deyiladi. U quyidagi formula yordamida topiladi:

$$NX + S_n = Y_n, \quad (5)$$

bu erda Y_n – umumiy to'lov balansining qoldig'i, jadvalda keltirilgan misolda umumiy to'lov balansining qoldig'i

$$Y_n = -82 + 53 = -29$$

birlikni tashkil etadi.

1-misol. Mamlakat iqtisodiyoti quyidagi ko'rsatkichlar bilan tavsiflangan:

- 1) tovarlar eksporti – 19650\$;
- 2) tovarlar importi – 21758\$;
- 3) chet ellardan olinadigan foiz to'lovlar – 3621\$;
- 4) chet el investorlariga to'lanadigan foizlar – 1394\$;
- 5) mamlakat aholisining turizmga sarf qiladigan xarajatlari – 1919\$;
- 6) turizmdan mamlakat oladigan daromad – 1750\$;
- 7) mamlakatning bir yoqlama transfert to'lovlari – 2388\$;
- 8) mamlakatdan kapital chiqishi – 4174 \$;
- 9) mamlakatga kapital kelishi – 6612\$.

Keltirilgan ma'lumotlar asosida:

a) tovarlarning sof eksportini (tashqi savdo balans qoldig'ini) va tashqi savdoda tovar aylanmasini toping;

b) joriy operatsiyalar bo'yicha balans qoldig'ini aniqlang;

v) kapital harakatining balans qoldig'ini toping;

g) mamlakatning umumiy to'lov balans qoldig'ini toping.

Yechish. Bu masalaning shartiga ko'ra:

$$X_T = 19650, M_T = 21758.$$

Demak, (1) formulaga asosan tashqi savdo balans qoldig'ini topamiz:

$$NX_T = X_T - M_T = 19650 - 21758 = -2108 \$.$$

Tashqi savdoda tovarlar aylanmasini (2) formula yordamida topamiz:

$$T_a = X_T + M_T = 19650 + 21758 = 41408 \$.$$

Joriy operatsiyalar bo'yicha tushumlar:

$$X = 19650 + 1750 + 3621 = 25021\$.$$

Chiqimlar:

$$M = 21758 + 1394 + 1519 + 2388 = 26459 \$.$$

Demak, joriy operatsiyalar bo'yicha balans qoldig'i:

$$NX = X - M = 25021 - 27459 = -2438 \$.$$

Kapitallarning mamlakatga kelishi: $S = 6612 \$$.

Mamlakatdan chiqishi esa: $J = 4174 \$$.

Demak, mamlakatda kapital harakatining balans qoldig'i:

$$S_n = S - J = 6612 - 4174 = 2438 \$$$

bo'ladi.

Mamlakatdagi umumiy to'lov balansining qoldig'ini (5) formula yordamida topamiz:

$$Y_n = NX + S_n = -2438 + 2438 = 0.$$

Javob: a) – 2108 \$, 41408 \$; b) – 2438 \$; v) 2438 \$; g) 0.

Tayanch so'z va iboralar

Eksport, import, to'lov balansi, joriy operatsiyalar, kapital harakati hisobi, tashqi savdo balansi qoldig'i, tashqi savdo aylanmasi, kapitalning mamlakatga oqib kelishi, kapitalning mamlakatdan oqib ketishi, kapital harakatining balans qoldig'i, valyuta rezervlari, umumiy to'lov balansining qoldig'i.

Nazorat savollari

1. Tashqi savdoning paydo bo'lish sabablari qanday?
2. Davlat to'lov balansi nima?
3. Barcha tashqi iqtisodiy operatsiyalarni qanday guruhlariga ajratish mumkin?
4. Tovarlar eksporti va importi nima?
5. Tashqi savdo balansining qoldig'i nima va u qanday topiladi?
6. Tashqi savdo aylanmasi nima va u qanday topiladi?
7. Joriy operatsiyalar bo'yicha balans qoldig'i nima va u qanday hisoblanadi?
8. Import xarajatlari bilan eksport tushumlari orasidagi muvozanatning buzilishi qanday vaziyatlarga olib kelishi mumkin?
9. Kapitallar harakati hisobi qanday?
10. Kapital harakatining balans qoldig'i nima va u qanday hisoblanadi?
11. Joriy operatsiyalar hisobi bilan kapitallar harakati hisobi orasida qanday bog'lanish bor?
12. Valyuta rezervlari nima va ular nima maqsadda tashkil qilinadi?
13. Umumiy to'lov balansining qoldig'i nima?

Masalalar

1. Agar tovarlarning eksport hajmi 80, import hajmi 60 ga teng bo'lsa, tashqi savdo aylanmasi va sof eksport nimaga teng bo'ladi?

Javob: 140, +20.

2. Iqtisodiyot quyidagi ko'rsatkichlar bilan tavsiflangan:

a) joriy hisoblar bo'yicha balans qoldig'i = 50;

b) kapital harakatining balans qoldig'i = - 60.

Ushbu ko'rsatkichlar asosida umumiy to'lov balansining qoldig'ini toping hamda markaziy bankdagi valyuta rezervlari qancha bo'lishini aniqlang.

Javob: - 10; +10.

3. Agar import funktsiyasi $100 + 0,1y$ ko'rinishda ifodalangan bo'lib, daromad 500 va savdodagi taqchilik 50 ga teng bo'lsa, eksport hajmi qanday bo'ladi?

Javob: 100.

4. Mamlakat iqtisodi quyidagi ko'rsatkichlar bilan tavsiflangan:

- 1) tovar eksporti = 214,0;
- 2) tovar importi = 338,3;
- 3) turizmdan tushumlar = 55,2;
- 4) chet el aktivlaridan daromadlar = 90,5;
- 5) turizmga xarajatlar = 58,2;
- 6) chet el investorlariga foiz to'lovlar = 65,8;
- 7) bir tomonlama transfert to'lovlar = 14,8;
- 8) kapitalning oqib kelishi = 146,9;
- 9) kapitalning oqib ketishi = 29,5.

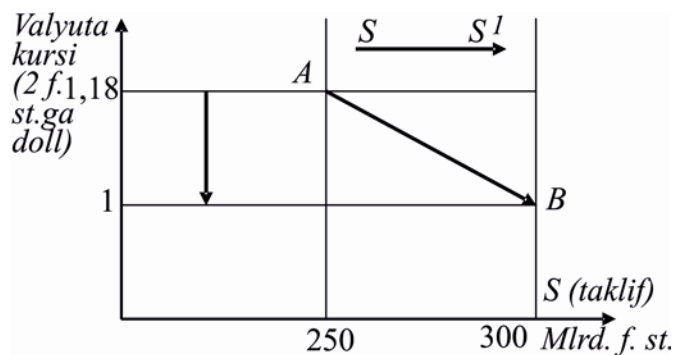
Keltirilgan ma'lumotlar asosida:

- a) tashqi savdo balans qoldig'ini;
- b) kapital harakatining balans qoldig'ini;
- c) joriy operatsiyalar bo'yicha balans qoldig'ini;
- d) umumiy to'lov balansi qoldig'ini toping.

Javob: a) - 124,3; b) +117,4; v) - 117,4; d) 0.

5. Mamlakat iqtisodi quyidagi ko'rsatkichlar bilan tavsiflangan:

- 1) tovarlar eksporti = 200;
- 2) tovarlar importi = 210;
- 3) xizmatlar eksporti = 50;
- 4) xizmatlar importi = 58;
- 5) investitsiyaga xarajatlar = 15;



2.5-shakl.

- 6) investitsiyadan tushumlar = 20;
- 7) mamlakatga xorijdan keladigan transfert to'lovlari = 17;
- 8) mamlakatdan xorijga yuboriladigan transfert to'lovlari = 23.

Ushbu ma'lumotlar asosida:

- a) joriy hisoblar bo'yicha balans qoldig'ini;
- b) tashqi savdo balans qoldig'ini;
- v) mamlakatdagi tashqi savdo aylanmasini toping.

Javob: a) – 19; b) – 10; v) 410.

Agar mamlakatdagi tovar eksporti 80 va importi 100 bo'lsa, tashqi savdo balans qoldig'i va tashqi savdo aylanmasi qanday bo'ladi?

Javob: – 20; 180.

2.9-§. Valyutalar kursi

Barcha xalqaro bitimlar valyutalarni ayirboshlash bilan bog'liq bo'ladi va bunda valyuta bahosini yoki valyuta kursini aniqlash zaruriyati paydo bo'ladi.

Valyuta kursi bir mamlakat pul birligining boshqa mamlakatlar pul birliklaridagi bahosidir.

Valyuta kursi **to'g'ri** va **teskari** bo'lishi mumkin. To'g'ri valyuta kursida xorijiy valyuta birligining bahosi milliy valyutada ko'rsatiladi. Masalan, 1 AQSh dollari 1500 so'mga, 1 Rossiya rubli 37 co'mga teng.

Teskari valyuta kursida milliy valyuta birligiga to'g'ri keladigan xorijiy valyutaning miqdori o'rnatiladi. Masalan, 1 o'zbek so'mi 0,001 AQSh dollariga to'g'ri keladi.

Dunyoning ko'p mamlakatlarida, shu jumladan, O'zbekistonda ham to'g'ri valyuta kursi qabul qilingan.

Valyutalarni ayirboshlash kurslari ularni sotish va sotib olish jarayonlarida o'rnatiladi. Valyuta bozoridagi talab va taklifni solishtirish natijasida valyutaning bahosi aniqlanadi.

Valyuta kurslari **erkin suzib yuruvchi**, **chekli suzib yuruvchi** va **tayinlangan** bo'lishi mumkin.

Erkin suzib yuruvchi valyuta kursi shu valyutaga bo'lgan bozor talabi va taklifi ostida erkin o'zgarib turadi. Masalan, AQSh valyutasi, yapon yeni, ingliz funt sterlingi kurslari erkin suzib yuruvchi valyuta kurslaridir.

Chekli suzib yuruvchi valyuta kursi ayrim xorijiy valyutalar yoki valyutalar to'plami kurslarining o'zgarishiga bog'liq ravishda o'zgaradi. Misol uchun, ko'pchilik uchinchi dunyo mamlakatlarining valyuta kurslari

AQSh dollari, frantsuz franki va boshqa xorijiy pul birliklari kursiga bog'liq ravishda o'zgarib turadi.

Tayinlangan valyuta kursi bu xorijiy valyutada ifodalangan va davlat tomonidan rasmiy o'rnatilgan milliy pul birligining bahosi bo'lib, unga valyuta bozoridagi talab va taklifni o'zgarishi ta'sir etmaydi. Tayinlangan valyuta kursi, asosan, iqtisodiyoti sust rivojlangan yoki tashqi dunyoga etarli darajada ochiq bo'lmagan mamlakatlarda qo'llaniladi.

Valyuta kursi tovarlar, xizmatlar, kapital va ishchi kuchlarining mamlakatlararo harakatini boshqaruvchi rolini bajaradi va uning o'zgarib turishi mamlakatning tashqi iqtisodiy oborotiga hamda butun makroiqtisodiy vaziyatga kuchli ta'sir qiladi. Masalan, agar o'zbek so'mining kursi Rossiya rubliga nisbatan 35 so'mdan 37 so'mgacha pasaygan bo'lsa, u holda so'm rublga nisbatan arzonlashgan, va aksincha, rubl so'mga nisbatan 0,0296 dan 0,0270 gacha qimmatlashgan bo'ladi. Bu holda mamlakatda ishlab chiqarilgan 10000 so'mlik tovar Rossiya bozorida arzonlashib boradi va endi u 286 rubl emas, balki 270 rublga sotiladi. Natijada tovarning raqobatga chidamliligi ortadi va unga bo'lgan talab oshadi, eksport rag'batlantiriladi. Biroq milliy valyutani Rossiyaga chiqarish, O'zbekiston uchun foydali bo'lmay qoladi. Shu bilan bir qatorda Rossiyada ishlab chiqarilgan 1000 rubllik tovar O'zbekiston bozorida 35000 so'mdan 37000 so'mgacha oshadi. Shu sababli tovarni Rossiyadan olib kelish (import) hajmi kamayadi. Aksincha, o'zbek so'mining kursi oshib borishi bilan Rossiyadan tovar olib kelish va kapitalni chetga chiqarish foydali bo'ladi.

Valyuta kursi valyuta bozoridagi talab va taklif darajasiga bog'liq bo'ladi. Buni quyidagi shaklda ko'rsatish mumkin.

Shakldan ko'rinadiki, agar valyuta bozorida funt sterlingning taklifi 250 mlrd f. st. dan 300 f. st. gacha oshsa, u holda 1 f. st. 1,18 doll. dan 1 doll. gacha kamayadi. Funt sterlingning kursi pasaygan sari ingliz tovarlari chet elliklar uchun arzonlashadi. Natijada unga bo'lgan talab oshadi, ya'ni eksport hajmi oshadi. Bu holda ingliz f. st. ga bo'lgan talab oshadi va valyuta bozoridagi muvozanat A nuqtadan V nuqtaga ko'chadi.

Bir mamlakat valyutasining boshqa bir mamlakat valyutasiga nisbatan hisoblanadigan bahosi **nominal valyuta kursi** deb ataladi.

Ikki mamlakatda ishlab chiqarilgan tovarlarning nisbiy bahosi **real valyuta kursi** deb ataladi.

Real va nominal valyuta kurslari orasidagi bog'liqlikni quyidagi formula orqali ifodalash mumkin:

$$E_R = E_N \cdot \frac{P_d}{P_f},$$

bu erda E_R – real valyuta kursi, E_N – nominal valyuta kursi, R_d – milliy valyuta bilan ifodalanuvchi ichki baholar indeksi, R_f – xorijiy valyuta bilan ifodalanuvchi chet el baholar indeksi. Bu erda ikkala mamlakatlardagi baholar indeksi bir xil bazis yil uchun hisoblangan, deb qaraladi.

1-misol. 1980 yilda tayin tovar va xizmatlar "savati"ning bahosi AQSh da 1000 dollarga, Germaniyada esa 3000 markaga teng bo'lsin hamda valyuta kursi bo'yicha 1 dollar 3 markaga teng bo'lsin, deylik. 1980 yilni bazis yil deb qabul qilamiz. Bu yildagi baholar indeksi 1 ga teng bo'lgan. Shuning uchun bu yildagi real valyuta kursi quyidagiga teng bo'ladi:

$$E_R = 3 \cdot \frac{\frac{1000 \text{ doll}}{3000 \text{ marka}}}{3000 \text{ marka}} = 3 \frac{\text{marka}}{\text{doll}}.$$

Bundan ko'rinadiki, bazis yilda real va nominal valyuta kurslari o'zaro teng bo'ladi.

Endi 1990 yilda AQShda baholar indeksi 50% ga oshgan bo'lib, Germaniyada ular o'zgarmasin. Bu holda tovarlar "savati"ning bahosi AQSh da 1500 doll., Germaniyada esa aksicha, ya'ni 3000 marka bo'ladi.

Agar valyuta kursi oldingiday saqlangan bo'lsa, u holda tovarlar "savati"ni Germaniyada 3000 markaga sotib olish mumkin. AQShda esa uni sotib olish uchun 4500 markani 1500 doll.ga almashtirib sotib olish mumkin. Bu holda real valyuta kursi quyidagiga teng bo'ladi:

$$E_R = 3 \cdot \frac{\frac{1500}{3000}}{\frac{1000}{3000}} = 3 \frac{1,5}{1} = 4,5 \frac{\text{marka}}{\text{doll}}.$$

2-misol. Agar Qozog'istonning 1 tengesi O'zbekistonning 7 so'miga to'g'ri kelsa hamda o'zbek so'mining kursi qozoq tengesiga nisbatan 10 so'mgacha pasaysa, u holda O'zbekistonda qanday vaziyat vujudga keladi?

Yechish. Agar o'zbek so'mining kursi qozoq tengesiga nisbatan pasaygan bo'lsa, u holda so'm tengega nisbatan arzonlashgan, teng esa so'mga nisbatan qimmatlashgan bo'ladi. Avval, bir teng 0,143 so'm bo'lgan bo'lsa, endi u 0,10 so'm bo'ladi. Bu holda

Qozog‘istonda o‘zbek tovarlari arzonlashadi hamda 1000 so‘mlik tovar ilgaridagidek 143 tengge emas, balki 100 tengega sotiladi. Natijada Qozog‘istonda o‘zbek tovarlariga bo‘lgan talab oshadi. Buning oqibatida eksport hajmi ortadi.

Tayanch so‘z va iboralar

Valyuta kursi, to‘g‘ri valyuta kypcu, teskari valyuta kursi, valyuta bahosi, erkin suzib yuruvchi valyuta kypcu, chekli suzib yuruvchi valyuta kursi, tayinlangan valyuta kursi, nominal valyuta kursi, real valyuta kursi.

Nazorat savollari

1. Valyuta kursi nima va u qanday aniqlanadi?
2. Valyuta kursi qanday yo‘nalishlarda o‘rnatiladi?
3. To‘g‘ri valyuta kursi qanday?
4. Teskari valyuta kursi qanday?
5. Erkin suzib yuruvchi valyuta kurslari qanday?
6. Chekli suzib yuruvchi valyuta kursi qanday?
7. Tayinlangan valyuta kursi qanday?
8. Bir mamlakat valyuta kursining pasayishi (oshishi) qanday oqibatlarga olib kelishi mumkin?
9. Valyuta bozoridagi taklifning oshishi valyuta kursiga qanday ta’sir ko‘rsatadi?
10. Nominal valyuta kursi nima?
11. Real valyuta kursi nima?
12. Real va nominal valyuta kurslari o‘zaro qanday bog‘langan?

Masalalar

1. Agar iste’mol "savati"ning bahosi AQShda 100 dollar bo‘lib, O‘zbekistonda 25 ming so‘m bo‘lsa, u holda 1 dollarning bahosi qanday bo‘ladi?

Javob: 250 so‘m.

2. Agar bozor "savati"ning bahosi Rossiya rublida 2500 rubl bo‘lib, Qozog‘iston tengesida 500 tengge bo‘lsa, u holda qozoq tengesining bahosi (kursi) qanday bo‘ladi?

Javob: 500 rubl.

3. Shvetsariya frankining kursi dollarga nisbatan 4 frankdan 3 frankkacha kamaygan bo‘lsa, u holda frankning bahosi qanday o‘zgaradi?

Javob: 25 tsentdan 33 tsentgacha oshadi.

4. AQSh GFRdan *Y* mahsulotni import qiladi. Bu mahsulotning GFRdagi turli valyuta kurslariga mos keluvchi narxlar va AQShda mahsulotga bo‘lgan talablar quyidagi jadvalda keltirilgan:

Valyuta kursi	GFRda <i>Y</i> mahsulot bahosi (marka)	<i>Y</i> mahsulotning AQShdagi bahosi(doll.)	AQShda mahsulotga bo‘lgan talab	Umumiy xarajat (doll.)
4 marka=1 doll.	12	—	2000	—
3 marka=1 doll.	12	—	1250	—
2 marka=1 doll.	12	—	500	—

Turli valyuta kurslari uchun AQShdagi mazkur mahsulot baholarini va mahsulot sotib olish uchun sarf qilinadigan xarajatlarni aniqlab, jadvalning bo‘sh ustunlarini to‘ldiring.

Javob: mahsulot bahosi: 3;4;6.

Umumiy xarajat: 6000;5000; 3000.

2.10-§. Aralash masalalar

1. Jadvalda keltirilgan ma’lumotlar asosida *YaMM*ni daromadlar va xarajatlarni hisoblash usuli bilan toping. Sof milliy mahsulot (*SMM*) ni aniqlang.

№	Ko‘rsatkichlar	Mikdor mlrd.doll.
1	Transfert to‘lovlar	4,0
2	Yalpi investitsiya	16,2
3	Biznesdagi egri soliqlar	7,0
4	Shaxsiy daromadga soliq	2,6
5	Sof eksport	1,1
6	Korporatsiyalarning taqsimlanmagan daromadlari	2,8
7	Amortizatsiya	7,9
8	Shaxsiy iste’mol xarajatlari	77,2
9	Korporatsiya daromadiga soliklar	1,4
10	Sotsial sug‘urtalarga to‘lovlar	0,2
11	Davlat tomonidan sotib olinadigan tovar va xizmatlar	8,5

Quydagilardan qaysi biri *YaMM* tarkibiga kiradi ?

- a) uy bekasining xizmati;
- b) eski engil mashina sotib olish;
- v) brokerlardan yangi aktsiyalarni sotib olish;

- g) sotib olingan yangi kitobning bahosi;
- d) korporatsiyalarning qimmatli qog'ozlarini sotib olish.

2. Mamlakatda 2 turdagi X va Y mahsulotlar ishlab chiqariladi, deb faraz qilamiz. Joriy yilda X mahsulotdan 800 birlik ishlab chiqarilgan va u 5 dollardan sotilgan. Har biri 300 dollardan bo'lgan Y mahsulotdan 50 ta ishlab chiqarilgan. Mamlakatda ishlab chiqarilgan $YaMM$ hajmini toping.

Javob: 19000 doll.

3. Kapitalning daromaddagi hisssasi 0,3, mehnatning daromaddagi hisssasi esa 0,7 ga teng. Agar ish kuchining yillik o'sish sur'ati 2 % ga, kapitalning o'sish sur'ati esa 5 % ga, mehnat unumdorligining o'sish sur'ati 2,2 % ga teng bo'lsa, u holda ishlab chiqarishning o'sish sur'atini toping.

Javob: 5 %.

4. Ishlab chiqarish funktsiyasi

$$Y = AK^{0,3}L^{0,7}$$

ko'rinishga ega. Agar mehnat unumdorligining o'sish sur'ati 2 %, ishlab chiqarishning o'sish sur'ati 5,9 % bo'lsa, kapital 6 % sur'at bilan o'sib borsa, u holda ish kuchining o'sish sur'ati qanday bo'ladi?

Javob: 3 %.

5. Agar bozor "savati"ning bahosi 1996 yilda 50 ga, 1995 yilda esa 60 ga teng bo'lgan bo'lsa, u holda 1995 yilda $YaMM$ deflyatori nimaga teng bo'ladi?

Javob: 120 %.

6. Quydagi ma'lumotlarga asoslanib, inflyatsiya sur'atini hisoblang.

1) 1995 yilda 1990 yilga nisbatan iste'mol narxlar indeksi

500 % ga teng.

2) 1994 yilda 1990 yilga nisbatan iste'mol narxlar indeksi

400 % ga teng.

Javob: 25 %.

8. Agar joriy yilda mamlakatdagi $YaMM$ hajmi 5000 mlrd. dollar bo'lib, nakd pul massasi o'rtacha 800 mlrd. dollar bo'lsa, u holda daromad bo'yicha pul muomalasi tezligini hamda daromaddagi jamg'armaning hissasini toping.

Javob: $V=6,25$ doll.; $I/V=0,16$ doll.

9. Agar narx darajasi $R=8$, ishlab chiqarilgan tovar va xizmatlar mikdori 320 birlik hamda pul muomalasi tezligi $V=5$ bo'lsa, u holda muomaladagi pul mikdori qancha bo'ladi?

Javob: 200 birlik.

10. Agar muomaladagi pul massasi 20 % ga kamayib, narxlar 20 % ga oshsa, u holda muomaladagi pul tezligi qanday o'zgaradi?

Javob: 1,5 marta oshadi.

11. Agar pul hajmi 1,2 marta oshib, muomaladagi pul massasi 8 % ga oshsa va pul muomalasi tezligi o'zgarmasa, u holda narxlar darajasi qanday o'zgaradi?

Javob: 10 % ga kamayadi.

12. Agar Akbar kichik biznesdan 1 oyda 100000 so'm foyda olsa, hamda shu oydagi narxlar darajasi 4 ga teng bo'lsa, u holda uning real foydasi qancha bo'ladi?

Javob: 25000 so'm.

13. Joriy yilda nominal ish haqi o'tgan yilga nisbatan 40 % ga, narxlar darajasi esa 18 % ga oshgan bo'lsa, u holda real ish haqi qanchaga o'zgaradi?

Javob: 22 % ga oshgan.

14. Agar joriy yilda bozor "savati"ning nominal qiymati 240 birlik bo'lib, uning real qiymati 200 birlik bo'lsa, u holda joriy yildagi *YaMM* deflyatori qanday bo'ladi?

Javob: 1,2 yoki 120 %.

15. "Iste'mol savatiga" 40 birlik *X* mahsulot va 50 birlik *Y* mahsulot kiritiladi. Agar 1985 yilda *X* va *Y* mahsulotning narxlari mos ravishda 3 va 30 birlikdan iborat bo'lib, 1995 yilda ular 5 va 50 birliklarni tashkil qilgan bo'lsa, u holda 1995 yildagi iste'mol narxlar indeksi qanday bo'ladi?

Javob: 166 %.

16. Deylik, 2000 yilda narxlar 1995 yildagiga nisbatan 12 marta oshgan bo'lsin. Demak, iste'mol narxlar indeksi 1200 % ga teng bo'lsin. Agar 1995 yilda iste'mol narxlar indeksi 800 % ga teng bo'lsa, u holda (1995, 2000) yillar orasidagi inflyatsiyaning o'sish sur'atini toping.

Javob: 50 %.

17. Agar 2000 yilda inflyatsiya sur'ati 10 % ni tashkil qilgan bo'lsa, nechanchi yilda u ikki marta oshadi?

Javob: 2007 yilda.

18. Agar oylik inflyatsiya sur'ati 10 % ni tashkil qilsa, u holda yillik inflyatsiya sur'ati qanday bo'ladi?

Javob: 314 %.

19. Agar yilning 3 oyi mobaynida Akmalning oyligi 30000 so'mdan iborat bo'lib, eng kam ish xaqi ham 4000 so'mdan bo'lgan bo'lsa, u mart

oyida qancha daromad solig'i to'laydi ?

Javob: 7999,2 so'm.

20. Aprel oyida Akmalning oyligi 30000 so'm darajada saqlangan. Agar u 10000 ming so'm mukofot va 20000 so'm dividend olgan bo'lsa, uning aprel oyida to'laydigan solig'i qancha bo'ladi ? (Eng kam ish xaqi 4000 so'm).

Javob: 17899,2 so'm.

21. Joriy yilda *A* mamlakatda ishsizlikning tabiiy darajasi 5,5 % bo'lib, uning haqiqiy darajasi 6,9 % ni tashkil qiladi. U holda ushbu mamlakatdagi *YaIM* uzilishi qanday bo'ladi?

Javob: 3,5 %.

22. Agar mamlakatda eksport qilinadigan tovar va xizmatlar hajmi 500 birlikni tashkil qilsa, u holda mamlakatdagi tashqi savdo aylanmasi va sof eksport hajmi nimaga teng?

Javob: 900: 100.

III bob. SONLI KETMA-KETLIKLARNING IQTISODIYOTDA QO‘LLANISHI

Zarur matematik tushunchalar va faktlar.

A. Arifmetik progressiya. Arifmetik progressiya deb, ikkinchi hadidan boshlab har bir hadi oldingisidan bir xil d songa farq qiluvchi sonlar ketma-ketligiga aytiladi. Demak, agar $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ conlar ketma-ketligi arifmetik progressiya bo‘lsa, u holda bu ketma-ketlikni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$a_1, a_2=a_1+d, a_3=a_2+d, \dots, a_n=a_{n-1}+d$, yoki $a_1, a_1+d, a_1+2d, \dots, a_1+(n-1)d$, bu erdagi d soni **arifmetik progressiyaning ayirmasi** deb ataladi.

Demak, arifmetik progressiyaning birinchi hadi hamda ayirmasi orqali aniqlash mumkin.

Arifmetik progressiyaning n -hadi $a_n=a_1+(n-1)d$ yoki $a_n=\frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$ formulalar yordamida, uning dastlabki n ta hadlari yig‘indisi esa

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n \text{ yoki } S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2} \cdot n$$

formulalar yordamida topiladi.

1-misol. 3, 7, 11, ... arifmetik progressiyaning o‘n beshinchi hadini toping.

Yechish. $a_1=3, d=4, n=15, a_{15}=3+(15-1) \cdot 4 = 59$.

2-misol. $-5; -1; 3; \dots$ arifmetik progressiyaning dastlabki 10 ta hadi yig‘indisini toping.

Yechish. $a_1 = -5; \quad d = 4; \quad n = 10;$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{-10 + 4 \cdot 9}{2} \cdot 10 = 130.$$

B. Geometrik progressiya. Ikkinchi hadidan boshlab har bir hadi oldingi hadni o‘zgaras q songa ko‘paytirishdan hosil bo‘ladigan sonlar ketma-ketligi **geometrik progressiya** deb ataladi.

Agar $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlar ketma-ketligi geometrik progressiya bo‘lsa, u holda uni quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$b_1, b_2=b_1 \cdot q, b_3=b_2 \cdot q, \dots, b_n=b_{n-1} \cdot q \text{ yoki } b_1, b_1 \cdot q, b_1 \cdot q^2, \dots, b_1 \cdot q^{n-1},$$

bu erdagi q -o‘zgaras son **geometrik progressiyaning maxraji** deb ataladi.

Masalan, 2, 6, 18, ... sonlar ketma-ketligi geometrik progressiya

bo'lib, unda $b_1=2$; $q=3$.

Geometrik progressiyaning n -hadi $b_n=b_1 \cdot q^{n-1}$ formula yordamida, uning dastlabki n ta hadlari yig'indisi esa

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (q \neq 1) \quad \text{yoki} \quad S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

formulalar yordamida topiladi. Agar $q=1$ bo'lsa, u holda $S_n = n \cdot b_1$ ga teng bo'ladi.

Agar $|q| < 1$ bo'lsa, u holda geometrik progressiya **cheksiz kamayuvchi** bo'ladi hamda uning uchun ($q \neq 1$) yoki

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad (q \neq 1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{b_1}{1 - q} \quad \text{tenglik o'rinli bo'ladi.}$$

1-misol. 2, 6, 18, 54, ... geometrik progressiyaning dastlabki 8 ta hadining yig'indisini toping.

Yechish. $b_1=2$; $q=3$; $n=8$.

$$S_8 = \frac{b_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{2(3^8 - 1)}{3 - 1} = 6561.$$

2-misol. 3, 1, $\frac{1}{3}$; ... geometrik progressiyaning dastlabki 5 ta hadi yig'indisini toping.

Yechish. $b_1=3$, $q=\frac{1}{3}$, $n=5$.

$$S_5 = \frac{b_1(1 - q^5)}{1 - q} = \frac{3 \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^5 \right)}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{61}{27}.$$

3-misol. 2; $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{9}$; $-\frac{2}{27}$; ... geometrik progressiyaning hadlar yig'indisini toping.

Yechish. $b_1=2$, $q=-\frac{1}{3}$, $S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{2}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

3.1-§. Bank krediti va foizi. Oddiy foizlar usuli bilan foiz to'lovini hisoblash

Banklar va boshqa kredit tashkilotlari pulni uning sohiblariga foiz to'lash sharti bilan o'z qo'lida jamlaydilar va o'z nomidan qarzga berib, undan daromad (foiz) oladilar. Ana shunday uch tomonlama munosabat **bank krediti** deb ataladi. Kredit deganda o'z egalari qo'lida vaqtincha

bo'sh turgan mablag'larni boshqalar tomonidan ma'lum muddatga, haq to'lash sharti bilan, qarz olish bilan bog'liq bo'lgan munosabatlar tushuniladi. Bunda qarz beruvchi **kreditor** deb ataladi. Pulni qarzga berish natijasida olinadigan daromadning mutlaq qiymati «**foiz pul**» yoki «**ustama foiz**» yoki soddagina «**foiz**» deb ataladi.

Foiz stavkasi olingan qarz hisobiga qarzdorning kreditorga birlik vaqt oralig'ida to'laydigan pul miqdoridir. Foiz stavkasi birlik vaqt ichida olingan foyda bilan umumiy qarz miqdorining nisbiy foizi ko'rinishida aniqlanadi. Demak, foiz stavkasini quyidagi formula yordamida hisoblash mumkin:

$$P = \frac{J}{K} \cdot 100\% \quad (1)$$

bu erda K —dastlabki qarz miqdori, J – foiz pul, ya'ni daromadning mutloq qiymati, R – foiz stavkasi. O'nli kasrlar bilan ifodalangan foiz stavkasini i bilan belgilaymiz. U quyidagicha aniqlanadi:

$$i = \frac{P}{100} = \frac{J}{K} \quad (2)$$

Foiz stavkasi mo'ljallangan vaqt oralig'i **ustama foiz davri** deb ataladi. Bunday davrlar sifatida 1 yil, yarim yil, chorak, oy va hattoki kunlar ham qaralishi mumkin.

Ustama foiz davri, ustama foiz intervallariga bo'linishi mumkin. Ustama foiz hisoblanadigan vaqt oralig'i **ustama foiz intervali** deb ataladi.

Agar dastlabki qarz o'zgarmas deb qaralsa va ustama foiz aniq bir davr uchun hisoblansa, u holda oddiy foiz stavkasi qo'llaniladi.

Oddiy foizlar bilan bog'liq bo'lgan ko'rsatkichlar quyidagi proporsiya asosida topiladi:

$$K:J=100:P \cdot t \quad (3)$$

bu erda K – qarzdorga kreditor tomonidan berilgan qarz (kredit) miqdori;

J – qarzdorning K miqdordagi pulini ishlatgani uchun kreditorga to'laydigan ustama foiz miqdori yoki «qarz bahosi»; P -yillik foiz stavkasi; t -ustama foiz davri.

Deylik, qarzdor kreditordan K so'm pulni P % yillik foiz stavkasi bilan t yilga olgan bo'lsin. U holda qarzdorning kreditorga to'laydigan ustama foiz miqdori (3) formula yordamida topiladi:

$$J = \frac{K \cdot P \cdot t}{100} \quad (4)$$

Faraz qilaylik, $t=1$ yil bo'lsin. U holda bir oydagi ustama foiz miqdori quyidagiga teng bo'ladi:

$$J = \frac{K \cdot P}{100} : 12 = \frac{K \cdot P}{1200} \quad (5)$$

Bu formuladan foydalanib, m oy uchun ham ustama foizni hisoblash mumkin:

$$J = \frac{K \cdot P \cdot m}{1200} \quad (6)$$

Bir kunlik foyda pul miqdori quyidagiga teng bo'ladi:

$$J = \frac{K \cdot P}{1200} : 30 = \frac{K \cdot P}{36000} \quad (7)$$

d kunlik foyda pul miqdori quyidagi formula yordamida topiladi:

$$J = \frac{K \cdot P \cdot d}{36000} \quad (8)$$

Agar qarzidor kreditordan ma'lum bir muddatga K so'm miqdorida qarz olgan bo'lsa, uning shu muddat so'ngidagi qarzi $K+J$ miqdorda bo'ladi.

1-misol. Tijorat bankiga 30000 so'm miqdordagi pul 6 oyga qo'yilgan. Agar yillik foiz stavkasi 10 % bo'lsa, u holda shu davr oralig'idagi ustama foiz va qo'yilmaning oshgan miqdori qancha bo'ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra, $K=30\ 000$, $P=10\%$, $m=6$.

Yuqoridagi (6) formuladan foydalanib ustama foiz miqdorini topamiz:

$$J = \frac{30000 \cdot 10 \cdot 6}{1200} = 1500 \text{ (so'm)}$$

Ustama foiz hisobiga oshgan qo'yilmaning miqdorini topamiz:

$$K+J=30\ 000+15\ 00=31500 \text{ (so'm)}.$$

Javob: 1500 so'm, 31500 so'm.

2-misol. Akrom 50 000 so'm pulini 6 iyundan 17 sentyabrgacha 20 % yillik foiz stavkasi bilan Jamg'arma bankka qo'ygan. 17 sentyabrda Akrom bankdan qancha pul olishi mumkin?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra, $K=50\ 000$, $P=20\%$, $d=72$ kun.

Ustama foiz miqdorini (8) formula asosida topamiz:

$$J = \frac{50000 \cdot 20 \cdot 72}{36000} = 2000 \text{ (so'm)}.$$

$$K' = K + J = 50000 + 2000 = 52000 \text{ (so'm)}.$$

Javob: 2000 so'm, 52000 so'm.

3-misol. Korxona bankdan 700 000 so‘m miqdordagi kreditni 20 % yillik foiz stavkasi bilan 4 yilga olgan. Shu davr ichida korxonaning oshgan qarzi va foiz pul miqdori qancha bo‘ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko‘ra, $K=700\,000$, $P=20\%$, $t=4$.

Ustama foiz miqdori (3) formula asosida topiladi:

$$J = \frac{700000 \cdot 20 \cdot 4}{100} = 560000 \text{ (so‘m)}.$$

Foiz pul hisobiga korxonaning dastlabki qarzi oshadi va u

$$K' = K + J = 700000 + 560000 = 1260000 \text{ so‘m bo‘ladi.}$$

Javob: 1 260 000 so‘m, 560 000 so‘m.

O‘zgaruvchan foiz stavkalari. Agar t_1 vaqt oralig‘ida $i_1 = \frac{P_1}{100}$, t_2 vaqt oralig‘ida $i_2 = \frac{P_2}{100}$, t_m vaqt oralig‘ida $i_m = \frac{P_m}{100}$ foiz stavkalari qo‘llanilsa ($t = t_1 + t_2 + \dots + t_m$), u holda t muddatda oshgan mablag‘ miqdori

$$S = K(1 + t_1 i_1 + t_2 i_2 + \dots + t_m i_m) = K \left(1 + \sum_{k=1}^m t_k i_k \right) \quad (9)$$

formula orqali aniqlanadi.

4-misol. Moliyaviy kelishuvga asosan 1 mln. kredit bo‘yicha birinchi yil 15 %, ikkinchi yil 16 % va uchinchi yil 17 % foiz stavkasi belgilangan. 3 yilda oshgan qarz miqdorini aniqlang.

Yechish. Masalaning shartiga ko‘ra, $t_1=t_2=t_3=1$; $i_1=0,15$; $i_2=0,16$; $i_3=0,17$.

U holda

$$S = 1000\,000(1 + 1 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,16 + \dots + 1 \cdot 0,17) = 1480000.$$

Javob: $S=1\,480\,000$ so‘m.

Agar qarz miqdori vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgaruvchan bo‘lsa, u holda qarz muddati so‘ngida hisoblangan umumiy foiz to‘lov miqdori

$$J = \sum_{k=1}^m K_j t_j i \quad (10)$$

bo‘ladi. Bu erda K_j – j vaqt oralig‘ida qoldiq qarz miqdori; t_j – qarzning navbatdagi o‘zgarishigacha bo‘lgan vaqt oralig‘i; i – foiz stavkasi $\left(i = \frac{P}{100} \right)$.

5-misol. Bank depozitiga 5.02 da 12 mln. so‘m pul qo‘yildi. 10.07 da 4 mln. so‘m pul qaytib olindi va 20.10 da yana 8 mln. so‘m pul qo‘yildi. Agar yillik foiz stavkasi 18% bo‘lsa, u holda yilning oxirida bank depozitidagi pul qancha bo‘ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra, $K_1=12$ mln. so'm;

$$P = 18\% \left(i = \frac{P}{100} = 0,18 \right); i_{\text{kyH}} = \frac{0,18}{365} = 0,00049.$$

Birinchi navbatda, ya'ni 15.02 da bank depozitiga qo'yilgan 12 mln. so'm pul 10.07 gacha saqlanadi. Bu muddatdagi kunlar soni 155 kun, ya'ni $t_1=155$. Bankdan 4 mln. so'm olingan kundan boshlab, ya'ni 10.07 dan 20.10 gacha depozitda $K_2=12$ mln. so'm pul qolgan. Bu muddatning uzunligi 102 kun. Uchinchi bosqichda, ya'ni 20.10 dan boshlab depozitdagi pul qoldig'i 16 mln. so'm bo'ladi, ya'ni $K_3=16$ mln. so'm. Bu mablag' 31.12 gacha saqlanadi. Demak, $t_3=72$ kun. Bu holda yilning oxirigacha hisoblangan foiz to'lov miqdori

$$J = \frac{i}{365} (12 \cdot 155 + 8 \cdot 102 + 16 \cdot 72) = 1,876 \text{ mln. so'm bo'ladi.}$$

Yilning oxirida depozitdagi pul miqdori

$$S = K_3 + J = 16 + 1,876 = 17,876 \text{ mln so'm bo'ladi.}$$

Javob: 17,876 mln. so'm.

Tayanch so'z va iboralar

Bank krediti, kreditor, foiz pul, ustama foiz, foiz stavkasi, ustama foiz davri, ustama foiz intervali, oddiy foiz stavkasi.

Nazorat savollari

1. Bank krediti nima?
2. Kreditor kim?
3. «Ustama foiz» yoki foiz to'lov deganda nimani tushunasiz?
4. Foiz stavkasi nima?
5. Ustama foiz davri nima?
6. Oddiy foizlarga doir ko'rsatkichlar qanday proportsiya yordamida o'zaro bog'langan?
7. Foiz stavkalari vaqtga bog'liq ravishda o'zgaruvchan bo'lsa, muddati davomida oshgan kredit miqdori qanday topiladi?
8. Agar qarz miqdori vaqtga bog'liq ravishda o'zgaruvchan bo'lsa, u holda qarz muddati so'ngida hisoblangan foiz to'lov miqdori qanday topiladi?

Masalalar

1. Uch yildan so'ng bank depozitiga qo'yilgan pul 180 (p.b.) bo'lgan. Agar har yilgi foiz to'lov miqdori 20 (p.b.) bo'lsa, yillik foiz stavkasi qancha bo'ladi?

Javob: $R=11,6\%$.

2. Karim 1997 yilning boshida jamg'arma bankka pul qo'ygan. Har yilgi foiz to'lov hisobiga qo'yilmaning miqdori 100 (p.b.) ga oshib borgan. Agar 2002 yilning boshida qo'yilmaning miqdori 1400 (p.b.) ga etgan bo'lsa, u holda jamg'arma bankning yillik foiz stavkasi qanday bo'lgan?

Javob: $R=14,3\%$.

3. Akbar Jamg'arma bankidan 150 000 so'm pulni yillik 12% stavkasi bilan 6 oyga olgan. Shu muddat so'ngida Akbarning qarzi (foiz to'lov hisobiga) qancha bo'ladi?

Javob: 159 000 so'm.

4. Jamg'arma bankka 20 000 so'm pul yillik $R=12\%$ stavkasi bilan qo'yilgan. Shu muddatdagi foiz to'lov miqdori va oshgan qo'yilma miqdori qancha bo'ladi?

Javob: 4800 so'm, 24800 so'm.

5. Bankka K miqdordagi mablag' yillik 8 % stavkasi bilan qo'yilgan. Foiz to'lov miqdori qo'yilma miqdoridan 4 marta ko'p bo'lishi uchun qo'yilma necha yilga mo'ljallangan bo'lishi kerak?

Javob: 50 yil.

6. Murod 30 000 so'm pulni yillik 10 % stavkasi bilan bank depozitiga qo'ygan. 8 oydan so'ng oshgan mablag' miqdori qancha bo'ladi?

Javob: 32 000 so'm.

7. Bank depozitiga yillik 8 % stavkasi bilan qo'yilgan 15 000 so'm pul 300 kunda qanchaga oshadi. (Bir yilda 365 kun deb hisoblansin).

Javob: 1000 so'mga.

Javob: 20%.

3.2-§. Qarz amortizatsiyasi

Qarz amortizatsiyasi deb, olingan kreditni (qarzni) teng intervallardagi bir necha muddatlarda to'lashga aytiladi. Demak, qarz amortizatsiyasi vaqti-vaqti bilan amalga oshiriladigan bir qator to'lovlar oqimidan iborat bo'ladi. Ana shunday to'lovlar oqimi **renta** deb ataladi.

Moliyaviy renta deb, har bir elementi musbat sondan iborat va har ikkita ketma-ket amalga oshiriladigan to'lovlar orasidagi vaqt oralig'i bir xil bo'lgan moliyaviy to'lovlarga aytiladi.

To'lovlar oqimi, ya'ni moliyaviy rentalar ikki qismdan iborat bo'ladi:

1) qarzning asosiy to'lanadigan qismi;

2) qolgan qoldiq uchun foiz to'lov.

Agar qarzning t bosqichda to'lanadigan asosiy qismini K_0 bilan, foiz to'lov miqdorini I_t bilan belgilasak, u holda m bosqichda qarz bo'yicha to'lanadigan jami to'lovlar miqdori :

$$S = m \cdot K_0 + I = m \cdot K_0 + \sum_{t=1}^m I_t. \quad (1)$$

Bu erda qarzning t bosqichidagi asosiy to'lanadigan qismi

$$K_o = \frac{K}{m} \quad (2)$$

formula yordamida topiladi, ya'ni umumiy kredit miqdori (K) ni belgilangan to'lov bosqichlari soniga bo'linadi.

Birinchi bosqichdagi foiz to'lov miqdori quyidagicha topiladi:

$$I_1 = \frac{K \cdot p \cdot t}{100} \quad (\text{agar har bir } t \text{ bosqich yillardan iborat bo'lsa}) \quad (3)$$

yoki

$$I_1 = \frac{K \cdot p \cdot t}{1200} \quad (\text{agar har bir } t \text{ bosqich oylardan iborat bo'lsa}) \quad (4)$$

yoki

$$I_1 = \frac{K \cdot p \cdot t}{36000} \quad (\text{agar har bir } t \text{ bosqich kundan iborat bo'lsa}) \quad (5)$$

Demak, birinchi bosqichda qarzning $K_1 = K_0 + I_1$ qismi to'lanadi. Ikkinchi bosqichdagi qarz bo'yicha to'lov miqdori $K_2 = K_0 + I_2$ yig'indi orqali aniqlanadi.

Bu yerda I_2 – ikkinchi bosqichdagi foiz to'lov miqdorini anglatadi va u quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$I_2 = \frac{K \cdot p \cdot t}{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right), \quad (6)$$

yoki

$$I_2 = \frac{K \cdot p \cdot t}{1200} \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \quad (7)$$

yoki

$$I_2 = \frac{K \cdot p \cdot t}{36000} \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right). \quad (8)$$

Oxirgi m – bosqichda qarzning $K_m = K_0 + I_m$ miqdordagi qismi to'lanadi. Bu erda I_m quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$I_m = \frac{K \cdot p \cdot t}{100} \cdot \left(1 - \frac{m-1}{m}\right) = \frac{K \cdot p \cdot t}{100m} \quad (9)$$

yoki

$$I_m = \frac{K \cdot p \cdot t}{1200} \cdot \left(1 - \frac{m-1}{m}\right) = \frac{K \cdot p \cdot t}{1200m} \quad (10)$$

yoki

$$I_m = \frac{K \cdot p \cdot t}{36000} \cdot \left(1 - \frac{m-1}{m}\right) = \frac{K \cdot p \cdot t}{36000m}. \quad (11)$$

Qarz bo'yicha to'lanadigan umumiy foiz to'lov miqdori, agar har bir t bosqich yillardan iborat bo'lsa, quyidagi yig'indiga teng bo'ladi:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_m = \frac{K \cdot p \cdot t}{100} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \left(1 - \frac{2}{m}\right) + \dots + \frac{1}{m}\right]. \quad (12)$$

Bunda qavs ichidagi ifoda birini hadi $a_0=1$ va ayirmasi $d=\frac{1}{m}$ bo'lgan arifmetik progressiyaning m ta hadi yig'indisidan iborat. Shuning uchun u quyidagiga teng bo'ladi:

$$\left[1 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \left(1 - \frac{2}{m}\right) + \dots + \left(\frac{1}{m}\right)\right] = \frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)m}{2}.$$

Yuqoridagini nazarga olgan holda (12) formulani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$I = \frac{K \cdot p \cdot t}{100} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)m}{2} = \frac{K \cdot p \cdot t \cdot (m+1)}{200}. \quad (13)$$

Agar har bir t bosqich oydan iborat bo'lsa, u holda umumiy foiz to'lov miqdori quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$I = \frac{K \cdot p \cdot t \cdot (m+1)}{2400} \quad (14)$$

yoki

$$I = \frac{K \cdot p \cdot t \cdot (m+1)}{72000}. \quad (15)$$

Qarz uzish bo'yicha amortizatsiya rejasini quyidagi jadval ko'rinishida tasvirlash mumkin:

3.1-jadval

Qarz uzish bosqichlari	Kredit (qarz) miqdori, (K)	Foiz to'lov, (I_t)	Kredit bo'yicha asosiy o'rtacha to'lov, (K_0)	Har bosqichdagi badal:
1	K	I_1	K_0	$K_0 + I_1$
2	$K - K_0$	I_2	K_0	$K_0 + I_2$
3	$K - 2K_0$	I_3	K_0	$K_0 + I_3$

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$K-(m-1)K_0$	I_m	K_0	K_0+I_m
Jami	—	I	$mK_0=K$	mK_0+I

1-misol. Ahmad yilning boshida bankdan yillik 50 % stavkasi bilan 40 000 so‘m pulni bir yilga kreditga oldi. Qarz bo‘yicha to‘lovlar har kvartalda amalga oshiriladi. Har bir kvartaldagi foiz to‘lovni hamda qarz amortizatsiyasini aniqlang.

Yechish. Qarz bo‘yicha to‘lov har kvartalda ($t=3$), jami $m=4$ marta amalga oshiriladi. Bunda qarz bo‘yicha asosiy to‘lov

$$K_0 = \frac{40000}{4} = 10000 \text{ (so‘m)}$$

bo‘ladi. Birinchi kvartalda qarz bo‘yicha foiz to‘lov

$$I_1 = \frac{40000 \cdot 50 \cdot 3}{1200} = 5000 \text{ (so‘m)}$$

bo‘ladi.

Demak, I kvartalning oxirida qarzning $K_0+I_1=10000+5000=15\ 000$ (so‘m) miqdordagi qismi to‘lanadi.

Ikkinchi kvartalning oxirida qarzning qolgan qismi bo‘yicha foiz to‘lov

$$I_2 = \frac{40000 \cdot 50 \cdot 3}{1200} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 3750 \text{ (so‘m)}$$

bo‘ladi. Demak II kvartalning oxirida qarz bo‘yicha

$$K_0+I_0=10000+3750=13750 \text{ (so‘m)}$$

to‘lov to‘lanadi. Uchinchi kvartalning oxirida qarzning qolgan qismi bo‘yicha foiz to‘lov

$$I_3 = \frac{40000 \cdot 50 \cdot 3}{1200} \cdot \left(1 - \frac{2}{4}\right) = 2500 \text{ (so‘m)}$$

bo‘ladi. Demak, III kvartalning oxirida qarz bo‘yicha

$$K_0+I_3=10000+2500=12500 \text{ (so‘m)}$$

to‘lov to‘lanadi.

To‘rtinchi kvartalda, ya’ni yilning oxirida qarzning qolgan qismi bo‘yicha foiz to‘lov

$$I_4 = \frac{40000 \cdot 50 \cdot 3}{1200} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) = 1250 \text{ (so‘m)}$$

bo‘ladi. Yilning oxirida qarz bo‘yicha

$$K_0+I_4=10000+1250=11250 \text{ (so‘m)}$$

to‘lov to‘lanadi.

Qarz bo‘yicha jami

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4=5000+3750+2500+1250=12500 \text{ (so'm)}$$

foiz to'lov to'lanadi. Bu natijani yuqoridagi (14) formula yordamida ham topish mumkin:

$$I = \frac{K \cdot p \cdot t \cdot (m+1)}{2400} = \frac{40000 \cdot 50 \cdot 3 \cdot 5}{2400} = 12500.$$

Qarz to'lov bo'yicha amortizatsiya rejasini quyidagi jadvalda tasvirlaymiz.

Qarz uzish bosqichlari, (t)	Kredit miqdori, (K)	Foiz stavka, (R%)	Foiz to'lov miqdori, (I _t)	Asosiy kredit bo'yicha to'lovlar, (K ₀)	Har kvartaldagi badal
I	40000	50%	5000	10000	15000
II	30000	50%	3750	10000	13750
III	20000	50%	2500	10000	12500
IV	10000	50%	1250	10000	11250
Jami	—	—	12500	40000	52500

2-misol. Aziz 100 000 so'm pulni yillik 10 % stavka bilan 5 yilga har yili to'lab borish sharti bilan ($t=1$) kreditga oldi. Qarz uzishning amortizatsiya rejasini va har yilgi to'lanadigan foiz to'lovlarni hisoblang.

Yechish. Qarz bo'yicha har yilgi asosiy to'lovni topamiz:

$$K_0 = \frac{100000}{5} = 20000 \text{ (so'm)}.$$

Birinchi yildagi foiz to'lovni (3) formula yordamida topamiz:

$$I_1 = \frac{K \cdot p}{100} = \frac{100000 \cdot 10}{100} = 10000 \text{ (so'm)}.$$

Demak, birinchi yili qarz bo'yicha $20000+10000=30000$ so'm to'lanadi.

Ikkinchi yildagi foiz to'lov

$$I_2 = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{100000 \cdot 10}{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8000 \text{ (so'm)}$$

bo'ladi. Demak, ikkinchi yilning oxirida qarz bo'yicha $20000+8000=28000$ so'm to'lov to'lanadi.

Uchinchi yildagi foiz to'lov

$$I_3 = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \left(1 - \frac{2}{m}\right) = \frac{100000 \cdot 10}{100} \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 6000 \text{ (so'm)}$$

bo'ladi. Demak, uchinchi yilning oxirida qarz bo'yicha 26 000 so'm badal to'lanadi.

To'rtinchi yildagi foiz to'lov

$$I_4 = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \left(1 - \frac{3}{m}\right) = \frac{100000 \cdot 10}{100} \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) = 4000 \text{ (so'm)}$$

bo'lad. Demak, to'rtinchi yilning oxirida qarz bo'yicha 24000 so'm badal to'lanadi.

Beshinchi yildagi foiz to'lov

$$I_5 = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \left(1 - \frac{4}{m}\right) = \frac{100000 \cdot 10}{100} \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) = 2000 \text{ (so'm)}$$

bo'lad. Bu yili qarz bo'yicha 22000 so'm badal to'lanadi.

Kredit bo'yicha jami

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 10000 + 8000 + 6000 + 4000 + 2000 = 30000 \text{ (so'm)}$$

foiz to'lov to'lanadi. Ushbu natijani yuqoridagi (13) formuladagi foydalanib topish mumkin:

$$I = \frac{K \cdot p \cdot t \cdot (m+1)}{200} = \frac{100000 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 6}{200} = 30000.$$

Qarz uzish bo'yicha amortizatsiya rejasini quyidagi jadvalga joylashtiramiz:

Qarz uzish bosqichlari, (t)	Kredit miqdori, (K)	Foiz stavka, (R%)	Foiz to'lov miqdori, (I _t)	Asosiy kredit bo'yicha to'lovlar, (K ₀)	Har kvartaldagi badal
I yil t=1	100000	10%	10000	20000	30000
II yil t=1	80000	10%	8000	20000	28000
III yil t=1	60000	10%	6000	20000	26000
IV yil t=1	40000	10%	4000	20000	24000
V yil t=1	20000	10%	2000	20000	22000
Jami	—	—	30000	100000	130000

Tayanch so'z va iboralar

Qarz amortizatsiyasi, moliyaviy renta, qarzning asosiy to'lanadigan qismi, qarz qoldig'i uchun foiz to'lov, amortizatsiya rejasi

Nazorat savollari

1. Qarz amortizatsiyasi nima?
2. Moliyaviy renta nima?
3. Moliyaviy renta (to'lovlar oqimi) qanday qismlarni o'z ichiga oladi?
4. Qarzning asosiy to'lanadigan qismi qanday topiladi?
5. Qarzning qolgan qismi uchun foiz to'lovlar qanday formulalar yordamida topiladi?
6. Qarz uzishning amortizatsiya rejasi jadval ko'rinishida qanday tasvirlanadi?

Masalalar

1. A korxona V bankdan 15000 so'm kreditni yillik 12 % oddiy foiz stavkasi bilan 6 oyga olgan. Kredit bo'yicha har oydagi va jami foiz to'lovlar miqdorini toping.

Javob: $J_1=150$; $J_2=125$; $J_3=100$; $J_4=75$; $J_5=50$; $J_6=25$; $J=525$.

2. Mansur fermer xo'jaligini yo'lga qo'yish maqsadida tijorat bankidan 50 000 so'm kreditni 1 yilga, har kvartalda to'lab borish sharti bilan olgan. Agar bankning yillik, oddiy foiz stavkasi 20 % bo'lsa, u holda har kvartaldagi foiz to'lovlar miqdori va umumiy foiz to'lov miqdori qanday bo'ladi?

Javob: $J_1=25000$; $J_2=18750$; $J_3=12500$; $J_4=6250$; $J=62500$.

3. Komil engil mashina sotib olish uchun etmagan 2 000 000 so'm pulni tijorat bankidan yillik 50 % oddiy foiz stavkasi bilan 2 yilga oldi. Agar qarz bo'yicha to'lov har yarim yilda (6 oyda) bir marta amalga oshirilsa, qarz amortizatsiyasi qanday bo'ladi hamda har yarim yildagi to'lovlar miqdori qanday bo'ladi?

Javob: $K_1=1000\ 000$; $K_2=875\ 000$; $K_3=750\ 000$; $K_4=625\ 000$; $J=1\ 250\ 000$.

4. Korxona tijorat bankidan yillik 30 % stavkasi bilan 600000 so'm pulni bir oyga olgan. Qarz bo'yicha to'lov har dekadada (10-kunlikda) amalga oshirib borilsa, qarz bo'yicha umumiy foiz to'lov qancha bo'ladi?

Javob: $J=10\ 000$ so'm.

5. Karim tijorat bankdan 180 000 so'm pulni 50 kunga yillik 60 % stavkasi bilan olgan. Agar qarz bo'yicha to'lov har 10-kunlikda amalga oshirilsa, u holda har dekadadagi foiz to'lovlar miqdori va umumiy foiz to'lov miqdori qanday bo'ladi?

Javob: $J_1=3000$; $J_2=2400$; $J_3=1800$; $J_4=1200$; $J_5=600$; $J=9000$.

3. 3-§. Kredit foizini hisoblashda murakkab foizlar usuli

O'rta va uzoq muddatli moliya-kredit operatsiyalarida foizlar hisoblangandan so'ng darrov to'lab berilmasdan asosiy qo'yilmaga (qarzga) qo'shib borilsa, bu holda murakkab foizlar qo'llaniladi.

Hisoblangan ustama foizlarni asosiy qo'yilmaga qo'shilishi foizlarni **kapitallashtirish** deb ataladi.

Deylik, K_0 miqdordagi mablag' n yilga murakkab foiz stavkasi bilan qo'yilgan bo'lsin. Ushbu davrda ustama foiz hisobiga oshgan qo'yilma miqdorini K_n bilan belgilaymiz va uni quyidagi formula yordamida

topamiz:

$$K_n = K_o \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n \quad (1)$$

Bu formula **murakkab dekursiv formula** deb ataladi. Uni yana quyidagicha yozish mumkin:

$$K_n = K_o (1 + 0,01P)^n$$

Agar $\frac{P}{100}$ ni, ya'ni $0,01P$ ni i bilan belgilasak, $i = \frac{P}{100} = 0,01P$, u holda

$$K_n = K_o (1 + i)^n \quad (2)$$

Bu erda $r = 1 + i$ – murakkab foiz koeffitsienti, $r^n = (1 + i)^n$ esa murakkab foiz bo'yicha **o'sish koeffitsienti** deb ataladi. Bu koeffitsient P foiz stavkasi bilan olingan qarzning n yil ichida necha marta o'sishini ko'rsatadi. N ning butun qiymati va P lar uchun r^n ning qiymati maxsus moliya jadvalida keltiriladi.

1-misol. Shavkat 1 mln.so'm pulni yillik $P = 15\%$ stavkasi bilan 5 yil muddatga jamg'arma bankdan qarz olgan. Shu muddatda Shavkat qancha ustama foiz to'laydi va oshgan qarzi qancha bo'ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra, $K_0 = 1$ mln.so'm, $P = 15\%$, $n=5$.

5 yil ichida oshgan qarz miqdorini (4) formuladan foydalanib topamiz:

$$K_n = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^5 = 1000000 \cdot 2,0114.$$

Shu muddat ichidagi ustama foizni (8) formuladan foydalanib topamiz:

$$J = K_n - K_0 = K_0(r^n - 1) = 1000000 (2,0114 - 1) = 1011400.$$

Javob: 101400; 2011400.

2-misol. A shaxs 200 000 so'm pulni yillik 10 % murakkab foiz stavkasi bilan qo'ygan. 4 yildan so'ng qo'yilma miqdori qancha bo'ladi va umumiy foiz to'lov miqdori qancha bo'ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra, $K_0 = 200\,000$, $n = 4$, $P = 10\%$.

$$K_4 = 200000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^4 = 200000 \cdot I_{10}^4 = 200000 \cdot 1,4641 = 292820,$$

$$J = K_4 - K_0 = K_0(r^n - 1) = K_0(1,4641 - 1) = 200000 \cdot 0,4641 = 92820.$$

Javob: 292820; 92820.

Yuqoridagi misollarda murakkab foiz yiliga bir marta hisoblanadi, deb qabul qildik. Amaliyot esa murakkab foizlar yiliga 2 marta (har

yarim yilda bir martadan), har kvartalda 1 martadan yiliga 4 marta, har oyda 1 martadan yiliga 12 marta va hatto, har kunda ham hisoblanishi mumkin. Agar 1 yilda m marta kapitallashtirish (murakkab foizni hisoblash) amalga oshirilsa, u holda n yilda oshgan mablag' miqdori quyidagi formula orqali topiladi:

$$K_{mn} = K_0 \left(1 + \frac{P}{100m} \right)^{mn} \quad (3)$$

3 – misol. Karim 500 000 so'm pulni jamg'arma bankdan yillik 12 % murakkab foiz stavkasi bilan 5 yil muddatga kredit olgan. Agar foizlar har kvartalda hisoblansa, u holda Karim 5 yilda bankka qancha pul qaytarishi kerak?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra, $K_0 = 500\,000$ so'm, $P = 12\%$, $m = 4$, $n = 5$, $mn = 20$.

Demak, (8) formulaga asosan,

$$K_{20} = 500000 \left(1 + \frac{12}{100 \cdot 4} \right)^{20} = 500000 \left(1 + \frac{3}{100} \right)^{20} = 500000 \cdot 1,03^{20};$$

$$K_{20} = 500000 \cdot 1,8001 = 903050 \text{ ni}$$

topamiz.

Javob: 903050 so'm.

4-misol. Yuqoridagi 1-misolni kapitallashtirish har yarim yilda bajariladigan hol uchun eching.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra: $K_0 = 100000$, $P = 15\%$, $n = 5$, $m = 2$, $nm = 10$.

Endi (8) formuladan foydalanib,

$$K_{10} = 1000000 \left(1 + \frac{15}{100 \cdot 2} \right)^{10} = 1000000 \left(1 + \frac{7,5}{100} \right)^{10} = 1000000 \cdot I_{7,5}^{10} = 2063000$$

ni topamiz. Shu davr oralig'idagi ustama foiz miqdorini quyidagicha topamiz:

$$J = K_{10} - K_0 = 2063000 - 1000000 = 1063000.$$

Javob: 2063000 so'm; 1063000 so'm.

5-misol. Agar Anvar 100 000 so'm pulni yillik 10 % murakkab foiz stavkasi bilan 2 yilga jamg'arma bankka qo'ygan bo'lsa hamda ustama foiz har oyda hisoblansa, u holda Anvar 2 yildan so'ng qanday mablag'ga ega bo'ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra, $K_0 = 100\,000$, $P = 12\%$, $n = 2$, $m = 12$, $nm = 24$.

Endi (8) formuladan foydalanib, quyidagini topamiz:

$$K_{24} = 100000 \left(1 + \frac{12}{100 \cdot 12} \right)^{24} = 100000 \left(1 + \frac{1}{100} \right)^{24} = 100000 \cdot I_1^{24} = 126970.$$

Javob: 126970 so‘m.

Tayanch so‘z va iboralar

Murakkab foiz, kapitallashtirish, murakkab foiz koeffitsienti, murakkab foiz bo‘yicha o‘sish koeffitsienti.

Nazorat savollari

1. Murakkab foiz nima va u qachon qo‘llaniladi?
2. Kapitallashtirish nima?
3. Murakkab dekursiv formula qanday?
4. Murakkab foiz bo‘yicha o‘sish koeffitsienti qanday?
5. Murakkab foiz stavkasini qanday formuladan foydalanib topish mumkin?
6. Hisoblash muddati uzunligi qanday topiladi?
7. Agar kapitallashtirish yiliga m marta bajarilsa, u holda n yildagi oshgan kredit miqdori qanday topiladi?

Masalalar

1. 1 mln. so‘mdan iborat qarz yillik 15 % murakkab foiz stavkasi bilan hisoblanganda 4 yilda qanchaga etadi?

Javob: 1749000 so‘m.

2. Agar yillik 20 % murakkab foiz stavkasi bilan ustama foiz hisoblanganda dastlabki kredit 2 marta oshishi uchun necha yil muddat kerak bo‘ladi?

Javob: 3.8 yil.

3. Akbar 300 000 so‘m pulni yillik 12 % murakkab foiz stavkasi bilan 3 yilga Jamg‘arma bank hisobiga qo‘ygan. Agar kapitallashtirish har kvartalda amlga oshirilsa, Akbar 3 yildan so‘ng qancha pulga ega bo‘ladi?

Javob: 427740 so‘m.

4. Agar dastlabki kredit 30 000 so‘m bo‘lib, u 3 yilda 34728 so‘mga oshgan bo‘lsa, u holda foiz stavkasi qanday bo‘lgan?

Javob: 5%

5. Karim yillik 20 % murakkab foiz stavkasi bilan 200 000 so‘m kreditni 2 yil muddatga olgan. Agar kapitallashtirish har kvartalda bajarilsa, u holda Karim jami qancha qarz to‘lashi kerak?

Javob: 295 500 so‘m.

6. Aziz 20 000 so‘m pulni jamg‘arma bankka qo‘ygan. Agar yillik 8 % murakkab foiz stavkasi bilan yiliga 2 marta kapitallashtirish amalga oshirilsa, 5 yilda Aziz qancha pulga ega bo‘ladi?

Javob: 29609 so‘m.

7. 60 yoshli A shaxs 10 000 so‘m pulni jamg‘arma bankka yillik 10 % murakkab foiz stavkasi bilan 10 yilga qo‘ydi. U o‘zining 70 yilligida qancha jamg‘armaga ega bo‘ladi?

Javob: 25937 so‘m.

8. Agar Ilhom jamg‘arma bankdan yillik 24 % murakkab foiz stavkasi bilan 500 000 so‘m kredit olgan bo‘lsa hamda kapitallashtirish har oyda amalga oshirilsa, u holda 5 yildan so‘ng Ilhomning qarzi qancha bo‘ladi?

Javob: 1640500 so‘m.

3.4-§. Jamg‘armaning yig‘ma miqdori va yig‘ma koeffitsienti

Yuqorida biz K_0 miqdorda bir marta qo‘yilgan mablag‘ n yil ichida K_n miqdorga etishini ta‘minlovchi jarayonni ko‘rdik. Lekin amaliyotda har doim ham ana shunday vaziyat bo‘lavermaydi. Ba‘zi hollarda qo‘yilma bir marta qo‘yilmasdan, balki n ta bosqich oralig‘ida doimiy ravishda qo‘yilib boriladi. Qo‘yilmalar arifmetik yoki geometrik progressiya bo‘yicha oshib yoki kamayib borishi mumkin yoki bo‘lmasa, hech qanday qonuniyatga bo‘ysunmagan holda oshib yoki kamayib borishi mumkin. Bu hollarda n yildan so‘ng (n -yilning oxirida) qo‘yilmaning so‘ngi miqdorini aniqlash masalasi qo‘yiladi. Deylik, quyidagi masalani yechish talab qilinsin:

Faraz qilaylik, har yilning boshida jamg‘arma bankka a miqdorda pul o‘tkazilsin. Bu ish n yil davomida amalga oshirilsin hamda yillik foiz stavka P % ni tashkil qilsin. n yil ichida bankda yig‘ilgan pul miqdori qancha bo‘ladi?

Masalaning echilishi. Dastlabki qo‘yilgan a miqdordagi pul n yil ichida

$$a_n = a \cdot r^n = \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n \quad (1)$$

miqdorga etadi. Ikkinchi yilda qo‘yilgan pul $n-1$ yilga qo‘yilgan bo‘ladi, shuning uchun u so‘nggi yilda:

$$a_{n-1} = a \cdot r^{n-1} = a \left(1 + \frac{P}{100}\right)^{n-1} \quad (2)$$

miqdorga etadi va hokazo, $n-1$ -yilda qo'yilgan pul faqat bir yilga qo'yilganligi sababli u n -yilda:

$$a_1 = a \cdot r = a \left(1 + \frac{P}{100}\right) \quad (3)$$

miqdorga etadi.

Agar qo'yilgan barcha pullarning oshgan qiymatlarining yig'indisini S_n bilan belgilasak, u quyidagiga teng bo'ladi:

$$S_n = ar^n + ar^{n-1} + \dots + ar^2 + ar$$

yoki

$$S_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad (4)$$

bundan,

$$S_n = a(r + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n).$$

Agar qavs ichidagi ifoda geometrik progressiya ekanligini nazarga olsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$S_n = ar \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad (5)$$

bu erda

$$r \frac{r^n - 1}{r - 1} = R_n \quad (6)$$

belgilash kiritamiz. (6) ifoda **jamg'armaning yig'ma koeffitsienti** deb ataladi. Bu koeffitsient har yilning boshida bir xil miqdorda pul o'tkazib borilganda n yil ichida jamg'arma miqdori necha martaga oshganligini ko'rsatadi.

Jamg'armaning yig'ma koeffitsienti P va n larning turli qiymatlari maxsus jadvalda keltiriladi.

Agar kapitallashtirish (ustama foizni hisoblash) yiliga m marta amalga oshirilsa, u holda n yildagi pul oqimlarining yig'ma miqdori:

$$S_{mn} = ar \frac{r^{mn} - 1}{r - 1}, \quad (7)$$

yig'ma koeffitsienti esa

$$R_{mn} = r \frac{r^{mn} - 1}{r - 1}$$

bo'ladi.

1-misol. A shaxs har yilning boshida jamg'arma bankka 20 000 so'm pul o'tkazadi. Agar yillik foiz stavkasi 8 % ni tashkil qilsa, bu shaxsning 5 yilda yig'ilgan jamg'armasi qancha bo'ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra: $a=20\,000$, $P=8\%$, $n=5$. Yig'ma

jamg'arma miqdori:

$$S_5 = ar \frac{r^5 - 1}{r - 1} = aR_5$$

Maxsus moliya jadvalidan $R_5=6,336$ ekanligini topamiz.

Demak, $S_5=20000 \cdot 6,336=126720$.

Javob: 126720 so'm.

Tayanch so'z va iboralar

Jamg'armaning yig'ma miqdori, jamg'armaning yig'ma koeffitsienti.

Nazorat savollari

1. Jamg'armaning yig'ma miqdori nima va u qanday topiladi?
2. Jamg'armaning yig'ma koeffitsienti nima va u qanday topiladi?
3. Agar jamg'arma bankka har yili bir xil miqdordagi mablag'ni n yil davomida o'tkazib borilsa, uning yig'ma miqdori va yig'ma koeffitsienti qanday bo'ladi?
4. Agar mablag'lar har yil oxirida bir xil miqdorda o'tkazib borilsa, jamg'arma bankdagi yig'ilgan mablag' miqdori qanday bo'ladi?

Masalalar

1. Bank hisobiga har oyning boshida 1200 so'mdan pul qo'yilib borilsa hamda yillik foiz stavkasi 5% ni tashkil qilsa, 3 yildagi yig'ilgan jamg'arma miqdori qancha bo'ladi?

Javob: 39600 so'm.

2. 5 yildan so'ng 500 000 so'mdan iborat fond tashkil qilish uchun foiz stavkasi 6 % bo'lganda, har yilning boshida qancha pul qo'yib borilishi kerak?

Javob: 83678 so'm.

3. 2-misoldagi shartlarda har yilning oxirida qancha pul qo'yish kerak?

Javob: 88698 so'm.

4. Mijoz har yilning boshida 50 000 so'm pulni jamg'arma bankiga qo'yib boradi. Agar yillik foiz stavkasi 10 % ni tashkil qilsa, mijozning 10 yilda yig'ilgan jamg'armasi qancha bo'ladi?

Javob: 876560 so'm.

3.5-§. Aralash masalalar

1. Mijoz tijorat bankiga 200 000 so'm pulni 6 oyga yillik 8 % stavkasi bilan qo'ygan. Ushbu muddat so'ngida mijozning jamg'armasi qancha bo'ladi?

Javob: 208 000 so'm.

2. Aziz 100 000 so'm pulni 90 kunga yillik 25 % stavkasi bilan bank de-

pozitiga qo'ygan. Shu muddat so'ngida Azizning jamg'armasi qancha bo'ladi?

Javob: 106250 so'm.

3. Firma tijorat bankida 1 000 000 so'm kreditni yillik 20% stavkasi bilan 5 yilga olgan. Shu muddat oxiriga firmaning foiz to'lovi qanday bo'ladi?

Javob: 1 000 000 so'm.

4. Moliyaviy kelishuvga asosan 5 mln. so'm qarz bo'yicha birinchi yil 10 %, ikkinchi yil 15 %, uchinchi yil 20 % va nihoyat to'rtinchi yil 25 % foiz stavkasi belgilangan. 4 yilda oshgan qarz miqdorini aniqlang.

Javob: 8 500 000 so'm.

5. Bank depozitiga 10.01 da 2 000 000 so'm pul qo'yildi. 1.04 da 1 200 000 so'm pul qaytib olindi. 1.06 da 1,5 mln. va 1.09 da yana 700 000 so'm pul qo'yildi. 31.12 da bank depozitida pul miqdori qancha bo'ladi? (Foiz stavkasi 15% deb qaralsin.)

Javob: 3311960 so'm.

6. Davron jamg'arma bankidan 600 000 so'm pulni 5 oyga yillik 20 % stavkasi bilan kredit olgan. Kredit bo'yicha to'lovlar (amortizatsiya) rejasini tuzing hamda jami foiz to'lovlar miqdorini aniqlang.

Javob: 300 000 so'm.

7. Otabek o'z biznesini yo'lga qo'yish uchun tijorat bankidan 10 mln. so'mni yillik 10 % stavkasi bilan 4 yilga kredit olgan. Shartnomaga ko'ra Otabek qarzni har yili teng miqdorda pul o'tkazish yo'li bilan uzadi. Qarz bo'yicha amortizatsiya rejasini tuzing va har yilgi to'lovlar miqdorini aniqlang.

Javob: 350 000 so'm.

8. Mijoz jamg'arma bankidan har dekadada (10 kunda) to'lab borish sharti bilan 2 000 000 so'mni 50 kunga yillik 35 % stavkasi bilan kredit olgan. Qarz bo'yicha amortizatsiya rejasini tuzing. Mijozning bankka to'laydigan umumiy foiz to'lovlar miqdorini aniqlang (1 yilda 365 kun deb hisoblansin).

Javob: 305255 so'm.

9. 5 000 000 so'mdan iborat pul yillik 10 % murakkab foiz stavkasi bilan jamg'arma bankiga qo'yilganda 5 yilda qanchaga oshadi?

Javob: 8857805 so'm.

10. Bahrom 5 000 000 so'mni yillik 20 % murakkab foiz stavkasi bilan 3 yilga kredit olgan. Agar kapitallashtirish yiliga 2 marta (har 6 oyda 1 marta) amalga oshirilsa, Bahrom qarz bo'yicha jami qancha pul to'lashi kerak?

Javob: 8857805 so'm.

IV bob. FUNKTSIYA VA GRAFIKLARNING IQTISODIYOTDA QO‘LLANISHI

Zarur matematik tushunchalar va faktlar

1. Funktsiya tushunchasi. 1-ta’rif. x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga u o‘zgaruvchining yagona qiymatini mos qo‘yuvchi qonun **funktsiya** deb ataladi.

2-ta’rif. x erkli o‘zgaruvchining qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari to‘plami **funktsiyaning aniqlanish sohasi** deb, y ning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlar to‘plami esa funktsiyaning **qiymatlar to‘plami** yoki **o‘zgarish sohasi** deb ataladi. $f(x)$ funktsiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$, o‘zgarish sohasi esa $E(f)$ ko‘rinishida belgilanadi.

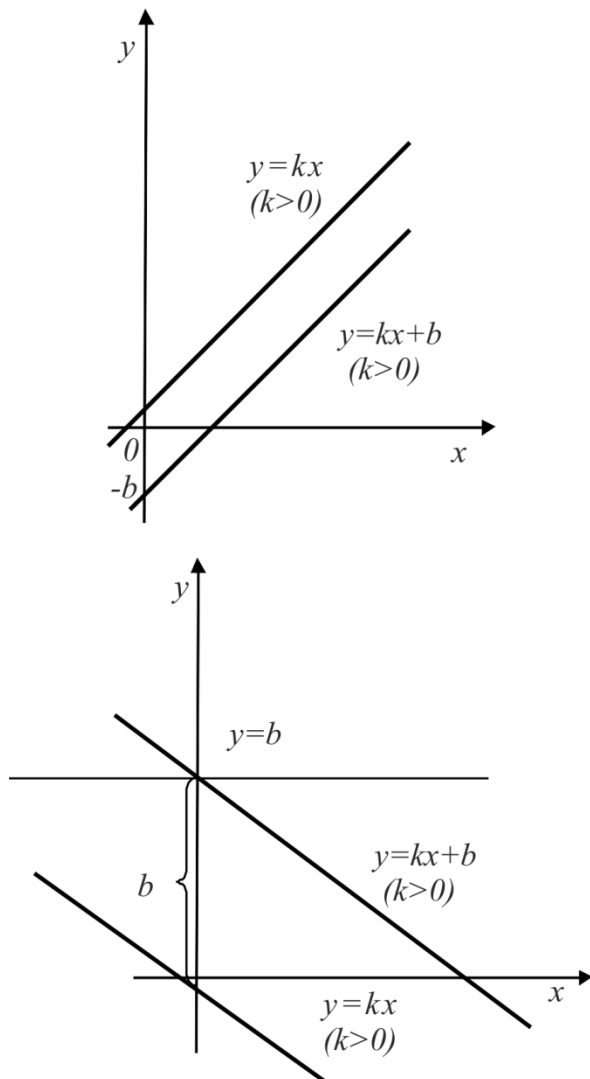
Misol. $y = \sqrt{x-1}$ funktsiyaning aniqlanish va qiymatlari sohasini aniqlang.

Yechish. Kvadratik ildiz ostidagi ifodaning nomanfiy bo‘lishlik shartidan, ya’ni $x-1 \geq 0$ shartidan $x \geq 1$ ekanligini topamiz.

Demak, $D(x) = [1; \infty)$. x ning $[-1; \infty)$ oraliqdagi qiymatlarida $y = \sqrt{x-1}$ funktsiya $[0; +\infty)$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qiladi, ya’ni $E(x) = [0; +\infty)$.

2. Funktsiya nollari. x argumentning $f(x)=0$ tenglikni qanoatlantiradigan qiymatlari $f(x)$ **funktsiyaning nollari** deb ataladi. Bu qiymatlar $u=f(x)$ funktsiya grafigining abtshissa o‘qini kesib o‘tish nuqtalarini aniqlaydi.

Masalan, $u=(x-1)(x+2)$ funktsiyaning nollari $u=0$ tenglamaning, ya’ni $(x-1)(x+2)=0$ tenglamaning yechimlaridan iborat bo‘ladi, ya’ni $x=1$ va $x=-2$.



4.1-shakl.

3. Elementar funktsiyalar va ularning grafiklari. A. Chiziqli funktsiya va uning grafigi. $y=kx+b$, ($k \neq 0$) ko'rinishidagi funktsiya **chiziqli funktsiya** deyiladi. Bu erda k va b ixtiyoriy haqiqiy sonlar, k – burchak koeffitsienti, b – ozod had deb ataladi. Chiziqli funktsiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi haqiqiy sonlar to'plami R dan iborat bo'ladi. k koeffitsient to'g'ri chiziqning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan α -burchakka bog'liq bo'ladi. Agar $k > 0$ bo'lsa, u holda α -burchak o'tkir, agar $k < 0$ bo'lsa, u holda α -burchak o'tmas bo'ladi, agar $k = 0$ bo'lsa, u holda to'g'ri chiziq Ox o'qiga parallel bo'ladi. Agar $b = 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi (4.1-shakl).

B. Kvadratik funktsiya va uning grafigi. $y=ax^2+bx+s$ ko'rinishidagi funktsiya **kvadratik funktsiya** deyiladi. Bu erda $a \neq 0$, b , c lar ixtiyoriy sonlar. Kvadratik funktsiyaning aniqlanishi sohasi $D(f)=R$, qiymatlar to'plami

$$E(f) = \begin{cases} \left[-\frac{b^2-4ac}{4a}; \infty \right], & a > 0; \\ \left[-\infty; -\frac{b^2-4ac}{4a} \right], & a < 0; \end{cases}$$

bo'ladi. Kvadratik funktsiyaning grafigi parabola egri chizig'idan iborat bo'lib, $a > 0$ da tarmoqlari yuqoriga, $a < 0$ da pastga yo'nalgan bo'ladi. $x = -\frac{b}{2a}$ to'g'ri chiziq parabolaning simmetriya o'qi bo'ladi. Parabola

uchining koordinatalari $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ formulalar yordamida topiladi.

Kvadratik funktsiya grafigini chizishda 4 ta xarakterli nuqtalarni aniqlash kerak:

1) parabolaning uchi;

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a};$$

2) Parabolaning ox o'qi bilan kesishgan nuqtalari:

$$a) \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad y_1 = 0;$$

$$b) \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad y_2 = 0.$$

3) parabolaning oy o'qini kesib o'tish nuqtasi:

$$x_3 = 0; \quad y_3 = c.$$

Misol. Quyidagi kvadratik funktsiyalarning grafiklarini yasang:

$$y=2x^2-8x-1.$$

Yechish. a) parabolaning 4 ta xarakterli nuqtalarini topamiz:

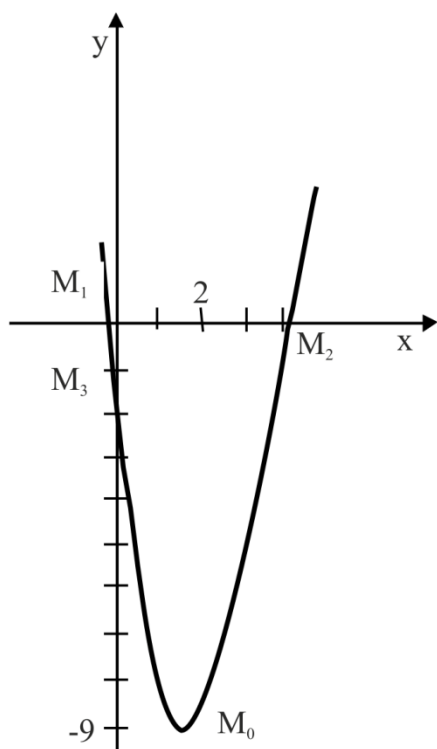
$$(a=2; b=-8; s=-1).$$

$$1) \quad x_0 = \frac{8}{4} = 2; \quad y_0 = -\frac{64 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}{8} = -\frac{64 + 8}{8} = -9.$$

Demak, parabolaning uchi $(2; -9)$ nuqtada bo'ladi.

2) parabolaning Ox o'qini kesib o'tgan $(x_1; y_1)$ va $(x_2; y_2)$ nuqtalarni aniqlaymiz.

$$y=0; \quad x_1 = 2 - \sqrt{5}; \quad x_2 = 2 + \sqrt{5}.$$



4.2-shakl.

3) $x=0$, $u=-1$. $a=2>0$ bo'lgani uchun parabolaning tarmoqlari yuqoriga qaragan bo'ladi. Shunday qilib, parabolaning xarakterlovchi nuqtalari $M_0(2; -9)$; $M_1(2 - \sqrt{5}; 0)$; $M_2(0; 2 + \sqrt{5})$; $M_3(0; -1)$. Ushbu nuqtalar orqali parabolaning o'tkazamiz (4.2-shakl).

4. Funktsiya limiti tushunchasi. 1.

Nuqtadagi limit. Agar $u=f(x)$ funktsiya $x=a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lsaki, $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantirgan $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda A son $u=f(x)$ funktsiyaning $x=a$ **nuqtadagi limiti** deb ataladi. Ushbu

limit quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{yoki} \quad x \rightarrow a \quad \text{da} \quad f(x) \rightarrow A.$$

Geometrik nuqtai nazardan limitni quyidagicha izohlash mumkin: agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lib, a dan masofasi δ dan ortiq bo'lmagan $(a-\delta; a+\delta)$ intervaldagi barcha x nuqtalar uchun $f(x)$ funktsiyaning qiymatlari $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ oraliqqa tushsa, A son $f(x)$ funktsiyaning $x \rightarrow a$ dagi limiti bo'ladi.

1-misol. $f(x)=2x+3$ funktsiyaning $x=1$ nuqtadagi limitini 5 ga teng ekanligini, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$$

tenglikning o'rinli ekanini isbotlaymiz.

Buning uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz.

$$f(x) - 5 = 2x + 3 - 5 = 2x - 2 = 2(x - 1).$$

$|f(x) - 5|$ modul ixtiyoriy x uchun $f(x)$ funktsiya bilan 5 soni orasidagi masofani bildiradi va u quyidagicha aniqlanadi.

$$|f(x) - 5| = 2|x - 1|.$$

$$\text{Agar } |f(x) - 5| < \varepsilon = 0,01$$

tengsizlikning o'rinli bo'lishini talab qilinsa, u holda

$$|x - 1| \leq 0,005 = \delta$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Demak, x ning $|x - 1| < 0,005$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in (x - \delta < x < x + \delta)$ qiymatlari uchun $|f(x) - 5| < 0,01$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2. Bir tomonlama limitlar. Deylik, x o'zgaruvchi x_0 dan kichik bo'lsin, ya'ni $x < x_0$. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ sonni topish mumkin bo'lsaki, $x_0 - \delta < x < x_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x_0)$ son $f(x)$ funktsiyaning $x = x_0$ nuqtadagi **chap tomonlama limiti** deyiladi va u quyidagicha belgilanadi:

$$f(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x). \text{ yoki } f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

Agar $x_0 = 0$ bo'lsa, u holda chap tomonlama limit quyidagicha belgilanadi:

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(-0).$$

Misol. $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ funktsiyaning $x \rightarrow -0$ dagi limiti $\lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \right) = 1$

bo'ladi.

Endi $x > x_0$ bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ sonni topish mumkin bo'lsaki, $x_0 < x_0 - x < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x_0)$ son $f(x)$ funktsiyaning $x = x_0$ nuqtadagi **o'ng tomonlama limiti** deyiladi va u quyidagicha belgilanadi.

$$f(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \text{ oyki } f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

Agar $x_0 = 0$ bo'lsa, u holda o'ng tomonlama limit quyidagicha ifodalanadi.

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(+0).$$

Misol. $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ funktsiyaning $x \rightarrow +0$ dagi limiti $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \right) = 0$

bo'ladi.

$u=f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada limitga ega bo'lishi uchun bu nuqtada uning ham chap tomonlama, ham o'ng tomonlama limiti mavjud bo'lib, ularning o'zaro teng bo'lishi zarur va etarlidir. Yuqorida ko'rilgan

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

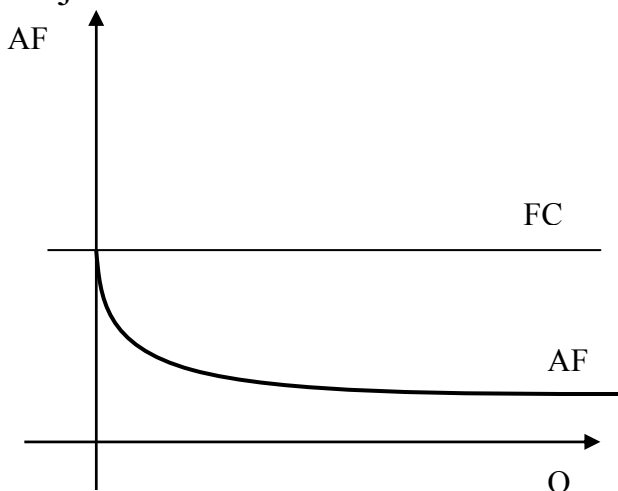
funktsiyaning chap tomonlama limiti o'ng tomonlama limitiga teng emas, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \right) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \right) = 0.$$

Demak, ushbu funktsiya $x=0$ nuqtada limitga ega emas.

4.1-§. O'zgarmas va o'zgaruvchan xarajatlar. Umumiy xarajat funktsiyasi. Yalpi daromad va foyda funktsiyalari

O'zgarmas xarajat deb, qisqa muddatli oraliqda mahsulot ishlab chiqarish hajmiga bog'liq bo'lmagan xarajatlarga aytiladi. O'zgarmas xarajat FC – (Fixed Cont) ko'rinishida belgilanadi. O'zgarmas xarajatlarga bino, texnika, ishlab chiqarish uskunalaridan foydalanish uchun sarf qilinadigan xarajatlar, ijara haqi, kapital ta'mirlash, ma'muriy xarajatlar kiradi.



4.3-shakl.

O'rtacha o'zgarmas xarajat deb, bir birlik mahsulotga to'g'ri keladigan o'zgarmas xarajatga aytiladi. O'rtacha o'zgarmas xarajat AFC – (Average Fixed Cont) bilan belgilanadi va u quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$AFC(Q) = \frac{FC}{Q}. \quad (1)$$

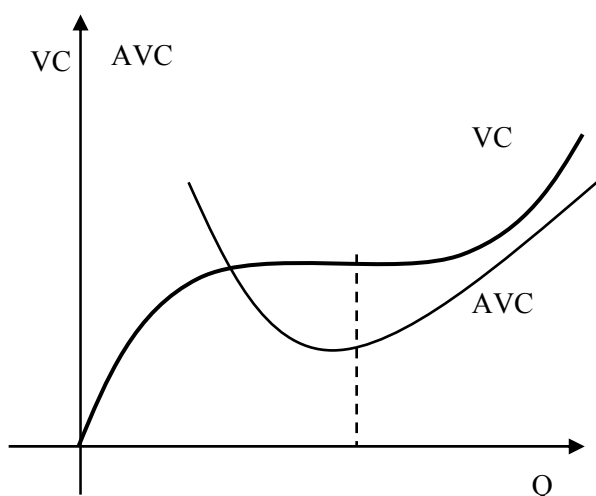
O'rtacha xarajat mahsulot hajmiga teskari proportsional

bo‘lib, mahsulot hajmi oshganda kamayuvchi funktsiyadir. O‘zgarmas xarajat (FC) chizig‘i to‘g‘ri chiziqdan, o‘rtacha o‘zgarmas xarajat chizig‘i esa egri chiziqdan iborat bo‘ladi (4.3-shakl).

Misol. Agar korxonaning o‘zgarmas xarajati 200 p.b. ga teng bo‘lib, ishlab chiqarishning hajmi 100 birlikni tashkil qilsa, u holda o‘rtacha o‘zgarmas xarajat qanday bo‘ladi?

Yechish. Shartga ko‘ra, $FC=200$, $Q=100$. U holda $AFC=2$ bo‘ladi.

O‘zgaruvchan xarajat deb, mahsulot ishlab chiqarish hajmiga bog‘liq bo‘lgan xarajatga aytiladi. Bunday xarajat VC (Variable Cost)



4.4-shakl.

bilan belgilanadi. O‘zgaruvchan xarajat Q ga bog‘liq funktsiya bo‘lib, $Y=VC(Q)$ ko‘rinishida ifodalanadi. O‘zgaruvchan xarajatlarga xom ashyo, elektro-energiya, yordamchi materiallar va boshqa xarajatlar kiradi.

Ishlab chiqarishning dastlabki bosqichida o‘zgaruvchan xarajatlarning o‘sish sur‘ati ishlab chiqarish sur‘atidan yuqori bo‘ladi. Ishlab chiqarish hajmi optimal qiymatga erish-

ganda u kamayadi, so‘ngra yana oshadi (4.4-shakl).

O‘rtacha o‘zgaruvchan xarajatlar deb, bir birlik ishlab chiqariladigan mahsulotlarga mos keluvchi xarajatlarga aytiladi. O‘rtacha o‘zgaruvchan xarajatlar AVC (Average Variable Cost) bilan belgilanadi. U ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori Q ning funktsiyasi bo‘lib, quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$AFC(Q) = \frac{VC}{Q}. \quad (2)$$

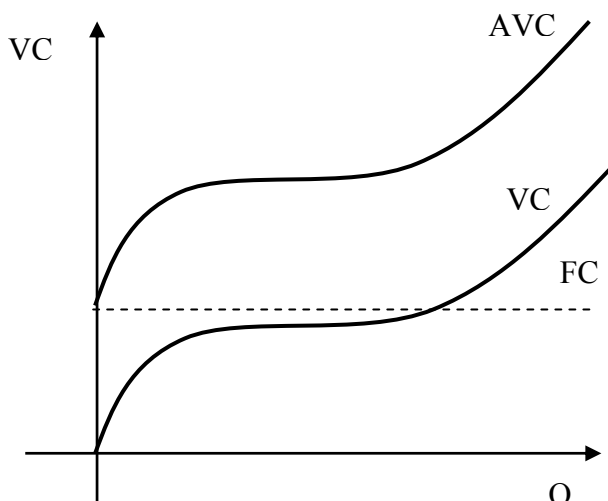
Grafikda o‘rtacha o‘zgaruvchan xarajatlar chizig‘i ishlab chiqarish hajmi optimal qiymatga erishganda eng kichik qiymatga erishadi. Agar ishlab chiqarish hajmi yanada oshsa, o‘rtacha o‘zgaruvchan xarajatlar yana oshadi.

Umumiy xarajat deb, qisqa vaqt oralig‘ida ma‘lum miqdordagi mahsulot ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan o‘zgarmas va o‘zgaruvchan xarajatlar yig‘indisiga aytiladi. Umumiy xarajat TS (Total Cost) bilan belgilanadi va quyidagi formula yordamida topiladi:

$$TC = FC + VC(Q), \quad (3)$$

bu yerda FC -o'zgarmas xarajat, $VC(Q)$ -o'zgaruvchan xarajat. Umumiy xarajatning grafik tasviri quyidagi ko'rinishda bo'ladi (4.5-shakl):

O'rtacha umumiy xarajat deb, o'rtacha o'zgarmas va o'rtacha o'zgaruvchan xarajatlarning yig'indisiga aytiladi va u quyidagi formula orqali aniqlanadi:



4.5-shakl.

$$ATC = AFC + AVC = \frac{FC + VC}{Q}. \quad (4)$$

O'rtacha umumiy xarajadni umumiy xarajatning ishlab chiqarilgan mahsulot hajmiga nisbati ko'rinishida ham aniqlash mumkin, ya'ni

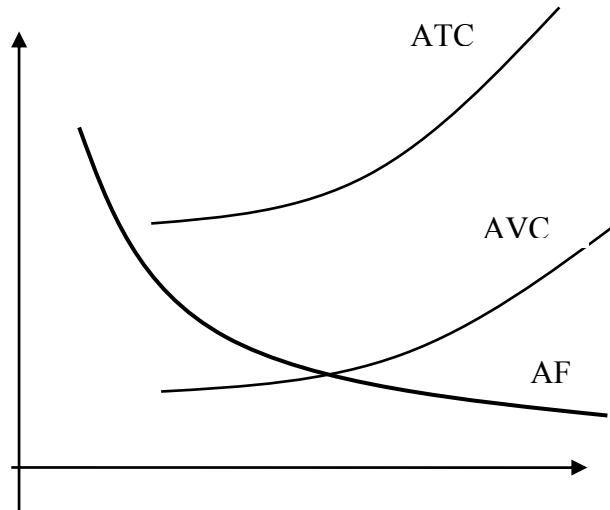
$$ATC = \frac{TC}{Q}. \quad (5)$$

ATC , AFC va AVC chiziqlarning grafik tasviri quyidagicha bo'ladi (4.6-shakl):

Umumiy o'rtacha xarajatlarning korxona faoliyatini tahlil qilishda katta ahamiyat kasb etadi. Uning yordamida korxonaning olayotgan daromadi aniqlanadi.

Marjinal (limit) xarajat deb, ishlab chiqariladigan mahsulot miqdorini kichik ΔQ miqdorga oshirganda umumiy xarajat TC ning oshgan qiymati ΔTC ni belgilovchi songa aytiladi.

Marjinal xarajat MC (Marginal cost) bilan belgilanadi va quyidagi tenglik yordamida aniqlanadi:



4.6-shakl.

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q} = \frac{\Delta (FC + VC)}{\Delta Q} = \frac{\Delta FC}{\Delta Q} + \frac{\Delta VC}{\Delta Q}.$$

Bu erda $\frac{\Delta FC}{\Delta Q} = 0$ bo'lganligi sababli

$$MC = \frac{\Delta VC}{\Delta Q} \quad (6)$$

bo'ladi. Demak, marjinal umumiy xarajat marjinal o'zgaruvchan xarajatga teng bo'lar ekan.

Misol. Quyidagi jadvalda keltirilgan mahsulot hajmi, o'zgaras va o'zgaruvchan xarajatlari asosida yalpi (umumiy) xarajat, marjinal xarajat va o'rtacha xarajatlari (AFC , AVC , ATC) ni toping va jadvalni to'ldiring hamda o'rtacha xarajatlarni grafikda tasvirlang.

4.1-jadval

Mahsulot hajmi, Q	O'zgaras xarajat, FC	O'zgaruvchan xarajat, VC	Yalpi xarajat, TC	Marjinal xarajat, MS	O'rtacha xarajatlari		
					O'rtacha o'zgaras xarajat, AVC	O'rtacha o'zgaruvchan xarajat, AVC	O'rtacha yalpi xarajat, ATC
0	100	0	100	-	-	-	-
1	100	50	150	50	100	50	150
2	100	90	190	40	50	45	95
3	100	120	220	30	33,3	40	73,3
4	100	150	250	30	25	37,5	62,5
5	100	200	300	50	20	40	60
6	100	260	360	60	16,7	43,3	60
7	100	350	450	90	14,3	50	64,3
8	100	420	520	70	12,5	52,5	65
9	100	500	600	80	11,1	55,6	66,7
10	100	600	700	100	10	60	70

Yechish. 1) umumiy (yalpi) xarajatlarni topish uchun o'zgaras xarajat FC ustun elementlarini o'zgaruvchan xarajat VC ustunning mos elementlariga qo'shamiz va TS ustunni hosil qilamiz.

TS : 100; 150; 190; 220; 250; 300; 360; 450; 520; 600; 700.

2) marjinal xarajat (MS)ni topish uchun (6) formuladan foydalanib topamiz:

MC : 0; 50; 40; 30; 30; 50; 60; 90; 70; 80; 100.

3) o'rtacha o'zgaras xarajatlarni (1) formuladan foydalanib (FC ustun elementlarini Q ustunning mos elementlariga bo'lamiz) va topamiz:

AFC : 0; 100; 50; 33,3; 25; 20; 16,7; 14,3; 12,5; 11,1; 10.

4) o'rtacha o'zgaruvchan xarajatlarni topish uchun (2) formuladan foydalanib (VC ustunni Q ustunning mos elementlariga bo'lamiz) quyidagiga ega bo'lamiz:

AVC : 0; 50; 45; 40; 37,5; 40; 43,3; 50; 52,5; 55,6; 60.

5) o'rtacha umumiy xarajatni (4) formuladan foydalanib (TS ustunni Q ustunning mos elementlariga bo'lamiz) topamiz:

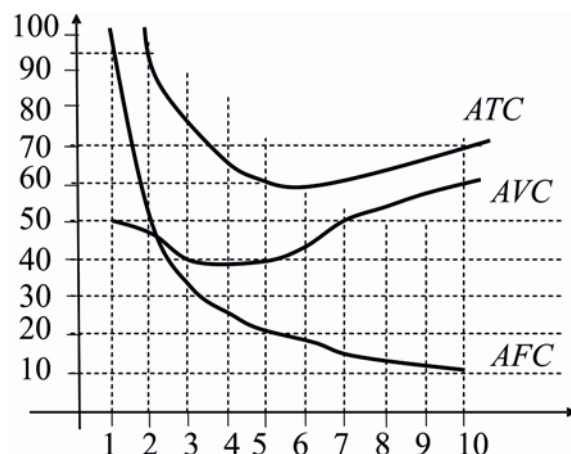
ATC : 0; 150; 95; 75; 62,5; 60; 61,7; 64,3; 63,75; 67,8; 70.

6) topilgan natijalarni jadvalga joylashtiramiz.

7) o'rtacha xarajatlarni grafikda tasvirlaymiz (4.7.-shakl):

Umumiy daromad. Raqobatlashgan bozorda korxona (firma)ning umumiy (yalpi) daromadi deb, uning ma'lum bir miqdordagi mahsulotini sotishdan olgan daromadiga aytiladi. Bu daromad quyidagi formula yordamida topiladi:

$$TR=PQ,$$



4.7-shakl. (7)

bu erda TR – umumiy daromad, Q – sotilgan mahsulot miqdori, R – mahsulot narxi. Yuqoridagi munosabatdan ko'rinadiki, umumiy daromad mahsulot hajmi Q ning funktsiyasidan iborat.

Shuning uchun uni $TR(Q)$ (yoki $R(Q)$) funktsiya ko'rinishida ifodalash mumkin.

O'rtacha daromad deb, bir birlik mahsulotga mos keluvchi daromadga aytiladi. O'rtacha daromad ATR (yoki AR) bilan belgilanadi va quyidagicha topiladi:

$$ATR = \frac{TR}{Q} = \frac{PQ}{Q} = P. \quad (8)$$

Bu tenglikdan ko'rinadiki, o'rtacha daromad mahsulot narxiga teng ekan.

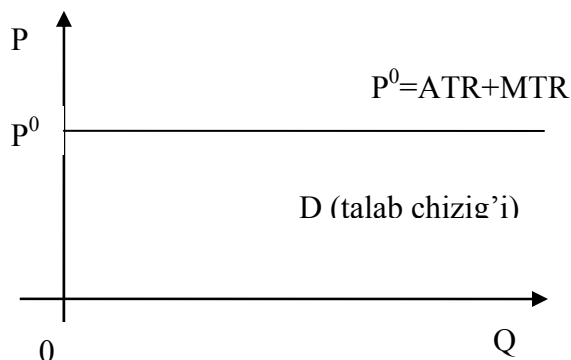
Marjinal (limit) daromad deb, qo'shimcha bir birlik mahsulotni sotish natijasida qo'lga kiritiladigan qo'shimcha umumiy daromadga aytiladi. Marjinal daromad MR bilan belgilanadi va quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$MTR = \frac{\Delta TR(Q)}{\Delta Q}, \quad (9)$$

bu erda $\Delta TR(Q) = \Delta(PQ) = P\Delta Q$ (qisqa muddat ichida mahsulot narxi R o'zgarmas hisoblanadi).

Buni inobatga olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$MTR = \frac{P\Delta Q}{\Delta Q} = P. \quad (10)$$



4.8-shakl.

Demak, marjinal daromad o'rtacha daromadga, ya'ni mahsulot narxiga teng ekan.

$P = ATR = MTR$ tenglikni ifodalovchi chiziq POQ koordinatalar sistemasida OQ chiziqqa parallel bo'lgan chiziqni ifodalaydi va raqobatlashgan bozordagi talab chizig'ini beradi (4.8-shakl).

Misol. Raqobatlashgan bozorda bir xil sifatli mahsulot sotilmoqda. Sotiladigan mahsulot miqdori, mahsulot narxi berilgan. Sotuvchining umumiy, o'rtacha va marjinal daromadlarini jadvaldagi ma'lumotlar asosida topib jadvalni to'ldiring.

4.2-jadval

Mahsulot miqdori, Q	Mahsulot narxi, R	O'rtacha daromad, ATR	Yalpi daromad, TR	Marjinal daromad, MTR
0	100	100	0	-
1	100	100	100	100
2	100	100	200	100
3	100	100	300	100
4	100	100	400	100
5	100	100	500	100
6	100	100	600	100
7	100	100	700	100
8	100	100	800	100
9	100	100	900	100
10	100	100	1000	100

Foyda funktsiyasi. Qisqa muddatli oraliqdagi firmaning foydasi deb, uning umumiy daromadi va umumiy xarajati orasidagi farqqa aytiladi. Foyda funktsiyasi $F(Q)$ bilan belgilanadi va quyidagi munosabat orqali topiladi:

$$(F\ Q) = TR(Q) - TC(Q). \quad (11)$$

Bundan ko'rinadiki, umumiy daromad umumiy xarajatdan katta bo'lsa,

ya'ni

$$TR(Q) > TC(Q)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $F(Q) > 0$ bo'ladi. Aks holda, agar

$$TR(Q) \leq TC(Q)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda firma foydasiz ishlaydi.

Tayanch so'z va iboralar

O'zgarmas xarajat, o'zgaruvchan xarajat, o'rtacha o'zgarmas xarajat, o'rtacha o'zgaruvchan xarajat, umumiy (yalpi) xarajat, o'rtacha umumiy xarajat, marjinal (limit) xarajat, o'rtacha daromad, marjinal daromad, umumiy (yalpi) daromad, foyda.

Nazorat savollari

1. O'zgarmas xarajatlarni ta'riflang.
2. Ishlab chiqarishdagi qanday xarajatlar o'zgarmas xarajatni tashkil qiladi?
3. O'zgaruvchan xarajatlar nima?
4. Ishlab chiqarishdagi qanday xarajatlar o'zgaruvchan xarajatni tashkil qiladi?
5. O'rtacha o'zgarmas xarajat nima?
6. O'rtacha o'zgaruvchan xarajat qanday?
7. Umumiy xarajat qanday aniqlanadi?
8. O'rtacha umumiy xarajatni ta'riflang.
9. Marjinal (limit) xarajatni ta'riflang.
10. Umumiy daromadni ta'riflang.
11. O'rtacha daromad nima?
12. Marjinal (limit) daromad nima va u qanday aniqlanadi?
13. Raqobatlashgan bozordagi talab chizig'i nima?
14. Foyda funktsiyasi nima va u qanday aniqlanadi?

Masalalar

1. Firmaning o'zgarmas xarajatlari 45 p.b. ni tashkil qiladi. O'rtacha o'zgaruvchan xarajatlar quyidagi 4.3-jadvalda keltirilgan.

4.3-jadval

Mahsulot miqdori, Q	O'zgarmas xarajat, FC	O'rtacha o'zgaruvchan xarajat, AVC	O'rtacha yalpi xarajat, ATC	Marjinal xarajat, MS	O'rtacha o'zgarmas xarajat, AFC
1	45	17			
2	45	15			
3	45	14			
4	45	15			

5	45	19			
6	45	29			

a) o'rtacha yalpi, o'zgaras hamda marjinal xarajatlarni aniqlang.

b) topilgan ma'lumotlar asosida yuqoridagi jadvalni to'ldiring.

Javob:

$$AFC = \frac{FC}{Q}; \quad VC = AVC \cdot Q; \quad TC = FC + VC;$$

$$ATC = \frac{TC}{Q}; \quad MC = \frac{\Delta VC}{\Delta Q}.$$

2. Firmaning o'zgaruvchan resurslari faqat mehnat bo'lib, uning boshqa mehnat omillari o'zgarasdir. Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi bilan mehnat sarfi orasidagi bog'liqlik quyidagi jadvalda keltirilgan.

4.4-jadval

Mehnat sarfi, (ishchilar soni) VC	Ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori, (dona) Q	O'rtacha mahsulot miqdori, AQ	Marjinal mahsulot miqdori, MQ
0	0		
1	40		
2	90		
3	126		
4	150		
5	165		
6	180		

O'rtacha mehnat sarfi hamda marjinal mahsulot miqdorini aniqlab jadvalni to'ldiring, quyidagi savollarga javob toping:

a) qaysi mehnat sarfidan boshlab marjinal mahsulot miqdori kamayadi?

b) 6 ishchiga mos keluvchi marjinal mahsulot qanday bo'ladi?

v) nechta ishchi yollanganda o'rtacha mahsulot maksimal miqdorda bo'ladi?

Javob: a) 3 ta ishchidan boshlab; b) 15 ta; v) 2 ta ishchi.

3. Qisqa muddatli vaqt oralig'ida firma 500 birlik mahsulot ishlab chiqaradi. Agar uning o'rtacha o'zgaruvchan xarajati 2 p.b. ga, o'rtacha o'zgaras xarajati 0,5 p.b. teng bo'lsa, u holda firmaning umumiy xarajati va o'rtacha umumiy xarajati qanday bo'ladi?

Javob: $TS=1250$ p.b. ; 2,5 p.b.

4. Quyidagi 4.5-jadvalda firmaning uzoq muddatli umumiy xarajatlari keltirilgan (uzoq muddatli xarajatlarda o'zgaras xarajat yo'q deb qaraladi). a) firmaning uzoq muddatli o'rtacha va marjinal xarajatlarini aniqlang; b) uzoq muddatli o'rtacha va marjinal xarajatlar egri chiziqlarini yasang.

4.5-jadval

Mahsulot hajmi, (dona/hafta)	Umumiy xarajat, TS	O'rtacha xarajat, ATS	Marjinal xarajat, MTS
0	0		
1	32		

2	48		
3	82		
4	140		
5	228		
6	352		

5. Agar firma 5000 birlik mahsulot ishlab chiqarib, ularni 5 pul birligida sotsa, uning daromadi qanday bo'ladi?

Javob: 25000 p.b.

6. Yuqoridagi 5-masala shartlarida firmaning o'rtacha daromadi qanday bo'ladi?

Javob: 5 p.b.

7. Agar 6-masala shartidagi firma mahsulot ishlab chiqarishni 20 % ga oshirsa, hamda ularni 30% qimmatroq sotsa, uning o'rtacha va marjinal daromadi qanday bo'ladi?

Javob: $ATR=6,5$ p.b.; $MTR=6,5$ p.b.

8. Quyida keltirilgan ma'lumotlar asosida, ya'ni berilgan o'zgaruvchan resurslar miqdori, mahsulot hajmi, o'zgaruvchan resurslar bahosiga asosan:

- umumiy daromad, o'rtacha daromad hamda marjinal daromadlarni toping;
- firma qancha mahsulot ishlab chiqarganda uning foydasi maksimal bo'ladi?

v) topilgan TR , AR va MR chiziqlarni grafikda tasvirlang.

4.6-jadval

O'zgaruvchan resurslar	Mahsulot miqdori, Q	O'zgaruvchan resurslar bahosi, PQ	Mahsulot bahosi, PQ	Umumiy daromad, TR	O'rtacha daromad, AR	Marjinal daromad, MR	Umumiy foyda
0	0	10	5	0	5	5	0
1	5	10	5	25	5	5	15
2	10	10	5	50	5	5	30
3	21	10	5	100	5	5	70
4	30	10	5	150	5	5	110
5	35	10	5	175	5	5	125
6	60	10	5	300	5	5	240
7	70	10	5	350	5	5	280
8	80	10	5	400	5	5	320
9	90	10	5	450	5	5	360
10	100	10	5	500	5	5	400

Javob:

a) 4.6-jadvalga qarang;

b) firma 100 ta mahsulot ishlab chiqarganda uning foydasi maksimal bo'ladi.

4.2-§. Ishlab chiqarish funktsiyalari

Korxona va firmalarning asosiy faoliyati ishlab chiqarishdir. Bunda firma ishlab chiqarish omillari (ish kuchi, uskuna va texnologiyalar) tabiiy resurslar va materiallardan foydalanib mahsulot ishlab chiqaradi.

Ishlab chiqarish omillarini 3 ta guruhga ajratish mumkin:

a) mehnat; b) materiallar; v) kapital.

Mehnat malakali va malakasiz mehnatga ajratiladi.

Materiallar deb, ishlab chiqarish jarayonida tayyor mahsulotga aylanadigan moddiy resurslarga (taxta, temir, elektr quvvati, suv va boshqalar) aytiladi.

Kapitalga binolar, uskunalar va boshqa turli texnik vositalar kiradi.

Ishlab chiqarish omillari bilan ishlab chiqarish jarayonida yaratilgan mahsulotlar miqdori orasidagi bog‘liqlik ishlab chiqarish funktsiyasi yordamida aniqlanadi.

Ishlab chiqarish funktsiyasi ishlab chiqarish omillarining turli kombinatsiyalarida ishlab chiqariladigan maksimal mahsulot miqdoriini ifodalaydi va quyidagi ko‘rinishda belgilanadi:

$$y=f(x_1, x_2, \dots x_n), \quad (1)$$

bu erda x_j —ishlab chiqarishga sarf qilingan j – ishlab chiqarish omilining miqdorini, y esa ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini bildiradi. Bunday funktsiya **ko‘p omilli** yoki **ko‘p faktorli ishlab chiqarish funktsiyasi** deb ataladi.

Agar ishlab chiqarishda faqat ikkita omil—mehnat (L) va kapital (K) ishlatilsa, u holda ishlab chiqarish funktsiyasini

$$Q=f(L, K), \quad (2)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin.

Bu erda L – sarf qilingan mehnat miqdori, K -sarf qilingan kapital miqdori, Q esa $(l; k)$ kombinatsiyaga mos keluvchi maksimal mahsulot miqdori. Bunday funktsiyalar **ikki omilli** yoki **ikki faktorli ishlab chiqarish funktsiyasi** deyiladi.

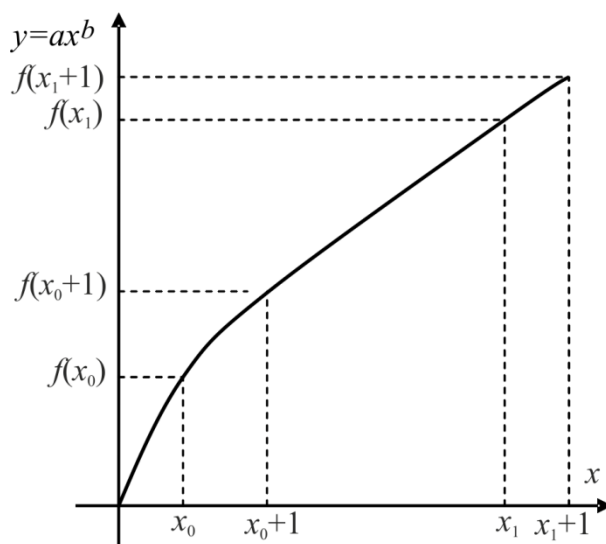
Agar ishlab chiqarish faqat bitta ishlab chiqarish omiliga bog‘liq bo‘lsa, u holda ishlab chiqarish funktsiyasi bir o‘zgaruvchili $y=f(x)$ funktsiya ko‘rinishida ifodalanadi. Bunday funktsiya **bir omilli** yoki **bir faktorli ishlab chiqarish funktsiyasi** deb ataladi. $y=f(x)$ funktsiyaning ma’nosi quyidagicha izohlanadi: agar ishlab chiqarish omili x miqdorda sarf qilinsa, u holda $y=f(x)$ miqdorda mahsulot ishlab chiqariladi. Masalan, agar ishlab chiqarish ko‘proq qo‘l mehnatiga asoslangan

bo'lsa, u holda ishlab chiqarish funktsiyasi $Q=f(L)$ ko'rinishda yoziladi.

Agar ishlab chiqarish ko'proq texnika va texnologiyalarga bog'liq bo'lsa, u holda ishlab chiqarish funktsiyasini $Q=f(K)$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu esa K miqdorda kapital sarf qilinganda $y=f(K)$ miqdorda mahsulot ishlab chiqarish mumkinligini ko'rsatadi.

Bir faktorli ishlab chiqarish funktsiyalari $y=a_0 + a_1x$ (chiziqli IChF), $y=ax^b$ (ko'rsatkichli yoki eksponentsial IChF) ko'rinishda berilishi mumkin. Bu erda x -sarf qilindigan ishlab chiqarish omili (masalan, mehnat) ning miqdori; u – ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori; a_0, a_1, a, b lar esa ishlab chiqarish funktsiyasining parametrlari.

$y=ax^b$ funktsiyaning grafigi quyidagi ko'rinishda bo'ladi (4.9-shakl).



4.9-shakl.

Shakldan ko'rinadiki, ishlab chiqarish omilining sarfi oshgan sari ishlab chiqarish hajmi ortib boradi, lekin bu omilni oshirib borgan sari uning ishlab chiqarish hajmiga ta'siri kamayib boradi. Bunday holat iqtisodiy nazariyada **miqdorli kamayish qonunini** tasdiqlaydi, ya'ni ma'lum bir resursning sarfini oshirib borish oqibatida ishlab chiqarish hajmi oshadi, lekin uning ta'siri tobora kamayib borib shunday bir nuqta topiladiki, unda ishlab chiqarish hajmi maksimal bo'ladi, hamda undan keyingi nuqtalarda ishlab chiqarish hajmining kamayishi kuzatiladi.

Ikki faktorli ishlab chiqarish funktsiyalari $y=a_1x_1 + a_2x_2$ (chiziqli), $y = b_0x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$ (Kobb-Duglas funktsiyasi) va boshqa turlarda bo'lishi mumkin.

Kobb-Duglas funktsiyasini quyidagicha yozish mumkin:

$$Q = b_0 L^{b_1} \cdot K^{b_2}, \quad (3)$$

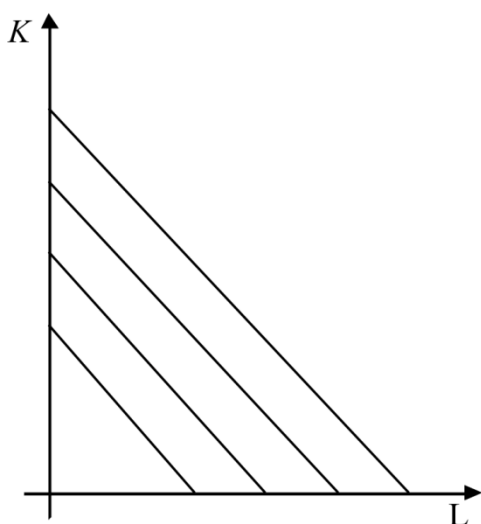
bu erda L -ishlab chiqarishga sarf qilingan mehnat miqdori; K – kapital miqdori; Q -ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori (ishlab chiqarish hajmi); b_0, b_1, b_2 – ishlab chiqarish funktsiyasining parametrlari ($b_0 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$), $b_1 + b_2 \leq 1$.

Izokvanta. Ishlab chiqarish funktsiyasining izokvantasi deb, ma'lum bir miqdordagi mahsulot ishlab chiqarishda sarf qilinadigan

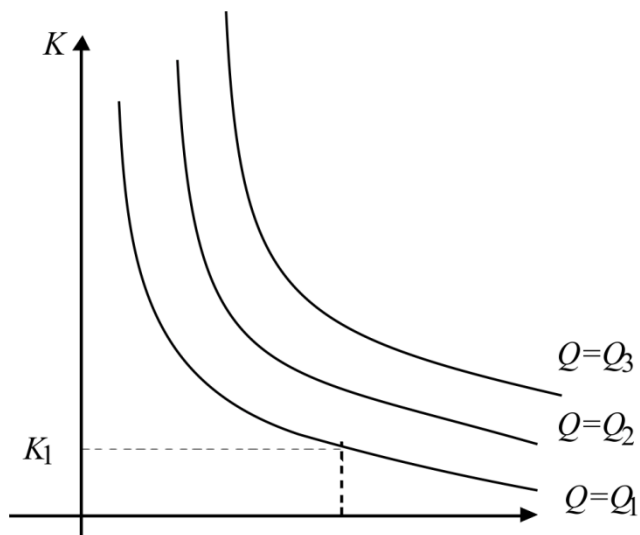
Izokvantalar

formula orqali aniqlanadi.

Chiziqli ishlab chiqarish funktsiyasi $Q=a_KK+a_LL$ ning izokvantalari quyidagi ko‘rinishda tasvirlanadi (4.10-shakl):



4.10-shakl.



4.11-shakl.

Izokvantalar to'plami **izokvantlar kartasi** deb ataladi.

Misol. Quyidagi jadvalda mehnat va kapital sarflarining turli kombinatsiyalariga mos keluvchi ishlab chiqarish hajmlari keltirilgan.

4. 7-jadval

Kapital sarfi	Mehnat sarfi				
	1	2	3	4	5
1	25	50	60	80	85
2	40	60	80	90	95
3	60	80	85	100	105
4	70	85	95	105	120
5	75	90	100	120	125

$Q=60$, $Q=80$ va $Q=100$ birlik mahsulot hajmlariga mos keluvchi izokvantlarni yasang.

Yechish. Jadvaldan ko‘rinadiki, 60 birlik mahsulotni kapital va mehnatning $(K=2; L=2)$, $(K=3; L=1)$ va $(K=1; L=3)$ kombinatsiyalari yordamida ishlab chiqarish mumkin. Xuddi shuningdek, 80 birlik mahsulotni kapital va mehnatning $(K=3; L=2)$, $(K=2; L=3)$ va $(K=1;$

$L=4$) kombinatsiyalarida ishlab chiqarish mumkin.

$Q=100$ birlik mahsulotga ($K=5; L=3$), ($K=3; L=4$) kombinatsiyalar mos keladi.(4.12-shakl).

Agar qisqa muddatli ishlab chiqarishda kapital o'zgarmas bo'lib, mehnat o'zgaruvchan bo'lsa, u holda mehnatning o'rtacha va marjinal mahsuloti tushunchasini kiritish mumkin.

Mehnatning o'rtacha mahsuloti deb, bir birlik mehnatga to'g'ri keluvchi mahsulot hajmiga aytiladi. Mehnatning o'rtacha mahsuloti AP_L bilan belgilanadi va quyidagi formula yordamida topiladi:

$$AP_L = \frac{f(L)}{L}. \quad (5)$$

Mehnatning marjinal (limit) mahsuloti deb, mehnat sarfining bir birlikka oshirish oqibatida olinadigan qo'shimcha mahsulot miqdoriga aytiladi. Mehnatning marjinal mahsuloti MP_L bilan belgilanadi va quyidagi formula yordamida topiladi:

$$MP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{\Delta f(L)}{\Delta L}. \quad (6)$$

Agar qisqa muddatli ishlab chiqarishda kapital o'zgaruvchan bo'lib, mehnat o'zgarmas deb qaralsa, u holda kapitalning o'rtacha va marjinal mahsuloti haqida gapirish mumkin.

Kapitalning o'rtacha mahsuloti quyidagicha aniqlanadi:

$$AP_K = \frac{f(K)}{K}. \quad (7)$$

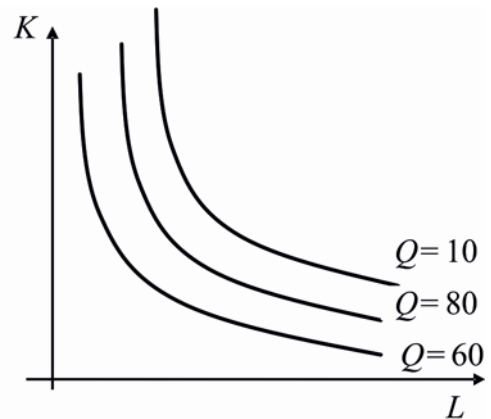
Kapitalning marjinal miqdori esa

$$MP_K = \frac{\Delta f_K}{\Delta K} \quad (8)$$

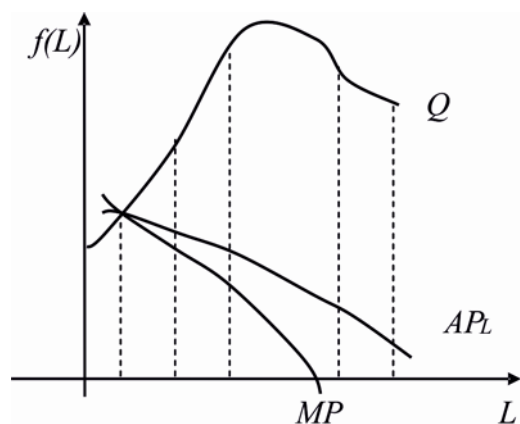
formula yordamida topiladi.

Misol. Quyidagi jadvalda kapital o'zgarmas bo'lib, mehnat o'zgaruvchan bo'lgan holdagi ishlab chiqarish jarayoni tasvirlangan.

a) jadvaldagi ma'lumotlardan foydalanib mehnatning o'rtacha va marjinal mahsulotlarini aniqlab jadvalni to'ldiring;



4.12-shakl.



4.13-shakl.

b) mehnatning ishlab chiqarish funksiyasini tuzing va uning grafigini yasang.

4.8-jadval

Mehnat sarfi, (L)	Kapital sarfi, (K)	Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi, (Q)	Mehnatning o'rtacha mahsuloti, (AP_L)	Mehnatning marjinal mahsuloti, (MP_L)
0	10	-		
1	10	10		
2	10	18		
3	10	24		
4	10	24		
5	10	20		
6	10	18		

Yechish. Kapital o'zgarmas bo'lganligi sababli ishlab chiqarish faqat ish kuchiga bog'liq deb qaraymiz, hamda $Q=f(L)$ ishlab chiqarish funksiyasining grafigini yasaymiz. Grafikdan ko'rinadiki, bu funktsiya eksponentsial, ya'ni $Q=a_0L^b$ ko'rinishda bo'ladi. Q va L larning qiymatlaridan foydalanib, $a=10$ va $b\approx 0,85$ ekanligini aniqlaymiz.

Demak, ishlab chiqarish funktsiyasi $Q=10L^{0,85}$ ko'rinishida bo'ladi. Mehnatning o'rtacha va marjinal mahsulotlarini aniqlaymiz.

$$AP_L=(0; 10; 9; 8; 6; 4; 3);$$

$$MP_L=(0; 10; 8; 6; 0; -4; -2).$$

Ularning grafiklarini yasaymiz (4.13-shakl). Shakldan ko'rinadiki, o'rtacha mahsulot mehnat sarfi $L=2$ bo'lganda eng katta ($AP_L=10$) qiymatga erishadi. $L=4$ da ishlab chiqarish funktsiyasi maksimumga marjinal mahsulot esa 0 qiymatga erishadi.

Tayanch so'z va iboralar

Ishlab chiqarish omillari, ishlab chiqarish funktsiyasi, bir faktorli ishlab chiqarish funktsiyasi, ikki va ko'p faktorli ishlab chiqarish funktsiyasi, chiziqli va ko'rsatkichli (eksponentsial) ishlab chiqarish funktsiyalari, Kobb-Duglas funktsiyasi, izokvanta, ishlab chiqarish funktsiyasining o'rtacha va marjinal qiymatlari.

Nazorat savollari

1. Ishlab chiqarish deganda nimani tushu-nasiz?
2. Ishlab chiqarish omillari nima?
3. Ishlab chiqarish omillarini qanday guruhlariga ajratish mumkin?
4. Ishlab chiqarish funktsiyasini ta'riflang.
5. Bir va ikki faktorli ishlab chiqarish funktsiyalari qanday?
6. Ko'p faktorli ishlab chiqarish funktsiyasi qanday yoziladi?

7. Chiziqli ishlab chiqarish funktsiyasi qanday ifodalanadi?
8. Eksponentsial ishlab chiqarish funktsiyasi qanday yoziladi?
9. Mahsuldorlikning funktsiyasi qanday?
10. Kobb-Duglas funktsiyasi qanday?
11. Izokvanta nima?
12. Izokvanta kartasi nima?

Masalalar

1. Ishlab chiqarish funktsiyasi $f(L, K) = 2LK$ ko‘rinishida berilgan.
 - a) ishlab chiqarish funktsiyasining mehnat va kapital bo‘yicha o‘rtacha mahsulotini aniqlang.
 - b) $Q=20$ va $Q=10$ ga mos keluvchi izokvantalarni yasang.

Javob:

a) $AP_L = 2K$; $AP_K = 2L$.

b) 4.14-shakl.

2. Quyidagi 4.9-jadvalda mehnat sarfiga mos keluvchi ishlab chiqarish hajmi keltirilgan.

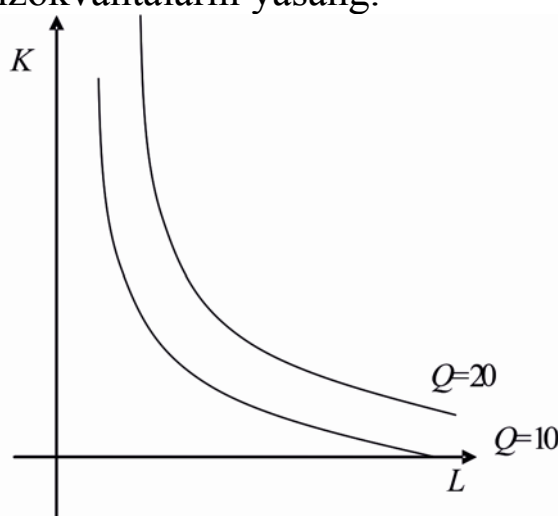
4.9-jadval

Mehnat sarfi (kishi/hafta) L	Ishlab chiqaril- gan mahsulot miqdori, (birlik/hafta) R	Mehnatning o‘rtacha mahsul- dorligi, AR_L	Mehnatning marginal mahsuloti, MR_L
0	0		
1	35		
2	80		
3	122		
4	156		
5	177		
6	180		

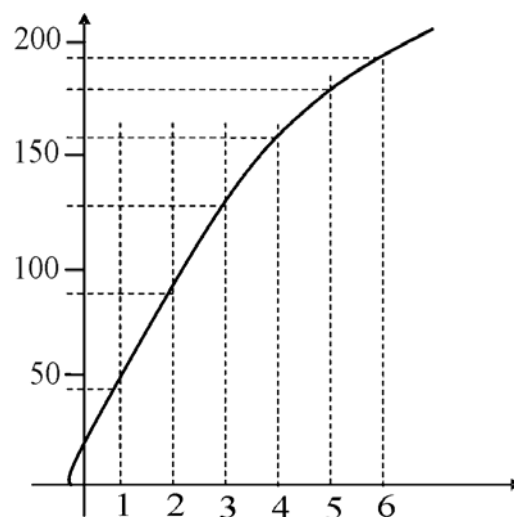
- a) mehnatning o‘rtacha va marginal mahsulot miqdorini aniqlang va jadvalni to‘ldiring.

- b) grafikda AR_L va MR_L chiziqlarini yasang.

- v) qanday o‘rtacha mehnat sarfida o‘rtacha mahsulot miqdori maksimal bo‘ladi?



4.14-shakl.



4.15-shakl.

g) mehnatning qanday sarfida AR_L va MR_L chiziqlari o'zaro kesishadi?

Javob: v) 3 kishi/hafta; g) haftada 3 ta ishchi ishlaganda o'rtacha mahsulot miqdori maksimal bo'ladi.

3. Yuqoridagi 2-misoldagi ma'lumotlar asosida: a) ishlab chiqarish funksiyasining ko'rinishini aniqlang va grafigini chizing;

b) mahsuldorlikning kamayish qonunining bajarilishini tekshiring.

Javob:

a) $f(L)=35L^{1,2}$ (4.15-shaklga qarang).

4. Quyidagi 4.10-jadvalda mehnat sarfi va unga mos keluvchi ishlab chiqarish hajmi keltirilgan.

4. 10-jadval

Mehnat sarfi, L	Ishlab chiqarish hajmi, Q	Mehnatning o'rtacha mahsuloti, AR_L	Mehnatning marjinal mahsuloti, MR_L
0	0	-	-
1	40		
2	90		
3	126		
4	150		
5	165		
6	180		

A. Mehnatning o'rtacha va marjinal mahsulotini aniqlang va jadvalni to'ldiring.

B. Grafikda ishlab chiqarish funksiyasini va uning o'rtacha va marjinal qiymatlarini tasvirlang.

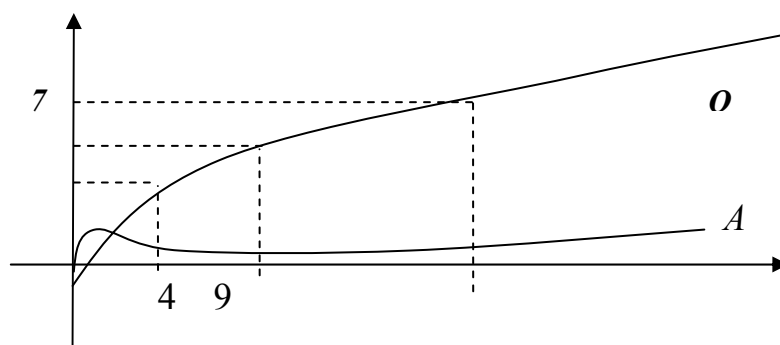
V. Ishlab chiqarish funksiyasining ko'rinishini aniqlang.

Javob: V. $f(L)=40L^{1,1}$.

5. Firmaning ishlab chiqarish funksiyasi $Q=2L^{1/2}$ ko'rinishida berilgan.

A. Ishlab chiqarish funksiyasining va mehnatning o'rtacha mahsuloti grafigini yasang.

B. Mehnatning o'rtacha mahsulotini (mehnat unumdorligini) $L=4$ da aniqlang.



4.16-shakl

V. L ning qanday qiymatida o'rtacha mehnat unumdorligi maksimal bo'ladi?

Javob:

A. 4.16-shaklga qarang; B. $AP_L=1$; V. $L=1$.

4.3-§. Talab va taklif funktsiyasi. Bozor (muvozanat) narxini topish

Bozorni tahlil qilish masalasida, asosan, quyidagi muammolar hal qilinadi:

- 1) tovar mahsulot bahosi bilan unga bo'lgan talab orasidagi bog'lanishni aniqlash.
- 2) tovar mahsulot bahosi bilan taklif orasidagi bog'lanishni aniqlash.

Iqtisodiy nazariyada ma'lum bo'lgan talab va taklif qonuniga asosan tovar-mahsulotiga bo'lgan talab hajmi uning bahosiga nisbatan teskari yo'nalishda o'zgaradi. Bu degani tovar-mahsulotining bahosi oshgan sari unga bo'lgan talab kamayadi, va aksincha, baho kamaysa talab oshadi.

Birinchi bo'lib talab va taklif qonunini matematik formada ifodalagan olim A.A. Kurno (1801-1877) bo'lib, u 1838 yilda Frantsiyada «Boylik nazariyasining matematik printsiplari» deb ataluvchi kitobni chop etgan.

A.Kurnoning fikricha, tovar-mahsulotiga bo'lgan talab (D) (frantsuzcha «demande») (P) bahoning (frantsuzcha «prix») funktsiyasidan iborat bo'ladi, ya'ni $D=f(P)$.

Bu funktsiya **talab funktsiyasi** deb ataladi. Ushbu funktsiyaning xossalari haqida A.Kurno faqat uning kamayuvchi funktsiya ekanligini ta'kidlagan.

Talab funktsiyani tekshirish borasida keyingi qilingan tadqiqotlar bu funktsiyaning uzluksiz va har bir nuqtada birinchi tartibli, ba'zi hollarda ikkinchi tartibli hosilalarga ega ekanligini ko'rsatgan.

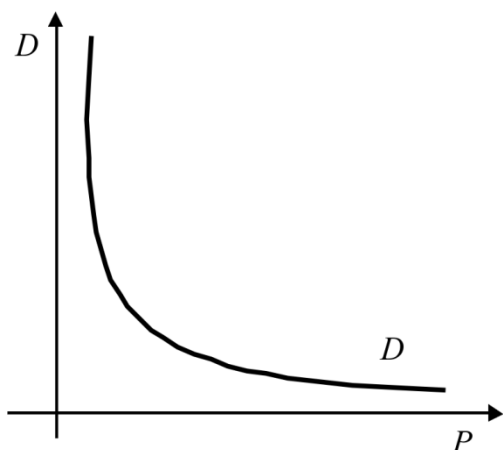
Talab funktsiyasi kamayuvchi funktsiya bo'lganligi sababli, undan olingan birinchi tartibli hosila manfiy bo'ladi, ya'ni $f'(P)<0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Xuddi shunday yo'l bilan A.Kurno (S) taklif (inglizcha «supply») ham (P) bahoning funktsiyasi ekanligini ko'rsatgan, ya'ni $S=\varphi(P)$.

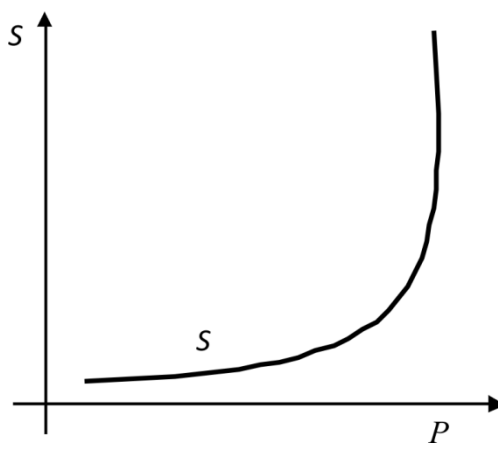
Bu funktsiya **taklif funktsiyasi** deyiladi. Ushbu funktsiya haqida A.Kurno uning o'suvchi funktsiya ekanligini ta'kidlaydi.

Quyidagi shakllarga murojaat etamiz:

4.17 va 4.18-shakllarda tegishli ravishda talab va taklif funktsiyalari ifodalangan.



4.17-shakl: talab egri chizig'i.



4.18-shakl: taklif egri chizig'i.

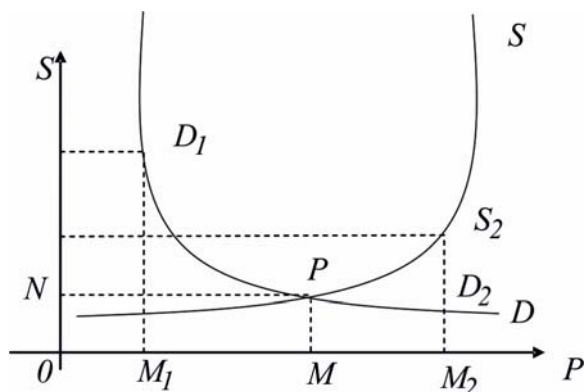
Talab va taklif qonuniga asosan bozordagi baho talab va taklif o'zaro teng bo'lgan baho bilan o'lchanadi. Shuning uchun u D talab va S taklif egri chiziqlari kesishgan P nuqta bilan aniqlanadi.

4.19-shakldan ko'rinadiki, $R=OM$ baho bozordagi eng barqaror baho hisoblanadi.

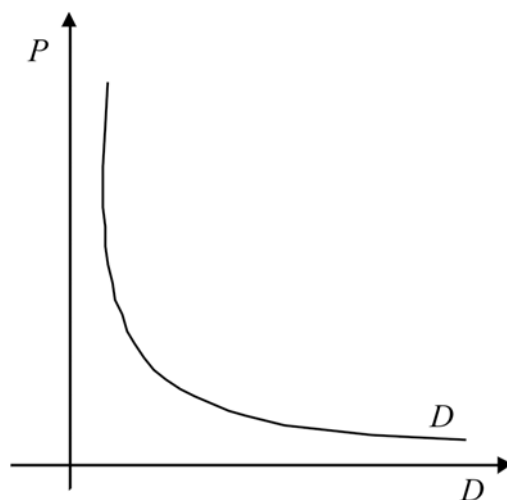
Bundan boshqa hech qanday baho barqaror bo'la olmaydi.

Masalan, $R_1=OM_1$ bahoda (M_1D_1) talab (M_1S_1) taklifdan ko'proq ($M_1D_1 > M_1S_1$). Bu holda tovar mahsulotga bo'lgan talab taklifdan ko'p bo'lganligi sababli tovar bahosi osha boshlaydi. Chunki oshirilgan bahoda bo'lsa ham ushbu mahsulotni sotib olishga qodir bo'lgan xaridorlar topiladi. Agar baho $R_2=OM_2$ dan iborat bo'lsa, u holda (M_2S_2) taklif (M_2D_2) talabdan ko'p, ya'ni $M_2S_2 > M_2D_2$. Bu holda R_2 baho ham turg'un bo'la olmaydi. Chunki shunday sotuvchilar topiladiki, ular o'z mahsulotini past narxda sotishga ham tayyor bo'ladi.

Talab egri chizig'i (D) va taklif egri chizig'i (S) ning tutashgan R nuqtasiga mos keluvchi $R=OM$ baho **muvozanat bahosi** deb ataladi.



4.19-shakl: talab va taklif funktsiyalari.



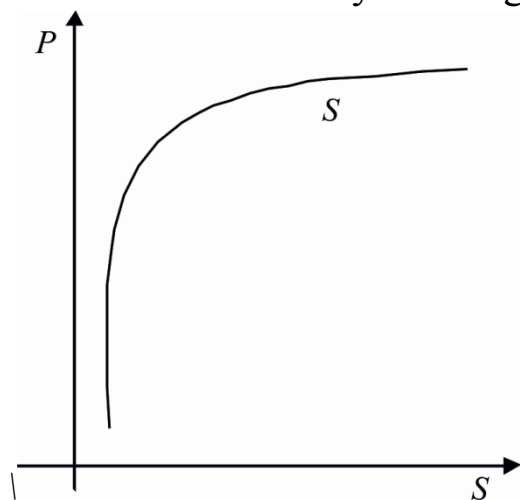
4.20-shakl. Talab funktsiyasi.

Talab va taklif qonunini matematik ko‘rinishda ifodalash masalasi bilan boshqa olimlar ham shug‘ullanganlar. Masalan, Leon Valras (1834–1910) va Alfred Marshal (1842–1924) va boshqalar.

Marshal R baho bilan D talab (yoki S taklif) orasidagi bog‘liqlikni o‘rganishda talab va taklif o‘zgaruvchan, noma’lum miqdor bo‘lib, baho ularga bog‘liq deb qaraladi. Boshqacha aytganda, Marshal yuqorida biz ko‘rgan Kurno funktsiyalariga teskari funktsiyalarni kiritadi, ya’ni $R=f^{-1}(D)$ va $P=\varphi^{-1}(S)$.

Bunda $f(P)$, $\varphi(P)$ funktsiyalar monoton bo‘lganligi sababli, ularga teskari $f^{-1}(D)$ va $\varphi^{-1}(S)$ funktsiyalar mavjud deb qabul qilingan.

Marshal funktsiyalarining grafiklari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:



4.21-shakl. Taklif funktsiyasi.

4.22-shakldan ko‘rinadiki, talab va taklif egri chiziqlarining kesishgan R nuqtasi muvozanat bahosini ko‘rsatadi. Agar $R_1=OM_1$ baho R muvozanat bahodan kam bo‘lsa, u holda talab taklifdan ko‘p bo‘ladi. Bu holda aholi ehtiyojini qondirish uchun ba’zi chegaralovchi shartlar (normativlar o‘rnatish, mahsulotni talon bo‘yicha taqsimlash) ni yo‘lga qo‘yish kerak bo‘ladi. Aks holda birinchilar qatorida xarid qilgan xaridorlar hamma bor mahsulotlarni sotib

olishi va ayrim xaridorlarga mahsulot yetmasligi mumkin.

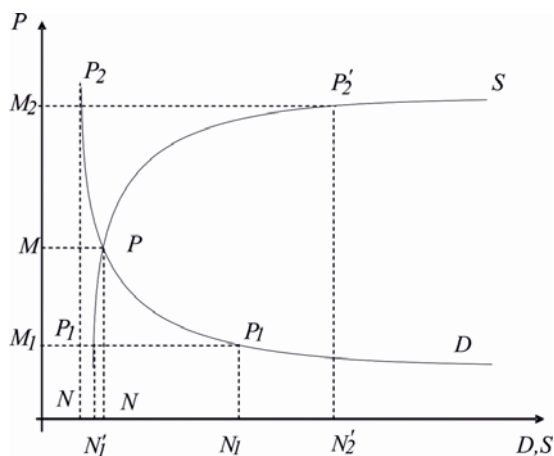
1-misol. Agar biror mahsulotga bo‘lgan talab funktsiyasi

$$D(P)=200-0,5 P^2,$$

ko‘rinishida bo‘lib, taklif funktsiyasi

$$S(P)=23/3P+0,25P^2,$$

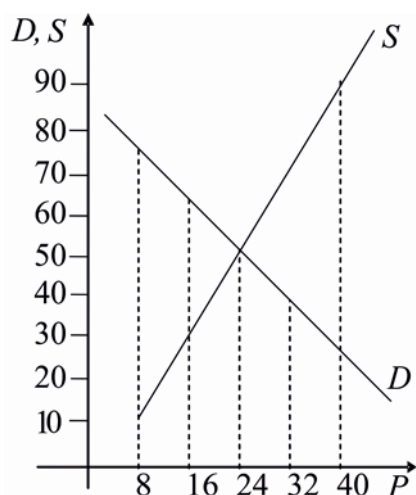
ko‘rinishida bo‘lsa, u holda shu mahsulotning bozordagi muvozanat bahosi qanday bo‘ladi? Bu erda P -mahsulot bahosi.



4.22-shakl. Talab va taklif funktsiyalari.

lif funktsiyalari teng qiymatga erishadi, ya’ni

Yechish. Ma’lumki, muvozanat nuqtada mahsulotga bo‘lgan talab va tak-



4.23-shakl.

$D(P) = S(P)$
tenglik o'rinli bo'ladi. Demak,
 $200 - 0,5P^2 = 23/3P + 0,25P^2$.

Bunda

$$9P^2 + 92P - 2400 = 0$$

kvadratik tenglamani hosil qilamiz. Uni echib, $P=6$ p.b. ekanligini aniqlaymiz.

Javob: $P=6$ p.b.

2-misol. Quyidagi jadvalda bozordagi mahsulot narxiga bog'liq ravishda talab va taklifning o'zgarishi ko'rsatilgan.

Mahsulot narxi	Mahsulotga bo'lgan talab miqdori	Taklif miqdori
8	70	10
16	60	30
24	50	50
32	40	70
40	30	90

1. Ushbu ma'lumotlar asosida talab va taklif egri chiziqlarini aniqlang.

2. Muvozanat bahosini toping.

3. Talab va taklif funktsiyalarini aniqlang.

Yechish. Dekart koordinatalar sistemasida abtshissalar o'qida tovar narxini, ordinatalar o'qida esa talab va taklif funktsiyalarini joylashtiramiz va quyidagi shaklni hosil qilamiz:

2. Shakldan ko'rinadiki, $P=24$ da bozordagi talab taklifga o'zaro teng bo'ladi. $P=24$ p.b. bozordagi muvozanat bahosidan iborat bo'ladi.

3. Shakldan ko'rinadiki, talab va taklif funktsiyalari to'g'ri chiziq orqali ifodalangan. Demak, ularni $D=aP+b$ va $S=cP+d$ ko'rinishida ifodalash mumkin.

Jadvaldagi ma'lumotlardan foydalaniib, a , b , d va s koef-fitsien-tlarning qiymatini aniqlaymiz:

$$a = -1,125; b = 60; c = 2,5; d = -10.$$

Demak, talab va taklif funktsiyalari

$$D = -1,125P + 10; S = 2,5P - 10$$

ko'rinishda bo'ladi.

Tayanch soʻz va iboralar

Talab funktsiyasi, taklif funktsiyasi, tovarning muvozanat bahosi.

Nazorat savollari

1. A. Kurno fikri boʻyicha talab va taklif funktsiyalari qanday taʼriflanadi?
2. Bozordagi muvozanat bahosi deganda nimani tushunasiz?
3. A. Marshal fikri boʻyicha talab va taklif funktsiyalari qanday aniqlanadi?
4. Talab va taklif egri chiziqlari nima?

Masalalar

1. Quyida keltirilgan jadvaldagi maʼlumotlar asosida:

- a) talab va taklif egri chiziqlarini yasang;
- b) talab va taklif funktsiyalarini aniqlang;
- v) bozordagi muvozanat bahosini aniqlang.

Mahsulot narxi	10	20	30	40	50	60	70
Talab miqdori	32	28	24	20	16	12	8
Taklif miqdori	4	7	10	13	16	19	22

Javob: a) 4.24-shaklga qarang;

b) $P=50$;

v) $D=-0,4P+36$; $S=0,3P+1$.

2. A tovarga boʻlgan talab funktsiyasi $P+Q^2=255-Q$, tenglama koʻrinishida, taklif funktsiyasi esa $-6P+126Q=1080-4Q^2$, tenglama koʻrinishida berilgan. A mahsulotning bozordagi muvozanat bahosini va A tovar miqdorini aniqlang.

Javob: $P=15$; $Q=15$.

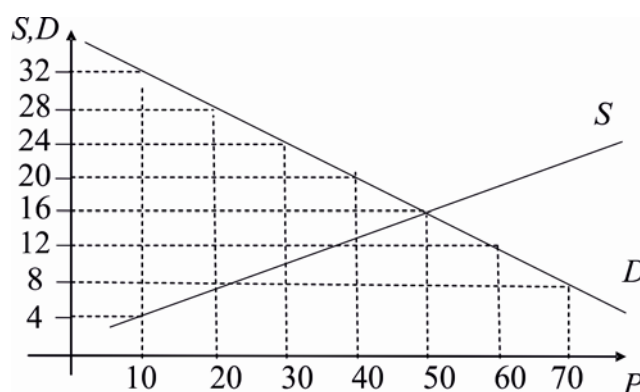
3. Agar 1 litrlik fanta ichimligi P soʻmga sotilsa, u holda bir kunda undan $D(P)$ ta butilka sotilib $S(P)$ ta butilka bozorga keltiriladi. $D(P)$ va $S(P)$ lar quyidagi munosabatlar orqali aniqlanadi:

$$D(P)=675-P^2/3; S(P)=19,5P+2/3P^2.$$

Bozordagi fanta ichimligiga boʻlgan muvozanat bahosini va shu bahoda sotiladigan butilkalar sonini aniqlang.

Javob: $P=18$; $Q=567$.

4. A tovarga boʻlgan talab va taklif funktsiyalari quyidagi



4.24-shakl.

ko‘rinishida ifodalangan:

$$D(P)=1600-0,25P^2; S(P)=37/11P+0,5P^2.$$

Bozordagi muvozanat bahosini va shu narxda sotiladigan tovar miqdorini aniqlang.

Javob: $P=44$; $Q=1116$.

5. Bozorni tahlil qilish natijasi shuni ko‘rsatdiki, agar A mahsulot narxi $P=38$ p.b. ga teng bo‘lsa, undan 2 birlik ($Q=2$) sotiladi, agar $P=42$ p.b. ga teng bo‘lsa $Q=4$ va agar $P=6$ p.b. bo‘lsa, $Q=62$ bo‘lishligi aniqlangan. Talab funktsiyasi kvadratik funktsiyadan iborat ekanligini bilgan holda uning ko‘rinishini aniqlang.

Javob: $P=2Q^2-10Q+50$.

6. Agar A mahsulotga bo‘lgan talab va taklif funktsiyalari quyidagi ko‘rinishda berilgan bo‘lsa:

$$D(P)=400-2P; S(P)=4P-80.$$

u holda

- a) bozordagi A mahsulot miqdori va muvozanat bahosini aniqlang;
- b) agar taklif funktsiyasi

$$S(P)=3P-200,$$

ko‘rinishga o‘zgarsa, u holda bozordagi mahsulot miqdori va muvozanat bahosi qanday o‘zgaradi?

- v) talab va taklif egri chiziqlarini grafikda tasvirlang.

Javob: a) $P=80$; $Q=240$; b) $P=120$; $Q=160$.

4.4-§. Yalpi talab va taklif. Makroiqtisodiy muvozanat

Milliy xo‘jalik miqyosidagi ma‘lum narxlar darajasida iste’molchilar sotib olishi mumkin bo‘lgan tovarlar miqdori **yalpi talab** deyiladi va AD (aggregate demand) bilan belgilanadi.

Yalpi talabni 2 xil yo‘l bilan hisoblash mumkin:

1. Yalpi talab jamiyat miqyosidagi barcha xarajatlar yig‘indisiga teng, ya’ni

$$AD=C+J+G+X_n \quad (1)$$

yoki

$$AD=PD, \quad (2)$$

bu erda S -uy xo‘jaligining iste’mol tovarlarga va xizmatlarga talabi; J -korxona va firmalarning investitsion tovarlarga bo‘lgan talabi; G -davlat talabi; X_n –chet mamlakatlarning (eksportga) talabi; R -korxona darajasi,

Y -talab darajasida milliy ishlab chiqarish hajmi.

2. Yalpi talab muomaladagi pul miqdori bilan o'lanadi, ya'ni

$$AD = MV, \quad (3)$$

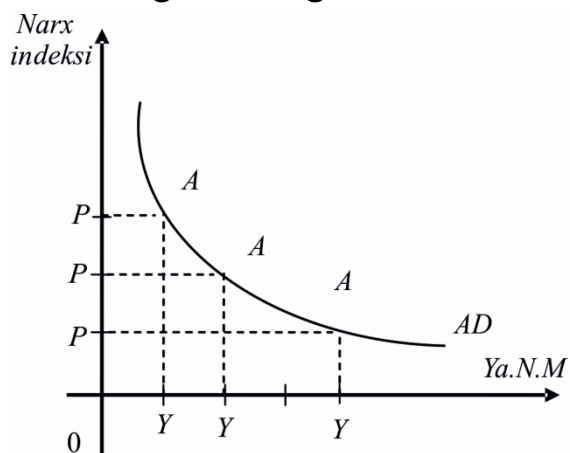
bu erda, M -muomaladagi pul miqdori; V -pulning aylanish tezligi.

Yalpi talabga bo'lgan ikkala yondashuv ham bir xil ma'noga ega bo'lib, uni quyidagi tenglik orqali ifodalash mumkin:

$$MV = PY, \quad (4)$$

Yalpi talab juda ko'p omillarga bog'liq ravishda o'zgaruvchan bo'ladi. Masalan, agar boshqa omillar o'zgarmagan holda, narx-navo indeksining oshishi yalpi talabning kamayishiga olib keladi, va aksincha, narx indekslarining kamayishi yalpi talabning oshishiga sabab bo'ladi.

Yalpi talab egri chizig'i alohida tovarga bo'lgan talab chizig'iga o'xshab ketadi. Lekin bunda abstsissalar o'qida ishlab chiqarishning real hajmi (real yalpi ichki mahsulot) ordinatalar o'qida narxlarning absolyut miqdori emas, balki narxlar darajasi yoki deflyator (narx indeksi) ko'rsatiladi (4.25-shakl).



4.25-shakl. Yalpi talab egri chizig'i.

Grafikdan ko'rinadiki, yalpi talabning o'sishi narx darajasining pasayishiga olib keladi. Bu esa, o'z navbatida AD egri chiziq manfiy egilishga ega ekanligidan dalolat beradi. Yuqoridagi (4) munosabatdan quyidagilarni hosil qilish mumkin:

$$P = \frac{MV}{Y} \text{ yoki } Y = \frac{MV}{P} \quad (5)$$

Ushbu munosabatlardan ko'rinadiki, milliy ishlab chiqarish hajmi bilan narxlar darajasi teskari proportsional bo'lib, narxlar darajasi ham, milliy ishlab chiqarish hajmi ham muomaladagi pul miqdoriga to'g'ri proportsionaldir. Demak, muomaladagi pul miqdori oshgan sari narxlar darajasi ham, milliy ishlab chiqarish hajmi ham oshar ekan.

Milliy mahsulotga talab miqdorining o'zgarishiga **boylik effekti**, **foiz stavkasi effekti** hamda **import effekti** kabi omillar ta'sir qiladi. Masalan, uy xo'jaligida oilalar boyligining anchagina qismini moliyaviy aktivlar (aktsiya, obligatsiya, hisob raqamidagi pullar) tashkil qiladi. Narxlar darajasining o'sishi oqibatida moliyaviy aktivlarga to'g'ri keluvchi real boylik miqdori kamayadi. Bu holda aholi nisbatan

kambag'allashadi va ularning xarid qilish (talab) darajasi pasayadi. Aksincha, narxlarning pasayishi moliyaviy aktivlarning xarid quvvatini oshiradi, aholining boylik darajasi va o'z navbatida xarid qilish (talab) darajasi oshadi. Ana shunday omil **boylik effekti** deyiladi.

Agar mamlakatda narx darajasi oshib, muomaladagi pul massasi o'zgarsa, u holda protsent stavkasi ko'tariladi va natijada investitsiyaga talab kamayadi.

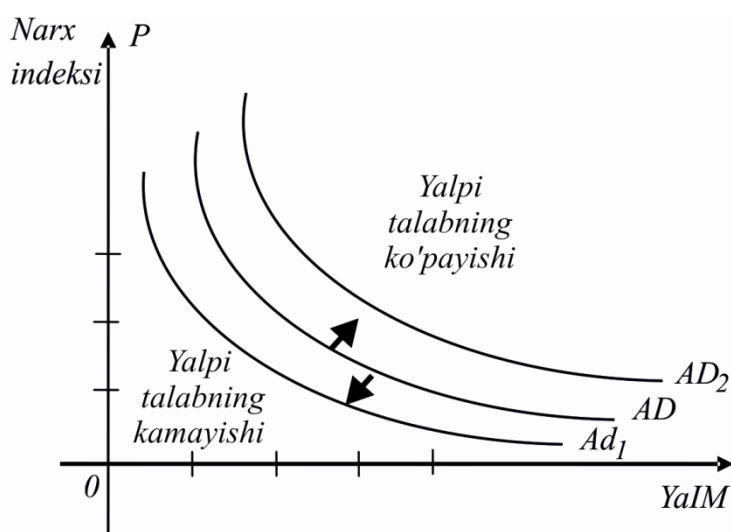
Odatda juda ko'p uzoq muddatli foydalaniladigan tovarlar-televizor, muzlatgich va boshqalar aholi tomonidan kreditga olinadi. Protsent stavkasining oshishi kreditni qimmatlashtiradi. Bu holda aholining iste'mol xarajatlari kamayadi va demak, milliy mahsulotning real hajmiga talab kamayadi. Bunday omil **foiz stavkasi effekti** deyiladi.

Mamlakatdagi import va eksport hajmi, eng avvalo, mamlakat ichidagi va chetdagi narx darajasiga va ularning nisbatiga bog'liq bo'ladi. Agar chetdan keladigan tovar va xizmatlar narxi mamlakatda ishlab chiqarilgan shunday tovarlar va xizmatlar narxidan past bo'lsa, u holda chet el tovarlari ko'plab sotib olinadi va mamlakatda ishlab chiqarilgan mahsulotlarga bo'lgan talab qisqaradi va natijada ishlab chiqarish real hajmi pasayadi. Bu holda yalpi talabdagi import hajmining ortishi eksport hajmini kamaytiradi. Ana shunday omil **import effekti** deyiladi.

Yuqorida ko'rilgan uchala omil ham milliy mahsulotga talab darajasini o'zgarishiga ta'sir qiladi. Deylik, yalpi talab A nuqtada (4.25-shakl) bo'lsin. Bunga narx darajasi R_0 , ishlab chiqarish hajmi Y_0 mos keladi. Agar narx darajasi R_1 ga ko'tarilsa, u holda ishlab chiqarish hajmi Y_1 gacha qisqaradi. Narxning R_2 ga tushishi esa ishlab chiqarish real hajmining Y_2 gacha o'sishiga sabab bo'ladi.

Deylik, xaridorlar narx darajasi o'zgarmagan holda yuqoridagi va boshqa omillar ta'siri ostida kamroq yoki ko'proq xarid qilishi mumkin bo'lsin. Bu holdlarda yalpi talab egri chizig'i chapga yoki o'ngga parallel siljiydi (4.26-shakl).

Masalan, agar daromad soliqlari kamaytirilsa, u holda yalpi talab



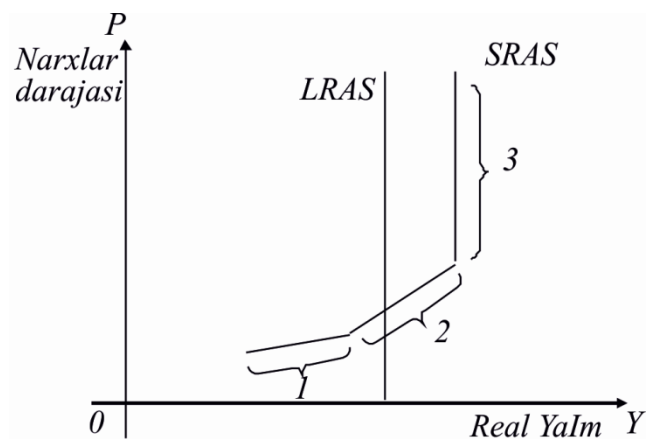
4.26-shakl.

ko'payadi. Yalpi talab egri chizig'i o'ngga siljiydi. Agar investitsiya xarajatlari kamaysa, u holda yalpi talab kamayadi. Yalpi talab egri chizig'i chapga siljiydi va AD_1 holatga ko'chadi. Agar iste'molchining kreditga olgan tovarlari ko'p bo'lsa, u qarزدan uzilishi uchun xarajatlarni kamaytiradi. Demak, talab kamayadi va bu holda ham yalpi talab egri chizig'i chapga parallel ko'chiriladi.

Yalpi taklif (aggregate supply) mamlakatda narxlarning turli darajasidagi ishlab chiqarishning real hajmini aniqlaydi. Yalpi taklif egri chizig'i AS bilan belgilanadi. U iqtisodiyotda narxning turli darajasida ishlab chiqaruvchilar tomonidan taklif qilinadigan mahsulotlar miqdorini ifodalaydi. Narxlarning yuqori darajasi mahsulot ishlab chiqarishni rag'batlantiradi, va aksincha, past baholar ishlab chiqarishni qisqarishiga olib keladi. Yalpi taklif mahsulot birligiga sarflanadigan xarajatlarga hamda narxlar darajasiga bog'liq bo'ladi.

Yalpi taklif egri chizig'i iqtisodchilar tomonidan uzoq muddatli va qisqa muddatli davr uchun alohida o'rganiladi.

Yalpi taklif egri chizig'i uzoq muddatli davrda vertikal chiziq ko'rinishida ifodalanadi. Bu chiziq mamlakatda shu muddatda mavjud resurslar, texnologiyalar va ish kuchidan to'la va samarali foydalangan holdagi ishlab chiqarish hajmini ifodalaydi (4.27-shakl).



4.27-shakl.

Uzoq muddatli davrdagi yalpi taklif $LRAS$ bilan belgilanadi. Agar uzoq muddatli davrda ishlab chiqarishga yangi texnologiyalar va yalpi resurslar jalb qilinsa, $LRAS$ chizig'i o'ngga parallel siljiydi.

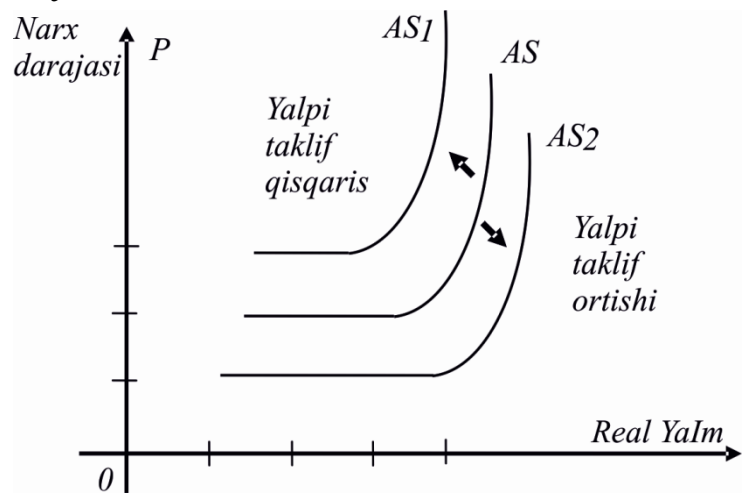
Qisqa muddatli davrdagi yalpi taklif chizig'i $SRAS$ bilan belgilanadi. $SRAS$ chizig'i 3 ta bo'lakka bo'lib o'rganiladi:

1) yalpi taklif chizig'i gorizontall bo'lgan Keynes bo'lagi. Bunda iqtisodiyot turg'unlik fazasida bo'lib, mamlakatda ishsizlik mavjud hamda resurslar to'la ishlatilmaganligi ifodalanadi. Bu davrda narx o'zgarmasa ham, milliy ishlab chiqarish hajmini ko'paytirish mumkin;

2) oraliq bo'lak. Yalpi taklif egri chizig'ining yuqoriga ko'tarilib borayotgan bo'lagi. Bunda ba'zi resurslardan va ish kuchidan to'la

foydalanish amalga osha boshlaydi. Iqtisodiyot o'zining to'la imkoniyat darajasiga yaqinlashib boradi. Lekin barcha sohalarda bir vaqtda ish bilan bandlik sodir bo'lmaydi. Bu bo'lakda ishlab chiqarish hajmining o'sishi narxlar o'sishi bilan birgalikda ro'y beradi;

3) vertikal bo'lak. Bu bo'lak yalpi taklif egri chizig'ining klassik bo'lagi deyiladi. Bunda mamlakatda mavjud resurlar va ish kuchi to'la ishlatiladi. Bunda talab va narxni o'zgartirish yo'li bilan ishlab chiqarish hajmini oshirib bo'lmaydi, chunki mamlakatda bo'sh resurslar yo'q bo'lib, yalpi



4.28-shakl.

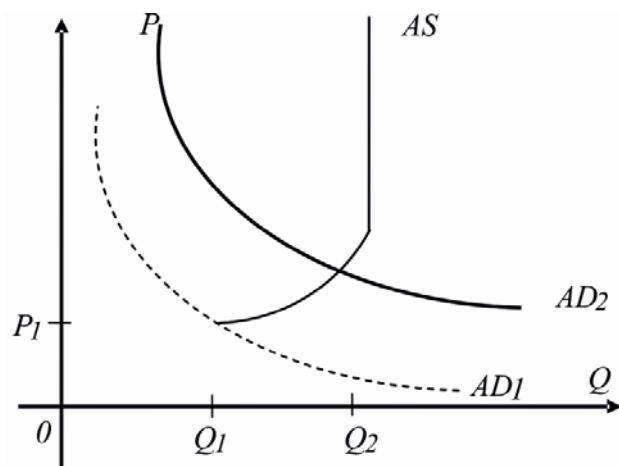
taklifning narx darajasidagi boshqa omillar ta'siri ostida o'zgarishi mumkin. Bunda AS egri chizig'i chapga yoki o'ngga parallel ko'chiriladi. Ana shunday omillarga resurslar narxining o'zgarishi, mehnat unumdorligini o'zgarishi, hududiy normalarning o'zgarishi va boshqalarni misol keltirish mumkin.

Yalpi talab bilan yalpi taklif egri chiziqlari kesishgan nuqta umumiy iqtisodiy muvozanatni ifodalaydi.

Mikroiqtisodiy muvozanatga erishish har bir mamlakat iqtisodiyotining markaziy muammosidir. Jamiyatda yalpi talab va yalpi taklif o'zgarib turadi. Narxlar darajasidan tashqari ba'zi omillarning ta'siri ostida yalpi talab va yalpi taklif egri chiziqlari siljiydi va natijada yalpi muvozanat o'rnatiladi.

Yalpi talabning o'sishi milliy iqtisodiyotdagi yalpi taklif egri chizig'ining qaysi qismida yuz berganligiga qarab turli natijalarga olib keladi.

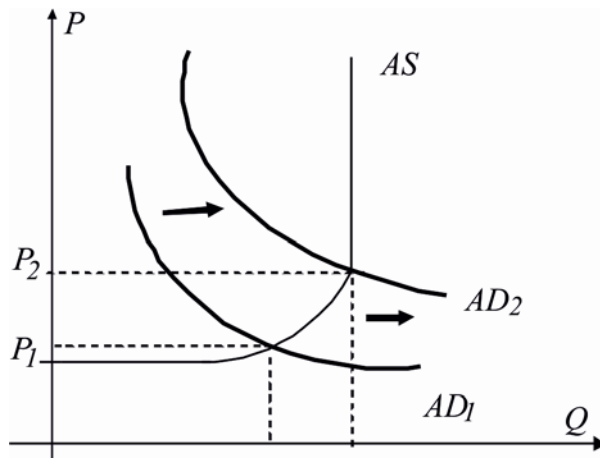
1. Agar yalpi talab yalpi taklif egri chizig'ining gorizontall qismida ro'y bersa, u holda milliy ishlab chiqarishning real hajmi oshadi va baholar o'zgar-



4.29-shakl.

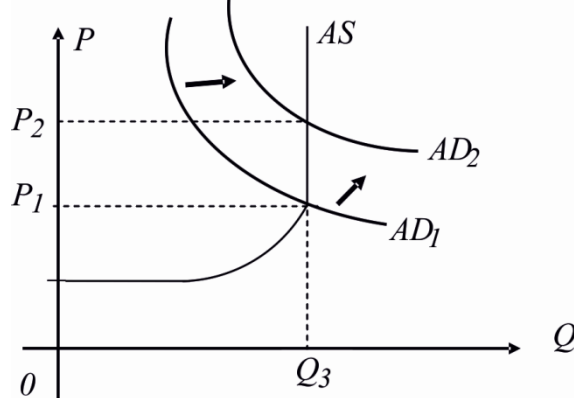
maydi (4.29-shakl).

Shakldan ko‘rinadiki, milliy iqtisodiyot gorizontall bo‘lakda. Bu holda resurslar to‘la ishlatilmaydi. Bunda baho ham o‘zgarmasdan R_1 holatda saqlanadi. Yalpi talabning AD_1 holatdan AD_2 holatga o‘tishi (talabning oshishi) ishlab chiqarish hajmi AS ni Q_1 dan Q_2 holatga oshishiga olib keladi.



4.31-shakl.

2. Agar mamlakatda yalpi taklif vertikal bo‘lak darajasida bo‘lsa, bu holda talabning AD_1 dan AD_2 gacha oshishiga, narxning R_1 dan R_2 gacha oshishiga olib keladi hamda ishlab chiqarish hajmi o‘zgarmaydi (Q_s darajada saqlanadi).



4.30-shakl.

3. Agar milliy iqtisodiyot oraliq bo‘lakda bo‘lsa, u holda ishlab chiqarish hajmining o‘shishi bilan narxlar ham oshadi. Bunda yalpi talab AD_1 dan AD_2 ga siljiydi. Ishlab chiqarish Q_1 dan Q_2 ga, narx R_1 dan R_2 ga o‘zgaradi (4.30-shakl).

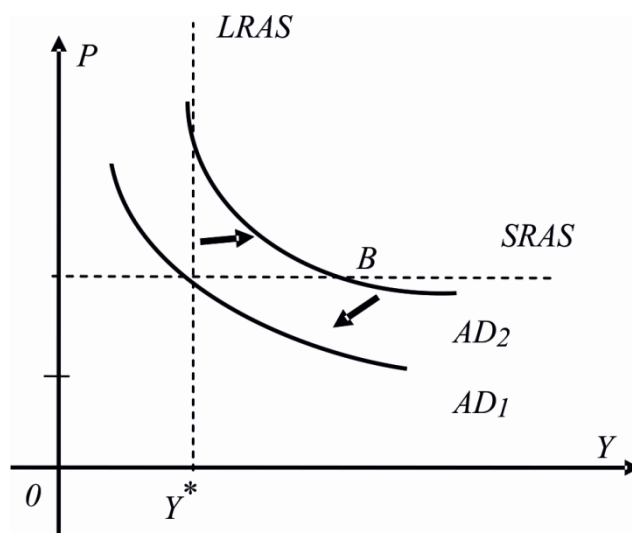
Agar yalpi talab egri chizig‘i o‘zgarmasdan yalpi taklif egri chizig‘i AS chapga siljisa, narx oshadi. Ishlab chiqarish xarajatlarining oshishi oqibatida AS egri chiziq o‘ngga siljisa, u holda ishlab chiqarishning real hajmi oshadi va narx tushadi.

1-masala. Bank sistemasida yangi texnik vositalarni qo‘llash oqibatida muomaladagi pulning aylanish tezligi oshgan. Ushbu jarayonning g‘alaz natijalarini oldini olish uchun Markaziy bank pulning taklif darajasini o‘zgartirdi. Bunday chora-tadbirlarning milliy ishlab chiqarish hajmi va narxlar darajasiga ta‘sirini grafikda tasvirlang.

Yechish. Bizga ma‘lumki, yalpi talab muomaladagi pul miqdoriga teng, ya‘ni $AD=MV$. Muomaladagi pullar tezligining oshishi, uning miqdorini va, demak, yalpi talabning oshishiga olib keladi. Bu holda yalpi talab egri chizig‘i AD_1 holatdan AD_2 holatga ko‘chiriladi (4.32-shakl).

Agar dastlab yalpi talab va yalpi taklifning muvozanat nuqtasi A bo‘lgan bo‘lsa, endi qisqa muddatli muvozanat nuqtasi V bo‘ladi. Shakldan ko‘rinadiki, dastlab milliy iqtisodiyot vertikal holatda, ya‘ni resurslarning

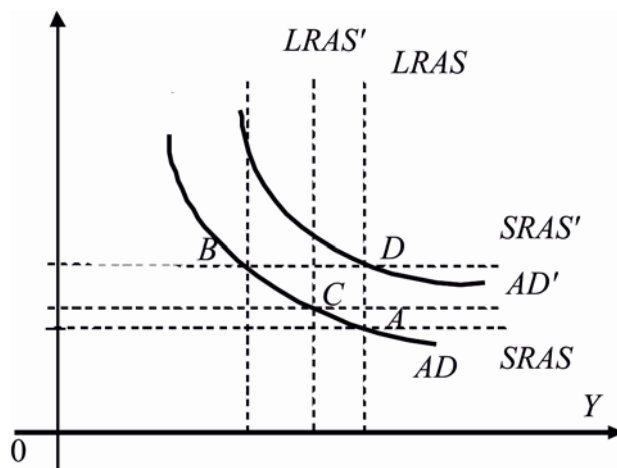
to'la bandligi ta'minlangan $LRAS$ holatda bo'lgan. Muomaladagi pul miqdorining oshishi oqibatida milliy iqtisodiyot qisqa muddatli gorizontali holatga, ya'ni resurslarning to'la bandligi ta'minlanmagan holatga kelgan. Markaziy bank ro'y bergan holatdan chiqish uchun pulning taklif darajasini pasaytiradi, ya'ni muomaladagi pul miqdorini kamaytiradi, natijada yalpi talab egri chizig'i AD_2 holatdan yana AD_1 holatga qaytadi.



4.32-shakl.

2-masala. Dastlab milliy iqtisodiyot uzoq muddatli vertikal holatda va AS egri chiziq $Y=2800$ darajadagi vertikal chiziqdan iborat. Qisqa muddatli AS egri chiziq $R=1,0$ darajadagi gorizontali chiziqdan iborat. Talab egri chizig'i AD : $Y = 3,5 \frac{M}{P}$, $M = 800$ tenglama yordamida berilgan. Yalpi talab va yalpi taklifning muvozanat nuqtasi A bo'lgan. Agar narxlar darajasi $R_1 = 1,4$ gacha oshib, ishlab chiqarish hajmi $Y_1 = 2500$ gacha kamaysa, u holda Y va R larni yangi muvozanat qiymatlarini uzoq muddatli va yaqin muddatli davrlar uchun toping (AD o'zgarmaydi).

Yechish. Iqtisodiyotda muvozanatning buzilishi oqibatida qisqa muddatli yalpi talab $SRAS$ holatdan $SRAS'$ holatga o'tgan. Narxlar darajasi esa 1,0 dan 1,4 darajagacha ko'tarilgan. Demak, qisqa muddatli muvozanat V nuqtada o'rnatilgan (AD bilan $SRAS'$ ning kesishgan nuqtasi. 4.33-shakl).



4.33-shakl.

V nuqtaning koordinatasini topamiz. Buning uchun $Y = 3,5 \frac{M}{P}$ tenglamaga $M=800$ va $R=1,4$ ni qo'yib, $Y = 3,5 \frac{800}{1,4} = 2000$ ga ega bo'lamiz.

Bu natijadan ko'rinadiki, V nuqtadagi ishlab chiqarish hajmi ishlab chiqarishning potentsial hajmi 2500 dan ham kam bo'layapti. Bu ishlab

chiqarish hajmining pasayishi va ishsizlik darajasini oshishidan dalolat beradi. Keyinchalik sekin–asta ish haqi va narx darajasi pasaya boradi. Ishlab chiqarish xarajatlari ham qisqaradi. Natijada ishlab chiqarish yana o‘sa boshlaydi va $Y=2500$ darajagacha ko‘tariladi. Grafikda buni V nuqtasi AD egri chiziq bo‘ylab S nuqtaga qarab siljishi orqali tasvirlash mumkin. S nuqtada yangi, uzoq muddatli muvozanat o‘rnatiladi. S nuqtaga mos keluvchi narx darajasini topamiz:

$$2500 = 3,5 \frac{800}{P} \Rightarrow P = 1,12.$$

Demak, uzoq muddatli muvozanat narxining 1,12 darajasiga 2500 birlik ishlab chiqarish hajmi mos kelar ekan.

3-masala. Yuqoridagi 2-masalada Markaziy bank pul taklifini oshirish yo‘li bilan yalpi talab miqdorini AD dan AD' gacha o‘zgartirsa, u holda uzoq muddatli muvozanat nuqtasining koordinatlari qanday bo‘ladi?

Yechish. Yana 4.38-shaklga murojaat qilamiz. Markaziy bankning chora-tadbirlari oqibatida yalpi talab AD holatdan AD' holatga ko‘chadi. Yangi AD' egri chiziq uzoq muddatli taklif egri chizig‘i $LRAS$ bilan D nuqtada kesishadi va bu nuqtaga $Y=2800$ ishlab chiqarish hajmi mos keladi.

Qisqa muddatli davrda, baholar kam egiluvchan bo‘lganligi sababli bu holat V nuqtadan D nuqtaga $SRAS'$ qisqa muddatli yalpi taklif egri chizig‘i bo‘ylab siljishini ifodalaydi. Iqtisodiyotdagi yalpi pul massasini topamiz. Bunda $Y=2800$, $R=1,4$ ekanligini inobatga olamiz.

$$2800 = 3,5 \frac{M'}{1,4}, \text{ bundan } M' = 1120 \text{ ekanligini topamiz.}$$

Demak, Markaziy bank muomalaga qo‘shimcha $\Delta M = 1120 - 800 = 320$ birlik miqdorida pul chiqargan. Shunday qilib, qisqa muddatli davrda iqtisodiyotdagi muvozanatni $Y=2800$ darajada saqlash uchun Markaziy bank muomaladagi pul hajmini 320 birlikka oshirishi kerak.

Tayanch so‘z va iboralar

Yalpi talab, yalpi taklif, yalpi talab va yalpi taklifga ta’sir etuvchi narxdan tashqari omillar, yalpi talab va yalpi taklif muvozanati.

Nazorat savollari

1. Yalpi talab nima?
2. Yalpi talabni qanday hisoblash mumkin?
3. Talab egri chizig‘i grafikda qanday tasvirlanadi?
4. Milliy mahsulotga talab miqdorining o‘zgarishiga narxdagi boshqa yana qanday omillar ta’sir qilishi mumkin?

5. Yalpi taklif nima?
6. Yalpi taklif qanday o'lanadi?
7. Yalpi taklif egri chizig'i uzoq va yaqin muddatli davrlar uchun qanday ko'rinishda bo'ladi?
8. Umumiy iqtisodiy muvozanat nima va u qanday aniqlanadi?

Masalalar

1. $t=1$ yilda milliy ishlab chiqarish hajmi 4000 birlikni tashkil qilgan. Talab egri chizig'i (AD) $Y=4200-2R$ tenglama bilan ifodalangan. t yilda ishlab chiqarish hajmi 1% ga oshgan hamda yalpi talab tenglamasi $Y=4280-2R$ ko'rinishga kelgan bo'lsa, u holda t yildagi muvozanat narxi necha foizga o'zgargan?

Javob: 20% ga oshgan.

2. Uzoq muddatli AS egri chizig'i $Y=2000$ tenglama bilan berilgan, qisqa muddatli AS egri chizig'i $R=1,0$ darajadagi gorizonttal chiziqdan iborat. Yalpi talab egri chizig'i $Y=2,0 \cdot \frac{M}{P}$ tenglama bilan berilgan.

Muomaladagi pul massasi $M=1000$ ga teng. Agar iqtisodiyotdagi ma'lum bir sabablarga ko'ra qisqa muddatli yalpi taklif miqdori $R=1,25$ darajaga ko'tarilgan bo'lsa, u holda qisqa muddatli muvozanat nuqtasining koordinatalarini toping.

Javob: $Y=1600$; $P=1,25$.

3. Yuqoridagi 2-masala shartlarida milliy iqtisodiyotni boshlang'ich holatga keltirish uchun Markaziy bank muomalaga yana qancha pul chiqarishi kerak?

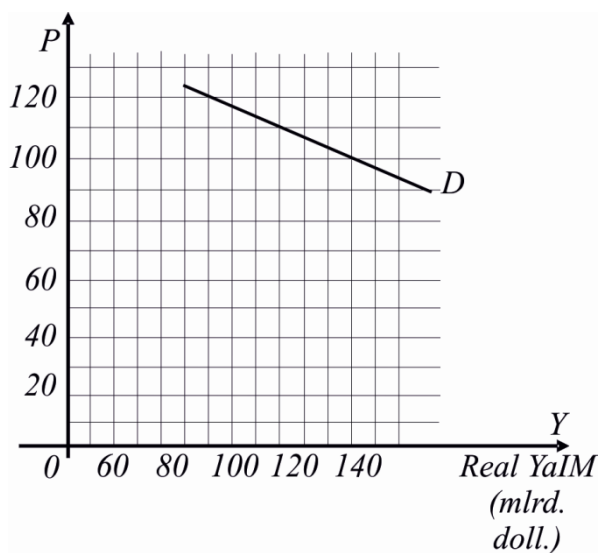
Javob: $\Delta M = 250$.

4. Quyidagi 4.39-shaklda yalpi talab egri chizig'i tasvirlangan.

a) agar yalpi taklif egri chizig'i $Y=140$ darajaga mos keluvchi vertikal chiziqdan iborat bo'lsa, u holda muvozanat narxi qanday bo'ladi?

b) agar yalpi taklif egri chizig'i $R=120$ narx darajasiga mos keluvchi gorizonttal chiziqdan iborat bo'lsa, u holda muvozanat nuqtadagi real ishlab chiqarish hajmi qanday bo'ladi?

v) agar yalpi taklif egri chizig'i $R=Q-40$ tenglama bilan berilgan bo'lib, Q -real ishlab chiqarish hajmi va R - narx darajasi bo'lsa, u holda real ishlab



4.34-shakl

chiqarish hajmi va narx darajasi qanday bo‘ladi?

Javoblar: a) 100 p.b.; b) 100 mlrd. doll.; v) $R=100$; $YaIM = 140$ mlrd. doll.

5. Quyidagi jadvalda yalpi taklifni ifodalovchi ma’lumotlar keltirilgan:

Yalpi taklif egri chizig‘ini yasang.

a) ushbu egri chiziqning Keynes bo‘lagida real $YaIM$ qanday qiymatlarni qabul qiladi? b) yalpi taklif chizig‘ining klassik bo‘lagida narx darajasi va $YaIM$ miqdori qaysi oraliqdagi qiymatlarni qabul qiladi? v) yalpi taklif egri chizig‘ining oraliq kesimida $YaIM$ qanday oraliqdagi qiymatlarni qabul qiladi?

Narx darajasi	Ishlab chiqarish real $YaIM$
250	2000
225	2000
200	1900
175	1700
150	1400
125	1000
125	500
125	0

4.5-§. Aralash masalalar

1. Korxonaning o‘zgarmas xarajati $FC=300$ bo‘lib, ishlab chiqarish hajmi 200 birlikni tashkil qiladi. Korxonaning o‘rtacha o‘zgarmas xarajatini toping.

Javob: $AFC=1,5$.

2. Firmaning ishlab chiqarish hajmi $Q=500$ birlikni, o‘zgaruvchan xarajati $VC=200$ birlikni tashkil qiladi. Firmaning o‘rtacha o‘zgaruvchan xarajatini toping.

Javob: $AVC=0,4$.

3. Firmaning o‘zgarmas xarajati 100 bo‘lib, $Q=100$ ishlab chiqarish hajmiga mos keluvchi o‘zgaruvchan xarajati 200 bo‘lsa, u holda uning to‘la xarajati va o‘rtacha to‘la xarajati qanday bo‘ladi?

Javob: $TC=300$; $ATS=3$.

4. Yuqoridagi 3-masala shartlarida ishlab chiqarish hajmi 50 birlikka oshib, o‘zgaruvchan xarajat 100 birlikka oshsa, firmaning marjinal xarajati qanday bo‘ladi?

Javob: $MC=2$.

5. Quyidagi jadvalda keltirilgan ma’lumotlar asosida yalpi (umumiy) xarajat, marjinal xarajat va o‘rtacha xarajatlarni toping va jadvalni to‘ldiring.

Mahsulot hajmi, (Q)	O‘zgarmas xarajat, (FC)	O‘zgaruvchi xarajat, (VC)	Yalpi xarajat, (TS)	Marjinal xarajat, (MS)	O‘rtacha xarajatlarni		
					AFS	AVS	ATS
0	100	0					
1	100	50					

2	100	60					
3	100	70					
4	100	80					
5	100	90					
6	100	100					
7	100	150					
8	100	200					
9	100	250					
10	100	300					

6. Agar firma 2000 birlik mahsulot ishlab chiqarib, ularni 6 pul birligida sotsa, firmaning daromadi va o'rtacha formada qanday bo'ladi?

Javob: 12000 p.b; 6 p.b.

7. Agar 6-masala shartidagi firma mahsulot ishlab chiqarishini 50 % ga oshirsa hamda ularni 30 % qimmatroq narxda sotsa, firmaning o'rtacha va marjinal daromadi qanday bo'ladi?

Javob: $ATR=7,8$; $MTR=7,8$.

8. Quyidagi jadvalda kapital sarfi o'zgarmas bo'lib, mehnat o'zgaruvchan bo'lgan holdagi ishlab chiqarishi jarayonni tasvirlangan.

a) jadvaldagi ma'lumotlar asosida mehnatning o'rtacha va marjinal mahsulotlarini aniqlab jadvalga joylashtiring;

b) mehnatning ishlab chiqarish funktsiyasini tuzing va uning grafigini yasang.

Mehnat sarfi, (L)	Kapital sarfi, (K)	Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi, (Q)	Mehnatning o'rtacha mahsuloti, (AP_L)	Mehnatning marjinal mahsuloti, (MP_L)
0	20	-	-	
1	20	8	8	
2	20	12	6	
3	20	15	5	
4	20	18	4,5	
5	20	20	4	
6	20	20	3,3	
7	20	18	2,5	
8	20	19	24	

Mehnatning qanday sarfida AP_L va MP_L chiziqlari o'zaro kesishadi?

Javob: b) $Q = 8L^{0,585}$.

8. Firmaning ishlab chiqarish funktsiyasi $Q = 3L^{\frac{2}{3}}$ ko'rinishda berilgan.

a) ishlab chiqarish funktsiyasi grafigini yasang;

b) mehnatning o'rtacha mahsuloti grafigini yasab, mehnat

unumdorligini $L=8$ da toping;

v) L ning qanday qiymatida o'rtacha mehnat unumdorligi maksimal bo'ladi?

Javob: b) $AP_L = 1,5$; d) $L = 1$.

9. Agar biror mahsulotga bo'lgan talab funktsiyasi $D(R)=10-0,5P^2$ ko'rinishda bo'lib, taklif funktsiyasi $S(P)=0,7P+0,4P^2$ ko'rinishda bo'lsa, u holda shu mahsulotning bozordagi muvozanat narxi R qanday bo'ladi?

Javob: $P=3$.

10. Quyidagi jadvalda bozordagi mahsulot narxiga bog'liq ravishda talab va taklifning o'zgarishi ko'rsatilgan:

Mahsulot narxi	Mahsulotga bo'lgan talab miqdori	Taklif miqdori
5	70	10
10	60	30
12	55	40
16	45	45
20	35	70

a) ushbu ma'lumotlar asosida talab va taklif egri chiziqlarini yasang;

b) muvozanat bahosini toping;

v) talab va taklif funktsiyalarini aniqlang.

Javob: b) $P=45$; v) $AD=-2P+80$; $AS=4P-10$.

11. A tovarga bo'lgan talab va taklif funktsiyalari quyidagi ko'rinishda ifodalangan:

$$D(P) = 0,3P^2 - 10,$$

$$S(P) = \frac{33}{8}P - 0,6P^2.$$

Bozordagi muvozanat bahosini va shu bahoda sotiladigan tovar miqdorini toping.

Javob: $R=6,3$; $Q=1,9$.

12. Agar mahsulotga bo'lgan talab va taklif funktsiyalari quyidagi ko'rinishda berilgan:

$$D(P)=1200-0,3P^2; S(P)=3,5P+0,25P^2.$$

Bozordagi muvozanat bahosi va mahsulot miqdorini aniqlang.

Javob: $P=43,6$; $Q=629,7$.

V bob. HOSILALAR VA ULAR YORDAMIDA YECHILADIGAN IQTISODIY MASALALAR

Zarur matematik tushuncha va faktlar

1. Bir o'zgaruvchili funktsiya hosilalari. (a, b) oraliqda uzluksiz bo'lgan $u=f(x)$ funktsiyani ko'ramiz. Shu oraliqdagi x_0 va $x_1=x_0+\Delta x$ nuqtalarni olamiz. Bunda $[x_0 \in (a, b), x_1=x_0+\Delta x \in (a, b)]$.

$x_1-x_0=\Delta x$ miqdor argumentning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi. $u=f(x)$ funktsiyaning x_0 va $x_1=x_0+\Delta x$ nuqtalardagi qiymatlaridan tuzilgan

$$f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

ayirma $y=f(x)$ funktsiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deb ataladi va $\Delta f(x)$ bilan belgilanadi.

Funktsiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbati funktsiya o'zgarishining o'rtacha tezligini aniqlaydi:

$$\text{Funktsiyaning o'rtacha o'zgarish tezligi} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Shunday qilib, $u=f(x)$ funktsiyaning x_0 nuqtadagi hosilasini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (1)$$

Agar (1) limit aniq bir songa intilsa (limit mavjud bo'lsa), u holda x_0 nuqtada funktsiya **differentiallanuvchi** deb ataladi. Berilgan funktsiyaning hosilasini topish esa, uni **differentiallashtirish** deyiladi.

1-misol. $f(x)=x^2$ funktsiyaning hosilasini toping.

Yechish.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Ushbu natijani

$(x^2)'=2x$, ko'rinishida yozamiz.

Quyidagi chekli yoki cheksiz limitlar

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

va

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

mos ravishda **chap** va **o'ng tomonlama hosilalar** deb ataladi.

$u=f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lishi uchun shu nuqtada chap va o'ng tomonlama hosilalarning mavjud bo'lib, ularning o'zaro teng bo'lishi zarur va etarlidir.

2. Hosilani hisoblash qoidalar. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funtsiyalar x nuqtada differentsiallanuvchi bo'lib, k -ixtiyoriy o'zgarmas son bo'lsa, u holda quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$1) [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$2) [kf(x)]' = kf'(x);$$

$$3) [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$4) \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad (g(x) \neq 0).$$

3. Elementar funktsiyalar hosilalari jadvali

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	$\sin x$	$\cos x$
X	1	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
x^n	nx^{n-1}	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\log_a x $	$\frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

4. Funktsiyani ekstremunga tekshirish. Agar (a,b) oraliqqa tegishli bo'lgan ixtiyoriy $x_1, x_2 \in (a,b)$ nuqtalar uchun $x_1 > x_2$ tengsizlikning bajarilishi shartida $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ (a,b) oraliqda **o'suvchi funktsiya** deyiladi. Agar yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchi ikkita x_1, x_2 ($x_1 > x_2$) nuqtalar uchun $f(x_1) < f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ (a,b) oraliqda **kamayuvchi funktsiya** deyiladi.

Differentsiallanuvchi $y=f(x)$ funktsiya (a,b) oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun, ixtiyoriy $x_0 \in (a,b)$ nuqtada $f'(x_0) > 0$, [$f'(x_0) < 0$] bo'lishi zarurdir.

2-misol. $f(x)=x^2-3x$ funktsiyani $[1;4]$ oraliqda o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lishini tekshiring.

Yechish. $f(x)=x^2-3x$ funktsiyadan birinchi tartibli hosila olamiz:

$$f'(x)=2x-3>0 \Rightarrow x>3/2.$$

Bundan ko'rinadiki, $x \in \left(\frac{3}{2}; 4\right]$ oraliqda funktsiya o'suvchi, $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right)$ oraliqda esa kamayuvchi bo'ladi.

Berilgan funktsiyaga maksimum (minimum) qiymat beruvchi nuqtalar uning **ekstremum nuqtalari** deb ataladi. Funktsiyaning bu nuqtalardagi qiymati uning **ekstremumi** deyiladi. Bu nuqtalarda funktsiyaning hosilasi mavjud yoki mavjud bo'lmاسligi mumkin. Berilgan funktsiyaning hosilasi nolga teng bo'lgan yoki hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalar **kritik nuqtalar** deb ataladi.

Hosila yordamida funktsiyani ekstremumga tekshirish uchun quyidagi ishlarni bajarish kerak:

1. Berilgan funktsiyaning kritik nuqtalari aniqlanadi. Buning uchun uning birinchi tartibli hosilasini topib uni nolga tenglashtiriladi. Hosil bo'lgan tenglamaning yechimi kritik nuqtani aniqlaydi.

2. Agar kritik nuqtaning chapidan o'ng tomonga o'tganda funktsiya hosilasining ishorasi "+" dan "-" ga o'zgarsa, u holda kritik nuqta funktsiyaning **maksimum nuqtasi** bo'ladi.

3. Agar kritik nuqtaning chapidan o'ng tomonga o'tganda hosilaning ishorasi "-" dan "+" ga o'zgarsa, u holda kritik nuqta funktsiyaning **minimum nuqtasi** bo'ladi.

4. Agar kritik nuqtadan o'tganda hosila ishorasini o'zgartirmasa, kritik nuqta ekstremum nuqtasi bo'lmaydi.

Funktsiyani ekstremumga ikkinchi tartibli hosila (birinchi tartibli hosiladan olingan hosila **ikkinchi tartibli hosila** deb ataladi) yordamida ham tekshirish mumkin. Buning uchun quyidagi ishlarni bajarish kerak:

1. Funktsiyaning 1-tartibli hosilasi yordamida funktsiyaning kritik nuqtasi (x_0) topiladi.

2. Agar kritik nuqtada 2-tartibli hosilaning ishorasi musbat, ya'ni $f''(x_0)>0$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtada funktsiya minimumga erishadi.

3. Agar $f''(x_0)<0$ bo'lsa, x_0 nuqtada funktsiya maksimumga erishadi.

4. Agar $f''(x_0)=0$ bo'lsa, kritik nuqta qanday nuqta ekanligi noma'lum bo'ladi.

3-misol. $f(x)=x^3-3x^2$ funktsiyani 2-tartibli hosila yordamida tekshiring.

Yechish. Berilgan funktsiyaning 1-tartibli hosilasi yordamida kritik nuqtalarini topamiz:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

Berilgan funktsiyadan 2-tartibli hosila olamiz:

$f''(x) = 6x - 6$, hamda uning $x_1 = 0, \quad x_2 = 2$ kritik nuqtalardagi qiymatini aniqlaymiz:

$$f''(0) = -6 < 0, \quad f''(2) = 6 > 0.$$

Bundan ko'rinadiki, $x = 0$ nuqtada funktsiya maksimumga, $x = 2$ nuqtada esa minimumga erishadi.

5. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning xususiy hosilalari. Deylik, $f(M)$ funktsiya $M_0(x_1^0; \dots; x_i^0; \dots; x_n^0)$ nuqtaning ma'lum bir atrofida aniqlangan bo'lsin. $M_i(x_1^0; \dots; x_i^0 + \Delta x_i; \dots; x_n^0)$ nuqtani ko'ramiz. Agar

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(M_i) - f(M_0)}{\Delta x_i}$$

limit mavjud bo'lsa, u $f(M)$ funktsiyadan x_i noma'lum bo'yicha olingan **xususiy hosila** deb ataladi va $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i}$ bilan belgilanadi:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(M_i) - f(M_0)}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0; \dots; x_i^0 + \Delta x_i; \dots; x_n^0) - f(x_1^0; \dots; x_n^0)}{\Delta x_i}.$$

Xususiy hosilaning ta'rifiga ko'ra, uni topish uchun berilgan $f(x_1; x_2; \dots; x_i; \dots; x_n)$ funktsiyadan $x_1; x_2; \dots; x_{i-1}; \quad x_{i+1}; \dots; x_n$ noma'lumlarni o'zgarmas deb hisoblab, x_i noma'lum bo'yicha oddiy hosila olish kerak.

4-misol. $f(M) = x_1^5 x_2 x_3 - x_1 x_2^3 x_3 + 2x_2 x_3^2$ funktsiyaning $x_1, \quad x_2$ va x_3 noma'lumlar bo'yicha xususiy hosilalarini toping.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (x_1^5)' x_2 x_3 - (x_1)' x_2^3 x_3 = 5x_1^4 x_2 x_3 - x_2^3 x_3.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^5 (x_2)' x_3 - x_1 (x_2^3)' x_3 + 2(x_2)' x_3^2 = x_1^5 x_3 - 3x_1 x_2^2 x_3 + 2x_3^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^5 x_2 (x_3)' - x_1 x_2^3 (x_3)' + 2x_2 (x_3^2)' = x_1^5 x_2 - x_1 x_2^3 + 4x_2 x_3.$$

Birinchi tartibli xususiy hosilalardan x_i noma'lum bo'yicha olingan $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (i = \overline{1; n}; \quad j = \overline{1; n})$ hosilalar 2-tartibli xususiy hosilalar deb ataladi.

Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning ekstremumi. Uni topish jarayonini ikki o'zgaruvchili $Z = f(x, y)$ funktsiya misolida ko'rsatamiz:

1. Berilgan funktsiyaning kritik nuqtalari topiladi. Buning uchun uning 1-tartibli xususiy hosilalari 0 ga tenglashtiriladi va

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

tenglamalar sistemasini echib, kritik $(x_0; y_0)$ nuqta topiladi.

2. Agar $(x_0; y_0)$ nuqtada

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \text{ va } \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} < 0;$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, u holda bu nuqtada $Z=f(x,y)$ funktsiya maksimumga erishadi.

3. Agar $(x_0; y_0)$ nuqtada quyidagi

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \text{ va } \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} > 0;$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, u holda bu nuqtada $Z=f(x,y)$ funktsiya minimumga erishadi.

4. Agar $(x_0; y_0)$ nuqtada

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right)^2 < 0;$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda bu nuqtada $Z=f(x,y)$ funktsiya maksimumga ham, minimumga ham erishmaydi.

5. Agar $(x_0; y_0)$ nuqtada

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0;$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $(x_0; y_0)$ nuqta ekstremum nuqta ekanini aniq tasdiqlash mumkin emas.

5. 1-§. Talab va taklif egiluvchanligi

Har bir mahsulot bahosining o‘zgarishi unga bo‘lgan talab va taklifni o‘zgartiradi.

Baho o‘zgarishining talabga tasirini ko‘rsatuvchi ko‘rsatkich **talab egiluvchanligi** deb ataladi. Bu ko‘rsatkich talabning nisbiy o‘zgarishini bahoning nisbiy o‘zgarishiga nisbati ko‘rinishida ifodalanadi. Talab egiluvchanligi $E_{Q_D}(P)$ bilan belgilanadi va u quyidagi tenglik orqali aniqlanadi:

$$E_{Q_D}(P) = \frac{\frac{\Delta Q_D}{Q_D}}{\frac{\Delta P}{P}}, \quad (1)$$

bu erda: Q_D – talab (D)ni qondirish uchun ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori;

$\frac{\Delta Q_D}{Q_D}$ -talabning nisbiy o'zgarishi;

$\frac{\Delta P}{P}$ -bahoning nisbiy o'zgarishi.

1-misol. Deylik, tovar mahsulotining dastlabki bahosi $R=10$ dollar bo'lib, u $\Delta R=2$ dollarga oshsin. Agar $R=10$ dollar bahoga $Q_D=100$ birlik talab to'g'ri kelib, $\Delta R + R$ bahoga $\Delta Q_D + Q_D=90$ birlik talab to'g'ri kelsa, u holda talab egiluvchanligi qanday bo'ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra: $R=10$, $\Delta R=2$ hamda $Q_D=100$, $\Delta Q_D=-10$. Bahoning nisbiy o'zgarishini topamiz:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Talabning nisbiy o'zgarishi quyidagiga teng bo'ladi:

$$\frac{\Delta Q_D}{Q_D} = \frac{-10}{100} = \frac{-1}{10} = -0,1.$$

Endi (1) formuladan talab egiluvchanligini topamiz:

$$E_{Q_D}(P) = \frac{-0,1}{0,2} = \frac{-1}{2} = -0,5.$$

Talab egiluvchanligi baho 1% ga o'zgarganda talab qancha foizga o'zgarishini ko'rsatadi. Demak, yuqoridagi misolda talab egiluvchanligi $-0,5\%$ ni ko'rsatadi, ya'ni agar baho 1% ga oshsa, talab 0,5% ga kamayar ekan.

Javob: $-0,5\%$ (baho 1 birlikka oshsa, talab 0,5% ga kamayadi).

Talab egiluvchanligining manfiy son bo'lishining oldini olish uchun A. Marshal uni quyidagi formula yordamida topishni taklif qilgan:

$$E_{Q_D}(P) = \frac{\Delta Q_D}{Q_D} : \left(-\frac{\Delta P}{P} \right) = \frac{\Delta Q_D}{Q_D} : \frac{\Delta P}{P} = \frac{-\Delta Q_D}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q_D} \quad (2)$$

Ushbu formulaga asosan, yuqoridagi misolda talab egiluvchanligini topsak, u quyidagiga teng bo'ladi:

$$E_{Q_D}(P) = \frac{10}{100} : \frac{2}{10} = \frac{1}{2} = 0,5\%$$

Agar talab funktsiyasi uzluksiz bo'lib, 1-tartibli hosilaga ega bo'lsa, u holda (2) formulani yana boshqacha ko'rinishda ifodalash mumkin. Buni ko'rsatish uchun uning $\Delta R \rightarrow 0$ da limitni hisoblaymiz:

$$E_{Q_D}(P) = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_D}{Q_D} : \left(-\frac{\Delta P}{P} \right) = - \left(\lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_D}{\Delta P} \right) \cdot \frac{P}{Q_D} = -f'(P) \frac{P}{Q_D}$$

Demak, talab egiluvchanligi

$$E_{Q_D}(P) = -f'(P) \frac{P}{Q_D} \quad (3)$$

formula yordamida topiladi, bu erda $Q_D=f(p)$ va

$$\lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_D}{Q_D} = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta f(p)}{\Delta P} = f'(p) \quad (4)$$

2-misol. Talab funktsiyasi quyidagi tenglama orqali aniqlanadi:

$$12Q_D + 7P = 216.$$

Talab funktsiyasining baho (R) bo'yicha egiluvchanligini aniqlang hamda $R=20$ da uni baholang.

Yechish. Berilgan tenglamadan talab funktsiyasini topamiz:

$$Q_D = f(P) = \frac{216 - 7P}{12} = 18 - \frac{7}{12}P.$$

Bu funktsiyaning baho (P) bo'yicha egiluvchanligini topamiz. Buning uchun

$$\frac{\partial Q_D}{\partial P} = f'(P) = \frac{-7}{12}$$

hosilani topamiz va (3) formulaga asosan talab egiluvchanligini hisoblaymiz:

$$E_{Q_D}(P) = \frac{-7}{12} \cdot \frac{P}{D} = \frac{-7}{12} \cdot \frac{P}{18 - \frac{7}{12}P} = \frac{7P}{7P - 216}.$$

Agar $P=20$ bo'lsa, u holda

$$E_{Q_D}(20) = \frac{140}{140 - 216} = -1,842$$

bo'ladi.

Javob: $E_{Q_D}(20) = -1,842$.

Ana shunday yo'l bilan taklifning bahoga nisbatan egiluvchanligini ham aniqlash mumkin.

Ta'rif. Taklifning nisbiy o'zgarishining bahoning nisbiy o'zgarishiga bo'lgan nisbati **taklif egiluvchanligi** deb ataladi. Taklifning bahoga nisbatan egiluvchanligi $E_{Q_S}(P)$ bilan belgilanadi va quyidagi formula yordamida topiladi:

$$E_{Q_S}(P) = \frac{\Delta Q_S}{Q_S} : \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta Q_S}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q_S} \quad (5)$$

Agar taklif funktsiyasi $Q_S=\varphi(p)$ uzluksiz bo'lib, 1-tartibli hosilaga ega bo'lsa, u holda (5) tenglikdan $\Delta P \rightarrow 0$ da limitga o'tib, quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$E_{Q_S}(P) = \varphi'(P) \cdot \frac{P}{Q_S}, \quad (6)$$

bu erda $Q_S=\varphi(R)$ taklif funktsiyasi hamda

$$\lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_s}{\Delta P} = \phi'(P) \quad (7)$$

3-misol. Taklif funksiyasi

$$Q_s = \phi(P) = P^2 + 50P^2, \quad 0 < P < 32$$

ko‘rinishda berilgan. Ushbu taklif funksiyasining bahoga nisbatan egiluvchanligini aniqlang hamda $P=30$ da uni baholang.

Yechish. Berilgan funktsiyadan P bo‘yicha birinchi tartibli hosila olamiz:

$$\phi'(P) = 2P + 50.$$

So‘ngra (6) formuladan foydalanib taklif egiluvchanligini topamiz:

$$E_{Q_s}(P) = \phi'(P) \cdot \frac{P}{Q_s} = (2P + 50) \frac{P}{P^2 + 50P} = \frac{2P + 50}{P + 50}.$$

Bundan $P=30$ da topamiz:

$$E_{Q_s}(30) = 110/80 = 1,375.$$

Demak, tovar bahosi 1% ga oshsa, taklif 1,375% ga oshadi.

Javob: $E_{Q_s}(30) = 1,375$.

Agar aholi bozordan harid qilgan A tovarning miqdori Q_D birlik bo‘lib, uning bahosi P p.b. ga teng bo‘lsa, u holda $Q_D \cdot P = P \cdot f(P)$ ko‘paytma aholining sarf qilgan xarajatini ifodalaydi.

A tovar bahosining o‘zgarishi aholi sarf xarajatiga qanday ta’sir ko‘rsatishini hisoblash uchun ushbu ko‘paytmani P o‘zgaruvchi bo‘yicha differentsiallaymiz, ya’ni quyidagini topamiz:

$$\frac{d(P \cdot f(P))}{dP} = f(P) + Pf'(P) = f(P) \left(1 + \frac{Pf'(P)}{f(P)} \right) = f(P)(1 - E_{Q_D}(P)) \quad (8)$$

Ushbu tenglikdan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin:

1. Agar $|E_{Q_D}(P)| > 1$ bo‘lsa, u holda $\frac{d([P \cdot f(P)])}{dP} < 0$ bo‘ladi. Demak, tovar mahsulot narxining oshishi xarid miqdorining kamayishiga olib keladi. Bu holda **talab egiluvchan** deyiladi.

2. Agar $|E_{Q_D}(P)| < 1$ bo‘lsa, u holda $\frac{d([P \cdot f(P)])}{dP} > 0$ bo‘ladi. Demak, tovar bahosining oshishi xarid miqdorining oshishiga olib keladi. Bu holda **talab noegiluvchan** deyiladi.

3. Agar $E_D(P) = 1$ bo‘lsa, u holda $\frac{d([P \cdot f(P)])}{dP} = 0$ bo‘ladi. Demak, tovar bahosining oshishi xarid miqdoriga ta’sir ko‘rsatmaydi va u o‘zgarmas miqdorda saqlanadi. Bunday holda talab birlik egiluvchanlikka ega deyiladi. Bu holda talab funksiyasi

$$Q_D = f(P) = \frac{C}{P}$$

ko‘rinishda, ya’ni bahoga teskari proportsional bo‘ladi.

Yuqorida biz talabning bahoga nisbatan egiluvchanligi bilan tanishdik. Xuddi shuningdek, talabning aholi daromadiga nisbatan egiluvchanligini ham aniqlash mumkin:

Talabning aholi daromadi R ga nisbatan egiluvchanligini $E_{Q_D}(R)$ bilan belgilaymiz va quyidagi formula yordamida aniqlaymiz:

$$E_{Q_D}(R) = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_D}{Q_D} : \left(\frac{\Delta R}{R} \right) = \left(\lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_D}{\Delta R} \right) \cdot \frac{R}{Q_D} = f'(R) \cdot \frac{R}{Q_D} \quad (9)$$

Demak, aholi daromadiga nisbatan talab egiluvchanligi o‘lchovsiz miqdor bo‘lib, daromadning o‘zgarishi talab o‘zgarishiga bo‘lgan ta’sirini ko‘rsatadi. Aholi daromadining oshishi oqibatida ba’zi mahsulotlarga bo‘lgan talab oshadi. Bu holda $E_{Q_D}(R) > 0$ bo‘ladi. Ba’zi tovarlarga bo‘lgan talab aholi daromadi oshishi bilan kamayadi. Bu holda $E_{Q_D}(R) < 0$ bo‘lib, bunday tovarlarning sifati past hisoblanadi.

Odamlarning eng zarur ehtiyojlarini qanoatlantiruvchi tovarlarga bo‘lgan talab egiluvchanligi kichik, zeb-ziynat tovarlarining talab egiluvchanligi esa katta qiymatga ega bo‘ladi.

Ba’zi tovarlarga bo‘lgan talab uning o‘rnini bosuvchi boshqa tovar narxining o‘zgarishiga ham bog‘liq bo‘ladi. Masalan, kir sovunning bahosi oshsa, u holda kir yuvish kukunlariga bo‘lgan talab oshadi. Biror tovar narxining o‘zgarishi boshqa tovarga bo‘lgan talab o‘zgarishiga ta’sirini ko‘rsatuvchi miqdor **kesishuvchi talab egiluvchanligi** deb ataladi va quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$E_{Q_{D_j}}(P_i) = \lim_{\Delta P_i \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_{D_j}}{Q_{D_j}} : \frac{\Delta P_i}{P_i} = \left(\lim_{\Delta P_i \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_{D_j}}{\Delta P_i} \right) \cdot \frac{P_i}{Q_{D_j}} = f'_{Q_{D_j}}(P_i) \cdot \frac{P_i}{Q_{D_j}}, \quad (10)$$

bu erda Q_{D_j} – j -tovarga bo‘lgan talab, P_i – i -tovar bahosi, $f_{Q_{D_j}}(P_i)$ – kesishuvchi talab funktsiyasi, $E_{Q_{D_j}}(P_i)$ – kesishuvchi talab egiluvchanligi.

Agar $E_{Q_{D_j}}(P_i) > 0$ bo‘lsa, u holda i va j tovarlar o‘zaro almashuvchi bo‘ladi. Agar $E_{Q_{D_j}}(P_i) < 0$ bo‘lsa, u holda ushbu tovarlar o‘zaro to‘ldiruvchi tovarlar hisoblanadi.

4-misol. X tovarga bo‘lgan talab funktsiyasi

$$Q_{D_x} = f(P_x, P_y) = 8 - P_x + 0,2P_y$$

ko‘rinishda berilgan. Bu erda: P_x – X tovar bahosi, P_y – Y tovar bahosi.

Y tovar narxining o‘zgarishi X tovarga bo‘lgan talab o‘zgarishini,

yani kesishuvchi talab egiluvchanligini $P_x=4$ va $R_y=5$ bo'lgan hol uchun toping.

Yechish. Berilgan talab funktsiyasidan R_u bo'yicha xususiy hosila olamiz:

$$\frac{\partial f'(P_x, P_y)}{\partial P_y} = 0,2.$$

So'ngra (10) formula yordamida kesishuvchi egiluvchanlikni aniqlaymiz:

$$E_{Q_{D_x}}(P_y) = \frac{\partial f'(P_x, P_y)}{\partial P_y} \cdot \frac{P_y}{Q_{D_x}} = \frac{0,2 \cdot P_y}{8 - P_x + 0,2P_y}.$$

Bundan $P_x=4$ va $R_y=5$ ekanligini nazarga olib topamiz:

$$E_{Q_{D_x}}(P_y) = \frac{0,2 \cdot 5}{8 - 4 + 0,2 \cdot 5} = 0,2.$$

Javob: $E_{Q_{D_x}}(P_y) = 0,2$. Demak, Y tovar narxini 1 % ga oshirish natijasida X tovarga bo'lgan talabni 0,2 % ga oshiradi. Bu holda X va Y tovarlar o'zaro almashuvchi ($E_{Q_{D_x}}(P_y) > 0$.) bo'ladi.

5-misol. Ma'lum bir tovarga bo'lgan talab aholi daromadi R ning funktsiyasi ko'rinishida berilgan:

$$Q_D(R) = f(R) = -50 + 3R.$$

Talabning daromadga nisbatan egiluvchanligini $R=150$ uchun toping.

Yechish. Berilgan talab funktsiyasida R (daromad) bo'yicha hosila olamiz:

$$f'(R) = 3.$$

So'ngra (9) formuladan foydalanib,

$$E_{Q_D}(R) = f'(R) \cdot \frac{R}{Q_D} = 3 \cdot \frac{R}{-50 + 3R} = \frac{3R}{-50 + 3R} \text{ ni topamiz:}$$

Bu tenglikdan $R=150$ ekanligini nazarga olib topamiz:

$$E_{Q_D}(150) = 1,125.$$

Demak, daromadning 1 % ga oshishi natijasida belgilangan tovarga bo'lgan talab 1,125 % ga oshadi.

Javob: $E_{Q_D}(150) = 1,125$.

Tayanch so'z va iboralar

Talabning bahoga nisbatan egiluvchanligi, taklifning bahoga nisbatan egiluvchanligi, talabning aholi daromadiga nisbatan egiluvchanligi, kesishuvchi talab egiluvchanligi.

Nazorat savollari

1. Talabning bahoga nisbatan egiluvchanligini ta'riflang.
2. Talab egiluvchanligini hisoblash formulasini keltiring.
3. Talab va taklif funktsiyalari uzluksiz bo'lgan hol uchun talab va taklif egiluvchanligini topish formulalari qanday bo'ladi?
4. Talab egiluvchanligi bilan aholi xarid miqdori orasida qanday bog'lanish bor?
5. Talabning aholi daromadiga nisbatan egiluvchanligini ta'riflang va topish formulasini yozing.
6. Biror tovar bahosi o'zgarishi uning o'rnini bosuvchi boshqa tovarga bo'lgan talabga ta'siri qanday hisoblanadi?

Masalalar

1. Talab funktsiyasi

$$Q_D = f(P) = 9 - 0,5P$$

ko'rinishda berilgan. Tovar bahosi qanday bo'lganda talab egiluvchanligi $-0,5$ bo'ladi?

Javob: $P=18$ p.b.

2. Talab funktsiyasi

$$Q_D = f(P) = 30 - 6P$$

ko'rinishga ega. Talab miqdori 18 ga teng bo'lganda talabning bahoga nisbatan egiluvchanligini aniqlang.

Javob: $E_{Q_D}(P) = -0,6(6)$.

3. Talab funktsiyasi

$$Q_D = f(P) = 1000 - 2P^2$$

ko'rinishga ega. Talabning bahoga nisbatan egiluvchanligi $P=10$ p.b uchun toping.

Javob: $E_{Q_D}(P) = -0,5$.

4. Talab funktsiyasi

$$Q_D = f(P) = 50\sqrt{170 - P^2}$$

ko'rinishida berilgan. Talab egiluvchanligi funktsiyasining ko'rinishini aniqlang.

Javob: $E_{Q_D}(P) = \frac{-P^2}{170 - P^2}, 0 < P < 13$.

5. Talab funktsiyasi

$$Q_D = f(P) = 350(81 - Q_D)^{\frac{1}{3}}$$

ko‘rinishiga ega. Talabning bahosi bo‘yicha egiluvchanlini $R=27$ uchun toping.

Javob: $E_{Q_D}(27) = \frac{1}{6}$.

6. Berilgan taklif funktsiyasining baho bo‘yicha egiluvchanligini $R=100$ uchun aniqlang.

$$Q_S = \varphi(P) = 1 + 0,05P.$$

Javob: $E_{Q_S}(P) = 0,83(3)$.

7. Tovar mahsulotning taklif funktsiyasi quyidagi ko‘rinishda berilgan:

$$Q_S = \varphi(P) = \frac{37}{11}P + 0,5P^2.$$

Baho bo‘yicha taklif egiluvchanligini $R=110$ uchun aniqlang.

Javob: $E_{Q_S}(P) = 0,94$.

8. Koka-kolaga bo‘lgan taklif funktsiyasi

$$Q_S = \varphi(P) = 19,5P + \frac{2}{3}P^2$$

ko‘rinishga ega. $R=18$ uchun taklif egiluvchanligini aniqlang.

Javob: $E_{Q_S}(P) = 1,38$.

9. A tovarning taklif funktsiyasi

$$Q_S = \varphi(P) = 25 \cdot \frac{P}{3} + 0,25P^2$$

ko‘rinishga ega. $R=100$ bo‘lganda taklif egiluvchanligini aniqlang.

Javob: $E_{Q_S}(P) = 1,75$.

10. A tovarga bo‘lgan talab va taklif funktsiyalari quyidagi ko‘rinishda berilgan:

$$Q_D = f(P) = 1000 - 0,25P^2 \quad Q_S = \varphi(P) = \frac{37}{11}P + 0,5P^2.$$

Bozordagi muvozanat bahosini toping va shu bahodagi talab va taklif egiluvchanligini aniqlang.

Javob: $P=44$; $E_{Q_D}(P) = 0,867$; $E_{Q_S}(P) = 1,15$.

5.2-§. Daromad, xarajat va foyda funktsiyalarining o‘zgarish sur’ati. Marjinal miqdorlar

Yuqorida (4.1-§ da) marjinal daromad, xarajat va foyda tushunchalari bilan tanishgan edik. Agar daromad, xarajat va foyda

funktsiyalari uzluksiz va differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda marjinal ko'rsatkichlar hosilalar yordamida aniqlanadi.

I. Agar firma Q miqdorda mahsulot ishlab chiqarib, uni P so'mdan sotssa, u

$$TR=PQ$$

miqdordagi daromadga ega bo'ladi. Firmaning ishlab chiqarish hajmi ΔQ miqdorga o'zgarganda uning daromadi

$$MR = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta TR}{\Delta Q} = (TR)'_Q = \frac{d(TR)}{dQ} \quad (1)$$

tezlik bilan o'zgaradi. Bu holda MR kattalik **marjinal (limit) daromad** deb ataladi.

Misol. Firmaning daromadi

$$TR=50Q-5Q^2$$

funktsiya ko'rinishida ifodalangan. Firmaning marjinal daromadini $Q=3$ uchun aniqlang.

Yechish. Yuqoridagi birinchi tenglikka asosan topamiz:

$$MR = (TR)'_Q = (50Q - 5Q^2)'_Q = 50 - 10Q,$$
$$MR(Q=3) = 50 - 30 = 20.$$

Javob: $Q=3$ da firmaning marjinal daromadi 20 p.b. ga teng bo'ladi.

II. Ishlab chiqarish hajmining o'zgarishiga bog'liq ravishda xarajat funktsiyasining o'zgarish tezligi **marjinal (limit) xarajat** deb ataladi va u quyidagi formula yordamida topiladi:

$$MC = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta TC}{\Delta Q} = (TC)'_Q = \frac{d(TC)}{dQ} \quad (2)$$

Bu erda TS -to'la xarajat funktsiyasi bo'lib, u tayinlangan to'la xarajat (TFC) va o'zgaruvchan to'la xarajat (TVC) lar yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$TC=TFC+TVC.$$

2-misol. A mahsulot ishlab chiqaruvchi firmaning to'la xarajat funktsiyasi

$$TC=2Q^3-3Q^2-12Q$$

ko'rinishda berilgan. A) marjinal xarajat funktsiyasini toping; V) o'rtacha xarajat funktsiyasini toping; C) Q ning qanday qiymatda o'rtacha va marjinal xarajatlar o'zaro teng bo'ladi?

Yechish. A) (2) formuladan foydalanib, marjinal xarajat funktsiyasini topamiz:

$$MC = \frac{d(TC)}{dQ} = (2Q^3 - 3Q^2 - 12Q)'_Q = 6Q^2 - 6Q - 12.$$

B) O'rtacha xarajat funksiyasini topamiz:

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{2Q^3 - 3Q^2 - 12Q}{Q} = 2Q^2 - 3Q - 12.$$

S) $MS=AS$ tenglikga asoslanib,

$$6Q^2 - 6Q - 12 = 2Q^2 - 3Q - 12 \text{ ni topamiz.}$$

Bundan

$$4Q^2 - 3Q = 0 \Rightarrow Q(4Q - 3) = 0 \Rightarrow Q_1 = 0; Q_2 = 3/4.$$

Javob: A) $MC = 6Q^2 - 6Q - 12$; B) $AC = 2Q^2 - 3Q - 12$; C) $Q = 0$; $Q = 3/4$.

III. Agar firma Q miqdorda mahsulot ishlab chiqarib F birlik foyda olsa, u holda uning o'rtacha foydasi (bir birlik mahsulotga to'g'ri keluvchi foydasi) quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$AF = \frac{F}{Q};$$

Mahsulot hajmining o'zgarishi oqibatida foydaning o'zgarish tezligi **marjinal (limit) foyda** deyiladi va u quyidagi tenglik yordamida topiladi:

$$MF(Q) = (F(Q))'_Q = \frac{dF(Q)}{dQ}, \quad (3)$$

3-misol. Agar firma 1 haftada A mahsulotdan Q birlik ishlab chiqarsa, uning oladigan foydasi quyidagi funksiya ko'rinishida aniqlanadi:

$$F(Q) = -50 + 20Q - 0,8Q^2,$$

a) marjinal foyda funksiyasini aniqlang;

b) $Q=10$ da marjinal foyda qancha bo'ladi?

Yechish. a) marjinal foyda funksiyasini (1) formula yordamida aniqlaymiz:

$$MF = F(Q)'_Q = (-50 + 20Q - 0,8Q^2)'_Q = 20 - Q,$$

b) $MF = (Q=10) = (20 - Q)_{Q=10} = 10.$

Javob: a) $MF = 20 - Q$, b) 10.

IV. Iste'molga marjinal moyillik MRS bilan belgilanadi va iste'mol funksiyasi S dan daromad Y bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi:

$$MPC = \frac{dC}{dY}, \quad (4)$$

Iste'molga marjinal moyillik daromadning kam miqdorda o'zgarishi oqibatida iste'molning o'zgarish tezligini ko'rsatadi.

Xuddi shuningdek, jamg'arishga marjinal moyillik MRS tushunchasini kiritish mumkin.

Jamg'arishga marjinal moyillik daromadning kam miqdorda o'zgarishiga mos ravishda jamg'arish tezligining o'zgarishini ko'rsatadi va u quyidagi formula yordamida topiladi:

$$MPS = \frac{dS}{dY}.$$

4-misol. Iste'mol daromad funktsiyasi $C(Y)$ quyidagi ko'rinishida berilgan:

$$C(Y) = \frac{150 + 7Y^2}{7 + Y}.$$

Iste'molga marjinal moyillikning $Y=2$ da qanday bo'lishini aniqlang.

Yechish. Yuqoridagi (4) formuladan foydalanib

$$MPC = \frac{dC}{dY} = \left(\frac{150 + 7Y^2}{7 + Y} \right)'_Y = \frac{7Y^2 + 98Y - 150}{(7 + Y)^2},$$

$$MRS(Y=2)=0,9$$

ni topamiz.

Ma'lumki, daromad iste'mol va jamg'armaning yig'indisidan iborat, ya'ni

$$Y = S + C.$$

Ushbu tenglikning ikki tomonini differentsiallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$Y'_Y = S'_Y + C'_Y.$$

Bundan

$$1 = MPS + MPC. \quad (5)$$

Demak, iste'molga marjinal moyillik bilan jamg'armaga marjinal moyillikning yig'indisi birga teng ekan.

5-misol. Yuqoridagi 4-misolning shartlaridan foydalanib, jamg'armaga marjinal moyillikni toping.

Yechish. (5) formuladan foydalanamiz. Bunda $MPC(Y=2)=0,91$.

$$MPS = 1 - MPC = 1 - 0,91 = 0,09.$$

Demak, daromad $Y=2$ bo'lganda jamg'armaga marjinal moyillik musbat bo'ladi (moyillik bo'ladi).

V. Agar ishlab chiqarish hajmi Q ishlab chiqarishda ishtirok etgan ishchilar soni L ning funktsiyasidan iborat bo'lsa, u holda ishlab

chiqarishning o'rtacha mehnat unumdorligi Q/L nisbat orqali aniqlanadi.

Marjinal mehnat unumdorligi ishchilar sonining kam miqdorda o'zgarishiga bog'liq ravishda ishlab chiqarish hajmining o'sish tezligini bildiradi va quyidagi formula yordamida topiladi:

$$Q'_L = \frac{dQ}{dL} \quad (6)$$

6-misol. Ishlab chiqarish funksiyasi

$$Q = -L^3/2 + 54L^2$$

ko'rinishda berilgan. Ishlab chiqarishning a) o'rtacha mehnat unumdorligini va b) marjinal mehnat unumdorligini toping; s) L ning qanday qiymatlarida o'rtacha va marjinal mehnat unumdorligi o'zaro teng bo'ladi?

Yechish.

a) o'rtacha mehnat unumdorligi funksiyasini topamiz:

$$\frac{Q}{L} = \frac{\frac{L^3}{2} + 54L^2}{L} = -\frac{L^2}{2} + 54L;$$

b) marjinal mehnat unumdorligi funksiyasini (6) formula yordamida topamiz:

$$Q'_L = \left(-\frac{L^3}{2} + 54L^2 \right)' = -\frac{3L^2}{2} + 108L.$$

s) topilgan o'rtacha va marjinal mehnat unumdorliklarini o'zaro tenglashtirib topamiz:

$$-\frac{L^2}{2} + 54L = -\frac{3L^2}{2} + 108L \Rightarrow L = 54.$$

Javob: a) $-\frac{L^2}{2} + 54L$; b) $-\frac{3L^2}{2} + 108L$; s) $L = 54$.

Tayanch so'z va iboralar

Marjinal (limit) daromad, marjinal xarajat, marjinal foyda, iste'molga marjinal moyillik, jamg'armaga marjinal moyillik, marjinal mehnat unumdorligi.

Nazorat savollari

1. Marjinal daromad qanday ma'noga ega?
2. Marjinal xarajat ishlab chiqarish hajmiga bog'liq ravishda qanday funksiya bo'lgan o'zgarish tezligini ifodalaydi?
3. Marjinal foyda qanday ma'noga ega?
4. Iste'molga marjinal moyillik deganda nimani tushunamiz?

5. Jamg'arishga marjinal moyillik deganda nimani tushunamiz?
6. Iste'molga marjinal moyillik bilan jamg'arishga marjinal moyillik orasida qanday bog'lanish mavjud?
7. Mehnat unumdorligi deganda nimani tushunasiz?
8. Marjinal mehnat unumdorligi nima?

Masalalar

1. Firmaning A mahsulot ishlab chiqarishdan oladigan daromadi

$$TR = 10Q - Q^2$$

funktsiya ko'rinishida ifodalangan. Firmaning marjinal daromadini $Q=3$ uchun aniqlang.

Javob: $MR=4$.

2. Firmaning mahsulot ishlab chiqarishdan oladigan daromadi

$$TR = 100Q - 2Q^2$$

funktsiya ko'rinishida ifodalangan. Firmaning marjinal daromadini $Q=15$ uchun aniqlang.

Javob: $MR=40$.

3. Xarajatlar funktsiyasi

$$TC(Q) = \frac{Q^2}{10} + 200Q,$$

ko'rinishga ega. Marjinal xarajatni $Q=50$ da aniqlang.

Javob: $MC=210$.

4. Mahsulot ishlab chiqarishda xarajatlar funktsiyasi

$$TC(Q) = 15000 + 200Q - Q^2 + 0,005Q^3$$

ko'rinishda berilgan. 100 ta mahsulot ishlab chiqarilgandagi marjinal xarajatni aniqlang.

Javob: $MC=150$.

5. Firmaning umumiy xarajat funktsiyasi

$$TC(Q) = 1000 + 15 Q^{2/3}$$

ko'rinishga ega.

a) marjinal xarajat funktsiyasini aniqlang;

b) $Q=1000$ birlik mahsulot ishlab chiqarish bilan bog'liq bo'lgan qo'shimcha xarajatni aniqlang.

Javob:

a) $MC(Q) = \frac{10}{Q^{1/3}};$

b) $MC(1000) = 1.$

5.3-§. Xarajatlarni minimallashtirish va foydani maksimallashtirishga doir masalalar

Deylik, firmaning talab funksiyasi $P(Q)$ hamda xarajatlar funksiyasi $TC(Q)$ ma'lum bo'lsin. Firmaning daromadini maksimallashtiruvchi yoki xarajatlarni minimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini aniqlash talab qilinsin.

1. Eng avval firmaning daromadini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini aniqlash usuli bilan tanishamiz. Buning uchun, eng avval, firmaning daromadlar (tushumlar) funksiyasini yozamiz:

$$TR=PQ$$

bu erda TR – firmaning daromadi, R -mahsulot narxi, Q – ishlab chiqarish hajmi. Berilgan talab funksiyasi hamda xarajatlar funksiyasidan foydalanib daromad funksiyasini Q ning funksiyasi $TR(Q)$ sifatida yozamiz hamda ushbu funktsiyaning kritik nuqtalarini aniqlaymiz. Buning uchun $TR(Q)$ funksiyasidan birinchi tartibli hosila olib uni nolga tenglashtiramiz:

$$TR'(Q)=0.$$

Ushbu tenglamani yechimi daromadlar funksiyasiga ekstremum qiymat beruvchi $Q=Q_1$ mahsulot hajmini aniqlaydi. Ekstremum qiymatning xarakterini aniqlash uchun tushumlar funksiyasidan ikkinchi tartibli hosila olib uning ishorasini tekshiramiz. Agar $TR''(Q_1)<0$ bo'lsa, u holda $Q=Q_1$ da $TR(Q)$ funktsiyaning qiymati maksimal bo'ladi. Demak, firma $Q=Q_1$ miqdorda mahsulot ishlab chiqarsa, uning daromadi maksimal bo'ladi.

1-misol. Firmaning talab funksiyasi

$$P+2Q=100$$

tenglama ko'rinishida berilgan. Bu erda R – mahsulot narxi, Q – firmada ishlab chiqarib sotilgan mahsulot miqdori. Firmaning daromadini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Yechish. Firmaning daromad funksiyasini

$$TR=PQ$$

formula orqali aniqlaymiz. Talab funksiyasini

$$R=100-2Q$$

ko'rinishida ifodalaymiz va uning yordamida daromad funksiyasini quyidagicha yozamiz:

$$TR=(100-2Q)Q=100Q-2Q^2.$$

Ushbu funktsiyaning kritik nuqtasini aniqlaymiz. Buning uchun undan birinchi tartibli hosila olib, uni nolga tenglashtirib yechiladi:

$$TR'(Q)=100-4Q$$

$$100-4Q=0 \Rightarrow Q=25.$$

Demak, firma $Q=25$ birlik mahsulot ishlab chiqarsa, uning daromadi ekstremumga erishadi. Endi ekstremumning xarakterini aniqlash uchun daromad funktsiyasidan ikkinchi tartibli hosila olib, uning ishorasini tekshiramiz:

$$TR''(Q)=-4<0.$$

Ikkinchi tartibli hosila manfiy, demak, $Q=25$ da daromad maksimal bo'ladi.

2. Firmaning marjinal xarajatini minimallashtirish masalasi bilan tani-shamiz.

Deylik, firmaning to'la xarajatlar funktsiyasi $TC(Q)$ berilgan bo'lsin. Bu holda marjinal xarajatlar funktsiyasi $MC=TC'(Q)$ formula yordamida aniqlanadi. Marjinal xarajat funktsiyasi $MC'(Q)=0$ shartni qanoatlantiruvchi $Q=Q^*$ nuqtada ekstremumga erishadi. Topilgan nuqtadagi marjinal xarajat ekstremumning xarakterini aniqlash uchun marjinal xarajat funktsiyasi $MS(Q)$ ning ikkinchi tartibli hosilasining topilgan nuqtadagi ishorasi tekshiriladi. Agar $MC''(Q^*)>0$ bo'lsa, Q^* nuqtada marjinal xarajat eng kam bo'ladi.

2-misol. Firmaning o'rtacha xarajat funktsiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$AC(Q)=Q^2-77Q+1300+\frac{7400}{Q}$$

Firmaning marjinal xarajatining minimal bo'lishini ta'minlovchi ishlab chiqarish hajmini toping.

Yechish. Ma'lumki, firmaning to'la xarajati

$$TC(Q)=AC(Q)Q$$

formula yordamida topiladi.

Demak,

$$TC(Q)=\left(Q^2-77Q+1300+\frac{7400}{Q}\right)\cdot Q.$$

Bundan

$$TC(Q)=Q^3-77Q^2+1300Q+7400.$$

Marjinal xarajat to'la xarajattan olingan 1-tartibli hosilasiga tengdir, ya'ni

$$MC(Q)=TC'(Q)=3Q^2-154Q+1300.$$

Marjinal xarajat funksiyasiga ekstremum qiymat beruvchi nuqtani topamiz:

$$\begin{aligned} MS'(Q) &= 6Q - 154, \\ 6Q - 154 &= 0 \Rightarrow Q = 25,67. \end{aligned}$$

Demak, $Q=25,67$ da firmaning marjinal xarajati ekstremumga erishadi. Ushbu ekstremumning xarakterini aniqlash uchun marjinal xarajat funksiyasidan ikkinchi tartibli hosila olib, uning ishorasini tekshiramiz:

$MC''(Q)=6>0$. Demak, $Q=25,67$ da marjinal xarajat minimal bo'ladi.

3. Firmaning foydasini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini aniqlash masalasi.

Ma'lumki, firmaning foydasi

$$F(Q)=TR(Q)-TC(Q)$$

formula yordamida topiladi. Bu erda

$F(Q)$ – Q miqdorda mahsulot ishlab chiqarilgandagi firmaning foydasi;

$TR(Q)$ – Q miqdordagi mahsulotga mos keluvchi firmaning daromadi;

$TS(Q)$ – firmaning to'la xarajati.

Foydani maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini aniqlash uchun $F(Q)$ funksiyadan olingan birinchi tartibli hosila olib, uni nolga tenglaymiz va tenglamaning $Q=Q^*$ yechimini aniqlaymiz. Ushbu nuqtada foyda funksiyasi ekstremumga erishadi.

Ekstremumning xarakterini aniqlash uchun foyda funksiyasining ikkinchi tartibli hosilasi ishorasini tekshiramiz. Agar $F(Q^*)<0$ bo'lsa, $Q=Q^*$ da firmaning foydasi maksimal bo'ladi.

3-misol. Yuqoridagi 1-va 2-misollarda qayd etilgan firmaning foydasini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini toping.

Yechish. Yuqoridagi 1-misoldan ma'lumki, firmaning daromad funksiyasi

$$TR(Q)=100Q-2Q^2$$

ko'rinishda, to'la xarajatlarning funksiyasi (2-misoldan)

$$TS(Q)=Q^3-77Q^2+1300Q+7400$$

ko'rinishda. Demak, firmaning foyda funksiyasi

$$F(Q)=TR(Q)-TC(Q)=Q^3+75Q^2+1200Q+7400$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Ushbu funktsiya uchun kritik nuqtani topamiz.

$$F'(Q)=0 \Rightarrow -3Q^2+150Q-1200=0$$

Bu tenglamani echib, $Q_1=40$ va $Q_2=10$ ekanligini aniqlaymiz. Bu nuqtalarda $F(Q)$ funktsiyaning 2-tartibli hosilasining ishorasini tekshiramiz:

$$F''(Q)=-6Q+150;$$

$$F''(40)=-90<0;$$

$$F''(10)=90>0.$$

Demak, $Q=40$ da firmaning foydasi maksimal bo‘ladi va u $F(40)=600$ birlikni tashkil qiladi. Talab funktsiyasidan foydalanib

$$P(40)=(100-2Q)_{Q=40}=20 \text{ ni topamiz.}$$

Demak, firma $Q=40$ birlik mahsulot ishlab chiqarsa, uni 20 so‘mdan sotadi va 600 birlik foyda oladi.

4. Agar davlat ishlab chiqarilgan har bir mahsulot uchun t so‘m soliq joriy etsa hamda firma uni taklif funktsiyasida nazarga olsa, u holda firmaning yangi taklif funktsiyasi qanday o‘zgarishini ko‘ramiz.

Agar t so‘m soliq kiritilishi oqibatida P so‘mga sotilgan mahsulotdan tushgan tushumning faqat $P-t$ so‘migina firmaga, t so‘m esa soliqqa ketadi. Shu sababli $Q_s(P)$ taklif funktsiyasi $Q_s(P-t)$ ga o‘zgaradi. Talab funktsiyasi esa o‘zgarmaydi. Demak,

$$Q_s(P-t)=Q_D=Q$$

tenglik orqali bozordagi muvozanat narxi $P(t)$ o‘rnatiladi. Bu holda soliq foydasi

$$T=t \cdot Q$$

tenglik orqali aniqlanadi. Soliq foydasini maksimallashtiruvchi soliq miqdori t ni aniqlash kerak bo‘lsin. U holda $T=t \cdot Q$ funktsiyadan t bo‘yicha hosila olib uning yordamida T funktsiyaning kritik nuqtasini topamiz. Kritik nuqtaning xarakterini aniqlash uchun T funktsiyadan ikkinchi tartibli hosila olib, uning kritik nuqtadagi ishorasini tekshiramiz. Agar $T''(t)<0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda kritik nuqtada soliq foydasi maksimal bo‘ladi.

4-misol. Firmaning talab funktsiyasi

$$12Q_D+2P=300$$

tenglama ko‘rinishida, taklif funktsiyasi esa

$$Q_S+8-0,2P=0$$

tenglama ko‘rinishida berilgan.

1) bozordagi muvozanat bahosini toping;

2) agar davlat sotilgan har birlik mahsulot uchun t so'm soliq joriy etgan bo'lsa hamda ta'minotchi uni taklif funktsiyasida akslantirsa, u holda soliq foydasini maksimallashtiruvchi soliq stavkasi qanday bo'ladi?

Yechish.

1) muvozanat bahosini $Q_S = Q_D$ tenglikdan topamiz:

$$0,2P - 8 = 25 - \frac{P}{6} \Rightarrow P = 90.$$

taklif funktsiyasini

$$Q_S = 0,2P - 8$$

ko'rinishida yozamiz. R so'mga sotilgan har mahsulot uchun t so'm soliq solinganligi uchun firmaning tushumi $P-t$ so'm bo'ladi. U holda taklif funktsiyasi

$$Q_S^* = 0,2(P-t) - 8 = 0,2P - 0,2t - 8$$

ko'rinishida yoziladi. Talab funktsiyasi esa o'zgarmaydi, ya'ni

$$Q = Q_D^* = Q_D = 25 - P/6.$$

Bozordagi muvozanat bahosini aniqlaymiz. Buning uchun $Q_S^* = Q_D$ tenglikdan foydalanamiz:

$$0,2P - 0,2t - 8 = 25 - P/6;$$

$$P = 90 + \frac{6}{11}t.$$

Bu natija shuni ko'rsatadiki, agar har bir sotilgan mahsulot uchun t so'm soliq joriy etilsa, bozordagi muvozanat baho $6t/11$ miqdorga oshadi.

Endi bozordagi muvozanatli mahsulot miqdorini topamiz.

$$Q = 25 - \frac{P}{6} = 25 - \frac{90 - 6t/11}{6} = 10 - t/11.$$

Bu holda soliq foydasi

$$T = t \cdot Q = t(10 - t/11) = 10t - t^2/11$$

funktsiya ko'rinishida ifodalanadi. Soliq miqdori t qanday bo'lganda soliq foydasi T maksimal bo'lishini aniqlaymiz. Buning uchun T funktsiyaning kritik nuqtasini aniqlaymiz:

$$T'(t) = 10 - 2t/11;$$

$$10 - 2t/11 = 0 \Rightarrow t = 55.$$

Demak, $T(t)$ funktsiyaning kritik nuqtasi $t = 55$. Ushbu kritik nuqtaning xarakterini aniqlaymiz. Buning uchun $T(t)$ funktsiyadan ikkinchi tartibli hosila olib, uning ishorasini tekshiramiz:

$$T''(t) = -2/11 < 0.$$

Demak, $t=55$ da $T(t)$ funktsiya maksimumga erishadi. Demak, har bir sotilgan mahsulotga 55 so'm soliq solinsa, soliq foydasi maksimal bo'ladi. Bu holda mahsulot bahosi $P=90+\frac{6}{11}t=90+\frac{6}{11}55=120$ so'mgacha oshadi hamda bozorda $Q=25-120/6=5$ birlik mahsulot sotiladi. Bundan firma har kuni $T=tQ=5\cdot 55=275$ so'm soliq to'laydi hamda $R=PQ-T=120\cdot 5-275=325$ so'm daromad oladi.

5. Xususiy hosilani iqtisodiy masalalarni yechishda qo'llanishiga doir masalalar bilan tanishamiz.

Deylik, firma o'z mahsulotlarini ichki va tashqi bozorda sotishi mumkin bo'lsin. Tashqi bozordagi talab funktsiyasi

$$P_1+6Q_1=81$$

ko'rinishida, ichki bozordagisi esa

$$P_2+3Q_2=63$$

ko'rinishida ekanligi aniqlangan.

Bu erda Q_1, Q_2 —mos ravishda tashqi va ichki bozorlarda sotiladigan mahsulot miqdori, P_1, P_2 — mos ravishda tashqi va ichki bozordagi mahsulot narxlari. Firmaning umumiy xarajati

$$TS=150+9Q, (Q=Q_1+Q_2)$$

funktsiya ko'rinishda ifodalangan.

Firma ishlab chiqargan mahsulotning tashqi va ichki bozordagi narxlari qanday bo'lganda firmaning foydasi maksimal bo'ladi?

Yechish. Tashqi va ichki bozordagi talab funktsiyalarini

$$P_1=81-6Q_1 \text{ va } P_2=63-3Q_2$$

ko'rinishda ifodalaymiz. Firmaning umumiy daromadi tashqi va ichki bozordagi daromadlar yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$TR=TR_1+TR_2=P_1\cdot Q_1+P_2\cdot Q_2=(81-6Q_1)Q_1+(63-3Q_2)Q_2=81Q_1-6Q_1^2+63Q_2-3Q_2^2.$$

Firmaning umumiy xarajati

$$TC=150+9(Q_1+Q_2)$$

funktsiya ko'rinishida berilgan. Demak, firmaning foydasi

$$F(Q_1;Q_2)=TR-TC=81Q_1-6Q_1^2+63Q_2-3Q_2^2-150-9Q_1-9Q_2.$$

Ushbu funktsiyani maksimallashtiruvchi Q_1 va Q_2 ni aniqlaymiz. Buning uchun $F(Q_1;Q_2)$ funktsiyadan Q_1 va Q_2 o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalarni topib, ularni nolga tenglashtiramiz.

$$\frac{\partial F}{\partial Q_1} = 72 - 12Q_1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q_2} = 54 - 6Q_2.$$

$$\left. \begin{aligned} 72 - 12Q_1 &= 0 \\ 54 - 6Q_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_1 = 6, Q_2 = 9$$

Demak, (6;9) kritik nuqta ekanligini aniqladik. Kritik nuqtaning xarakterini aniqlash uchun quyidagi ikkinchi tartibli shartlarni tekshiramiz:

a) agar kritik nuqtada

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Q_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial Q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q_1 \partial Q_2} \right)^2 > 0 \quad \text{va} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial Q_1^2} < 0$$

shartlar o'rinli bo'lsa, u holda ushbu nuqtada F foyda maksimumga erishadi;

b) agar kritik nuqtada

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Q_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial Q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q_1 \partial Q_2} \right)^2 > 0 \quad \text{va} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial Q_1^2} > 0,$$

shartlar o'rinli bo'lsa, u holda ushbu nuqtada F foyda minimumga erishadi;

v) agar kritik nuqtada

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Q_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial Q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q_1 \partial Q_2} \right)^2 < 0$$

shart bajarilsa, u holda kritik nuqtada F funktsiya maksimumga ham maksimumga ham erishmaydi;

g) agar kritik nuqtada

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Q_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial Q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q_1 \partial Q_2} \right)^2 = 0$$

bo'lsa, ekstremumning xakteri noaniq bo'ladi.

F funktsiyadan ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Q_1^2} = -12, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial Q_2^2} = -6, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial Q_1 \partial Q_2} = 0$$

va yuqoridagi shartlarning bajarilishini tekshiramiz:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Q_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial Q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q_1 \partial Q_2} \right)^2 = (-12) \cdot (-6) - 0 = 72 > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial Q_1^2} = -12 < 0.$$

Bundan ko'rinadiki, kritik nuqtada F funktsiya maksimumga erishadi.

Demak, tashqi bozorda 6 birlik va ichki bozorda 9 birlik mahsulot sotilganda firmaning foydasi maksimal bo'ladi.

Topilgan Q_1 va Q_2 o'zgaruvchilarning qiymatini talab funktsiyalariga qo'yib

$$P_1=81-6 \cdot 6=45,$$

$$P_2=63-3 \cdot 9=36.$$

ni topamiz:

Shunday qilib, tashqi bozorda mahsulot bahosi 45 p.b.ni va ichki bozorda esa 36 p.b. ni tashkil qiladi.

Bu holda firmaning foydasi

$$F=81 \cdot 6 - 63 \cdot 6 + 63 \cdot 9 - 3 \cdot 81 - 150 - 54 - 81 = 309 \text{ p.b.}$$

bo'ladi. Demak, firma tashqi bozorda 6 birlik mahsulotni 45 so'mdan sotib, ichki bozorda 9 birlik mahsulotni 36 so'mdan sotsa, uning maksimal daromadi 309 pul birligiga teng bo'ladi.

Tayanch so'z va iboralar

Daromadni va foydani maksimallashtirish, xarajatlarni minimallashtirish, soliq foydasini maksimallashtirish.

Nazorat savollari

1. Firmaning daromadini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmi qanday topiladi?
2. Firmaning foydasini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmi qanday topiladi?
3. Firmaning marjinal xarajatlarini minimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmi qanday topiladi?
4. Soliq foydasini maksimallashtiruvchi soliq stavkasi qanday aniqlanadi?
5. Firmaning foydasini maksimallashtirish uchun tovar ichki va tashqi bozorda qanday narxlarda sotilishi kerak?

Masalalar

1. Firmaning talab funktsiyasi

$$3Q - 150 + 2P = 0$$

tenglama ko'rinishida, o'rtacha xarajati esa

$$AC - 1275 = Q^2 - 76,5Q + 2000/Q$$

tenglama ko'rinishida berilgan.

Firmaning

a) daromadini maksimallashtiruvchi;

- b) marginal xarajatni minimallashtiruvchi;
 v) foydasini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Javoblar: a) $Q=25$; b) $Q=25,6$; v) $Q=10$.

2. Velosiped ishlab chiqaruvchi firmaning o'zgarmac (doimiy) xarajati 1800 p.b. bo'lib, o'zgaruvchi xarajati esa quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$TVC=0,48Q_s^2-58Q_s.$$

Velosipedga bo'lgan talab funktsiyasi

$$0,5Q_D+P=118,4$$

tenglama ko'rinishida berilgan.

- a) o'rtacha xarajatni minimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini va unga mos keluvchi o'rtacha va umumiy xarajat funktsiyasini aniqlang;
 b) firmaning daromadini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini va unga mos keluvchi velosiped bahosini hisoblang;
 v) firmaning foydasini maksimallashtirish uchun nechta velosiped ishlab chiqarish kerak?

Javoblar: a) $Q_s \approx 61,2$; $TC=50,4$; $AC=0,82$.

b) $Q_s=118,4$; $P=59,2$. v) $Q=90$.

3. Bozor talabini o'rganish shuni ko'rsatadiki, sotib olinadigan tovar miqdori Q va uning narxi P quyidagi munosabat $P=-Q^3+27$, $0<Q<5$ bilan bog'langan. Mahsulotni sotishdan olinadigan tushumni maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmi va unga mos keluvchi mahsulot narxini aniqlang.

Javob: $Q=1,875$; $P=20$.

4. Kompyuterlar ishlab chiqaruvchi korxonaning har oylik doimiy (o'zgarmas) xarajati 65170 \$, o'zgaruvchan xarajati esa har bir kompyuter uchun 526,5 \$ ni tashkil qiladi. Bozor talabini o'rganish kompyuterlarga bo'lgan talab funktsiyasi

$$P=-0,005Q^2+4Q+500$$

ko'rinishiga ega. Bu erda Q – 1 oyda ishlab chiqarilgan kompyuterlar soni.

- a) korxonaning foydasini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini va unga mos keluvchi kompyuterlar narxini aniqlang.
 b) korxonaning har oylik foydasini aniqlang.

Javoblar: a) $Q=530$; $P=1215,5$ \$.

b) $F=4254,75$ \$.

5. Ishlab chiqarish xarajatlari

$$TC(Q)=4+15Q$$

funktsiya ko‘rinishida berilgan.

Mahsulotga bo‘lgan talab

$$P = -Q^2 + 20Q + 2, 10 < Q < 20$$

funktsiya ko‘rinishida ifodalanadi.

a) daromadni maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini aniqlang;

b) foydani maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Javoblar: a) $Q = 13,4$;

b) $Q = 13$.

6. Firmaning mahsulot ishlab chiqarishdagi o‘rtacha xarajati

$$AC(Q) = 5Q^2 - 75Q + 10$$

funktsiya ko‘rinishida berilgan. Firmaning marjinal xarajatini minimal-
lashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Javob: $Q = 5$.

5.4-§. Aralash masalalar

1. Talab funktsiyasi quyidagi tenglama ko‘rinishida berilgan:

$$15D(P) - 8P = 195$$

Talab funktsiyasining baho (R) bo‘yicha egiluvchanligini $P = 25$ da baholang.

Javob: $E_{D(P=25)} = 0,68$.

2. Taklif funktsiyasi

$$S(P) = 2P^2 + 80P, 0 < P < 40$$

Ushbu taklif funktsiyaning bahoga nisbatan egiluvchanligini $P = 20$ da baholang.

Javob: $E_{S(P=20)} = 1,3(3)$.

3. Talab funktsiyasi

$$Q_D = f(P) = 5 + 0,8P$$

ko‘rinishda berilgan. Talab egiluvchanligi – 0,8 ga teng bo‘lishi uchun mahsulot bahosi qanday bo‘lishi kerak?

Javob: $P = 25$ p.b.

4. Taklif funktsiyasi

$$Q_S = \varphi(P) = 2 + 0,03P$$

ko‘rinishda berilgan. Taklifning bahoga nisbatan egiluvchanligini $P = 100$ da toping.

Javob: $E_{Q_s}(100) = 0,6$.

5. Taklif funktsiyasi quyidagi ko‘rinishda berilgan:

$$Q_s = \varphi(P) = 20P + 0,25P^2$$

bahoga nisbatan taklif egiluvchanligi 0,8 ga teng bo‘lishi uchun P baho qanday bo‘lishi kerak?

Javob: $P=13, (3) \text{ p.b.}$

6. A tovarga bo‘lgan talab va taklif funktsiyalari quyidagi ko‘rinishda berilgan:

$$Q_D = f(P) = 900 - 0,3 P^2$$

$$Q_S = g(P) = P + 0,2 P^2$$

Bozordagi muvozanat bahosini toping hamda shu bahoga talab va taklif egiluvchanligini hisoblang.

Javob: $P=38,2 \text{ p.b. } E_{Q_D} = 1,9; \quad E_{S_D} = 1,6$.

7. X va Y tovarga bo‘lgan talab funktsiyalari quyidagi ko‘rinishlarda berilgan:

$$Q_{D_x} = 180 - 3P_x + 2P_y,$$

$$Q_{D_y} = 30 - 3P_x - 6P_y,$$

$$P_x = 5; \quad P_y = 3.$$

a) X tovar uchun kesishuvchi talab egiluvchanligini toping;

b) Y tovar uchun kesishuvchi talab egiluvchanligini toping.

Javob:

$$a) \quad E_{Q_{D_x}}(P_y) = 0,035,$$

$$b) \quad E_{Q_{D_y}}(P_x) = 0,55.$$

8. Ma’lum bir tovarga bo‘lgan talab aholi daromadi R ning funktsiyasi ko‘rinishida berilgan:

$$Q_D(R) = f(R) = -120 + 8R.$$

Talabning daromadga nisbatan egiluvchanligini $R=50$ uchun toping.

Javob: $E_{Q_D}(R) = 1,43$.

9. Ishlab chiqarishdan olinadigan daromad

$$TR = 420Q - 15Q^2$$

funktsiya ko‘rinishida ifodalangan. Marjinal daromadni $Q=10$ da hisoblang.

Javob: $MR=120 \text{ p.b.}$

10. Firmaning to‘la xarajat funktsiyasi

$$3Q^3 - 5Q^2 - 15Q$$

ko‘rinishida berilgan.

- a) marjinal xarajat funktsiyasini toping;
- b) o'rtacha xarajat funktsiyasini toping;
- v) Q ning qanday qiymatida o'rtacha va marjinal xarajatlari o'zaro teng bo'ladi?

Javob: a) $MC=9Q^2-10Q-15$;

b) $AC=3Q^2-5Q-15$;

v) $Q=0$; $Q=2/3$.

11. Firma bir haftada Q birlik mahsulot ishlab chiqarganda uning foydasi

$$F(Q) = -80 + 30Q - 0.4Q^2$$

funktsiya orqali aniqlanadi. Ushbu funktsiya yordamida:

a) marjinal foyda funktsiyasini aniqlang;

b) $Q=20$ da marjinal foydani toping.

Javob: a) $MF(Q)=30-0.8Q$; b) $MF(Q=20)=14$.

12. Iste'mol daromad (Y) ning funktsiyasi quyidagi ko'rinishda berilgan:

$$C(Y) = \frac{500 + 8y^2}{12 + y}.$$

Ushbu funktsiyadan foydalanib,

a) iste'molga marjinal moyillikni $Y=3$ da aniqlang;

b) jamg'armaga marjinal moyillikni toping.

Javob: a) $MPC=0,635$; b) $MRS=0,365$.

VI bob. BIR ARGUMENTLI FUNKTSIYANING INTEGRAL HISOBI VA UNING IQTISODIYOTGA TATBIG'I

Zarur matematik tushuncha va faktlar. Boshlang'ich funktsiya. Integral. Nyuton-Leybnits formulasi.

1. Integral tushunchasi.

$u=f(x)$ funktsiyaning $[a,b]$ kesmadagi **boshlang'ich funktsiyasi** deb, hosilasi $f(x)$ funktsiyaga teng bo'lgan $F(x)$ funktsiyaga aytiladi.

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ funktsiyaning hosilasi $f(x) = x^2$ ga teng, ya'ni

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} \right)' = x^2 = f(x).$$

Shu sababli $F(x) = \frac{x^3}{3}$ funktsiya boshlang'ich funktsiya bo'ladi.

Teorema. Har bir uzluksiz funktsiya bir biridan o'zgarmas songa farq qiluvchi cheksiz ko'p boshlang'ich funktsiyaga ega. $f(x)$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi umumiy holda $F(x)+C$ ko'rinishida ifodalanadi. Ushbu ifoda $f(x)$ funktsiyaning **aniqmas integrali** deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Bu erda $\int$ -integral belgisi, $f(x)$ – integral osti funktsiyasi, $f(x)dx$ – integral osti ifoda deb ataladi. $F(x)+C$ ni topish jarayoni **integrallash** deb ataladi.

Asosiy integrallar jadvali.

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$8. \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$11. \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C.$$

$$12. \int \operatorname{ctg} x \, dx = -\ln|\sin x| + C.$$

11. Aniqmas integralning xossalari

1. Aniqmas integralning hosilasi integral osti funktsiyasiga teng:

$$\left(\int f(x) \, dx \right)' = f(x).$$

2. Agar integral ostidagi ifoda $\varphi(x)$ uzluksiz differentsiallanuvchi funktsiyaning differentsialidan iborat bo'lsa, u holda

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$$3. \int A f(x) \, dx = A \int f(x) \, dx,$$

ya'ni o'zgarmas koeffitsient integral belgisidan tashqariga chiqariladi.

4. n ta uzluksiz funktsiyalar yig'indisidan olingan integral shu funktsiyalardan olingan integrallar yig'indisiga teng:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] \, dx = \int f_1(x) \, dx + \int f_2(x) \, dx + \dots + \int f_n(x) \, dx.$$

111. Integrallash usullari

1. Integral osti funktsiyasini oddiy funktsiyalar yig'indisi ko'rinishida ifodalash usuli

A.

$$\int (x + \sqrt{x})^2 \, dx = \int (x^2 + 2x\sqrt{x} + x) \, dx = \int x^2 \, dx + 2 \int x\sqrt{x} \, dx + \int x \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C.$$

B.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

2. O'zgaruvchilarni almashtirish usuli. Bunda $x=\varphi(t)$ belgilash kiritiladi va berilgan integral quyidagicha o'zgartiriladi:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

bu erda $\varphi(t)$ – differentsiallanuvchi funktsiya.

Misollar. Quyidagi integrallarni hisoblang.

Bo'laklab integrallash usuli quyidagi munosabat asosida amalga oshiriladi:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Ushbu formula bo'laklab integrallash formulasi deb ataladi.

1V. Aniq integral. Asosiy tushunchalar. Aniq integral haqida tushunchaga ega bo'lish uchun $[a;b]$ kesmada $y=f(x)$ uzluksiz funktsiyani ko'ramiz.

$[a;b]$ kesmani

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

nuqtalar yordamida qisman kesmachalarga ajratamiz va ularni $\Delta x_1 = x_1 - a, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$ ko'rinishida belgilaymiz.

Har bir qisman Δx_i kesmachada $\bar{x}_i$ nuqtani tanlaymiz va bu nuqtalardagi $f(x)$ funktsiyaning qiymatlarini belgilaymiz:

$$f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2), \dots, f(\bar{x}_n).$$

So'ngra integral yig'indi deb ataluvchi quyidagi summani hosil qilamiz:

$$J = f(\bar{x}_1)\Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\Delta x_2 + \dots + f(\bar{x}_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta x_i.$$

Ta'rif. $y=f(x)$ funktsiyaning $[a,b]$ kesmadagi **aniq integrali** deb, qisman kesmachalar uzunligi nolga intilgandagi integral summaning limitiga aytiladi. Aniq integral

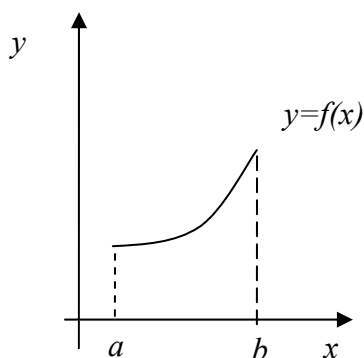
$$\int_a^b f(x)dx$$

ko'rinishda belgilanadi va quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

Bu erda a, b sonlar integralning quyi va yuqori chegarasi deyiladi. Aniq integral geometirik ma'noga ega:

$$\int_a^b f(x)dx$$



integral $y=f(x) \geq 0$ funktsiyaning grafigi, Ox o‘qi hamda $x=a$, $x=b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini aniqlaydi (6.1-shakl).

Ushbu egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$$S_{Tp} = \int_a^b f(x)dx.$$

formula yordamida topiladi.

6.1-shakl.

V. Aniq integralning xossalari

Aniq integralning quyi va yuqori chegaralari almashtirilsa, uning ishorasi teskariga almashadi, ya’ni

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Ixtiyoriy a , b , c sonlar uchun quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

O‘zgarmas koeffitsientni integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin:

$$\int_a^b A \cdot f(x)dx = A \int_a^b f(x)dx.$$

Bir necha funktsiyaning algebraik yig‘indisining aniq integrali qo‘shiluvchilar integrallarining yig‘indisiga teng:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \dots + \int_a^b f_n(x)dx.$$

Uzluksiz funktsiyadan $[a, b]$ kesmada olingan aniq integral shu kesma uzunligini integral osti funktsiyaning $x = c \in (a, b)$ nuqtadagi qiymati ko‘paytmasiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c)$$

Agar $F(x)$ funktsiya uzluksiz $f(x)$ funktsiyaning birorta boshlang‘ich funktsiyasidan iborat bo‘lsa, u holda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ushbu tenglik **Nyuton-Leybnits formulasi** deb ataladi.

6. 1-§. Iste’molchining va ta’minchining ortiqcha foydasi

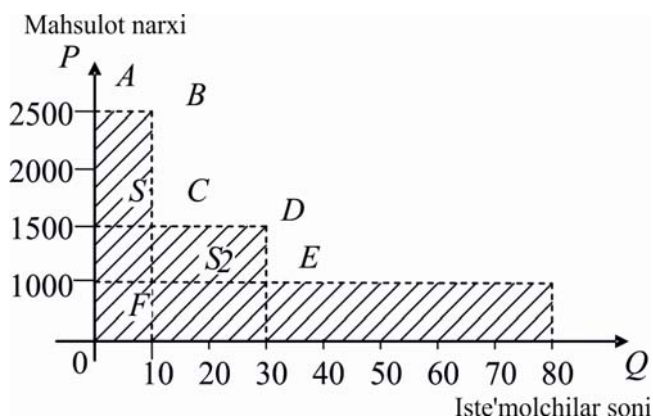
Bozorda muvozanat narx o‘rnatilgandan so‘ng mahsulotni yuqoriroq narxda sotib olmoqchi bo‘lgan iste’molchilar uni muvozanat bahosida sotib olish oqibatida qandaydir yutuqqa ega bo‘ladilar. Ana

shunday iste'molchilar yutug'larining yig'indisi **iste'molchilarning ortiqcha foydasi** deb ataladi.

Misol. Agar tovarning narxi 2500 so'm bo'lsa, uni 10 ta iste'molchi va tovar narxi 1500 so'm bo'lsa, uni 30 ta iste'molchi sotib olishi mumkin bo'lsin. Agar tovar narxi 1000 so'm bo'lsa, uni 80 ta odam sotib oladi. Agar bozordagi muvozanat narx 1000 so'm ekanligi aniqlangan bo'lsa, u holda iste'molchining ortiqcha foydasi qanday bo'ladi?

Yechish. Masalaning shartini quyidagi shaklda tasvirlaymiz:

Agar 10 ta iste'molchi 2500 so'mdan mahsulot sotib olsa, u $10 \cdot 2500 = 25000$ so'm pul sarf qiladi (6.2-shaklda S_1 soha). 1500 so'mdan yana 20 ta iste'molchi xarid qiladi (30 ta iste'molchidan 10 tasi tovarni



6.2-shakl.

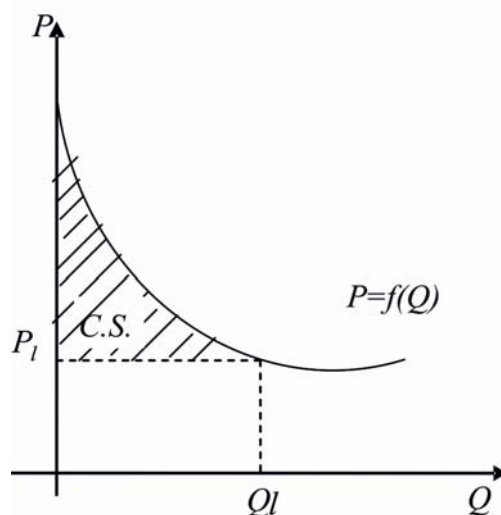
2500 so'mdan xarid qilgan) va $1500 \cdot 20 = 30000$ so'm sarf qiladi (6.2 – shaklda S_2 soha). Mahsulot narxi 1000 so'm bo'lganda yana 50 ta iste'molchi xarid qiladi (80 ta xaridordan 30 tasi mahsulotni bundan yuqoriroq narxda xarid qilgan) va $50 \cdot 1000 = 50000$ so'm sarf qiladi. Xaridorlar sarf qilgan umumiy pul miqdori

$$25000 + 30000 + 50000 = 105000$$

so'mni tashkil qiladi. Agar tovarning narxi avvaldan 1000 so'm (muvozanat narx) qilib belgilansa, u holda uni 80 ta iste'molchi sotib oladi va $80 \cdot 1000 = 80000$ so'm sarf qilinadi. Demak, barcha iste'molchilarning umumiy ortiqcha foydasi

$$105000 - 80000 = 25000 \text{ bo'ladi.}$$

Iste'molchilarning ortiqcha foydasi 6.2-shaklda $ABCDEF$ ko'pburchakning yuzasidan iborat bo'ladi.



6.3-shakl.

Umumiy holda, agar talab egri chizig'i $P=f(Q)$ tenglama ko'rinishida berilgan bo'lib, bozordagi muvozanat baho $P=P_1$ bo'lsa, u holda istemolchilarning ortiqcha foydasi

yuqoridan $P=f(Q)$ egri chiziq, pastdan $P=P_l$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng bo'ladi (6.3-shaklda shtrixlangan soha).

Iste'molchilarning ortiqcha foydasi $S.S.$ bilan belgilanadi va quyida aniq integral yordamida topiladi.

$$C.S. = \int_0^{Q_l} [f(Q) - P_l] dQ.$$

1-misol. Quyida mahsulotga bo'lgan talab va taklif funksiyalari berilgan.

$$R_D = Q^2 - 60Q + 3000, \text{ (talab funksiyasi)}$$

$$R_S = Q^2 + 50Q, \text{ (taklif funksiyasi)}$$

Bu erda Q -mahsulot miqdori, P – bir birlik mahsulot bahosi. Quyidagilarni aniqlang:

- tovarning muvozanat bahosi va miqdorini;
- iste'molchilarning ortiqcha foydasini.

Yechish. Bozordagi tovarning muvozanat narxini topamiz. Buning uchun quyidagi tenglamani echamiz:

$$P = P_D = P_S \Rightarrow -Q^2 - 60Q + 3000 = Q^2 + 50Q.$$

Bundan

$$Q^2 + 55Q - 1500 = 0 \text{ ni topamiz.}$$

Ushbu kvadratik tenglamani echib, $Q_1 = 20$; $Q_2 = -75$ ni topamiz. Birinchi $Q_1 = 20$ qiymatni $R_S = Q^2 + 50Q$ tenglikka qo'yib,

$$P_l = 20^2 + 50 \cdot 20 = 1400 \text{ ni topamiz.}$$

Demak, tovarning muvozanat bahosi $P_l = 1400$ so'm bo'lib, muvozanat miqdori $Q_l = 20$ ga tengdir.

b) endi iste'molchilarning ortiqcha foydasini hisoblaymiz:

$$C.S. = \int_0^{20} [-Q^2 - 60Q + 3000 - 1400] dQ = \left(-\frac{Q^3}{3} - 60\frac{Q^2}{2} + 1600Q \right) \Big|_0^{20} = 17333,3.$$

Demak, iste'molchilarning ortiqcha foydasi 17333,3 so'mni tashkil qiladi.

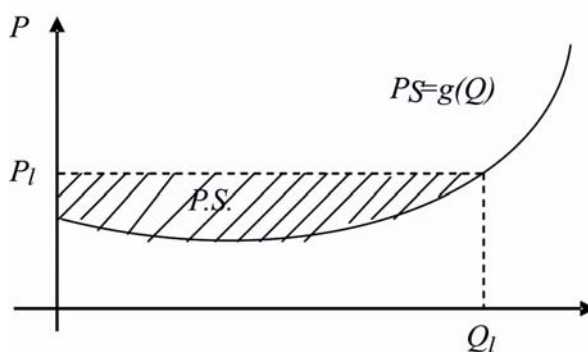
Ishlab chiqaruvchi (ta'minotchilar)ning ortiqcha foydasi ta'minotchilar o'z tovarini bozordagi muvozanat narxda sotganda hosil bo'ladigan umumiy foydalarini ifodalaydi va u quyidagi formula yordamida topiladi:

$$P.S. = \int_0^{Q_l} [P_l - g(Q)] dQ.$$

Ta'minotchilarning ortiqcha foydasini quyidagi shakl ko'rinishida tasvirlash mumkin (6.4-shakl).

2-misol. Yuqoridagi 1-misoldagi ma'lumotlar asosida ta'minotchilarning ortiqcha foydasini hisoblang.

Yechish. $P_l=1400$, $Q_l=20$.



6.4-shakl.

$$P.S. = \int_0^{Q_l} [P_l - g(Q)] dQ$$

formuladan foydalanib,

$$P.S. = \int_0^{20} [1400 - Q^2 - 50Q] dQ = 15333,3. \text{ ni topamiz.}$$

Demak, ta'minotchilarning ortiqcha foydasi 15333,3 so'm bo'lar ekan.

3-misol. Firma A tovar ishlab chiqarib uni sotishda monopol (yakka hokim) bo'lsin. Firmaning talab va xarajat funktsiyalari quyidagi ko'rinishda berilgan:

$$R = -Q^2 - 15Q + 6000, \text{ (talab funktsiyasi)}$$

$$TC = 0,05Q^2 + 286Q + 125, \text{ (xarajatlarni funktsiyasi)}$$

Bu erda P —tovar bahosi, Q —har kuni ishlab chiqariladigan tovar miqdori.

A. Firma o'z foydasini maksimallashtirish uchun qancha tovar ishlab chiqarishi va uni qanday narxda sotishi kerak?

B. Tovarni foydani maksimallashtiruvchi narxda sotganda iste'molchilarning ortiqcha foydasi qanday bo'ladi?

Yechish. A. Talab funktsiyasidan foydalanib firmaning bir kunlik tushumini aniqlaymiz:

$$TR = PQ \Rightarrow (-Q^2 - 15Q + 6000)Q = -Q^3 - 15Q^2 + 6000Q.$$

U holda foyda funktsiyasi

$$F(Q) = TR - TC = -Q^3 - 15Q^2 + 6000Q - 0,05Q^2 - 286Q + 125,$$

yoki

$$F(Q) = -Q^3 - 15,05Q^2 + 3600Q - 125.$$

Foyda funktsiyasining ekstremumini topish uchun uning birinchi tartibli hosilasini topib, uni nolga tenglashtiramiz. Natijada quyidagi

tenglamaga ega bo'lamiz:

$$F'(Q) = \frac{dF}{dQ} = -3Q^2 - 30,1Q + 3600.$$

$$-3Q^2 - 30,1Q + 3600 = 0.$$

Bu tenglamani echib topamiz:

$$Q_1 = -40; Q_2 = 30.$$

$Q=30$ da firmaning foydasi ekstremumga ega bo'ladi. Ekstremumning xarakterini aniqlash uchun ikkinchi tartibli shartni tekshiramiz. Buning uchun $Q_2 = 30$ da $F(Q)$ funktsiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topib, uning ishorasini aniqlaymiz:

$$F''(Q) = \frac{d^2F(Q)}{dQ^2} = (-6Q - 30,1)_{Q=30} = -210,1 < 0.$$

$F''(Q_2=30) < 0$ bo'lganligi sababli $Q=30$ da firma maksimal foyda oladi.

Tovar narxini talab funktsiyasidan foydalanib topamiz:

$$P(30) = -30^2 - 15 \cdot 30 + 6000 = 4650.$$

Demak, firma 30 birlik tovar ishlab chiqarib, uni 4650 so'mdan sotsa, uning foydasi maksimal bo'ladi.

B. Iste'molchining ortiqcha foydasi qanday bo'lishini quyidagi formula yordamida aniqlaymiz:

$$C.S. = \int_0^{Q_2} [P_D(Q) - P_I] dQ,$$

bu erda $Q_2 = 30$, $P_D(Q) = P(Q)$ – talab funktsiyasi, P_I – tovarning bozordagi narxi ($P_I = 4650$ so'm).

$$C.S. = \int_0^{30} [-Q^2 - 15Q + 6000 - 4650] dQ = \left(-\frac{Q^3}{3} - 15Q^2 + 1350Q \right) \Big|_0^{30} = 24750.$$

Javob: $Q=30$; $P=4650$; $S.S.=24750$.

Tayanch so'z va iboralar

Ta'minotchi va iste'molchining ortiqcha foydasi.

Nazorat savollari

1. Iste'molchining ortiqcha foydasini ta'riflang.
2. Iste'molchining ortiqcha foydasini geometrik shakl yordamida tasvirlang.
3. Iste'molchining ortiqcha foydasi qanday formula yordamida topiladi?
4. Ta'minotchining ortiqcha foydasi nima?
5. Ta'minotchining ortiqcha foydasining geometrik tasvirini ko'rsating.
6. Ta'minotchining ortiqcha foydasi qanday formula yordamida hisoblanadi?

Masalalar

Quyidagi 1–7 masalalarda talab va taklif funktsiyalari berilgan:

a) muvozanat baho va muvozanat mahsulot miqdorini toping;

b) iste'molchilarning ortiqcha foydasini toping;

v) ta'minotchilarning ortiqcha foydasini toping.

1. $R_S = Q^2 + 10Q + 2$; $R_D = -Q^2 + 2Q + 332$. $0 < Q < 19$.

Javob: a) $Q_I = 11$; $P_I = 233$; b) $S.S. = 766, (3)$; v) $P.S. = 1492, (3)$.

2. $R_S = Q^2 + 7Q + 5$; $R_D = -Q^2 - 9Q + 365$. $0 < Q < 15$.

Javob: a) $Q_I = 10$; $P_I = 175$; b) $P.S. = 1016, (6)$; v) $C.S. = 1116, (6)$.

3. $R_S = 5 + 0,5Q$; $R_D = 21 - 1,5Q$.

Javob: a) $Q_I = 8$; $P_I = 9$; b) $S.S. = 48$; v) $P.S. = 16$.

4. $R_S = Q^2 + 10Q + 20$; $R_D = -Q^2 - 2Q + 580$.

Javob: a) $Q_I = 14$; $P_I = 356$; b) $S.S. = 2025, (3)$; v) $P.S. = 2809, (3)$.

5. $R_S = Q^2 + 3Q + 5$; $R_D = -Q^2 - 5Q + 447$.

Javob: a) $Q_I = 13$; $P_I = 213$; b) $P.S. = 1802, (6)$; v) $C.S. = 1887, (2)$.

6. $R_S = Q^3 + Q^2 + 100$; $R_D = Q^3 + 800Q + 1000$. $0 < Q < 20$.

Javob: a) $Q_I = 10$; $P_I = 1200$; b) $P.S. = 8166, (6)$; v) $C.S. = 19000$.

7. $R_S = Q/3 + 6$; $P_D = \sqrt{117 - 4Q}$; $0 < Q < 29$.

Javob: a) $Q_I = 9$; $P_I = 9$; b) $P.S. = 13,5$; v) $C.S. = 8,42$.

Quyidagi 8–12 masalalarda monopol firmaning talab va xarajatlar funktsiyasi berilgan:

A. firma foydasini maksimallashtiruvchi tovar narxini toping.

B. Bunday narxda xarid qilganda iste'molchilarning ortiqcha foydasi qanday bo'lishini aniqlang.

8. $R_D = 140 - 3Q$; $TC = 0,5Q^2 + 200$. $0 < Q < 40$.

Javob: A. $Q_I = 20$; $P_I = 80$; B. $S.S. = 60$;

9. $R_D = 100 - 2Q$; $TC = 2Q^2 + 200$. $0 < Q < 50$.

Javob: A. $Q_I = 12,5$; $P_I = 75$; B. $S.S. = 781,25$.

10. $R_D = 87 - 1,1Q$; $TC = 0,4Q^2 + 180$. $0 < Q < 79$.

Javob: A. $Q_I = 29$; $P_I = 55,1$; B. $S.S. = 462,55$.

11. $R_D = -Q^2 - 3Q + 382$; $TC = Q^2 + 2Q + 600$. $0 < Q < 18$.

Javob: A. $Q_I = 10$; $P_I = 252$; B. $S.S. = 816, (6)$.

12. $R_D = -0,1Q^2 - 2Q + 244$; $TC = Q^2 + 4Q + 700$. $0 < Q < 40$.

Javob: A. $Q_I = 20$; $P_I = 164$; B. $S.S. = 933, (3)$.

6.2-§. Marjinal daromad, xarajat va foyda funktsiyasiga ko'ra yalpi daromad, umumiy xarajat va yalpi foyda funktsiyalarini topish

Agar firmaning marjinal daromad funktsiyasi $MR(Q)$ berilgan bo'lsa, ya'ni

$$MR(Q)=f(Q)$$

funktsiya ma'lum bo'lsa, u holda firmaning yalpi daromad funktsiyasi quyidagi aniqmas integral yordamida topiladi:

$$TR = \int MR(Q) dQ = \int f(Q) dQ = F(Q) + C. \quad (1)$$

Bu erda $F(Q)$ – boshlang'ich funktsiya.

1-misol. Firmaning marjinal daromad funktsiyasi

$$MR=150-15Q$$

ko'rinishida berilgan. Agar $Q=10$ birlik mahsulot ishlab chiqarilganda firmaning umumiy daromadi $TR=1000$ p.b. ni tashkil etsa, u holda yalpi daromad funktsiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Yechish. Umumiy daromad funktsiyasi $TR(Q)$ ni quyidagi integraldan foydalanib topamiz:

$$TR(Q) = \int (150 - 15Q) dQ = 150Q - \frac{15Q^2}{2} + C.$$

$Q=10$ da $TR(Q)=1000$ bo'lganidan foydalanib, $S=250$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, firmaning yalpi daromad funktsiyasi

$$TR = 150Q - \frac{15Q^2}{2} + 250$$

ko'rinishda bo'ladi.

Xuddi shuningdek, marjinal xarajat va foyda funktsiyalari ma'lum bo'lganda umumiy xarajat va yalpi foyda funktsiyalarini ham aniqmas integraldan foydalanib topish mumkin.

2-misol. Firmaning marjinal xarajat funktsiyasi

$$MS=5Q^2-5Q-8$$

ko'rinishga ega. Agar $Q=6$ birlik mahsulot ishlab chiqarilganda firmaning xarajati 500 p.b. ni tashkil etsa, u holda uning umumiy xarajat funktsiyasini toping.

Yechish. Umumiy xarajat funktsiyasi $TC(Q)$ ni quyidagi integraldan foydalanib topamiz:

$$TC(Q) = \int MC(Q) dQ = \int (5Q^2 - 5Q - 8) dQ = 5\frac{Q^3}{3} - 5\frac{Q^2}{2} - 8Q + C.$$

$Q=6$ da $TC(Q)=500$ ekanidan foydalanib, $S=278$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, umumiy xarajatlarning funktsiyasi quyidagi ko'rinishda

bo'ladi:

$$TC(Q) = 5\frac{Q^3}{3} - 5\frac{Q^2}{2} - 8Q + 278.$$

3-misol. Firmaning marjinal foyda funksiyasi

$$MF(Q) = -3Q^2 + 100Q - 200$$

ko'rinishiga ega. Agar $Q=10$ birlik mahsulot ishlab chiqarilganda firmaning foydasi $F=1500$ p.b. ga teng bo'lsa, u holda uning yalpi foyda funksiyasi qanday ko'rinishga ega bo'ladi?

Yechish. Marjinal foyda funksiyasi ma'lum bo'lganda yalpi foyda funksiyasini quyidagi integral yordamida topamiz:

$$F(Q) = \int MF(Q) dQ = \int (-3Q^2 + 100Q - 200) dQ = -Q^3 + 50Q^2 - 200Q + C.$$

$Q=10$ da $F(Q)=1500$ ekanligini nazarga olib, $S=500$ ekanligini topamiz.

Demak, yalpi foyda funksiyasi

$$F(Q) = -Q^3 + 50Q^2 - 200Q + 500$$

ko'rinishga ega.

Ma'lumki, marjinal mehnat unumdorligi $MQ(L)$ ishlab chiqarish funksiyasi $Q(L)$ dan olingan birinchi tartibli hosiladan iborat. Shu sababli ishlab chiqarish hajmini mehnatning funksiyasi sifatida aniqlash uchun marjinal mehnat unumdorligini integrallaymiz, ya'ni

$$Q(L) = \int MQ(L) dL.$$

4-misol. Marjinal mehnat unumdorlik funksiyasi quyidagi ko'rinishda berilgan:

$$MQ(L) = \frac{5}{\sqrt{L}} - 1.$$

Agar ishlab chiqarishda $L=4$ ta kishi ishlaganda 10 ta mahsulot ishlab chiqarilsa, u holda ishlab chiqarish funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Yechish. Ishlab chiqarish funksiyasi $Q(L)$ ni quyidagi integraldan foydalanib topamiz:

$$Q(L) = \int MQ(L) dL = \int \left(\frac{5}{\sqrt{L}} - 1 \right) dL = 10\sqrt{L} - L + C.$$

$L=4$ da $Q(L)=10$ ekanligini inobatga olib $C=4$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, ishlab chiqarish funksiyasi

$$Q(L) = 10\sqrt{L} - L + 4$$

ko'rinishga ega ekan.

Tayanch soʻz va iboralar

Yalpi daromad funktsiyasi, umumiy xarajat funktsiyasi, yalpi foyda funktsiyasi.

Nazorat savollari

1. Marjinal daromad funktsiyasi maʼlum boʻlganda yalpi daromad funktsiyasi qanday topiladi?
2. Marjinal xarajat funktsiyasi maʼlum boʻlganda umumiy xarajat funktsiyasi qanday topiladi?
3. Marjinal foyda funktsiyasi maʼlum boʻlganda yalpi foyda funktsiyasi qanday aniqlanadi?
4. Marjinal mehnat unumdorligi funktsiyasi aniq boʻlganda ishlab chiqarish funktsiyasining koʻrinishi qanday aniqlanadi?

Masalalar

1. Firmaning marjinal daromad funktsiyasi

$$MR=15-4Q$$

koʻrinishga ega. Agar $Q=5$ birlik mahsulotga mos boʻlgan umumiy xarajat 75 p.b. boʻlsa, u holda firmaning umumiy xarajat funktsiyasi qanday koʻrinishga ega?

Javob: $TR=15Q-2Q^2+50$.

2. Firmaning marjinal xarajatlar funktsiyasi

$$MC(Q)=3Q^2-54Q+300$$

koʻrinishga ega. Agar $Q=10$ mahsulot ishlab chiqarganda firmaning xarajati 2500 p.b. ga teng boʻlsa, u holda firmaning umumiy xarajat funktsiyasi qanday koʻrinishda boʻladi?

Javob: $TC(Q)=Q^3-27Q^2+300Q+1200$.

3. Velosiped ishlab chiqaruvchi firmaning marjinal xarajatlar funktsiyasi

$$MC(Q)=6Q^2-6Q-12$$

koʻrinishga ega. Agar $Q=5$ birlik mahsulot ishlab chiqarganda firmaning umumiy xarajati 150 p.b. ga teng boʻlsa, firmaning umumiy xarajatlar funktsiyasini aniqlang.

Javob: $TC(Q)=2Q^3-3Q^2-12Q+35$.

4. Televizor ishlab chiqaruvchi firmaning marjinal xarajatlar funktsiyasi

$$MC(Q)=200-2Q+0,015Q^2$$

ko‘rinishga ega. Agar $Q=10$ birlik mahsulotga mos keluvchi harajat 2655 p.b. ni tashkil qilsa, u holda firmaning umumiy xarajatlar funktsiyasi qanday ko‘rinishga ega?

Javob: $TC(Q) = -0,005Q^3 - Q^2 + 200Q$

5. Firmaning marjinal daromad funktsiyasi

$$MR(Q)=550+3Q$$

ko‘rinishga ega. Agar $Q=10$ da firmaning yalpi daromadi 6000 so‘mni tashkil qilsa, u holda firmaning yalpi daromad funktsiyasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Javob: $TR(Q)=550Q+3/2Q^2+350$.

6. Firmaning marjinal daromad funktsiyasi

$$MR=25Q^{2/3}-9Q^2-20Q+5$$

ko‘rinishga ega. Agar $Q=4$ birlik mahsulot ishlab chiqarganda firma 100 birlik daromad olsa, u holda firmaning yalpi daromad funktsiyasining ko‘rinishini aniqlang.

Javob: $TR=1Q^{5/2}-3Q^3+10Q^2+5Q+112$.

7. Firmaning marjinal foyda funktsiyasi

$$MF(Q)=120-0,4Q$$

ko‘rinishga ega. Agar $Q=10$ birlik mahsulot ishlab chiqarganda firmaning foydasi 1300 so‘m bo‘lsa, u holda firmaning foyda funktsiyasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Javob: $F(Q)=120Q-0,2Q^2+120$.

8. Firmaning marjinal foydasi

$$MF(Q)=-3Q+900$$

ko‘rinishga ega. Agar $Q=5$ ta mahsulot ishlab chiqarganda firmaning foydasi 5000 so‘m bo‘lsa, u holda firmaning foyda funktsiyasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Javob: $F(Q)=-3/2Q^2+900Q+462,5$.

6.3-§. Talab va taklif egiluvchanlik funktsiyalariga ko‘ra talab va taklif funktsiyalarini topish

1. Ma’lumki, mahsulot bahosining o‘zgarishi oqibatida talabning o‘zgarishi **talab egiluvchanligi** deb ataladi va u quyidagi formula orqali topiladi:

$$E_{Q_D}(P) = f'(P) \cdot \frac{P}{Q_D} = P \cdot \frac{f'(P)}{f(P)}, \quad (1)$$

Deylik, talab egiluvchanlik funktsiyasi $E_{Q_D}(P)$ ma'lum bo'lsin. U holda talab funktsiyasi aniqmas integral yordamida aniqlanadi. Buning uchun (1) ifodadan

$$\frac{E_{Q_D}(P)}{P} = \frac{f'(P)}{f(P)},$$

tenglikni hosil qilib, uning ikki tomonini integrallaymiz.

$$\int \frac{f'(P)}{f(P)} dP = \int \frac{E_{Q_D}(P)}{P} dP + C.$$

1-misol. Talabning baho bo'yicha egiluvchanlik funktsiyasi

$$E_D(P) = \frac{-P^2}{170 - P^2}, \quad 0 < P < 13,$$

ko'rinishga ega. Agar tovar narxi $R=7$ p.b. ga teng bo'lganda unga bo'lgan talab $Q_D=550$ bo'lsa, u holda talab funktsiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Yechish.

$$f'(P) \frac{P}{Q_D} = \frac{-P^2}{170 - P^2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(P)}{f(P)} = \frac{-P}{170 - P^2}.$$

Hosil bo'lgan tenglikning ikki tomonini integrallaymiz:

$$\int \frac{f'(P)}{f(P)} dP = \int \frac{-P}{170 - P^2} dP.$$

va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\ln f(P) = \frac{1}{2} \ln(170 - P^2) + \ln C.$$

Bu tenglikdan $f(P)$ funktsiyani aniqlaymiz:

$$f(P) = C\sqrt{170 - P^2}$$

Bu tenglikka boshlang'ich shartlarni qo'yib topamiz:

$$550 = C\sqrt{170 - 49} \Rightarrow 550 = C\sqrt{121} \Rightarrow C = 50.$$

Demak, talab funktsiyasi

$$f(P) = 50\sqrt{170 - P^2}$$

ko'rinishga ega.

2. Taklif egiluvchanli

$$E_{Q_S}(P) = \varphi'(P) \cdot \frac{P}{Q_S} = P \cdot \frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}, \quad (2)$$

formula yordamida aniqlanadi, bu erda $\varphi(P)=Q_S$ - taklif funktsiyasi, P - tovar narxi, $E_{Q_S}(P)$ - taklif egiluvchanligi.

Agar taklif egiluvchanligi $E_{Q_s}(P)$ ma'lum bo'lsa, u holda taklif funksiyasi $\varphi(P)$ integral yordamida topiladi. Buning uchun (2) tenglikni quyidagi

$$\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)} = \frac{E_{Q_s}(P)}{P},$$

ko'rinishda yozamiz. So'ngra tenglikning ikki tomonini integrallaymiz va topamiz:

$$\int \frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)} dP = \int \frac{E_{Q_s}(P)}{P} dP + C.$$

2-misol. Taklifning baho bo'yicha egiluvchanlik funksiyasi

$$E_s(P) = \frac{15P^2 + 35P}{(3+2P)(20+5P)},$$

ko'rinishga ega. Agar tovar narxi $R=3$ p.b. ga teng bo'lganda taklif 1080 birlik bo'lsa, u holda taklif funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra

$$\varphi'(P) \frac{P}{Q_s} = \frac{15P^2 + 35P}{(3+2P)(20+5P)},$$

bundan

$$\frac{\varphi'(P)}{Q_s} = \frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)} = \frac{12P+39}{(3+2P)(15+3P)}.$$

Ushbu tenglikning ikki tomonini integrallab topamiz:

$$\ln \varphi(P) = \int \frac{12P+39}{(3+2P)(15+3P)} dP,$$

bundan

$$\ln \varphi(P) = \ln(3+2P)(15+3P) + \ln C$$

va nihoyat,

$$\varphi(P) = C(3+2P)(15+3P)$$

funktsiyani hosil qilamiz.

Bundan, boshlang'ich shartlarni nazarga olib topamiz:

$$\varphi(3) = 1080 = C(3+6)(15+9) \Rightarrow C = 5.$$

Demak, taklif funksiyasi

$$\varphi(P) = 5(3+2P)(15+3P) \text{ ko'rinishda bo'ladi.}$$

3. Talabning aholi daromadi R ga nisbatan egiluvchanlik funksiyasi

$$E_D(R) = f'(P) \cdot \frac{R}{Q_D} = R \cdot \frac{f'(R)}{f(R)},$$

formula yordamida aniqlanadi.

Agar $E_D(R)$ ma'lum bo'lsa, u holda talabning aholi daromadi R ning

funktsiyasi ko‘rinishidagi ifodasini integraldan foydalanib topish mumkin.

Buning uchun quyidagi

$$\frac{f'(R)}{f(R)} = \frac{E_D(R)}{R},$$

tenglikni hosil qilib, uning ikki tomonini integrallab topamiz:

$$\int \frac{f'(R)}{f(R)} dR = \int \frac{E_D(R)}{R} dR + C.$$

3-misol. Talabning aholi daromadi R ga nisbatan egiluvchanlik funktsiyasi

$$E_D(R) = \frac{3R}{-50 + 3R},$$

ko‘rinishiga ega. Agar $R = 50$ da $f(R = 50) = 200$ bo‘lsa, talabning aholi daromadi funktsiyasi sifatidagi ko‘rinishini aniqlang.

Yechish. Masalaning shartiga ko‘ra:

$$\frac{3R}{-50 + 3R} = R \frac{f'(R)}{f(R)}.$$

Bundan

$$\frac{f'(R)}{f(R)} = \frac{3R}{-50 + 3R}.$$

Ushbu tenglikning ikki tomonini integrallab topamiz:

$$\ln f(R) = \ln(-50 + 3R) + \ln C,$$

$$f(R) = C(-50 + 3R).$$

Bu tenglikka boshlang‘ich shartlarni qo‘yib topamiz:

$$f(R = 50) = 200 = C(-50 + 150) \Rightarrow 200 = C \cdot 100 \Rightarrow C = 2.$$

Demak, talab funktsiyasi

$$f(R) = 2(-50 + 3R),$$

ko‘rinishga ega.

Nazorat savollari

1. Narx bo‘yicha talab egiluvchanligi ma’lum bo‘lsa, talab funktsiyasi qanday topiladi?
2. Narx bo‘yicha taklif egiluvchanligi ma’lum bo‘lsa, u holda taklif funktsiyasi qanday topiladi?
3. Talabning daromad bo‘yicha egiluvchanligi ma’lum bo‘lsa, talabning aholi daromadi funktsiyasi ko‘rinishidagi ifodasi qanday topiladi?

Masalalar

1. Talabning narx bo'yicha egiluvchanlik funktsiyasi berilgan:

$$E_{Q_D} = \frac{-2P^2}{500 - P^2}, \quad 0 < P < 22.$$

Agar $R=10$ da $Q_D=800$ birlik masulot sotib olinsa, u holda talab funktsiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Javob: $Q_D=1000 - 2P^2$.

2. Talabning narx bo'yicha egiluvchanlik funktsiyasi

$$E = \frac{-P^2}{260 - P^2}, \quad 0 < P < 16,$$

ko'rinishga ega. Agar narx $P=14$ p.b. bo'lganda talab 312 birlik bo'lsa, u holda talab funktsiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Javob: $Q_D = 8\sqrt{260 - P^2}$.

3. Talabning baho bo'yicha egiluvchanlik funktsiyasi

$$E_{Q_D} = \frac{-P}{3(81 - P)}, \quad 0 < P < 80,$$

ko'rinishga ega. Agar $R=54$ da $Q_D=1050$ bo'lsa, talab funktsiyasini aniqlang.

Javob: $Q_D = 350 \sqrt[3]{81 - P}$.

4. Taklifning baho R bo'yicha egiluvchanlik funktsiyasi

$$E_{Q_S} = \frac{2P + 50}{P + 50}, \quad 0 < P < 32,$$

ko'rinishga ega. Agar $R=50$ da $Q_S = 1,5$ bo'lsa, u holda taklif funktsiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Javob: $Q_S = \varphi(P) = 2P^2 + 100P$.

5. Taklifning baho R bo'yicha egiluvchanlik funktsiyasi

$$E_{Q_S} = \frac{0,05P}{1 + 0,05P},$$

ko'rinishga ega. Agar mahsulot narxi $R=100$ p.b. bo'lganda 36 birlik mahsulot taklif qilinsa (sotilsa), u holda taklif funktsiyasi qanday ko'rinishga ega bo'ladi?

Javob: $Q_S = \varphi(P) = 6(1 + 0,05P)$.

6. Taklifning baho R bo'yicha egiluvchanlik funktsiyasi

$$E_{Q_S} = \frac{\left(\frac{37}{11} + P\right)P}{\frac{37}{11}P + 0,5P^2},$$

ko'rinishga ega. Agar $R=110$ p.b. bo'lganda $Q_S = 6420$ birlik bo'lsa, u holda taklif funktsiyasi qanday ko'rinishga ega?

Javob: $Q_S = \varphi(P) = \frac{37}{11}P + 0,5P^2$.

7. Taklifning narx bo'yicha egiluvchanlik funktsiyasi

$$E_{Q_s} = \frac{P\left(\frac{25}{3} + 0,5P\right)}{\frac{25}{3}P + 0,25P^2},$$

ko‘rinishga ega. Agar $R=12$ p.b. ga teng bo‘lganda taklif 408 birlik bo‘lsa, u holda taklif funktsiyasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Javob: $Q_s = \varphi(P) = 3\left(\frac{25}{P} + 0,25P^2\right).$

8. Talabning narxga nisbatan egiluvchanlik funktsiyasi

$$E_{Q_D} = \frac{-4P(2+P)}{2500-8P-2P^2},$$

ko‘rinishga ega. Agar $R=10$ da talab $Q_D=6660$ birlik bo‘lsa, u holda talab funktsiyasi qanday ko‘rinishga ega bo‘ladi?

Javob: $Q_D = f(P) = 7500 - 24P - 6P^2.$

9. Talabning aholi daromadiga ko‘ra egiluvchanlik funktsiyasi

$$E_{Q_R} = \frac{3R - 2R^2}{-20 + 3R - R^2},$$

ko‘rinishga ega. Agar aholi daromadi 100 p.b. ga teng bo‘lganda talab $Q_R = -40$ bo‘lsa, u holda talab funktsiyasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Javob: $Q_R = -40 + 6R - 2R^2.$

10. Talabning aholi daromadiga ko‘ra egiluvchanlik funktsiyasi

$$E_{Q_R} = \frac{-5R}{-25 - 5R},$$

ko‘rinishga ega. Agar daromad $R=10$ birlik bo‘lganda talab $Q_R=150$ birlik bo‘lsa, u holda talab funktsiyasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Javob: $Q_R = 50 + 10R.$

6.4-§. Kobb-Duglas funktsiyasi asosida ishlab chiqarish hajmini aniqlash. Daromadni aholi o‘rtasidagi taqsimotining notekislik darajasini (Jini koeffitsientini) aniqlash

I. Agar Kobb-Duglas funtsiyasida mehnat sarfi vaqtga chiziqli bog‘liq bo‘lib kapital sarfi o‘zgarmas bo‘lsa, u holda bu funktsiya

$$Q(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. U holda $t=0,1,2,\dots,T$ yil ichida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori quyidagi aniq integral yordamida topiladi:

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t} dt. \quad (1)$$

1-misol. Agar Kobb-Duglas funktsiyasi

$$Q(t) = (1+t)e^{3t}$$

ko‘rinishga ega bo‘lsa, u holda 4 yilda ishlab chiqariladigan mahsulot miq-

dorini aniqlang.

Yechish. Yuqoridagi (1) formulaga asosan 4 yilda ishlab chiqariladigan mahsulot miqdorini topamiz:

$$Q = \int_0^4 (1+t)e^{3t} dt$$

Ushbu integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$Q = \int_0^4 (1+t)e^{3t} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t+1, \\ du = dt, \\ dv = e^{3t} dt, \\ v = \frac{1}{3}e^{3t}. \end{array} \right\} = \frac{1}{3}(t+1)e^{3t} - \frac{1}{3} \int e^{3t} dt = \frac{1}{3}(t+1)e^{3t} - e^{3t} = \frac{1}{3}(t+1)e^{3t} \Big|_0^4 - \frac{1}{9}e^{3t} \Big|_0^4 = \frac{5}{3}e^{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}e^{12} + \frac{1}{9} = 2,53 \cdot 10^5.$$

II. Daromadni taqsimlashdagi tengsizlikni **Lorents egri chizig'i** deb ataluvchi egri chiziq yordamida tahlil qilish mumkin. Lorents egri chizig'ini quyidagi rasmdagi ko'rinishda tasvirlash mumkin.

Bu erda *OVA* egri chiziq daromad foizi bilan aholi foizi o'rtasidagi bog'lanishni ifodalaydi. Agar daromad aholi o'rtasida tekis taqsimlansa, u holda Lorents egri chizig'i *OA* bissektrisadan iborat bo'ladi. *OA* bissektrisa bilan Lorents egri chizig'i orasidagi *OAV* soha yuzaning *OAS* uchburchak yuziga bo'lgan nisbati **Jini koeffitsienti** deb ataluvchi *k* songa teng bo'ladi. Bu son daromadni aholi o'rtasida notekis taqsimlanganlik darajasini aniqlaydi. Jini koeffitsienti:

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}}.$$

$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$ bo'lgani uchun Jini koeffitsienti

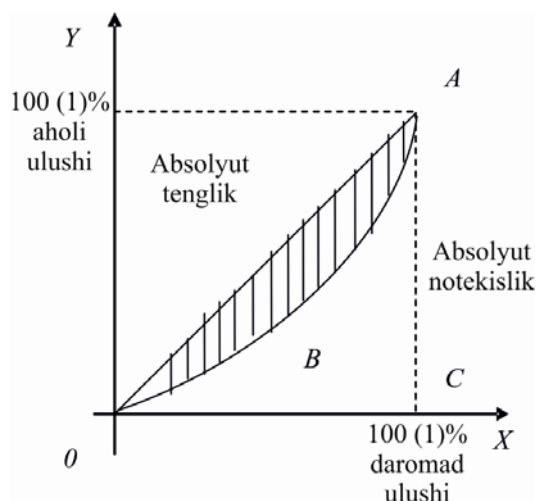
$$k = 1 - 2S_{OBAC} = 1 - 2 \int_0^1 f(x) dx$$

munosabat yordamida topiladi. Bu erda $u=f(x)$ Lorents egri chizig'ini ifodalovchi funktsiya.

2-misol. Ma'lum bir mamlakatdagi daromadni taqsimlash jarayonini tahlil qilish natijasida Lorents egri chizig'ini

$$y = 1 - \sqrt{1-x^2},$$

funktsiya orqali ifodalash mumkin



6.5-shakl.

ekanligi aniqlandi. Daromadlar taqsimotining notekislik darajasini, ya'ni Jini koeffitsientini aniqlang.

Yechish. Yuqoridagi (2) ifodadan foydalanib,

$$k = 1 - 2 \int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2}) dx = 1 - 2 \left[\int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \right] = 1 - 2 \left[1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \right],$$

ni topamiz. $x = \sin t$ belgilash kiritib,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4},$$

ekanligini aniqlaymiz. Demak,

$$k = 2 \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57.$$

Jini koeffitsienti etarli darajada katta ekanligi daromad taqsimotida notekislik ham yuqori darajada ekanligini ko'rsatadi.

Tayanch so'z va iboralar

Kobb-Duglas funktsiyasi, Lorents egri chizig'i, Jini koeffitsienti.

Nazorat savollari

1. Kobb-Duglas funktsiyasi qanday ko'rinishda bo'lganda $[0;T]$ oraliqda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini hisoblashda aniq integraldan foydalaniladi?
2. Daromadni taqsimlashdagi notekislik qanday aniqlanadi?
3. Lorents egri chizig'i qanday ko'rsatkichlar orasidagi bog'lanishni aniqlaydi?
4. Jini koeffitsienti nima va u qanday topiladi?

Masalalar

1. Kobb-Duglas funktsiyasi ko'rinishga

$$Q(t) = (2t-3)e^{2t}$$

ega bo'lsa, u holda 3 yilda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini aniqlang.

Javob: $Q=1357$ birlik.

2. Kobb-Duglas funktsiyasi

$$Q(t) = (3t - 0,5)e^{0,5t}$$

ko'rinishga ega. 4 yilda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini aniqlang.

Javob: $Q=28,20$.

3. Ma'lum bir mamlakatdagi daromadni taqsimlash jarayonini tahlil qilish natijasida Lorents egri chizig'i quyidagi funktsiya ko'rinishida

$$y = 0,5 - x^2$$

ekanligi aniqlandi. Daromadlar taqsimotining notekislik darajasini, ya'ni Jini koeffitsienti aniqlang.

Javob: $k=0,66(6)$ (notekislik yuqori darajada).

4. Ma'lum bir mamlakatdagi daromadning taqsimlanishi tahlil qilinib, Lorents egri chizig'i

$$y=x-x^2,$$

funktsiya orqali ifodalanishi aniqlangan. Daromadlar taqsimotining notekislik darajasini ifodalovchi Jini koeffitsientini toping.

Javob: $k=1/3=0,33(3)$.

5. Lorents egri chizig'i

$$y=x-x^2/2,$$

funktsiya orqali ifodalanishi aniqlangan. Daromadlar taqsimotining notekislik darajasini aniqlang.

Javob: $k=1/3=0,33(3)$.

6. Lorents egri chizig'i

$$y = \frac{3x^2}{5} - \frac{x}{5}$$

funktsiya orqali ifodalanishi aniqlangan. Daromadlar taqsimotidagi notekislikni aniqlang.

Javob: $k=0,8$ (daromad taqsimotining notekislik darajasi yuqori darajada).

6.5-§. Aralash masalalar

1. A mahsulotga bo'lgan talab funktsiyasi

$$P_D = Q^2 - 4Q + 500$$

ko'rinishga, taklif funktsiyasi esa

$$P_S = 2Q^2 + 60Q$$

ko'rinishga ega.

a) tovarning muvozanat bahosini;

b) iste'molchilarning ortiqcha foydasini aniqlang.

Javob: a) $R_M=438,7$ p.b.; b) $CS=223,8$; $Q_M=6,08$.

2. Yuqoridagi 1-masala shartlari asosida ta'minotchining ortiqcha foydasini hisoblang.

Javob: $RS=2335$.

3. Firma ma'lum bir tovar ishlab chiqarishda yakka hokim (monopol) bo'lsin va uning talab va taklif funktsiyalari quyidagi ko'rinishda bo'lsin.

$$P_D = -Q^2 - 8Q + 900 \text{ (talab funktsiyasi);}$$

$$TS = 0,02 Q^2 + 176Q + 225 \text{ (xarajatlar funktsiyasi);}$$

a) firma o'z foydasini maksimallashtirish uchun qancha tovar ishlab chiqarishi va uni qanday narxda sotishi kerak?

b) tovarni foydani maksimallashtiruvchi narxda sotganda iste'molchining ortiqcha foydasi qanday bo'ladi?

Javob: a) $Q=13,09$, $R=623,9$; b) $CS=2/8,1$.

4. Firmaning marjinal daromadi funktsiyasi

$$MR=100 - 8Q$$

ko'rinishda berilgan. Agar $Q=15$ birlik mahsulot ishlab chiqarilganda umumiy daromad $TR=750$ p.b.ni tashkil etsa, u holda yalpi daromad funktsiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Javob: $TR(Q)=100 - 4Q^2 + 150$.

5. Firmaning marjinal xarajat funktsiyasi

$$MS=3Q^2 - 8Q - 10$$

ko'rinishga ega. Agar $Q=12$ da firmaning marjinal xarajati $MS=600$ p.b.ni tashkil qilsa, uning umumiy xarajat funktsiyasi qanday ko'rinishga ega?

Javob: $TR(Q)=Q^3 - 4Q^2 - 10Q - 432$.

6. Marjanil mehnat unumdorligi berilgan:

$$MQ(L)=\frac{7}{\sqrt{L}} - 3.$$

Agar ishlab chiqarishda $L=9$ ishlaganda 150 ta mahsulot ishlab chiqarilsa, u holda ishlab chiqarish funktsiyasi qanday ko'rinishga ega?

Javob: $Q(L)=14\sqrt{L} - 3L + 135$.

7. Firmaning marjinal foydasi

$$MP(Q)=-4Q + 155$$

ko'rinishga ega. Agar $Q=10$ da firmaning foydasi 3500 p.b.ni tashkil qilsa, u holda firmaning foyda funktsiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Javob: $P(Q)=-2Q^2 + 155Q + 2200$.

8. Talabning bahoga nisbatan egiluvchanlik funktsiyasi quyidagi ko'rinishda berilgan:

$$E_D(P)=\frac{-P^2}{150 - P^2} \quad D < P < 13$$

Agar $p=15$ da $Q_D=450$ bo'lsa, u holda talab funktsiyani aniqlang.

Javob: $Q_D = f(p) = 30\sqrt{150 - p^2}$.

9. Taklifning baho bo'yicha egiluvchanlik funktsiyasi

$$E_S(p)=\frac{3p^2 + 10p}{(2 + p)(15 + 3p)}$$

ko'rinishga ega. Agar tovar narxi $r=3$ p.b.ga teng bo'lganda taklif 960 birlik

bo'lsa, u holda taklif funktsiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Javob: $\varphi(p) = Q_s = 24p^2 + 168p + 240$.

10. Talabning aholi daromadiga nisbatan egiluvchanlik funktsiyasi

$$E_D(R) = \frac{7R}{-90 + 7R}$$

ko'rinishga ega. Agar $R=30$ bo'lganda talab 240 bo'lsa, u holda aholi talabining daromad funktsiyasi sifatidagi ko'rinishi qanday bo'ladi?

Javob: $Q_D(R) = f(R) = 2(-90 + 7R)$.

11. Taklifning baho R ga nisbatan egiluvchanlik funktsiyasi berilgan:

$$E_{DS}(P) = \frac{\left(\frac{3}{5} + 1,5p\right)p}{\frac{3}{5}p + 0,75p^2}.$$

Agar $r=10$ da taklif 405 bo'lsa, u holda taklif funktsiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Javob: $Q_s(p) = \varphi(p) = 5\left(\frac{3}{5}p + 0,75p^2\right)$.

12. Kobb-Duglas funktsiyasi

$$Q(t) = (3 + 2t)e^{2t}$$

ko'rinishda berilgan. 3 yilda ishlab chiqariladigan mahsulot miqdorini aniqlang.

Javob: $Q=7629,5$.

13. Kobb-Duglas funktsiyasi quyidagi ko'rinishda berilgan:

$$Q(t) = (t-1)e^t.$$

2 yilda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini aniqlang.

Javob: $Q=2$.

14. Lorents egri chizig'i

$$y = x - \frac{1}{3}x^2$$

funktsiya ko'rinishda aniqlang. Daromadlar taqsimotining notekislik darajasini, ya'ni Jini koeffitsientini aniqlang.

Javob: $k = \frac{2}{9}$.

15. Lorents egri chizig'i

$$Y = \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{5}$$

funktsiya orqali ifodalangan bo'lsa, u holda Jini koeffitsienti qanday bo'ladi?

Javob: $k=0,8$ (2).

VII bob. CHIZIQLI DASTURLASH MASALALARI

Zarur matematik tushuncha va faktlar

1. Ikki o'zgaruvchili tengsizliklar sistemasi. Ikki o'zgaruvchili tengsizlik deb, $f(x,y) > \varphi(x,y)$ [$f(x,y) \geq \varphi(x,y)$] yoki $f(x,y) \leq \varphi(x,y)$ [$f(x,y) \leq \varphi(x,y)$] ko'rinishidagi tengsizliklarga aytiladi, bu erda $f(x,y)$ va $\varphi(x,y)$ ixtiyoriy ikki o'zgaruvchili funktsiyalar (ifodalar).

Ikki o'zgaruvchili tengsizlikning yechimi deb, ushbu tengsizlikni to'g'ri sonli tengsizlikka aylantiruvchi tartiblashgan (x_0, y_0) sonlar juftligiga aytiladi. Boshqacha aytganda, berilgan tengsizlikni qanoatlantiruvchi (x_0, y_0) sonlar juftligi uning yechimi bo'ladi. Masalan,

$$3\sin x + 3^y > 0$$

tengsizlikning yechimi $(\pi/6; -2)$ sonlar juftligidan iborat bo'ladi. Chunki

$$3\sin\pi/6 + 3^{-2} = 3 \cdot 1/2 + 1/9 > 0.$$

$(-\pi/6; 0)$ sonlar juftligi berilgan tengsizlikning yechimi bo'lmaydi. Chunki

$$3\sin(-\pi/6) + 3^0 = 3 \cdot (-1) + 1 = -2 < 0.$$

Agar ikki o'zgaruvchili tengsizlikdagi $f(x,y)$ va $\varphi(x,y)$ funktsiyalar (ifodalar) chiziqli funktsiyalardan iborat bo'lsa, u holda berilgan tengsizlik **chiziqli tengsizlik** deb ataladi. Quyida ana shunday tengsizliklarni ko'ramiz.

$$2x - y - 1 \leq 0$$

chiziqli tengsizlikni $(1; 1)$ sonlar juftligi qanoatlantiradi, chunki $2 \cdot 1 - 1 - 1 = 0$.

Shuning uchun u berilgan tengsizlikning yechimi bo'ladi. $(1; 2)$ sonlar juftligi ham berilgan tengsizlikning yechimi bo'ladi, chunki bu sonlarni tengsizlikka qo'ysak, u qat'iy tengsizlikka aylanadi:

$$2 \cdot 1 - 2 - 1 = -1 < 0.$$

$(2; 1)$ sonlar juftligi berilgan tengsizlikning yechimi bo'lmaydi. Chunki u berilgan tengsizlikni qanoatlantirmaydi:

$$2 \cdot 2 - 1 - 1 = 2 > 0.$$

2. Chiziqli tengsizlikning geometrik tasviri. Deylik, quyidagi chiziqli tengsizlik $ax + by + c \geq 0$ berilgan bo'lsin. Koordinatalar tekisligida

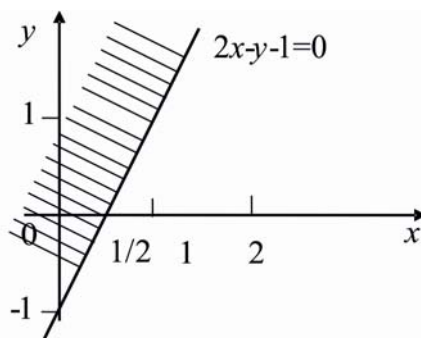
bu tengsizlik $ax+by+c=0$ to'g'ri chiziqlarning ma'lum bir tomonida yotuvchi yarim tekislikdan iborat bo'lib, $ax+by+c=0$ to'g'ri chiziq ham shu tekislikka tegishli bo'ladi.

Agar $ax+by+c>0$ ko'rinishdagi tengsizlik berilgan bo'lsa, u koordinatalar tekisligida $ax+by+c=0$ to'g'ri chiziqni o'z ichiga olmaydigan yarim tekislikni ifodalaydi.

1-misol. $2x-y-1\leq 0$ tengsizlikning yechimlar to'plamini koordinatalar tekisligida tasvirlang.

Yechish. Koordinatalar sistemasida $2x-y-1=0$ to'g'ri chiziqni yasaymiz.

Ushbu to'g'ri chiziq Ox o'qini ($y=0$) $x=1/2$ nuqtada, Oy o'qini ($x=0$) esa $y=-1$ nuqtada kesib o'tadi.



7.1-shakl

7.1-shaklda shtrixlangan soha berilgan tengsizlikni qanoatlantiruvchi yarim tekislikni ifodalaydi. Buni aniqlash uchun koordinatalar boshi $O(0;0)$ nuqtani mo'ljal qilib olish kerak. Agar $x_1=0$, $x_2=0$ qiymatlarni $2x-y-1\leq 0$ tengsizlikka qo'ysak, $-1\leq 0$ munosabatga ega bo'lamiz. Demak, $2x-y-1=0$ to'g'ri chiziqdan koordinata boshi tomonida yotgan yarim tekislik berilgan tengsizlikning yechimlar to'plamidan iborat bo'ladi.

3. Chiziqli tengsizliklar sistemasi. Deylik, tengsizliklar sistemasi

$$\begin{cases} f(x,y) > 0; \\ g(x,y) > 0; \end{cases}$$

berilgan bo'lsin. Ushbu **sistemaning yechimi** deb, undagi har bir tengsizlikni qanoatlantiruvchi tartiblashgan sonlar juftligi (x_0, u_0) ga aytiladi. Sistemaning yechimlar to'plami unga kiruvchi tengsizliklar yechimlari to'plamlarining kesishmasidan iborat bo'ladi. Agar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ funksiyalar chiziqli bo'lsa, u holda sistema **chiziqli tengsizliklar sistemasi** deb ataladi. Ikki o'zgaruvchili ikkita chiziqli tengsizliklar sistemasini quyidagi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + b_1 > (<)0; \\ a_{21}x + a_{22}y + b_2 > (<)0; \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + b_1 \geq (\leq)0; \\ a_{21}x + a_{22}y + b_2 \geq (\leq)0; \end{cases}$$

2-misol. Quyidagi tengsizliklar sistemasining yechimlar to'plamini aniqlang va uni grafikda tasvirlang:

$$\begin{cases} x + y \geq 0; \\ 2x - y \leq 0. \end{cases}$$

Yechish. Koordinatalar sistemasida $x+y\geq 0$ va $2x-y\leq 0$ teng

sizliklarning yechimlar to'plamini ifodalovchi sohani aniqlaymiz (7.2, 7.3-shakllarga qarang).

Berilgan sistemaning yechimlar to'plami esa $x+y \geq 0$ va $2x-y \leq 0$ tengsizliklar yechimlari to'plamining kesishmasidan, ya'ni 7.4-shaklda tasvirlangan burchakdan iborat bo'ladi.

3-misol. Quyidagi chiziqli tengsizliklar sistemasining yechimlar to'plamini toping va uni grafikda tasvirlang:

$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0; \\ x + y - 3 \leq 0; \\ x + 3y + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Yechish. Eng avval $x-y+1 \geq 0$ tengsizlikning yechimlar to'plamini topish uchun koordinatalar tekisligida $x-y+1=0$ to'g'ri chiziqni yasaymiz.

Berilgan tengsizlikni qanoatlantiruvchi yechimlar to'plamini aniqlash uchun $x=0$, $y=0$ qiymatlarni tengsizlikka qo'yib, $0 > -1$ to'g'ri tengsizlikni hosil qilamiz. Demak, $x-y+1=0$ to'g'ri chiziqning koordinata boshi tomonidagi yarim tekislik berilgan tengsizlikning yechimlar to'plamidan iborat bo'ladi (7.5-shakl).

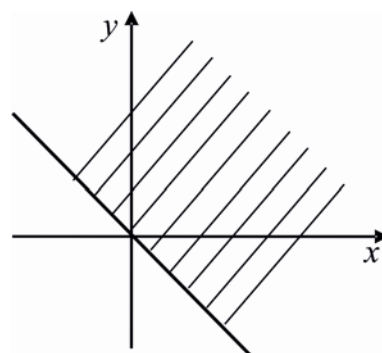
$x+y-3 \leq 0$ tengsizlikning yechimlar to'plamini xuddi, shuningdek, aniqlaymiz. Uni $x+y \leq 3$ ko'rinishda yozib olamiz. Koordinatalar tekislikligida

$x+y=3$ to'g'ri chiziqni yasaymiz.

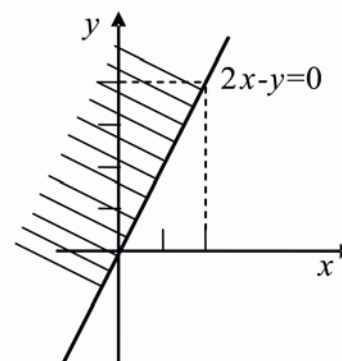
$x=0$, $y=0$ deb qabul qilsak, $0 \leq 3$ to'g'ri tengsizlik hosil bo'ladi. Demak, $x+y=3$ to'g'ri chiziqdan koordinata boshi tomonda yotgan yarim tekislik berilgan tengsizlikning yechimlar to'plamidan iborat bo'ladi. (7.6-shakl).

Shunday yo'l bilan $x+y-3 \geq 0$ tengsizlikning yechimlar to'plamini topamiz (7.7shakl).

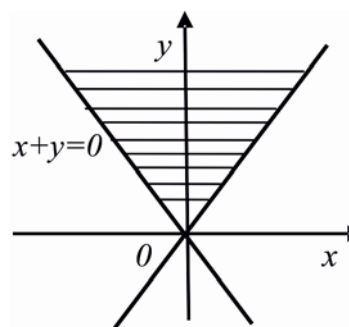
Berilgan sistemaning yechimlar to'plami yuqoridagi yarim tekisliklarning kesishmasidan, ya'ni AVS uchburchakdan iborat bo'ladi (7.8-shakl).



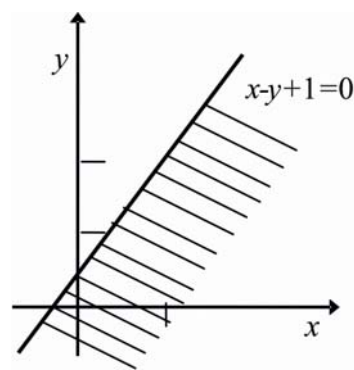
7.2-shakl



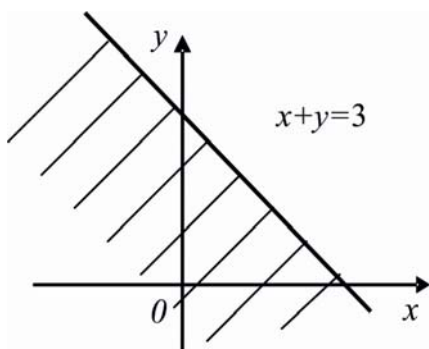
7.3-shakl



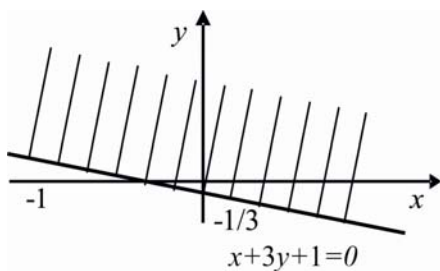
7. 4-shakl



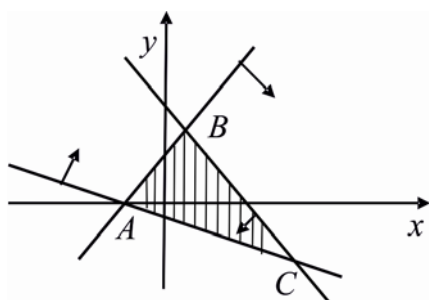
7.5-shakl



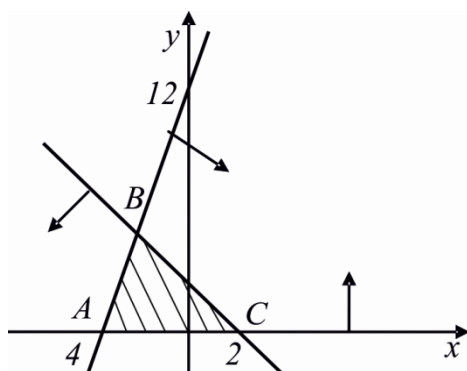
7.6-shakl



7.7-shakl



7.8-shakl



7.9-shakl

4-misol. Quyidagi chiziqli tengsizliklar sistemasining yechimlar to'plamini toping va uni grafikda tasvirlang:

$$\begin{cases} x + y \leq 2; \\ 3x - y + 12 \geq 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Yechish. Dekart koordinatalar sistemasida berilgan sistemadagi har bir tengsizlikni ifodalovchi yarim tekislikni yasaymiz. Hosil bo'lgan yarim tekisliklar kesishmasini aniqlaymiz.

7.9-shakldan ko'rinadiki, berilgan tengsizliklar sistemasining yechimlar to'plami AVS uchburchakni tashkil qiladi.

4. Chiziqli dasturlash elementlari.

Iqtisodiyotdagi ko'p amaliy masalalarda berilgan $Y=f(x_1, x_2)$ funktsiyaning eng kichik yoki eng katta qiymatini noma'lumlarga ma'lum bir shartlar qo'yilganda topish talab qilinadi.

Masalan,

$$\varphi_i(x_1, x_2) \{ \geq, =, \leq \} b_i, (i=1, 2, \dots, m)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar to'plamida $Y=f(x_1, x_2)$ funktsiyaning maksimum yoki minimum qiymatini topish kerak bo'ladi. Boshqacha aytganda, berilgan funktsiyaning shartli ekstremumini topish talab qilinadi. Bunday masalalar **matematik dasturlash masalasi** deb ataladi.

Umumiy holda matematik dasturlash masalasi quyidagi ko'rinishda beriladi:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \geq, =, \leq \} b_i, (i=1, 2, \dots, m)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar to'plamida

$$Y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

funktsiyaning ekstremum qiymati topilsin.

Agar $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i=1, 2, \dots, m$) va $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyalar chiziqli

bo'lsa, u holda berilgan masala **chiziqli dasturlash masalasi** deb ataladi. $n=2$, $m=2$ bo'lgan holda masalani quyidagi ko'rinishlarda yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2. \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \\ & F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max. \end{aligned}$$

yoki

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2. \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \\ & F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

a) va b) ko'rinishda berilgan masalalar simmetrik ko'rinishda berilgan chiziqli dasturlash masalalari deb ataladi.

a) ko'rinishidagi masala cheklamalarining kichik tomoniga $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, uni quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\begin{aligned} \text{a')} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4 = b_2. \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0. \\ & F = c_1x_1 + c_2x_2 + 0(x_3 + x_4). \end{aligned}$$

Xuddi shuningdek, b) ko'rinishdagi masalani quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\begin{aligned} \text{b')} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - x_4 = b_2. \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0. \\ & F = c_1x_1 + c_2x_2 + 0(x_3 + x_4). \end{aligned}$$

a' (b') masala a (b) masalaning kanonik ko'rinishi deb ataladi. Umumiy holda kanonik ko'rinishda berilgan chiziqli dasturlash masalasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \text{-----}; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \dots; \quad x_n \geq 0. \quad (2)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max. \quad (3)$$

Bu masaladagi (1) va (2) shartlar uning **cheklamalari**, (3) shart esa masalaning **maqsadi yoki maqsad funksiyasi** deb ataladi.

Masalaning (1) va (2) shartlarini qanoatlantiruvchi yechimi uning **joiz yechimi** deb ataladi. (3) shartni ham qanoatlantiruvchi joiz yechim **optimal yechim** deb ataladi.

Agar biror $X^0 \in K_m = \{X : AX = b, X \geq 0\}$ joiz rejaning $n-m$ ta koordinatasi ($m < n$) nolga teng bo'lib, qolgan $x_1, x_2, \dots, x_m$ koordinatalariga mos kelgan $R_1, R_2, \dots, R_m$ shart vektorlari chiziqli erkli bo'lsa, u holda $X^0 \in K_m$ joiz reja **bazis reja** deb ataladi.

Masala joiz yechimlar to'plamida (3) funktsiyaga maksimal qiymat beruvchi optimal yechimni topishdan iborat bo'ladi.

5. Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish. a) ko'rinishdagi masalaga murojaat etamiz. Dekart koordinatalar sistemasida masalaning asosiy cheklamalarini qanoatlantiruvchi chekli (yoki cheksiz) joiz yechimlar to'plamini hosil qilamiz.

Bunday to'plam $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan ko'p burchakni tashkil qiladi. Bunday ko'pburchakning qavariq ko'pburchak bo'lishi isbotlangan. Bunday ko'pburchak o'zining ixtiyoriy ikkita nuqtasi bilan bir qatorda bu nuqtalarni tutashtiruvchi kesmani ham o'z ichiga oladi. Echimlar ko'pburchagining har bir burchak nuqtasiga masalaning bitta bazis yechimi mos keladi, va aksincha, har bir bazis yechimga bitta burchak nuqta mos keladi. Bundan tashqari maqsad funktsiya o'zining ekstremum qiymatiga shu qavariq ko'pburchakning burchak nuqtalarida erishishi isbotlangan. Agar maqsad funktsiya birdan ortiq burchak nuqtada ekstremum qiymatga erishsa, u shu nuqtalarni tutashtiruvchi kesmadagi ixtiyoriy nuqtada ham shu qiymatga erishadi. Bu holda berilgan masala cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Deylik, berilgan chiziqli dasturlash masalasining joiz yechimlar to'plami chekli bo'lsin. Ana shu yechimlar to'plamida $Y = c_1x_1 + c_2x_2$ funktsiyaga maksimum qiymat beruvchi nuqtani topamiz. Bunday nuqta yechimlar ko'pburchagining burchak nuqtasidan iborat bo'ladi va uning koordinatalari berilgan masalaning optimal yechimi bo'ladi. Bunday nuqtani aniqlash uchun maqsad funktsiyani o'zgarmas C songa tenglashtirib

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C$$

to'g'ri chiziq tenglamasini hosil qilamiz. Koordinatalar tekisligida ana shu to'g'ri chiziqni yasaymiz hamda S ning qiymatini oshirib (kamaytirib) borib, uni o'ziga parallel ravishda $N(s_1, s_2)$ yo'nalishda surib boramiz va nihoyat shunday $C = C^0$ ni belgilaymizki, unda

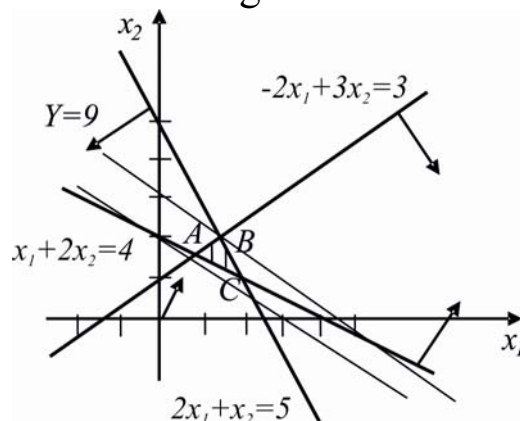
$$c_1x_1 + c_2x_2 = C^0$$

tenglama orqali aniqlangan to'g'ri chiziqli yechimlar ko'pburchagining burchak nuqtasidan o'tadi.

Ushbu burchak nuqtaning koordinatalari masalaning optimal yechimini, $Y=C_0$ esa optimal yechimga mos keluvchi maqsad funktsiya qiymatini aniqlaydi.

5-misol. Quyidagi chiziqli dasturlash masalasini eching:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5; \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 3; \\ x_1 + 2x_2 \geq 4; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \\ Y = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$



7.10-shakl

Berilgan $Y=2x_1+3x_2$ funktsiyaga maksimum qiymat beruvchi nuqtani A , V , S nuqtalar ichidan qidiramiz. Uning uchun Y ga $C=6$ qiymat berib, $2x_1+3x_2=6$ to'g'ri chiziqni yasaymiz. S ning qiymatini oshirib borsak, $2x_1+3x_2=S$ to'g'ri chiziqli o'ziga parallel ravishda $N(2;3)$ yo'nalishda siljib boradi va u shu yo'nalishdagi V burchak nuqtadan o'tadi. Ana shu nuqtada maqsad funktsiya maksimumga erishadi.

V nuqtaning koordinatalari masalaning optimal yechimini beradi. Ularni topish uchun quyidagi sistemani echamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ -2x_1 + 3x_2 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ 4x_2 = 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2; \\ x_1 = 1.5. \end{cases} \quad Y = 2 \cdot 1.5 + 3 \cdot 2 = 9.$$

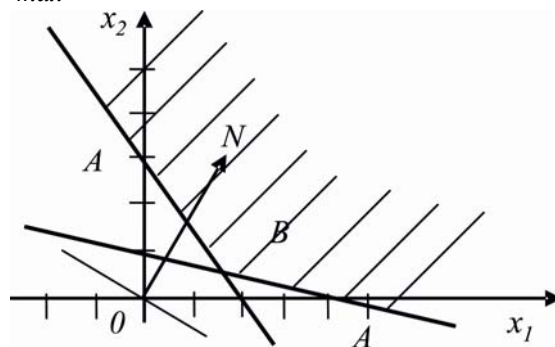
Demak, berilgan masalaning yechimi

$$x_1=1.5; x_2=2. \quad Y_{\max}=9$$

bo'ladi.

6-misol. Quyidagi chiziqli dasturlash masalasini eching:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4; \\ \frac{3}{2}x_1 + x_2 \geq 3; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \\ Y = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min. \end{cases}$$



7.11-shakl

Yechish. Koordinatalar tekisli-

gida masalaning cheklamalarini qanoatlantiruvchi yechimlar to'plamini yasaymiz.

7.11-shakldan ko'rinadiki, masalaning mumkin bo'lgan yechimlar to'plami cheksiz sohani tashkil qiladi.

Bu sohada funktsiyaning maksimum qiymati cheksiz bo'ladi. Maqsad funktsiya V nuqtada minimum qiymatga erishadi. V nuqtaning koordinatalarini topish uchun quyidagi sistemani echamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 4; \\ \frac{3}{2}x_1 + x_2 = 3; \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1,6; \quad x_2 = 0,6.$$

Masalaning optimal yechimi:

$$x_1=1,6; \quad x_2=0,6. \quad Y_{min}=2 \cdot 1,6+3 \cdot 0,6=5.$$

Iqtisodiy amaliyotda uchraydigan ko'p masalalarda noma'lumlar soni $n>2$ va ularga qo'yilgan cheklamalar soni $m>2$ bo'ladi hamda $n>m$ bo'lishi ko'riladi. Bunday hollarda chiziqli dasturlash masalasini yechishning universal usullaridan bo'lmish simpleks usul ishlatiladi.

6. Chiziqli dasturlash masalasini yechish uchun simpleks usul. Chiziqli dasturlash nazariyasida simpleks usul asosiy o'rinlardan birini egallaydi. Simpleks usul 1939 yilda rus olimi L. V. Kantorovich tomonidan va 1949 yilda amerika olimi Dj. Dantsig tomonidan kashf etilgan. Simpleks usul iterativ jarayondan iborat bo'lib, unda ma'lum bir boshlang'ich bazis yechimdan boshlab hamma bazis yechimlar birin-ketin tekshirib boriladi va ular orasida berilgan maqsad funktsiya $Y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ga eng katta (yoki eng kichik) qiymat beruvchisi yechim, ya'ni optimal yechim topiladi yoki bunday yechimning mavjud emasligi aniqlanadi.

Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usul bilan yechish jarayonini quyidagi masala misolida ko'rsatamiz.

Noma'lumlarga

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18; \\ 2x_1 + x_2 \leq 16; \\ 0 \leq x_1 \leq 7; \\ 0 \leq x_2 \leq 5. \end{cases} \quad (5)$$

shartlar qo'yilganda

$$F=2x_1+3x_2 \rightarrow \max. \quad (6)$$

funktsiyaning maksimum qiymatini toping.

Ushbu masalanin simpleks usul bilan yechish uchun masalaning shartlaridagi tengsizliklarni x_3, x_4, x_5, x_6 qo'shimcha o'zgaruvchilar

kiritib tenglamalarga aylantiramiz va berilgan masalani quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16; \\ x_1 + x_5 = 7; \\ x_2 + x_6 = 5. \end{cases} \quad (7)$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; \quad (8)$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max. \quad (9)$$

Hosil bo‘lgan (7) – (9) masala berilgan masalaning kanonik ko‘rinishini bildiradi. Berilgan masaladagi asosiy cheklamalar « $\leq$ » ko‘rinishdagi tengsizliklardan iborat bo‘lgani uchun qo‘shimcha o‘zgaruvchilarning barchasi «+» ishora bilan kiritiladi. Qo‘shimcha o‘zgaruvchilarning har biri faqat bitta tenglamada qatnashadi. Bundan tashqari, bu o‘zgaruvchilarga mos keluvchi

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

vektorlar o‘zaro erkli birlik vektorlar sistemasidan iborat bo‘lgani uchun x_3, x_4, x_5, x_6 o‘zgaruvchilarni **bazis o‘zgaruvchi** deb, x_1, x_2 o‘zgaruvchilarni esa **bazismas o‘zgaruvchi** deb qabul qilamiz.

(7) sistemadan bazis o‘zgaruvchilarni ajratib, (7) – (9) masalani quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\begin{cases} x_3 = 18 - x_1 - 3x_2; \\ x_4 = 16 - 2x_1 - x_2; \\ x_5 = 7 - x_1; \\ x_6 = 5 - x_2. \end{cases} \quad (10)$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; \quad (11)$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max. \quad (12)$$

Bazismas o‘zgaruvchilarni nolga tenglab, topiladigan $x_1=0, x_2=0, x_3=18, x_4=16, x_5=6, x_6=5, F=0$ yechim bazis yechim bo‘ladi. Bazis o‘zgaruvchilarning ishorasi mos tenglamadagi ozod hadlar ishorasi bilan bir xil, ya’ni musbat bo‘lgani uchun bunday bazis yechim **tayanch yechim** deyiladi. Bu bazis yechimni optimal yechimga tekshiramiz. Agar bazismas o‘zgaruvchilar bilan ifodalangan $F(x_1, x_2)$ maqsad

funktsiyadagi barcha noma'lumlar manfiy ishorali koeffitsientga ega bo'lsa, u holda topilgan bazis yechim optimal yechim bo'ladi. Aksincha, agar ba'zi bazismas o'zgaruvchilar maqsad funktsiyada musbat ishorali koeffitsient bilan qatnashsa, u holda topilgan bazis yechim optimal yechim bo'lmaydi. Bu holda bazis o'zgaruvchilardan birini bazismas o'zgaruvchiga almashtirish yo'li bilan maqsad funktsiyaning qiymatini oshirish mumkin.

(10) – (12) masaladagi maqsad funktsiyaning barcha noma'lumlari oldidagi koeffitsientlar musbat ishorali. Demak, topilgan bazis yechim optimal yechimga yaqin bo'lgan boshqa bazis yechimga almashtirish uchun maqsad funktsiyadan koeffitsienti eng katta bo'lgan x_2 o'zgaruvchini tanlaymiz. Bu o'zgaruvchini birorta bazis o'zgaruvchi bilan almashtiramiz. Bunda topilgan bazis yechimda noma'lumlarning nomanfiy bo'lishiga e'tibor berish kerak. Bunga erishish uchun har bir tenglamadagi ozod hadni x_2 oldidagi koeffitsientning absolyut qiymatiga bo'lib **aniqlovchi koeffitsient (A.k)**, deb ataluvchi ko'rsatkich hisoblanadi. A.k tanlangan noma'lum (x_2) musbat ishora bilan qatnashgan tenglamalarda hisoblanmaydi.

$$A_k(x_k) = \min_{a_{ik} < 0} \frac{b_i}{a_{ik}} = \frac{b_l}{a_{lk}}.$$

$$A.k.(x_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 18 - x_1 - 3x_2; \\ x_4 = 16 - 2x_1 - x_2; \\ x_5 = 7 - x_1; \\ x_6 = 5 - x_2. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{18}{3} = 6 \right| \\ \left| \frac{16}{1} = 16 \right| \\ | - | \\ \left| \frac{5}{1} = 5 \right| \end{array} \right.$$

$$F = 2x_1 + \underline{\underline{3x_2}}.$$

Aniqlovchi koeffitsienti eng kichik bo'lgan 4-tenglamadan x_6 bazis o'zgaruvchini x_2 ga almashtirib x_2 ni topamiz:

$$x_2 = 5 - x_6.$$

Topilgan x_2 noma'lumning qiymatini boshqa tenglamalarga va maqsad funktsiyaga qo'yib, quyidagi masalani hosil qilamiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 5 - x_6; \\ x_3 = 3 - x_1 + 3x_6; \\ x_4 = 11 - 2x_1 + x_6; \\ x_5 = 5 - x_1. \end{array} \right.$$

$$F = 15 + 2x_1 - 3x_6.$$

Bu bosqichdagi bazis yechimni topish uchun bazismas x_1 va x_6 noma'lumlarni 0 ga tenglashtiramiz:

$$x_1=0, x_2=5, x_3=3, x_4=11, x_5=5, x_6=0, F=15.$$

Topilgan bazis yechim optimal yechim bo'lmaydi, chunki maqsad funktsiya $F(x_1, x_6)$ da x_1 noma'lum musbat koeffitsient bilan qatnashmoqda. Demak, endi x_1 o'zgaruvchini bazisga kiritib maqsad funktsiya qiymatini oshirish mumkin. x_1 o'zgaruvchini bazisga kiritish va boshqa bazis o'zgaruvchini bazisdan chiqarish uchun aniqlovchi koeffitsient hisoblanadi:

$$\begin{array}{rcl} & A.K.(x_1) & \\ \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 5 - x_6; \\ x_3 = 3 - x_1 + 3x_6; \\ x_4 = 11 - 2x_1 + x_6; \\ x_5 = 5 - x_1. \end{array} \right. & \begin{array}{l} | - | \\ | 3 | \\ | 5, 5 | \\ | 5 | \end{array} & \\ F = 15 + \underline{\underline{2x_1}} - 3x_6. & & \end{array}$$

Aniqlovchi koeffitsienti eng kichik bo'lgan ikkinchi tenglamadan x_1 bazisga kiritiladi va x_3 bazis o'zgaruvchini esa bazisdan chiqariladi. Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x_1 = 3 - x_3 + 3x_6.$$

x_1 noma'lumning topilgan qiymatini qolgan tenglamalarga va maqsad funktsiyaga qo'yib quyidagi masalaga ega bo'lamiz:

$$\begin{array}{rcl} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3 - x_3 + 3x_6; \\ x_2 = 5 - x_6; \\ x_4 = 5 + 2x_3 - 5x_6; \\ x_5 = 2 + x_3 - 3x_6. \end{array} \right. & & \\ F = 21 - 2x_3 + 3x_6. & & \end{array}$$

Bu bosqichdagi bazis yechim:

$$x_1=3, x_2=5, x_3=0, x_4=5, x_5=2, x_6=0, F=21.$$

Keyingi bosqichda maqsad funktsiyadan x_6 ni tanlaymiz va u uchun aniqlovchi koeffitsientni hisoblaymiz:

$$\begin{array}{rcl} & A.K.(x_6) & \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3 - x_3 + 3x_6; \\ x_2 = 5 - x_6; \\ x_4 = 5 + 2x_3 - 5x_6; \\ x_5 = 2 + x_3 - 3x_6. \end{array} \right. & \begin{array}{l} | - | \\ | 5 | \\ | 1 | \\ | \frac{2}{3} | \end{array} & \end{array}$$

Aniqlovchi koeffitsienti eng kichik bo'lgan 4-tenglamada x_5 bazis o'zgaruvchini x_6 ga almashtiririb quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x_6 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5.$$

Topilgan x_6 noma'lumning qiymatini boshqa tenglamalarga va maqsad funktsiyaga qo'yib quyidagi masalaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_6 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5; \\ x_1 = 5 - x_5; \\ x_2 = \frac{13}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5; \\ x_4 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_5. \end{cases}$$

$$F = 23 - x_3 - x_5.$$

Bu bosqichdagi bazis yechim:

$$x_1=5, x_2=13/3, x_3=0, x_4=5/3, x_5=0, x_6=2/3, F=23$$

masalaning optimal yechimi bo'ladi, chunki x_3 va x_5 o'zgaruvchilarning qiymatini oshirib borish oqibatida F funktsiyaning qiymati 23 gacha kamaya boradi va uning eng katta qiymati $F=23$ bo'ladi.

Javob: masalaning optimal yechimi:

$$X(5;13/3;0;5/3;0;2/3). F_{max}=23.$$

7. Sun'iy bazis usuli. Deylik, chiziqli dasturlash masalasi quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \\ F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

Ushbu masalani simpleks usulni qo'llab yechish uchun x_3, x_4 sun'iy o'zgaruvchilar qo'shib, quyidagi kengaytirilgan M -masalani tuzamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4 = b_2; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0; \\ F = c_1x_1 + c_2x_2 - M(x_3 + x_4). \end{cases}$$

bu erda $M - s_1$ va s_2 koeffitsientlarga nisbatan katta son ($M > \max(s_1; s_2)$).

Ushbu masaladagi x_3 va x_4 sun'iy o'zgaruvchilarni bazis o'zgaruvchilar deb qabul qilamiz va ularni bazismas x_1 va x_2 o'zgaruvchilar orqali ifodalaymiz va ularning qiymatini maqsad

funktsiyaga qo'yib topamiz:

$$\begin{cases} x_3 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2; \\ x_4 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2; \\ F = c_1x_1 + c_2x_2 - M[b_1 + b_2 - (a_{11} + a_{21})x_1 - (a_{12} + a_{22})x_2]; \end{cases}$$

yoki

$$F = M(b_1 + b_2) + (c_1 - a_{11} - a_{21})x_1 + (c_2 - a_{12} - a_{22})x_2.$$

So'ngra ushbu masalaga simpleks usulni qo'llab bazislarni almashtirira boramiz va masalaning optimal yechimini topamiz yoki uning yechimi mavjud emasligini aniqlaymiz. Deylik, so'nggi bosqichda kengaytirilgan masalaning optimal yechimi

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$$

topilgan bo'lsin. Agar ushbu yechimda sun'iy bazis o'zgaruvchilar $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$ bo'lsa, u holda topilgan yechim berilgan chiziqli dasturlash masalasining ham yechimi bo'ladi. Aksincha, agar sun'iy bazis o'zgaruvchilardan birortasi noldan farqli bo'lsa, u holda berilgan masala yechimga ega bo'lmaydi.

Sun'iy bazis usuliga doir yuqoridagi fikr mulohazalarni masaladagi tenglamalar soni $m > 2$ va noma'lumlar soni $n > 2$ ($m > n$) bo'lgan holda ham qo'llash mumkin.

Misol. Quyidagi chiziqli dasturlash masalasini sun'iy bazis usuli bilan eching:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9; \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; \\ F = x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \min. \end{cases}$$

Yechish. Masalaning shartida bazis o'zgaruvchilar qatnashmaydi. Shuning uchun ularni sun'iy ravishda kiritamiz. Bu o'zgaruvchilarning maqsad funktsiyadagi koeffitsientlarini

$$\max(1; 4) < M = 5$$

deb qabul qilamiz. Natijada quyidagi kengaytirilgan masalaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 + x_4 = 9; \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_5 = 11; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; \\ F = x_1 + 4x_2 + x_3 + 5(x_4 + x_5) \rightarrow \min. \end{cases}$$

Hosil bo'lgan masalani simpleks usul bilan echamiz. Buning uchun eng avval x_4 va x_5 sun'iy o'zgaruvchilarni ajratib, ularning qiymatlarini

bazismas x_1, x_2, x_3 o'zgaruvchilar orqali ifodalaymiz:

$$\begin{array}{l} A.K.(x_2) \\ \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 9 - 5x_1 - 12x_2 - 2x_3; \\ x_5 = 11 - 3x_1 - 4x_2 - 4x_3; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} |3/4| \\ |11/4| \end{array} \end{array}$$

Bazis o'zgaruvchilarning qiymatlarini maqsad funktsiyaga qo'yib, quyidagi funktsiyaga ega bo'lamiz:

$$F = 100 - 39x_1 - \underline{\underline{76x_2}} - 29x_3 \rightarrow \min.$$

Maqsad funktsiyasidan koeffitsienti eng kichik bo'lgan x_2 noma'lumni tanlaymiz. Bu o'zgaruvchini bazisga kiritib bazis o'zgaruvchilardan birortasini bazisdan chiqaramiz. Bunday almashtirishni qaysi tenglamada amalga oshirish kerakligini aniqlash uchun noma'lum bo'yicha aniqlovchi koeffitsientni hisoblaymiz. Aniqlovchi koeffitsienti eng kichik bo'lgan birinchi tenglamada bazisni almashtirib topamiz:

$$x_2 = \frac{3}{4} - \frac{5}{12}x_1 - \frac{1}{6}x_3.$$

x_4 sun'iy o'zgaruvchi bazisdan chiqarilgandan so'ng boshqa ishlatilmaydi. Shu sababli uni inobatga olmaslik, ya'ni tashlab yuborish mumkin.

Topilgan yangi bazis o'zgaruvchi x_2 ning qiymatini ikkinchi tenglama va maqsad funktsiyaga qo'yib quyidagi masalaga ega bo'lamiz:

$$\begin{array}{l} A.K.(x_3) \\ \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{3}{4} - \frac{5}{12}x_1 - \frac{1}{6}x_3; \\ x_5 = 8 - \frac{4}{3}x_1 - \frac{10}{3}x_3; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} |4,5| \\ |2,4| \end{array} \\ F = 43 - \frac{22}{3}x_1 - \underline{\underline{\frac{49}{3}x_3}} \end{array}$$

Bu bosqichda maqsad funktsiyadan koeffitsienti eng kichik bo'lgan x_3 noma'lumni tanlaymiz. Ushbu o'zgaruvchini bazisga kiritib aniqlovchi koeffitsienti eng kichik bo'lgan ikkinchi tenglamadan x_5 sun'iy o'zgaruvchini bazisdan chiqaramiz. Bazislarni almashtirish oqibatida quyidagi masalaga ega bo'lamiz:

$$\begin{array}{l} A.K.(x_3) \\ \left\{ \begin{array}{l} x_3 = \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_1; \\ x_2 = \frac{7}{20} - \frac{7}{20}x_1; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} |6| \\ |1| \end{array} \\ F = \frac{19}{5} - \frac{4}{5}x_1 \rightarrow \min. \end{array}$$

Bu bosqichda topilgan bazis yechim:

$$x_1=0, x_2=7/20, x_3=12/5, F=19/5.$$

bo'ladi. Lekin bu bazis yechim masalaning optimal yechimi bo'lmaydi, chunki maqsad funktsiyada x_1 (bazismas) o'zgaruvchi manfiy ishorali koeffitsient bilan qatnashmoqda. Demak, x_1 ning qiymatini oshirib borish yo'li bilan maqsad funktsiyaning qiymatini cheksiz ravishda kamaytirib borish mumkin. Uning eng kichik qiymati $19/5$ ga teng deb tasdiqlay olmaymiz. Shu sababli, topilgan bazis yechimni boshqa yechimga almashtiramiz. Buning uchun x_1 noma'lumini bazisga kiritib, aniqlovchi koeffitsienti eng kichik bo'lgan ikkinchi tenglamadan x_2 ni bazisdan chiqaramiz. Bazislarni almashtirish va yangi bazisni boshqa tenglama va maqsad funktsiyaga qo'yish oqibatida quyidagi masalaga ega bo'lamiz:

$$x_1 = 1 - \frac{20}{7}x_2;$$

$$x_3 = 2 - \frac{8}{7}x_2;$$

$$F = 3 + \frac{16}{7}x_2.$$

Bu bosqichda topilgan bazis yechim:

$$x_1=1, x_2=0, x_3=2, F=3.$$

bo'ladi. Ushbu bazis yechim masalaning optimal yechimi bo'ladi, chunki maqsad funktsiyada bazismas o'zgaruvchi x_2 musbat ishora bilan qatnashmoqda. Uning qiymatini oshirib berish oqibatida maqsad funktsiyaning qiymati 3 dan katta bo'lib boradi va uning eng kichik qiymati $x_2=0$ da $F=3$ bo'ladi.

Javob: masalaning optimal yechimi: $X(1;0;2)$. $F_{\min} = 3$.

8. Transport masalasi. Transport masalasi chiziqli dasturlashning alohida maxsus masalasi bo'lib, u bir jinsli yuk tashishning eng tejamli rejasini topishga ko'maklashadi. Ushbu masala xususiyligiga qaramay qo'llanish sohasi juda kengdir. Transport masalasi quyidagicha qo'yiladi:

Deylik, 3 ta A_1, A_2, A_3 ta'minotchida mos ravishda a_1, a_2, a_3 miqdorda bir jinsli mahsulot yig'ilib qolgan bo'lsin. Bu mahsulotlarni talablari mos ravishda b_1, b_2, b_3 bo'lgan 3 ta V_1, V_2, V_3 iste'molchilarga yuborish kerak bo'lsin. Har bir ta'minotchidan har bir iste'molchiga mahsulot birligini tashish uchun sarf qilinadigan yo'l xarajatlar matritsa ko'rinishda berilgan:

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

bu erda $c_{ij} (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,3})$ i -ta'minotchidan j -iste'molchiga mahsulot birligini tashish uchun sarflanadigan yo'l xarajatini bildiradi. Yuk tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, ta'minotchilardagi barcha yuklar iste'molchilar orasida to'la taqsimlansin, iste'molchilarning talablari to'la qondirilsin va sarflangan yo'l xarajatlarning umumiy qiymati minimal (eng kam) bo'lsin.

Masalani yechish uchun, eng avvalo, uning shartlarini va maqsadini matematik formada ifodalash kerak, ya'ni masalaning matematik modelini tuzish kerak. Buning uchun har bir ta'minotchidan har bir iste'molchiga tashiladigan yuk miqdorini $x_{ij} (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,3})$ bilan belgilaymiz. U holda rejalar matritsasi

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda yoziladi. Masalaning berilgan va noma'lum parametrlarini quyidagi ko'rinishdagi jadvalga joylashtirish mumkin:

7.1-jadval

Ta'minotchilar	Iste'molchilar			Ta'minotchilardagi mahsulot zaxirasi
	V_1	V_2	V_3	
A_1	s_{11} x_{11}	s_{12} x_{12}	s_{13} x_{13}	a_1
A_2	s_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	a_2
A_3	s_{31} x_{31}	s_{32} x_{32}	s_{33} x_{33}	a_3
Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi	b_1	b_2	b_3	

Masalaning birinchi shartiga ko'ra, ta'minotchilardan barcha yuklar taqsimlanishi kerak, bu shart quyidagi tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= a_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= a_3 \end{aligned} \right\} \text{ yoki } \sum_{j=1}^3 x_{ij} = a_i (i = 1, 2, 3)$$

Masalaning ikkinchi shartiga ko‘ra iste‘molchilarning mahsulotga bo‘lgan talabi to‘la qondirilishi kerak. Bu shart quyidagi tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= b_2 \\ x_{13} + x_{22} + x_{33} &= b_3 \end{aligned} \right\} \text{ yoki } \sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_i \quad (i=1,2,3)$$

Masalaning iqtisodiy ma‘nosiga ko‘ra, undagi noma‘lumlar $x_{ij} \geq 0$, ya‘ni nomanfiy bo‘lishi kerak.

Jadvaldan ko‘rinadiki, i -ta‘minotchidan j -iste‘molchiga rejadagi x_{ij} birlik mahsulotni tashish uchun $c_{ij}x_{ij}$ miqdorida xarajat sarf qilinadi. U holda rejaning umumiy xarajati

$$Z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij}$$

ga teng bo‘ladi.

Shunday qilib, masalaning matematik modelini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = a_i \quad (i=1,2,3) \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = b_i \quad (i=1,2,3) \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,3; j=1,2,3) \quad (3)$$

$$Z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (4)$$

Umumiy holda, ya‘ni ta‘minotchilar soni n ta va iste‘molchilar soni m ta bo‘lgan holda, masalaning matematik modeli quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i \quad (i=\overline{1,m}) \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j \quad (j=\overline{1,n}) \quad (6)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}) \quad (7)$$

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (8)$$

Ushbu masala shartlari o‘rinli bo‘lishi uchun takliflarning yig‘indisi talablar yig‘indisiga teng bo‘lishligi talab qilinadi, ya‘ni

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^m b_j \quad (9)$$

Bunday shartni qanoatlantiruvchi transport masalasi **yopiq modeli masala** deb ataladi.

Har qanday yopiq modeli transport masalasi optimal yechimga ega ekanligi isbotlangan.

Masalaning (1) va (2) sistemalari birgalikda 3 ta satr va 3 ta ustunda joylashgan $3 \cdot 3 = 9$ ta (umumiy holda $n \cdot m$ ta) tenglamadan iborat bo‘ladi. Agar (1) sistemaning hamda (2) sistemaning tenglamalarini hadma-had qo‘shsak, 2 ta bir xil tenglama hosil bo‘ladi. Bu esa (1) va (2) sistemada bitta chiziqli bog‘liq tenglama birligini ko‘rsatadi. Demak, bu sistema $3+3-1=5$ ta chiziqli erkli tenglamalarni o‘z ichiga oladi. Ta‘minotchilar soni m ta va iste‘molchilar soni n ta bo‘lgan transport masalasi shartlarida $n+m-1$ ta tenglama o‘zaro erkli bo‘ladi.

Shunday qilib, transport masalasining boshlang‘ich bazis yechimi biror usul bilan topilgan bo‘lsa, u holda (x_{ij}) – matritsaning $n+m-1$ ta komponentlari 0 dan farqli bo‘lib, qolganlari nolga teng bo‘ladi. 0 dan farqli x_{ij} lar joylashgan katakchalar “band” katakchalar, qolganlari “bo‘sh” katakchalar deyiladi.

Agar band kataklarni vertikal va gorizontalar kesimlar bilan tutashtirganda yopiq ko‘pburchak hosil bo‘lsa, bunday hol “**tsikllanish**” deyiladi va yechim bazis yechim bo‘lmaydi. Demak, birorta yechim bazis yechim bo‘lishi uchun band kataklar soni $n+m-1$ ta bo‘lib, tsikllanish ro‘y bermasligi kerak.

Agar bazis yechimda noldan farqli bo‘lgan bazis o‘zgaruvchilar soni $n+m-1$ dan kam bo‘lsa, u holda tsikllanish holati ro‘y berishiga yo‘l qo‘ymagan holda biror bo‘sh katakchaga 0 kiritib, uni band katakka aylantirish kerak. Masalan, bazis yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘lsin.

7.2-jadval

Ta‘minotchilar	Iste‘molchilar			Mahsulot zahirasi
	V_1	V_2	V_3	
A_1	s_{11} x_{11}	s_{12}	s_{13}	a_1
A_2	s_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23}	a_2
A_3	s_{31}	s_{32} x_{23}	s_{33} x_{33}	a_3
Talab	b_1	b_2	b_3	

Jadvalda ko‘rinadiki, ushbu bazis yechimdagi band kataklar soni $n+m-l=3+3-l$ dan kam. Demak, biror bo‘sh katakka 0 yozib, uni band katakka aylantiramiz. 0 ni (A_2, V_3) katakdan tashqari ixtiyoriy katakka kiritish mumkin. Agar (A_2, V_3) katakni band katakka aylantirsak, band kataklar yopiq to‘rtburchak hosil qiladi va bu holda tsikllanish ro‘y beradi.

Transport masalasini yechish uchun dastlab uning boshlang‘ich bazis yechimi topiladi. Agar topilgan yechim optimallik shartini qanoatlantirmasa uni boshqa bazis yechimga almashtiriladi. Bazis yechimlarni almashtirish optimal yechim topilguncha takrorlanadi va eng kam yo‘l xarajatiga mos kelgan yechim (reja) topiladi.

Transport masalasining boshlang‘ich bazis yechimini topish usullari bilan tanishamiz:

9. “Shimoliy-g‘arb burchak” usuli

Deylik, $n \cdot m = 3 \times 3$ o‘lchovli transport masalasi berilgan bo‘lsin. Bu masalaning berilganlarini quyidagi ko‘rinishdagi jadvalga joylashtiramiz:

7.3-jadval

Ta‘minotchilar	Iste‘molchilar			Mahsulot zaxirasi
	V_1	V_2	V_3	
A_1	s_{11}	s_{12}	s_{13}	a_1
A_2	s_{21}	c_{22}	c_{23}	a_2
A_3	s_{31}	s_{32}	s_{33}	a_3
Mahsulotga bo‘lgan talab	b_1	b_2	b_3	

Yo‘l xarajatlarini hisobga olmagan holda V_1 iste‘molchining b_1 talabini A_1 ta‘minotchining a_1 mahsuloti hisobiga qondirishga kirishamiz. Buning uchun a_1 va b_1 yuk birliklaridan kichigini, ya‘ni

$$x_n = \min(a_1, b_1)$$

ni tanlaymiz. Topilgan sonni (A_1, V_1) katakning o‘rtasiga yozamiz. Agar $a_1 < b_1$ bo‘lsa, u holda V_1 iste‘molchining talabini to‘la qondirish uchun etishmaydigan yuk birligini A_2 dan olib, (A_2, V_1) katakka yozamiz. A_1 ta‘minotchida boshqa mahsulot qolmagani uchun u boshqa

iste'molchilarga mahsulot yubora olmaydi. Shu sababli A_1 qatorga boshqa qaramaymiz. Bunday holatda A_1 qator “o‘chiriladi” deyiladi. Ana shu yo‘l bilan qator va ustunlarni o‘chirib borib, (A_3, V_3) katakka etib kelamiz. Agar masala yopiq modeli bo‘lib, tsikllanish holatidan holi bo‘lsa, u holda “shimoliy-g‘arb burchak” usuli bilan topilgan reja boshlang‘ich bazis reja (yoki yechim) bo‘ladi.

1-misol. Berilgan transport masalasining boshlang‘ich bazis yechimini “shimoliy-g‘arb burchak” usuli bilan toping.

7.4-jadval

Ta'minotchilar	Iste'molchilar			Mahsulot zaxirasi
	V_1	V_2	V_3	
A_1	5	3	1	100
A_2	9	5	7	120
A_3	7	9	6	130
Mahsulotga bo‘lgan talab	90	150	110	

Yechish. Masalaning berilganlarini quyidagi ko‘rinishdagi jadvalga joylashtiramiz hamda (A_1, V_1) katakdan boshlab, “shimoliy-g‘arb burchak” usuli asosida boshlang‘ich bazis yechimi topiladi:

$b_j \backslash a_i$	90	150	110
100	5 90	3 10	1
120	9	5 120	7
130	7	9 20	6 110

Topilgan yechimni quyidagi yechimlar matritsasi ko‘rinishda yozamiz:

$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} 90 & 10 & 0 \\ 0 & 120 & 0 \\ 0 & 20 & 110 \end{pmatrix}$$

Ushbu yechimga mos keluvchi umumiy yo‘l xarajatlari:

$$Z = 90 \cdot 5 + 10 \cdot 3 + 120 \cdot 5 + 20 \cdot 9 + 110 \cdot 6 = 1920$$

pul birligiga teng bo‘ladi.

10. Minimal xarajatlar usuli

Bu usulda boshlang‘ich bazis yechimni qurish uchun, dastlab, yo‘l xarajati eng kichik bo‘lgan (A_i, B_j) katakchaga mos bo‘lgan x_{ij} taqsimot topiladi:

$$x_{ij} = \min(a_i, b_j)$$

soʻngra keyingi eng kichik qiymatli katakchaga oʻtiladi va hokazo. Bu jarayon barcha mahsulotlar toʻla taqsimlanguncha takrorlanadi.

2-misol. Yuqoridagi 1-masalaning boshlangʻich bazis yechimini “minimal xarajatlar” usuli bilan toping.

$a_i \backslash b_j$	90	150	110
100	5	3	1
120	9	5	7
130	7	9	6
	90	30	10

Yechish. 1-qadamda yoʻl xarajatlari ichida eng kichigi (A_1, V_3) katakchaga mos kelgani uchun, bu katakchadagi x_{13} taqsimotni topamiz:

$$x_{13} = \min(a_1, b_3) = \min(100; 110) = 100.$$

Bu holda A_1 taʼminotchida mahsulot qolmaydi, shuning uchun bu qator “oʻchiriladi”, b_3 ning qiymati

$$b_3^I = b_3 - 100 = 10$$

ga oʻzgaradi.

2-qadamda A_2 va A_3 qatorlardagi yoʻl xarajatlari ichida eng kichigiga mos kelgan (A_2, V_2) katakcha aniqlanadi va unga mos keluvchi x_{22} taqsimot topiladi:

$$x_{22} = \min(a_2, b_2) = \min(120; 150) = 120.$$

Bu holda A_2 qator “oʻchiriladi” b_2 ning qiymati

$$b_2^I = 150 - 120 = 30$$

ga oʻzgartiriladi.

3-qadamda A_3 qatordagi yoʻl xarajatlari ichida eng kichigiga mos keluvchi (A_3, V_3), undan keyin, (A_3, V_1), va nihoyat, (A_3, V_2) katakchalarga mos keluvchi x_{33}, x_{31}, x_{32} taqsimotlar topiladi:

$$x_{33} = \min(a_3, b_3^I) = \min(130; 10) = 10;$$

$$x_{31} = \min(a_3^I, b_1) = \min(120; 90) = 90;$$

$$x_{32} = \min(a_3^{II}, b_2^I) = \min(30; 30) = 30;$$

topilgan bazis yechimni quyidagi yechimlar matritsasi koʻrinishida yozamiz:

$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0 & 120 & 0 \\ 90 & 30 & 10 \end{pmatrix}$$

Bu yechimga mos keluvchi umumiy yo‘l xarajatlari:

$$Z=100\cdot 1+120\cdot 5+90\cdot 7+30\cdot 9+10\cdot 6=1660$$

pul birligiga teng bo‘ladi.

11. Optimal yechimni qurishning potentsiallar usuli

Agar transport masalasining $X^*=(x_{ij}^*)$ bazis yechimi optimal bo‘lsa, unga quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $n+m$ ta sonlar sistemasi mos keladi:

$$u_i+v_j=c_{ij}, \text{ agar } x_{ij}^* > 0,$$

$$u_i+v_j \leq c_{ij}, \text{ agar } x_{ij}^* = 0,$$

bu erdagi u_i va v_j sonlar mos ravishda **“ta’minotchi va iste’molchining potentsiallari”** deyiladi.

Demak, bazis yechim optimal bo‘lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

a) har bir band katak uchun mos potentsiallar yig‘indisi yo‘l xarajati qiymatiga teng bo‘lishi kerak, ya’ni

$$u_i+v_j=c_{ij};$$

b) har bir band katak uchun mos potentsiallar yig‘indisi shu katakdagi yo‘l xarajati qiymatidan katta bo‘lmasligi kerak:

$$u_i+v_j \leq c_{ij}.$$

Agar kamida bitta bo‘sh katak uchun shart bajarilmasa, u holda ko‘rilayotgan bazis yechim optimal bo‘lmaydi va bu yechimni shart buzilgan katakdagi noma’lumni bazisga kiritish yo‘li bilan yaxshilash mumkin bo‘ladi.

Potentsiallar usulining algoritmi quyidagidan iborat:

Boshlang‘ich bazis yechim topiladi.

(6) shart asosida potentsial tenglamalar sistemasi tuziladi. Bunda $n+m-1$ ta band katak uchun $m+n$ ta tenglama hosil bo‘ladi. Noma’lumlar soni tenglamalar sonidan bittaga ortiq bo‘lgani uchun bitta nom’lum erkli bo‘ladi. Unga ixtiyoriy qiymat, masalan, nol qiymat berib qolganlari mos tenglamalardan topiladi.

Bo‘sh kataklar uchun (7) shart tekshiriladi.

Agar bu shart barcha bo‘sh kataklar uchun bajarilsa, u holda yechim optimal bo‘ladi.

Agar (7) shart birorta katak uchun bajarilmasa, u holda yangi bazis yechimga o‘tishga kirishiladi.

Bo'sh kataklarning pastki chap burchagiga optimallik bahosi deb ataluvchi va quyidagi formula yordamida aniqlanuvchi

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, \quad x_{ij} = 0 \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}) \quad (8)$$

sonlar yoziladi. Optimallik bahosi eng katta bo'lgan, ya'ni quyidagi shartni qanoatlantiruvchi

$$\max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij} = \Delta_{p,q}$$

(A_r, V_q) katakka θ son kiritiladi. Bu katakdan boshlab band kataklardagi taqsimotlardan θ ni ayirib va qo'shib borib, uchlari band kataklarda bo'lgan yopiq ko'pburchak hosil qilinadi. θ ning son qiymati sifatida “–” ishorali kataklardagi yuk birliklaridan eng kami tanlanadi va shu miqdor barcha “–” ishorali kataklardan ayriladi va “+” ishorali kataklarga qo'shiladi. Natijada yangi bazis yechim topiladi. Bazis yechimlarni almashtirish jarayoni optimal yechim topilgunga, ya'ni barcha bo'sh kataklarda

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leq 0 \quad (9)$$

shart o'rinli bo'lguncha takrorlanadi.

12. Ochiq modelli transport masalalari

Yuqorida biz yopiq modelli transport masalasini, ya'ni

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j$$

shart o'rinli bo'lgan yopiq modelli transport masalasi va uni yechish usullari bilan tanishdik.

Deylik, $\sum a_i \neq \sum b_j$ shart o'rinli bo'lsin. U holda quyidagi 2 ta holatdan biri ro'y berishi mumkin:

- $\sum a_i < \sum b_j$ (talab taklifdan ko'p);
- $\sum a_i > \sum b_j$ (taklif talabdan ko'p).

Bunday shartlar o'rinli bo'lgan masalalar **ochiq modelli transport masalalari** deyiladi. Bunday masalalarni yechishdan avval ularni yopiq modelli masalaga aylantirish va so'ngra potentsiallar usulini qo'llash kerak.

Agar transport masalasida a) shart o'rinli bo'lsa, u holda bu masalani yopiq modelli masalaga aylantirish uchun “soxta ta'minotchi” kiritiladi va undagi mahsulot zaxirasi $\sum b_j - \sum a_i = a_{m+1}$ songa teng deb qabul qilinadi va soxta ta'minotchiga mos kelgan qatorda transport xarajatlari 0 ga teng bo'ladi, ya'ni

$$c_{m+1,j}=0 \ (j=1,2,\dots,n).$$

Agar masalada b) shart o‘rinli bo‘lsa, “soxta iste’molchi” kiritiladi va bu iste’molchining mahsulotga bo‘lgan talabi $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum b_j$ songa, unga mos keluvchi transport xarajatlari 0 ga teng bo‘ladi, ya’ni $c_{in+1}=0$ ($i=1,2,\dots,m$) deb qabul qilinadi.

7.1-§. Resurslarni optimal taqsimlash masalalari

Chiziqli dasturlashning ko‘p amaliy masalalarida chegaralangan resurslarni turli ishlab chiqarish jarayonlariga taqsimlash va ulardan optimal foydalanish talab qilinadi. Bu erda optimal foydalanish deganda mavjud resurslardan foydalanib maksimal foyda olish yoki maksimal miqdorda mahsulot ishlab chiqarish nazarda tutiladi. Masalan, quyidagi masalalarni «**resurslarni optimal taqsimlash masalasi**» deb qarash mumkin:

- a) chegaralangan miqdordagi resurslardan turli mahsulotlar ishlab chiqarishda optimal foydalanish masalasi;
- b) qishloq xo‘jalik mahsulotlarini etishtirishda er, suv va boshqa resurslarni optimal taqsimlash;
- v) mablag‘larni reklama turlariga optimal taqsimlash masalasi;
- g) ishlab chiqarish texnologiyalaridan va uskunalardan ishlab chiqarish jarayonida optimal foydalanish masalasi.

Bunday masalalarni chiziqli dasturlash usullari bilan yechishdan oldin ularning iqtisodiy ma’nosiga asoslanib, matematik modellarini tuzish kerak. So‘ngra hosil bo‘lgan chiziqli dasturlash masalalarini yechish usullaridan birini qo‘llab yechish va topilgan yechimni tahlil qilish kerak.

Ishlab chiqarishda resurslardan optimal foydalanish masalasi bilan tanishamiz. Bu masala **ishlab chiqarishni rejalashtirish** yoki **ishlab chiqarishni tashkil etish masalasi** deb ataladi.

Masalaning qo‘yilishi: korxonada ikki xil A_1, A_2 mahsulotlar ishlab chiqariladi. Buning uchun zaxiralari mos ravishda b_1, b_2, b_3 miqdorlarda bo‘lgan 3 xil B_1, B_2, B_3 resurlar ishlatiladi. Har bir mahsulot birligini ishlab chiqarishda sarflanadigan turli resurslar miqdori (normasi) hamda mahsulotlar birligidan olinadigan daromadlar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Resurslar Mahsulot turlari	B_1	B_2	B_3	Daromad
A_1	A_{11}	a_{12}	a_{13}	C_1
A_2	A_{21}	a_{22}	a_{23}	C_2
Resurslar zaxirasi	B_1	b_2	b_3	

Jadvaldagi har bir a_{ij} – i – mahsulot birligiga sarflanadigan j – resurs miqdorini, s_i – i – mahsulot birligidan olinadigan daromadni bildiradi.

Masalaning iqtisodiy ma’nosi: mavjud resurslardan foydalangan holda qaysi mahsulotdan qancha ishlab chiqarganda korxonaning qo‘lga kiritadigan umumiy daromadi maksimal bo‘ladi?

Masalaning matematik modelini tuzamiz. Buning uchun korxona A_1 mahsulotdan x_1 birlik, A_2 mahsulotdan x_2 birlik ishlab chiqarsin, deb qabul qilamiz. Iqtisodiy ma’nosiga ko‘ra, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ shartlar o‘rinli bo‘ladi. U holda V_1 resurdan A_1 va A_2 mahsulotlarni ishlab chiqarishda jami

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2$$

birlik sarf qilinadi. Lekin bu miqdor V_1 resurning zaxirasi b_1 dan oshmasligi kerak, ya’ni

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \leq b_1$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi kerak. Xuddi shuningdek, V_2 va V_3 resurslar uchun quyidagi tengsizliklarni hosil qilamiz:

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2;$$

$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 \leq b_3.$$

Korxona x_1 miqdorda A_1 mahsulot ishlab chiqarishdan s_1x_1 miqdorda, x_2 miqdorda A_2 mahsulot ishlab chiqarishdan esa s_2x_2 miqdorda daromad oladi. Demak, ikkala mahsulotni ishlab chiqarishdan olinadigan umumiy daromad

$$s_1x_1 + s_2x_2$$

bo‘ladi. Bu ifodani $F(x_1, x_2)$ bilan belgilaymiz va uni maksimumga intilishini talab qilamiz. Natijada berilgan masalaning quyidagi matematik modeliga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \leq b_1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 \leq b_3; \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \quad (2)$$

$$F(x_1, x_2) = s_1x_1 + s_2x_2 \rightarrow \max. \quad (3)$$

Bu masalani b_i ($i=1,2,3$), c_j ($j=1,2$) va $a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ parametrlarni

aniq qiymatlarida grafik usulni qo'llab yechish mumkin. Deylik, $b_1=21$, $b_2=21$, $b_3=18$, $c_1=16$, $c_2=25$ hamda $a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ parametrlar berilgan bo'lsin. U holda (1) – (3) masala quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 21; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 21; \\ 3x_1 + x_2 \leq 18; \end{cases} \quad (4)$$

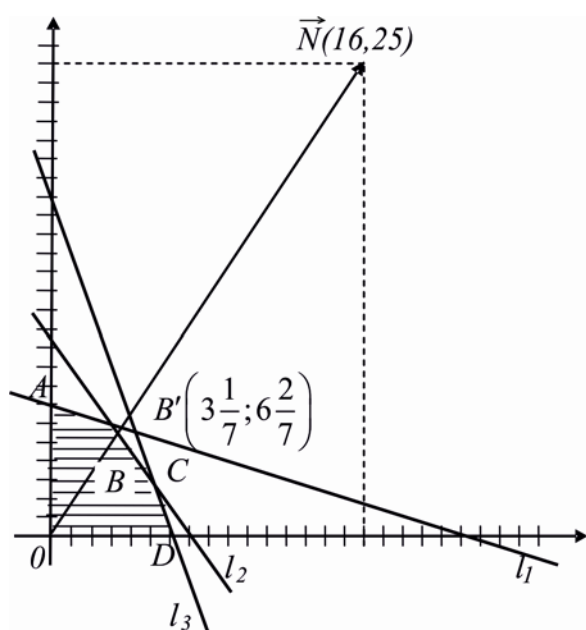
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \quad (5)$$

$$F(x_1, x_2) = 16x_1 + 25x_2 \rightarrow \max. \quad (6)$$

Bu masalani grafik usulda echamiz. Echimlar ko'pburchagini yasash uchun koordinatalar sistemasida

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 21; (l_1) \\ 3x_1 + 2x_2 = 21; (l_2) \\ 3x_1 + x_2 = 18; (l_3) \end{cases}$$

va $x_1=0$, $x_2=0$ chiziqlarni yasaymiz (7.12-shakl).



7.12-shakl.

Berilgan masalaning cheklamalarini qanoatlantiruvchi joiz yechimlar to'plami shtrixlangan OAVSD beshburchakni tashkil qiladi. Endi koordinatalar boshidan $\vec{N}(16;25)$ yo'naltiruvchi vektorni yasaymiz va unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq

$$16x_1 + 25x_2 = S_0 \text{ (const)}$$

tenglama orqali ifodalanadi. Uni $\vec{N}$ vektor yo'nalishida o'ziga parallel ravishda siljitib boramiz. Natijada $F(x_1, x_2)$ funktsiyaga maksimum

qiymat beruvchi V nuqtani topamiz. Bu nuqta l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasidan iborat. Demak, uning koordinatalarini topish uchun quyidagi sistemani echamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 21; \\ 3x_1 + 2x_2 = 21; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3; \\ x_2 = 6; \end{cases} \Rightarrow B(3;6).$$

V nuqtadagi maqsad funktsiya $F(x_1, x_2)$ ning qiymati

$$F_{\max} = 16 \cdot 3 + 25 \cdot 6 = 198$$

bo'ladi.

Demak, korxona A_1 mahsulotdan 3 birlik, A_2 mahsulotdan 6 birlik ishlab chiqarsa, eng ko'p $F_{\max} = 198$ pul birligidagi daromadga ega bo'ladi. Topilgan yechimni masalaning shartlariga qo'ysak, (4) sistemaning birinchi va ikkinchi shartlari optimal yechimda (V nuqtada) tenglamaga aylanishini ko'ramiz. Demak, V_1 va V_2 resurslar to'la ishlatiladi. Bunday resurlar **kamyob (defitsit) resurslar** deb ataladi. (4) sistemadagi 3-tengsizlik optimal yechimda qat'iy tengsizlikka aylanadi:

$$3 \cdot 3 + 6 = 15 < 18.$$

Demak, 3-resurs ishlab chiqarishda to'la ishlatilmaydi. Bunday resurslar «**ortiqcha**», ya'ni **kamyob bo'lmagan resurslar** deyiladi. Bundan resurslarni oshirib sarf qilish yo'li bilan ishlab chiqariladigan mahsulot miqdorini oshirish mumkin emas. Ortiqcha resurslarga tegishli bo'lgan 3-chegaraviy shartlar **passiv shartlar** deyiladi. Optimal nuqta bilan bog'liq bo'lgan birinchi va ikkinchi chegaraviy shartlar esa **aktiv shartlar** deyiladi. Aktiv shartlarga mos keluvchi resurslar sarfini bir birlikka oshirish natijasida korxonaning daromadi ham oshishini ko'rsatish mumkin. (1-shakl).

Deylik, V_1 va V_2 resurslar zaxirasini 1 birlikka oshiramiz, u holda (4) – (6) masala quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 22; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 22; \\ 3x_1 + x_2 \leq 18; \end{cases} \quad (7)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \quad (8)$$

$$F(x_1, x_2) = 16x_1 + 25x_2 \rightarrow \max. \quad (9)$$

Bu masalani grafik usulda echib optimal nuqta $B\left(3\frac{1}{7}; 6\frac{2}{7}\right)$ nuqtaga ko'chganini ko'rish mumkin. Bu nuqtadagi $F(x_1, x_2)$ funktsiya eng katta $F_{\max} = 207,43$ qiymatga erishadi.

Xulosa qilib aytish mumkinki, kamyob resurslarni oshirib sarf qilish

yo'li bilan ishlab chiqarish hajmini va demak, olinadigan daromad miqdorini oshirish mumkin.

Endi ortiqcha resurslar sarfini optimal ishlab chiqarish rejasiga ta'sir etmasdan qanchagacha kamaytirish mumkin? degan savol tug'iladi. Bu savolga javob topish uchun yana 1-shaklga murojaat qilamiz. Bu shaklda l_3 – passiv shartni ifodalaydi. Optimal yechimga ta'sir qilmagan holda l_3 chiziqni o'ziga parallel ravishda pastga V nuqta bilan kesishguncha siljitamiz. Bu nuqtada $x_1=3$, $x_2=6$ bo'ladi. Demak, 3-resurs sarfini

$$3 \cdot 3 + 6 = 15.$$

birlikkacha kamaytirish mumkin ekanligi ko'rinadi.

2. Qishloq xo'jalik mahsulotlarini etishtirishda er, suv va boshqa resurslardan optimal foydalanish masalasi.

Masala. Fermer xo'jaligida 2 turdagi er maydoni bo'lib, I tur erning umumiy maydoni 100 ga ni, II tur erning umumiy maydoni esa 200 ga ni tashkil qiladi. Fermer xo'jaligi paxta va bug'doy ishlab chiqarishga moslashgan. Har bir turdagi erlarda paxta va bug'doy hosildorligi, ularni etishtirish bo'yicha majburiyat hamda mahsulot birligidan fermer xo'jaligining oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

7.6-jadval

Mahsulot turlari	Hosildorlik, (ts/ga)		Mahsulot etishtirish rejası, (t)	Daromad, (ts/ p.b.)
	I tur er	II tur er		
Paxta	28	25	500	15
Bug'doy	20	25	300	5
Umumiy er maydoni, (ga)	100	200		

Fermer xo'jaligi paxta va bug'doy etishtirishga qancha gektardan er maydoni ajratganda, yig'ilgan hosil rejadagidan kam bo'lmaydi hamda fermer xo'jaligining daromadi maksimal bo'ladi?

Yechish. Masalaning matematik modelini tuzamiz. Buning uchun x_{ij} noma'lumlarni kiritamiz. Bunda x_{ij} – i – mahsulot uchun ajratilgan j – tur er maydonini bildiradi.

Demak, paxta uchun I tur erdan x_{11} gektar, II tur erdan esa x_{12} gektar ajratiladi. Bug'doy uchun I tur erdan x_{21} gektar, II tur erdan esa x_{22} gektar ajratiladi. U holda etishtiriladigan paxta hosili

$$28x_{11}+25x_{12}$$

miqdorda bo'ladi. Shartga ko'ra, bu miqdor 500 tsentnerdan kam

bo'lasligi kerak, ya'ni

$$28x_{11}+25x_{12}\geq 500.$$

Bunday shartni bug'doy uchun yozsak,

$$20x_{21}+25x_{22}\geq 300$$

bo'ladi.

Masalaning shartiga ko'ra, er maydonlari chegaralangan bo'lib, uni quyidagicha ifodalaymiz:

$$x_{11}+x_{12}\leq 100;$$

$$x_{21}+x_{22}\leq 200.$$

Masalaning maqsadi fermer xo'jaligi daromadini maksimallashtirishdan iborat. Bu shartni quyidagi chiziqli funktsiya ko'rinishida ifodalaymiz:

$$F=15(28x_{11}+25x_{12})+5(20x_{21}+25x_{22})\rightarrow \max$$

yoki

$$F=420x_{11}+375x_{12}+100x_{21}+125x_{22}\rightarrow \max.$$

Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modeli quyidagidan iborat bo'ladi:

$$\begin{cases} 28x_{11} + 25x_{12} & \geq 500; \\ & 20x_{21} + 25x_{22} \geq 300; \\ x_{11} & + x_{21} \leq 100; \\ & x_{12} + x_{22} \leq 200; \end{cases} \quad (10)$$

$$x_{11} \geq 0; x_{12} \geq 0; x_{21} \geq 0; x_{22} \geq 0, \quad (11)$$

$$F = 420x_{11} + 375x_{12} + 100x_{21} + 125x_{22} \rightarrow \max. \quad (12)$$

Ushbu masalani simpleks usulni qo'llab echamiz. Eng avvalo, qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasiga aylantiramiz:

$$\begin{cases} 28x_{11} + 25x_{12} - x_{10} & = 500; \\ & 20x_{21} + 25x_{22} - x_{20} = 300; \\ x_{11} & + x_{21} + y_1 = 100; \\ & x_{12} + x_{22} + y_2 = 200; \end{cases}$$

$$x_{11} \geq 0; x_{12} \geq 0; x_{10} \geq 0; x_{21} \geq 0; x_{22} \geq 0; x_{20} \geq 0; y_1 \geq 0; y_2 \geq 0,$$

$$F = 420x_{11} + 375x_{12} + 100x_{21} + 125x_{22} \rightarrow \max.$$

Sistemaning birinchi va ikkinchi tenglamalariga sun'iy o'zgaruvchilar (z_{10} va z_{20}) kiritamiz va quyidagi kengaytirilgan masalani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 28x_{11} + 25x_{12} - x_{10} + z_{10} & = 500; \\ 20x_{21} + 25x_{22} - x_{20} + z_{20} & = 300; \\ x_{11} & + x_{21} & + y_1 = 100; \\ x_{12} & + x_{22} & + y_2 = 200; \\ x_{ij} (i = \overline{0, 2}; j = \overline{0, 2}) \geq 0; y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; z_{10} \geq 0; z_{20} \geq 0, \end{cases}$$

$$F = 420x_{11} + 375x_{12} + 100x_{21} + 125x_{22} - M(z_{10} + z_{20}) \rightarrow \max.$$

Simpleks usulning to'rtinchi bosqichida bazisga x_{12} kiritiladi, y_2 bazisdan chiqariladi va yangi bazis yechim topiladi:

$$\bar{X}_4 = (100; 188; 0; 12; 7000; 0; 0; 0; 0; 0).$$

$$F(\bar{X}_4) = 124000.$$

Bu bazis yechim optimallik shartini qanoatlantiradi, ya'ni barcha j lar uchun $\Delta_j \geq 0$. Demak, topilgan x_4 bazis yechim optimal yechim bo'ladi. Topilgan optimal yechimga ko'ra, fermer xo'jaligi I tur erning barcha maydoniga, ya'ni 100 gektarga paxta ekishi, II tur erning 188 gektariga paxta va 12 gektarga bug'doy ekishi kerak. Shunda uning daromadi 124000 p.b. ga teng bo'ladi.

Simpleks jadvalga qarab resurslardan qaysi biri kamyob, qaysi biri ortiqcha ekanligini aniqlash mumkin. Buning uchun topilgan yechimni masalaning shartlariga qo'yib, ikkala tur erni ham to'la ishlatilganligini, ya'ni ularni kamyob ekanligini aniqlaymiz. Bizning misolda: $\Delta_{y_1} = 420$, $\Delta_{y_2} = 375$.

Agar I tur erning yana 1 gektariga ekin ekilsa, ya'ni uning zahirasi 1 gektarga oshirilsa, u holda fermer xo'jaligi qo'shimcha 420 p.b.da daromad oladi. Agar II tur erning zahirasi yana bir gektarga oshirilsa, u holda fermer xo'jalik 375 p.b. qo'shimcha daromad oladi. Bu tasdiqlarni o'zgartirilgan masalani yechish yo'li bilan tekshirish mumkin bo'ladi.

3. Optimal reklamani tanlash masalasi. Deylik, korxona o'z mahsulotini radio va teleko'rsatuv yordamida reklama qilmoqchi bo'lsin. Shu maqsad yo'lida u har oyda 1000 dollar sarf qilishga tayyor. Radioreklamani har bir minuti 5 dollar, telereklamani 1 minuti esa 100 dollar turadi. Korxona radioreklamadan telereklamaga nisbatan kamida ikki barobar ko'proq foydalanmoqchi.

Oldingi yillar tajribasiga ko'ra, 1 minutlik telereklama mahsulot sotilishini radioreklamaga nisbatan 25 marta oshishiga olib keladi.

Korxona har bir reklama turidan qancha vaqt foydalanganda u o'z mahsulotini maksimal miqdorda sotishga erishadi?

Masalaning matematik modelini tuzamiz. Uning uchun korxona

radioreklamadan bir oyda x_1 minut, telereklamadan esa x_2 minut foydalansin, deb qabul qilamiz. U holda korxona reklama uchun jami

$$5x_1 + 100x_2$$

miqdorda pul sarf qiladi.

Masalaning shartiga ko'ra, bu miqdor 1000 dollardan oshmasligi kerak, ya'ni

$$5x_1 + 100x_2 \leq 1000$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi kerak. Korxona radioreklamaga telereklama nisbatan 2 marta ko'proq vaqt ajratmoqchi ekanligini

$$x_1 \geq 2x_2$$

tengsizlik orqali ifodalaymiz. Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ bo'ladi. Masalaning maqsadi sotiladigan mahsulot miqdorini maksimallashtirishidan iborat bo'lib, uni quyidagi chiziqli funktsiya yordamida ifodalaymiz:

$$F(x_1, x_2) = x_1 + 25x_2$$

va uning maksimum qiymat qabul qilishini talab qilamiz. Natijada quyidagi chiziqli dasturlash masalasiga ega bo'lamiz:

$$5x_1 + 100x_2 \leq 1000$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$F(x_1; x_2) = x_1 + 25x_2 \rightarrow \max.$$

Masalani grafik usulda echamiz va quyidagi optimal yechimni topamiz:

$$x_1 = 18,2; x_2 = 9,1;$$

$$F(x_1; x_2) = 18,2 + 25 \cdot 9,1 = 245,7.$$

Demak, korxona har oyda radioreklamadan 18,2 minut, telereklamadan esa 9,1 minut foydalanishi kerak. Bu holda u 245,7 birlik mahsulotni sotishga erishadi. Bunda korxonaning reklama uchun ajratgan 1000 dollar mablag'i to'la ishlatiladi. Bu holda ajratilgan pul mablag'i kamyob resursdan iborat bo'ladi. Agar reklama uchun mablag' yana 100 dollarga oshirilsa, u holda yangi reja topilali:

$$x_1 = 20; x_2 = 10; F_{\max}(x_1; x_2) = 270.$$

Demak, bu holda radioreklamadan har oyi 20 minut, telereklamadan esa 10 minut foydalaniladi va 270 birlik mahsulot sotiladi.

Tayanch so'z va iboralar

Kamyob resurslar, ortiqcha resurslar, passiv shartlar, aktiv shartlar.

Nazorat savollari

1. Qanday masalalar resurslarni optimal taqsimlash masalasiga misol bo'la oladi?
2. Chegaralangan resurslardan ishlab chiqarishda foydalanish masalasida noma'lumlar qanday ma'noga ega?
3. Er, suv va boshqa resurslarni qishloq xo'jalik mahsulotlari etishtirishda optimal taqsimlash masalasida noma'lumlar qanday ma'noga ega?
4. Optimal rekalam turini tanlash masalasi qanday qo'yiladi?
5. Uskuna va texnologiyalardan ishlab chiqarishda optimal foydalanish masalasi qanday qo'yiladi?
6. Resurslarning kamyob yoki ortiqcha ekanligi qanday aniqlanadi?
7. Qanday resurslarni oshirib sarf qilish natijasida ishlab chiqarish hajmi oshadi?

Masalalar

Quyidagi masalalarning:

- a) matematik modelini tuzing;
- b) mavjud yechish usullaridan birini qo'llab, masalaning optimal yechimini toping;
- v) resurslarning kamyob yoki ortiqcha ekanligini baholang;
- g) korxona daromadini oshirish uchun qaysi resurs sarfini oshirish kerakligini aniqlang.

1. Korxona 4 xil mahsulot ishlab chiqarishi uchun xomashyo, ish kuchi va uskunalardan iborat resurslardan foydalanadi. Har bir mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan resurslar me'yori, resurslar zaxirasi va tayyor mahsulot birligidan olinadigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan:

7.8-jadval

Mahsulotlar Resurslar	A	V	S	D	Resurslar zaxirasi
Xomashyolar, (kg)	3	5	2	4	60
Ishchi kuchi, (kishi-soat)	4	7	9	15	200
Uskunalar quvvati, (stanok-soat)	2	7	4	8	64
Daromad	30	25	56	46	

Chegaralangan resurslardan foydalangan holda, korxona daromadini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasini toping.

Javob: b) $X_{onm} = \left(\frac{28}{3}; 0; \frac{34}{3} \right); F_{\max} = \frac{2744}{3};$

v) I va III resurslar kamyob, II-resurs ortiqcha.

2. 3 ta A , V , S mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 3 xil xomashyolar (resurslar) ishlatiladi. Xomashyolar zahirasi mos ravishda 180, 210, va 244 kg.ni tashkil qiladi. Mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan resurslar normasi, tayyor mahsulotlar narxi quyidagi jadvalda keltirilgan:

7.9-jadval

Resurslar \ Mahsulotlar	I	II	III	Mahsulotlar narxi, (sh.p.b.)
A	4	3	1	10
V	2	1	2	14
S	1	3	5	12
Resurslar zaxirasi, (kg)	180	210	244	

Ishlab chiqariladigan yalpi mahsulot hajmini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasini aniqlang.

Javob: b) $X^* = (0; 82; 16)$. $Z_{\max} = 1340$;

v) I va III resurslar kamyob II resurs ortiqcha;

g) I resurs sarfini bir birlikka oshirilsa, yalpi mahsulot miqdori $23/4 = 5,75$ birlikka oshadi. III resurs sarfini bir birlikka oshirilsa, yalpi mahsulot miqdor $5/4$ birlikka oshadi.

3. Korxona bir xil mahsulotni 3 ta texnologiya asosida ishlab chiqaradi. Har bir texnologiyaga bir birlik vaqt oralig'ida sarf qilinadigan resurslar miqdori, ularning zaxirasi, texnologiyalarning mehnat unumdorligi quyidagi jadvalda keltirilgan:

7.10-jadval

Resurslar \ Texnologiyalar	A	V	S	Resurslar zahirasi
Ish kuchi (ishchi-soat)	15	20	25	1200
Birlamchi xomashyo, (tonna)	2	3	25	150
Elektrenegriya, (kvt/soat)	35	60	60	3000
Texnologiyalarning mehnat unumdorligi	360	250	450	
Texnologiyalarni qo'llash vaqti	x_1	x_2	x_3	

Qaysi texnologiyadan qancha vaqt foydalanganda, korxonada maksimal miqdorda mahsulot ishlab chiqariladi?

Javob: b) $X^* = (60; 0; 12)$; $F_{\max} = 23400$;

v) ish kuchi va birlamchi xomashyolar kamyob, elektrenegriya esa

ortiqcha resurs;

g) ish kuchini va birlamchi xomashyo sarfini 1 birlikka oshirilsa, ishlab chiqarish hajmi mos ravishda 12 va 60 birlikka oshadi?

4. Bahorgi va kuzgi bug‘doy etkazish uchun 2 xil er maydonidan foydalaniladi. I tur er maydoni 0,6 mln.ga ni, II tur er maydoni esa 0,4 mln.ga ni tashkil etadi. Erlarning hosildorlik ko‘rsatkichlari quyidagi jadvalda keltirilgan:

7.11-jadval

Er turlari	Hosildorlik, t/ga		Bug‘doy etkazish rejasini, (mln)	Kuzgi va bahorgi bug‘doydan daromad, (sh.p.b.)
	I tur er	II tur er		
Bug‘doy turlari				
Kuzgi	25	20	12	1,5
Bahorgi	20	25	8	2
Umumiy er maydoni, (ga)	0,6	0,4		

Kuzgi bug‘doydan 12 mln. tsentnerdan kam bo‘lmagan hamda bahorgi bug‘doydan 8 mln. tsentnerdan kam bo‘lmagan miqdorda hosil olish hamda daromadni maksimallashtirish uchun I va II turdagi erlardagi ekin maydoni qancha bo‘lishi kerak?

7.2-§. Optimal ovqatlanish rejasini aniqlash (dieta) masalasi

Sanoatda optimal aralashmalar tayyorlash, qishloq xo‘jalik mollari uchun optimal ozuqa tayyorlash va ma‘lum bir fiziologik xususiyatli kishilar uchun optimal ovqatlanish rejasini tuzish hamda aholi uchun iste‘mol savatining optimal tarkibini aniqlash masalalarining matematik modellari bir xil ko‘rinishda bo‘ladi. Faqat, ulardan ba‘zilarida xarajatlarni minimallashtirish talab qilinsa, ba‘zilarida daromadni maksimallashtirish talab qilinadi. Quyida biz ana shunday masalalarni qo‘yib, ularni yechish bilan shug‘ullanamiz.

1. Iste‘mol savati masalasi. Faraz qilaylik, kishi organizmi uchun bir sutkada n xil $A_1, A_2, \dots, A_n$ ozuqa moddalari kerak bo‘lsin, jumladan A_1 ozuqa moddasidan bir sutkada eng kam b_1 miqdorda, A_2 ozuqa moddasidan b_2 miqdorda, A_3 ozuqa moddasidan b_3 miqdorda va hokazo A_n dan b_n miqdorda zarur bo‘lsin va ularni m ta $B_1, B_2, \dots, B_m$ mahsulotlar tarkibidan olish mumkin bo‘lsin. Har bir B_i mahsulot tarkibidagi A_j ozuqa moddasining miqdori a_{ij} birlikni tashkil qilsin.

Masalaning berilgan parametrlarini quyidagi jadvalga joylashtirish mumkin:

Mahsulotlar	Ozuq moddalari				Mahsulot bahosi
	A_1	A_2	...	A_n	
B_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	C_1
B_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	C_2
...	...	...	...	...	...
B_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	C_m
Ozuqa moddasining minimal normasi	b_1	b_2	...	b_n	

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: iste'mol savatiga qanday mahsulotlardan qancha kiritish kerakki, natijada: a) odam organizmi qabul qiladigan ozuqa moddasi belgilangan minimal normadan kam bo'lmasin; b) iste'mol savatining umumiy bahosi minimal bo'lsin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ \text{-----} \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Iste'mol savatiga kiritiladigan i -mahsulotning miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masalaning a) sharti quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi.

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, undagi noma'lumlar manfiy bo'la olmaydi, ya'ni

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0, \quad (2)$$

Masalaning b) sharti uning maqsadini ifodalaydi. Demak, masalaning maqsadi iste'mol savatiga kiritiladigan mahsulotlarning umumiy bahosini minimallashtirishdan iborat bo'lib, uni quyidagi chiziqli funktsiya ko'rinishida ifodalash mumkin.

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \rightarrow \min. \quad (3)$$

Shunday qilib, «iste'mol savati» masalasining matematik modelini

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ \text{-----} \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq b_n, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \rightarrow \min.$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Quyidagi masalaning matematik modelini tuzing va optimal yechimni toping.

1-masala. Sigirlarni ratsional boqish uchun bir kunlik ozuqa 6 birlikdan kam bo‘lmagan A ozuqa moddasini, 12 birlikdan kam bo‘lmagan V ozuqa moddasini va 4 birlikdan kam bo‘lmagan S ozuqa moddasini o‘z ichiga olishi kerak. Bir kunlik ratsionga 2 turdagi yem ishlatiladi. Bu 2 tur yemlar tarkibidagi turli ozuqa moddalari miqdori hamda emlarning narxi quyidagi jadvalda keltirilgan.

7.13-jadval

Ozuqa moddalari \ yem turlari	I	II	Ozuqa moddasiga bo‘lgan minimal talab
A	2	1	6
V	2	4	12
S	0	4	4
1 birlik yemning bahosi, (sh.p.b.)	5	6	

Xarajatlarni minimallashtiruvchi bir kunlik optimal ratsionni aniqlang.

Yechish. Masalaning matematik modelini tuzamiz. Buning uchun bir kunda ishlatiladigan I va II tur em miqdorlarini mos ravishda x_1 va x_2 bilan belgilaymiz.

U holda sigirlarga A ozuqa moddasidan

$$2x_1 + x_2$$

miqdorda berish kerak bo‘ladi. Masalaning shartiga ko‘ra, bu miqdor 6 birlikdan kam bo‘lmasligi kerak, ya’ni

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi kerak. Xuddi shuningdek, V va S ozuqa moddalari uchun quyidagi tengsizliklarni hosil qilamiz:

$$2x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$4x_2 \geq 4$$

Masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko‘ra, masaladagi noma’lumlar nomanfiy, ya’ni

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

bo‘lishi kerak.

Masalaning maqsadi sigirlarni ovqatlanishga sarf qilinadigan xarajatlarning minimal bo‘lishiga erishishdan iborat.

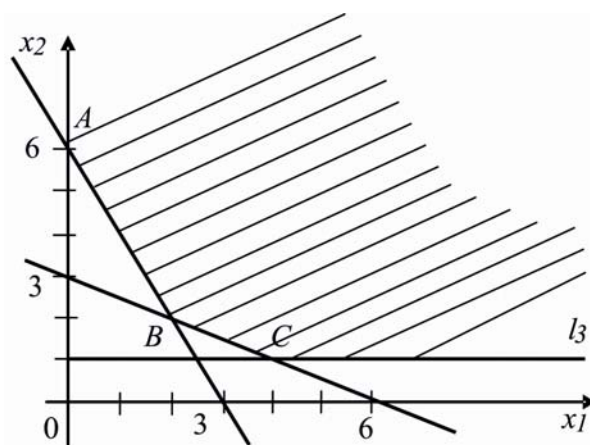
Bu xarajatlar I tur yem uchun $5x_1$, II tur yem uchun $6x_2$ va jami $5x_1 + 6x_2$ pul birligidan iborat. Bu yig‘indini $F(x_1, x_2)$ bilan belgilaymiz va uni maqsad funktsiya deb qabul qilamiz. Masalasining shartiga ko‘ra, xarajatlar minimal bo‘lishi kerakligini inobatga olsak, quyidagi masalaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6; \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 12; \\ 4x_2 \geq 4; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$F(x_1, x_2) = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \min.$$

Qo'yilgan masalani grafik usulda echamiz.



7.13-shakl

Shakldan ko'rinadiki, masalaning joiz yechimlar to'plami yuqoridan chegaralanmagan cheksiz to'plamni tashkil qiladi.

$F(x_1, x_2)$ funktsiya V nuqtada minimum qiymatga erishadi. V nuqta: l_1 : $2x_1 + x_2 = 6$ va l_2 : $2x_1 + 4x_2 = 12$ to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasidan iborat. Bu nuqtaning koordinatalarini topish uchun quyidagi sistemani echamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6; \\ 2x_1 + 4x_2 = 12; \end{cases} \Rightarrow 3x_2 = 6; \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2; \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

Demak, masalaning optimal yechimi quyidagidan iborat bo'ladi:

$$x_1 = 2; x_2 = 2. F_{\min} = 22.$$

Bundan ko'rinadiki, sigirlarga 1 kunda I tur yemdan 2 birlik, II tur yemdan ham 2 birlik berish kerak ekan. Shunda sarf-xarajatlarning eng kam miqdori 22 pul birligiga teng bo'lar ekan.

2. Optimal aralashma tayyorlash masalasi. Benzinning 2 turidan A va V aralashmalar hosil qilinadi. A aralashmaning 60 foizi 1-navli benzindan, 40 foizi 2-navli benzindan tashkil topadi. V aralashmaning 80 foizi 1-nav va 20 foizi 2-nav benzindan tashkil topadi. 1 birlik A aralashmaning bahosi 10 pul birligiga, V aralashmaning bahosi esa 12 pul birligiga teng. 1-nav benzinning zaxirasi 50 birlik, 2-nav benzin zaxirasi 30 birlikni tashkil qiladi.

Korxona A va V aralashmalardan qanchadan tayyorlaganda uning yalpi daromadi maksimal bo'ladi?

Yechish. Masalaning berilganlarini quyidagi jadvalga joylashtiramiz.

7.14-jadval

Benzin turlari Aralashma turlari	Benzin turlari		Aralashma birligining bahosi
	1-nav	2-nav	
A	0,6	0,4	10
V	0,8	0,2	12
Benzin zaxiralari	50	30	

Masalaning matematik modelini tuzish uchun noma'lumlarni belgilaymiz. Bunda x_1 bilan tayyorlanadigan A aralashma miqdorini, x_2 bilan tayyorlanadigan V aralashma miqdorini belgilaydi. U holda 1-nav benzin A aralashma tayyorlashda $0,6 x_1$ miqdorda, V aralashma tayyorlashda $0,8 x_2$ miqdorda, jami $0,6 x_1 + 0,8 x_2$ miqdorda sarflanadi. Masalaning shartiga ko'ra, bu miqdor 1-nav benzin zaxirasi (50 tonna) dan oshmasligi kerak, ya'ni

$$0,6 x_1 + 0,8 x_2 \leq 50$$

cheklamaga ega bo'lamiz. Xuddi shuningdek, 2-nav benzin uchun

$$0,4 x_1 + 0,2 x_2 \leq 30$$

cheklamani hosil qilamiz. Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ bo'lishi kerak. Tayyorlangan A va V aralashmalarni sotishdan keladigan

tushum mos ravishda $10x_1$ va $12x_2$ miqdorlarni, jami tushum esa

$$10 x_1 + 12 x_2$$

miqdorni tashkil qiladi. Masalaning maqsadi bu miqdorni maksimallashtirishdan iborat bo'lib, uni quyidagi chiziqli funktsiya ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$F(x_1 ; x_2) = 10x_1 + 12x_2 \rightarrow \max.$$

Shunday qilib, optimal aralashmalar tayyorlash masalasining matematik modelini hosil qildik. Uni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,8x_2 \leq 50; \\ 0,4x_1 + 0,2x_2 \leq 30; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ F(x_1, x_2) = 10x_1 + 12x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

Masalaning cheklamalariga $x_3 \geq 0$ va $x_4 \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilarni qo'shib, masalani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,8x_2 + x_3 = 50; \\ 0,4x_1 + 0,2x_2 + x_4 = 30; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0; \\ F(x_1, x_2) = 10x_1 + 12x_2 + 0(x_3 + x_4) \rightarrow \max. \end{cases}$$

x_3 va x_4 o'zgaruvchilarni bazis o'zgaruvchilar deb qabul qilamiz va boshlang'ich bazis yechimni hosil qilamiz:

$$X_0 = (0; 0; 50; 30);$$

$$F(X_0) = 0.$$

Masalada quyidagi belgilashlar kiritamiz.

$$P_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad S^l = (10; 12; 0; 0).$$

Bu belgilashlarni simpleks jadvalga joylashtiramiz va Dantsig usuli bilan echamiz:

7.15-jadval

Qadamlar	Bazis vektorlar	S bazis	R_0	10	12	0	0
				R_1	R_2	R_3	R_4
1-qadam	R_3	0	50	0,6	0,8	1	0
	R_4	0	30	0,4	0,2	0	1
	$m+1$		0	-10	-12	0	0
2-qadam	R_2	12	125/2	$\frac{3}{4}$	1	5/4	0
	R_4	0	35/2	1/4	0	-1/4	1
	$m+1$		750	-1	0	15	0
3-qadam	R_2	12	10	0	1	2	-3
	R_1	10	70	1	0	-1	4
	$m+1$		820	0	0	14	4

Jadvaldan ko'rinadiki, 1-qadamda topilgan bazis yechim: $\overline{X}_0 = (0; 0; 50; 30)$ optimal yechim bo'lmaydi, chunki $m+1$ qatordan R_1 va R_2 ustunlarga tegishli optimallik baholari

$$\Delta_{P_1} = 0,6 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0 - 10 = -10;$$

$$\Delta_{P_2} = 0,8 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0 - 12 = -12;$$

manfiy ekanligini ko'ramiz. Bu bazis yechimni boshqa bir bazis yechimga aylantirish uchun

$$\min_{\Delta_j \leq 0} \Delta_j = \min(-10; -12) = -12$$

songa mos keluvchi R_2 vektorni bazisga kiritamiz va

$$\min \left(\frac{50}{0,8}; \frac{30}{0,2} \right) = \frac{50}{0,8} = \frac{125}{2}$$

shartni qanoatlantiruvchi R_3 vektorni bazisidan chiqaramiz. Buning uchun Jordan-Gauss almashtirishlarini bajarib, simpleks jadvalni almashtiramiz va yangi bazis yechimni hosil qilamiz:

$$X_1 = (0; 125/2; 0; 35/2);$$

$$F(X_1) = 750.$$

Ushbu bazis yechim uchun ham optimallik sharti (barcha j lar uchun $\Delta_j \geq 0$ bo'lish sharti) bajarilmaydi, ya'ni bu shart buzilgan. Shuning uchun R_1 vektorni bazisga kiritib, R_4 ni bazisidan chiqaramiz va yangi bazis yechimni hosil qilamiz:

$$X_2 = (10; 12; 0; 0). \quad F(X_2) = 8 \geq 0.$$

Ushbu bazis yechim optimallik shartini qanoatlantiradi. Bunda barcha ustunlardagi optimallik baholari $\Delta_j \geq 0$. Demak, ushbu bazis yechim optimal yechim bo'ladi.

Javob: Korxona A aralashmadan 10 tonna, V aralashmadan 70 tonna tayyorlasa, uning yalpi daromadi maksimal, ya'ni $F_{\max}=820$ bo'ladi.

Tayanch so'z va iboralar

*Iste'mol savati masalasi, optimal aralashma masalasi,
parhez masalasi.*

Nazorat savollari

1. Iste'mol savati masalasida noma'lumlar qanday ma'noga ega?
2. Iste'mol savati masalasining asosiy cheklamalari va maqsad funktsiyasi qanday ma'noga ega?
3. Optimal aralashma tayyorlash masalasida noma'lumlar qanday ma'noga ega?
4. Optimal aralashma tayyorlash masalasining asosiy cheklamalari va maqsad funktsiyasi qanday ma'noga ega?

Masalalar

1. To'rt xil xomashyodan shunday aralashma tayyorlash kerakki, u 26 birlik A moddani, 30 birlik V moddani va 24 birlik S moddani o'z ichiga olsin. Bir birlik xom ashyolar tarkibidagi turli ximik moddalarning miqdori hamda xomashyolar narxi quyidagi jadvalda keltirilgan:

7.15-jadval

Ximik moddalar	1 birlik xomashyo tarkibidagi ximik moddalar miqdori			
	I	II	III	IV
A	1	1	-	4
V	2	-	3	5
S	1	2	4	9
Xomashyolar narxi (p.bir)	5	6	7	4

Kerakli miqdordagi ximik moddalarni o'z ichiga oluvchi va arzon narxdagi aralashma tayyorlash rejasini toping.

2. Chorva mollarini yaxshiroq boqish uchun kundalik ratsionda A vitaminidan 6 birlik, V vitaminidan 12 birlik, S vitaminidan 4 birlik bo'lishi kerak. Mollarni boqish uchun ikki turdagi yemdan foydalaniladi. Jadvalda yem tarkibidagi foydali ozuqa moddalar ulushi, ozuqa moddalariga bo'lgan kundalik ehtiyoj va yemlar birligining narxi berilgan. Chorvani boqish uchun eng arzon bo'lgan kundalik ratsionni aniqlang.

3. Quyidagi jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida qishloq xo'jaligi mollari uchun eng kam xarajat sarf qilishga asoslangan optimal ratsionni aniqlang.

7.16-jadval

Ozuqa moddalar	Yem-xashak tarkibidagi ozuqa moddalar miqdori			Ozuqa moddalarining minimal normasi
	I	II	III	
A	1	3	4	60
V	2	4	2	50
S	1	4	3	12
Yem-xashak narxi (p.b)	9	12	10	

4. Ma'lum bir toifadagi odamlar organizmi uchun A, V, S ozuqa moddalar har kuni mos ravishda 100, 80 va 160 birlikdan kam bo'lmagan miqdorda kerak bo'lsin. Bu ozuqa moddalar ikki A va V mahsulotlar tarkibida mavjud bo'lib, bu ko'rsatkichlar quyidagi jadvalda keltirilgan.

7.17-jadval

Ozuqa moddalar	Mahsulot tarkibidagi ozuqa moddalar miqdori (p.b)		Ozuqa normasi
	A_1	A_2	
A	0,1	0,5	100
V	0,25	0,1	80
S	0,2	0,4	160
Mahsulot narxi (p.b)	3	5	

Xarajatlari minimal bo'lgan bir kunlik ovqatlanish rejasini toping.

Javob: $\bar{X} = (200; 300)$; $F_{\min} = 2100$ p.b.

7. 3-§. Chiqindilarni minimallashtiruvchi optimal bichish masalasi

Sanoat korxonalari, mebel fabrikalari va tikuv fabrikalarida turli o'lchovdagi materiallardan undan kichik o'lchovlardagi turli xomaki

mahsulotlar tayyorlash masalasi hal qilinadi. Bu masalani hal qilishda chiqindilarni minimallashtirish talab qilinadi.

Deylik, uzunligi L bo'lgan xomaki materiallardan uzunliklari Δ_i ($i = \overline{1, m}$) bo'lgan m xil detallarning har biridan a_i miqdorda tayyorlash kerak bo'lsin. Bundan tashqari xomaki materiallarni n ($j = \overline{1, n}$) usul bilan kesish hamda har bir j -usul bilan kesilgan xomaki materialdan a_{ij} miqdorda i -detal tayyorlash va c_j miqdorda chiqindi hosil qilish mumkin ekanligi aniqlangan bo'lsin. Xomaki materiallardan qanchasini qaysi usul bilan kesganda tayyorlangan detallar miqdori rejadagiga teng bo'ladi va hosil bo'lgan chiqindilarning umumiy miqdori eng kam (minimal) bo'ladi? Masalaning ma'lum parametrlarini quyidagi ko'rinishdagi jadvalga joylashtiramiz:

7.18 – jadval

Tayyorlanadigan detallarning uzunliklari	Kesish usullari				Detallar ishlab chiqarish rejasi
	1	2	...	N	
Δ_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	A_1
Δ_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	A_2
...	...	...	...	...	...
Δ_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	A_m
Chiqindilar	C_1	c_2	...	c_n	

j -usul bilan kesiladigan xomaki materiallar miqdorini x_j bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = a_m, \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (2)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min. \quad (3)$$

Bu erda (1) shart har bir tayyor mahsulot bo'yicha rejaning to'liq bajarilishi kerakligini, (2) shart noma'lumlarning nomanfiyligini va (3) shart chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo'lishi kerakligini ko'rsatadi.

1-masala. Korxona omborida uzunliklari 8,1 metr bo'lgan temir quyilmalar mavjud. Bu quyilmalardan ancha kichik bo'lgan 100 ta quyilma mahsulotlar komplektini tayyorlash zarur bo'lsin. Har bir komplekt tarkibiga 2 ta 3 metrli, 1 ta 2 metrli va 1 ta 1,5 metrli quyma mahsulotlar kiradi. Berilgan materiallardan shunday foydalanish

kerakki, quyma mahsulotlar komplekti talab qilingan miqdorda minimal chiqindi bilan tayyorlansin. Turli xil usullardagi ishlov natijasida bitta temir quymasidan olinadigan xomaki mahsulotlar soni hamda chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Mahsulotlar o'lchami, (m)	Kesish usullari								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3 m	2	2	1	1	-	-	-	-	-
2 m	1	-	2	1	4	3	2	1	-
1,5 m	-	1	-	2	-	1	2	4	5
Chiqindilar, (m)	0,1	0,6	1,1	0,1	0,1	0,6	1,1	0,1	0,6

Masalaning matematik modelini tuzamiz. Buning uchun x_j ($x_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$) bilan j -usulda kesilgan temir quyilmalar sonini belgilaymiz. U holda 3 metrli xomaki quyilmalardan

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$$

miqdorda tayyorlanadi. Masalaning shartiga ko'ra, u 200 birlikni tashkil qilishi kerak. Demak,

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 200.$$

Xuddi shuningdek, 2 m va 1,5 m xomaki mahsulotlardan mos ravishda

$$x_1 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + x_8 = 100$$

va

$$x_2 + 2x_4 + x_6 + 2x_7 + 4x_8 + 5x_9 = 100$$

miqdorda tayyorlash kerak. Masalani shartiga ko'ra, barcha xomaki quyilmalarni tayyorlashdagi chiqindilar miqdori minimal bo'lishi kerak. Demak, quyidagi chiziqli funktsiya minimumga erishishi kerak, ya'ni

$$F(x) = 0,1x_1 + 0,6x_2 + 1,1x_3 + 0,1x_4 + 0,1x_5 + 0,6x_6 + 1,1x_7 + 0,1x_8 + 0,6x_9 \rightarrow \min.$$

Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda ekanligini aniqladik:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 200; \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + x_8 & = 100; \\ x_2 + 2x_4 + x_6 + 2x_7 + 4x_8 + 5x_9 & = 100; \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1, 9}); \end{cases}$$

$$F(x) = 0,1x_1 + 0,6x_2 + 1,1x_3 + 0,1x_4 + 0,1x_5 + 0,6x_6 + 1,1x_7 + 0,1x_8 + 0,6x_9 \rightarrow \min.$$

Bu masalaning 1-cheklamasiga x_{10} sun'iy bazis o'zgaruvchi kiritamiz. x_5 o'zgaruvchini bazis o'zgaruvchiga aylantirish uchun 2-cheklamani x_5 o'zgaruvchi oldidagi koeffitsient «4» ga bo'lamiz. Xuddi

shuningdek, 3-cheklamada x_9 ni ajratilgan (bazis) o'zgaruvchiga aylantiramiz. Natijada quyidagi masalaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_{10} = 200; \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_4 + x_5 + \frac{3}{4}x_6 + \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{4}x_8 = 25; \\ \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_6 + \frac{2}{5}x_7 + \frac{4}{5}x_8 + x_9 = 20; \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,10}); \end{cases}$$

$$F(x) = 0,1x_1 + 0,6x_2 + 1,1x_3 + 0,1x_4 + 0,1x_5 + 0,6x_6 + 1,1x_7 + 0,1x_8 + 0,6x_9 + Mx_{10} \rightarrow \min.$$

Bu erda M – etarlicha katta son. Bu masalada x_{10} , x_5 va x_9 o'zgaruvchilarni «bazis o'zgaruvchilar» deb qabul qilamiz va simpleks usuli bilan echamiz.

Simpleks algoritmining V -qadamida masalaning optimal yechimi topiladi, chunki barcha ustunlarda $\Delta_j \leq 0$. Demak, maqsad funktsiyasi $F(x) \rightarrow \min$ ko'rinishdagi masala yechimining optimallik sharti o'rinli bo'layapti. Topilgan optimal yechim quyidagidan iborat:

$$\bar{X} = (60; 20; 0; 40; 0; 0; 0; 0; 0; 0), \quad F_{\min} = 22.$$

Demak, temir quyilmalaridan 60 tasini 1-usul bilan, 20 tasini 2-usul bilan va 40 tasini 4-usul bilan kesganda eng kam chiqindi 22 birlikka teng bo'lar ekan.

Nazorat savollari

1. Optimal bichish masalasining matematik modelida noma'lumlar qanday ma'noga ega?
2. Masaladagi asosiy cheklamalar va maqsad funktsiya qanday ma'noga ega?

Masalalar

Quyidagi berilgan masalalarning matematik modelini tuzing va simpleks usulni qo'llab eching.

110 sm. lik po'lat xipchinlardan uzunliklari 45 sm, 35 sm va 50 sm bo'lgan 3 xil xomaki mahsulotlar tayyorlash kerak bo'lsin. Talab qilingan xomaki mahsulotlar miqdori mos ravishda 40, 30 va 20 birlikni tashkil qilsin. Po'lat xipchinlarni mumkin bo'lgan kesish yo'llari va ularga mos keluvchi xomaki mahsulotlar va chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan:

Xomaki mahsulotlar uzunliklari	Kesish variantlari					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	-	-	-

35	-	1	-	3	1	-
50	-	-	1	-	1	-
Chiqindilar miqdori	20	30	15	5	25	10

Turli kesish usullari bo'yicha qancha po'lat xipchinlar kesganda tayyorlangan xomaki mahsulotlar talabdagidan kam bo'lmaydi va chiqindilarning miqdori minimal bo'ladi?

2. Uzunligi 65 bo'lgan po'lat xipchinlardan uzunliklari 29, 21 va 15 sm bo'lgan 3 xil xomaki mahsulotlar tayyorlash talab qilingan bo'lsin. Talab asosan uzunligi 29 sm bo'lgan mahsulotdan 100 ta, uzunligi 21 sm bo'lgan mahsulotdan 200 ta va uzunligi 15 sm bo'lgan mahsulotdan 150 ta tayyorlash kerak bo'lsin. Po'lat xipchinlarni 6 ta kesish usullari mavjud bo'lib, ularning har biridan foydalanilganda tayyorlanadigan turli mahsulotlar soni hamda chiqadigan chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan:

7.21 jadval

Xomaki mahsulotlar uzunliklari	Kesish variantlari					
	1	2	3	4	5	6
29	2	-	1	-	1	-
21	-	3	-	-	1	2
15	-	-	2	4	1	1
Chiqindilar, (sm)	7	2	6	5	0	8

Qanday variantdan foydalanib, qancha xipchin kesilganda ishlab chiqarilgan mahsulotlar talabdagidan kam bo'lmaydi va chiqindilar minimal bo'ladi?

3. Uzunligi 8 metr bo'lgan taxtalardan 8 ta $2 \times 1,4$ m o'lchovli eshik ramkalarini yasashning 5 ta usuli mavjud bo'lib, bu usullardan qaysi biridan foydalanganda hosil bo'ladigan chiqindilar miqdori minimal bo'ladi. Masalaning berilganlari quyidagi jadvalda joylashtirilgan:

7.22 jadval

Xomaki mahsulotlar uzunliklari	Kesish usullari				
	1	2	3	4	5
2 m	4	3	2	1	-
1,4 m	-	1	2	4	5
Chiqindilar, (sm)	-	0,6	1,2	0,4	1

Javob: 1-usul bilan uchta taxtani ($x_1=3$), 4-usul bilan 4 ta taxtani ($x_4=4$) kesish kerak. Shunda chiqindilar miqdori $F_{\min}=7$ ga teng bo'ladi.

7.4-§. Transport masalasiga keltiriladigan iqtisodiy masalalar

Transport masalasini yechish usullari bilan taqsimot masala, deb ataluvchi ko‘plab masalalarni yechish mumkin. Bunday masalalar o‘zlarining iqtisodiy ma’nosiga ko‘ra, yuk tashish muammosi bilan bog‘liq bo‘lmasligi mumkin. Ana shunday masalalarning bir nechitasi bilan tanishamiz.

1. Mutaxassislarni ish o‘rinlariga optimal taqsimlash masalasi.

Deylik, uchta vakant joyga uch kishi da’vogar bo‘lsin. Har bir kishi faqat bitta ishga va har bir ishga faqat bitta ishchini yollash kerak bo‘lsin. Har bir da’vogarning ish turlari bo‘yicha mehnat unumdorligi quyidagi jadvalda keltirilgan:

7.23 jadval

Ishga da’vogarlar	Ish turlari			Ishchi kuchi taklifi
	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	4	2	1
A_2	4	2	3	1
A_3	5	2	6	1
Ish turlari bo‘yicha ishchilar talabi	1	1	1	

Har bir ish turiga (vakant joyga) 1 tadan da’vogarni shunday taqsimlash kerakki, natijada korxonaning umumiy mehnat unumdorligi maksimal bo‘lsin.

Yechish. Masalaning matematik modelini tuzish uchun noma’lumlarni quyidagicha belgilaymiz. x_{ij} – B_j – vakant joyga tayinlangan A_i da’vogarning tavsifini bildiradi. Bunda $x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ va 0 yoki 1 qiymatni qabul qiladi.

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{agar } B_j \text{ vakant joyga } A_i \text{ da’vogar tayinlanmasa;} \\ 1, & \text{agar } A_i \text{ da’vogar } B_j \text{ vakant joyga tayinlansa.} \end{cases}$$

U holda masalaning matematik modelini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1; \end{cases} \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}); \quad (3)$$

$$F = 3x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + x_{22} + 3x_{23} + 5x_{31} + 2x_{32} + 6x_{33} \rightarrow \max. \quad (4)$$

Masalani yechish uchun uning berilganlarini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

7.24 jadval

$a_i \backslash b_j$	1	1	1	u_i
1	3 $1-\theta$	4 $0+\theta$	2 4	$u_1=0$
1	4 θ	1 $1-\theta$	3 0	$u_2=-3$
1	5 -4	2	6 1	$u_3=0$
v_j	$v_1=3$ -2	$v_2=4$ 2	$v_3=6$ 1	$\theta=1$

Boshlang‘ich bazis yechimni «shimoliy-g‘arb burchak» usuli bilan topamiz. So‘ngra potentsiallarni hisoblab optimallik mezonini tekshiramiz. Hamma hisoblash ishlarini jadvalda bajaramiz. Lekin maqsad funktsiya $F(x) \rightarrow \max$ ko‘rinishda bo‘lgani uchun potentsiallar x_y o‘ga $u_i + v_j \geq c_{ij}$ tengsizlikni qanoatlantirishi kerak. Demak, optimal yechimda band katakchalarga mos kelgan potentsiallar yig‘indisi shu katakchadagi mehnat unumdorligiga teng bo‘lishi kerak, ya’ni

$$u_i + v_j = c_{ij} (x_{ij} \geq 0).$$

Bo‘sh katakchalarga mos kelgan potentsiallar esa

$$u_i + v_j \geq c_{ij} \quad (5)$$

tengsizlikni qanoatlantirishi kerak. Bu holda bo‘sh kataklar bo‘yicha hisoblanadigan optimallik baholari quyidagi formula yordamida topiladi:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0. \quad (6)$$

Bizning holimizda (2; 1), (3; 1) kataklarda (6) shart bajarilmaydi. Shuning uchun bazisga

$$\min_{\Delta_{ij} < 0} (-4; -2) = \Delta_{21} = 4$$

optimallik mezoniga mos keluvchi x_{21} ni kiritamiz. (2; 1) katakka θ son kiritamiz va yuqorida tanishgan potentsiallar usulini qo‘llab, x_{11} ni

bazisdan chiqaramiz. Natijada yangi bazis yechimga ega bo‘lamiz:

II. 7. 25 jadval

$a_i \backslash b_j$	1	1	1	u_i
1	3	4	2	$u_1=0$
1	4	1	4	
1	1	0	0	$u_2=-3$
1	5	2	6	$u_3=0$
	2	2	1	
v_j	$v_1=7$	$v_2=4$	$v_3=6$	

Yechish jarayonining ikkinchi bosqichida topilgan bazis yechim uchun optimallik sharti bajarilayapti, ya'ni $(\Delta_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$.

Demak, optimal yechim topildi.

Javob: A_1 da'vogar V_2 ishga, A_2 da'vogar V_1 ishga va A_3 da'vogar V_3 ishga tavsiya etilishi kerak. U holda korxonaning umumiy mehnat unumdorligi

$$F_{\max} = 1.4 + 1.4 + 1.6 = 14$$

bo'ladi.

2. Korxonada 3 xil stanoklar ishlatiladi. Har bir stanokda 4 xil A , V , S , D mahsulot ishlab chiqariladi. Har bir stanokning mehnat unumdorligi hamda mahsulotlar tannarxi quyidagi jadvalda keltirilgan:

7. 25 ladval

Stanoklar turi	Mahsulot ishlab chiqarishda stanoklarning mehnat unumdorligi				Mahsulotlarning tannarxi			
	A	V	S	D	A	V	S	D
I	24	30	18	42	2	1	3	1
II	12	15	9	21	3	2	4	1
III	8	10	6	14	6	3	5	2

Agar I, II va III stanoklarning vaqt fondlari mos ravishda 90, 220 va 180 stanok-soat bo'lib, A , V , S , D mahsulot ishlab chiqarish rejasi mos ravishda 1200, 900, 1800 va 840 birlikni tashkil qilsa, u holda mahsulotlar ishlab chiqarishga stanoklarni shunday taqsimlash kerakki, unda mahsulotlar ishlab chiqarish rejasi to'la bajarilsin hamda ishlab chiqarilgan mahsulotlarning tannarxi eng kichik (minimal) bo'lsin.

Yechish. Masalaning matematik modelini tuzamiz. Uning uchun masaladagi noma'lum sifatida x_{ij} ni, ya'ni j -mahsulot ishlab chiqarishda

i -stanokning sarf qilgan vaqtini belgilaymiz. U holda I stanok barcha mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}$$

vaqt sarf qiladi. Masalaning shartiga ko'ra, bu miqdor 90 birlikka teng bo'lishi kerak. Demak, quyidagi tenglama o'rinli bo'lishi kerak:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=90.$$

Xuddi shuningdek, II va III stanoklar uchun quyidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=220,$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=180,$$

Barcha stanoklarda ishlab chiqarilgan I tur mahsulot miqdori

$$24x_{11}+12x_{12}+8x_{13}$$

yig'indi orqali ifodalanadi.

Masalaning shartiga ko'ra, bu yig'indi 1200 birlikni tashkil qiladi:

$$24x_{11}+12x_{12}+8x_{13}=1200.$$

V , S , D mahsulotlar uchun ham mos ravishda quyidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$30x_{12}+15x_{22}+10x_{32}=900;$$

$$18x_{13}+9x_{23}+6x_{33}=1800;$$

$$42x_{14}+21x_{24}+14x_{34}=840.$$

Noma'lumlarga yana manfiy bo'lmashligi sharti ham qo'yiladi, ya'ni

$$x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1,4}; j = \overline{1,3}).$$

Ishlab chiqarilgan mahsulot tannarxini $F(x)$ bilan belgilaymiz. U quyidagi chiziqli funktsiyadan iborat bo'ladi:

$$F(x) = 2x_{11}+x_{12}+3x_{13}+x_{14}+3x_{21}+2x_{22}+4x_{23}+x_{24}+6x_{31}+3x_{32}+5x_{33}+2x_{34}.$$

$F(x)$ ning minimal qiymatga erishishini talab qilamiz. Demak, masalaning quyidagi ko'rinishdagi chiziqli dasturlash masalasiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 220; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 180; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 24x_{11} + 12x_{12} + 8x_{13} = 1200; \\ 30x_{12} + 15x_{22} + 10x_{32} = 900; \\ 18x_{13} + 9x_{23} + 6x_{33} = 1800; \\ 42x_{14} + 21x_{24} + 14x_{34} = 840. \end{cases} \quad (8)$$

$$x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}); \quad (9)$$

$$F(x) = 2x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + 3x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} + x_{24} + 6x_{31} + 3x_{32} + 5x_{33} + 2x_{34} \rightarrow \min \quad (10)$$

Qo'yilgan masalani transport masalasiga keltiramiz. Buning uchun (8) sistemasidan birinchi tenglamani x_{11} oldidagi koeffitsientga bo'lamiz. Natijada quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$x_{11} + \frac{1}{2}x_{21} + \frac{1}{3}x_{31} = 50.$$

Xuddi shuningdek, (8) sistemaning ikkinchi tenglamasini x_{12} oldidagi koeffitsient (30) ga, uchinchi va to'rtinchi tenglamalari mos ravishda 18 va 12 ga bo'lamiz:

$$x_{12} + \frac{1}{2}x_{22} + \frac{1}{3}x_{32} = 30;$$

$$x_{13} + \frac{1}{2}x_{23} + \frac{1}{3}x_{33} = 100;$$

$$x_{14} + \frac{1}{2}x_{24} + \frac{1}{3}x_{34} = 20;$$

Hosil bo'lgan sistemada quyidagi begilashlar kiritamiz:

$$\left. \begin{aligned} x_{11}^1 &= x_{11}, x_{12}^1 = x_{12}, x_{13}^1 = x_{13}, x_{14}^1 = x_{14} \\ x_{21}^1 &= \frac{1}{2}x_{21}, x_{31}^1 = \frac{1}{3}x_{31}, x_{22}^1 = \frac{1}{4}x_{22} \\ x_{32}^1 &= \frac{1}{3}x_{32}, x_{23}^1 = \frac{1}{2}x_{23}, x_{33}^1 = \frac{1}{3}x_{33} \\ x_{24}^1 &= \frac{1}{2}x_{24}, x_{34}^1 = \frac{1}{3}x_{34}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Bunday belgilashlarda berilgan masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} x_{11}^1 + x_{12}^1 + x_{13}^1 + x_{14}^1 = 90; \\ x_{21}^1 + x_{22}^1 + x_{23}^1 + x_{24}^1 = 110; \\ x_{31}^1 + x_{32}^1 + x_{33}^1 + x_{34}^1 = 20; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11}^1 + x_{21}^1 + x_{31}^1 = 50; \\ x_{12}^1 + x_{22}^1 + x_{32}^1 = 30; \\ x_{13}^1 + x_{23}^1 + x_{33}^1 = 100; \\ x_{14}^1 + x_{24}^1 + x_{34}^1 = 20; \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4})$$

$$F(x^1) = 2x_{11}^1 + x_{12}^1 + 3x_{13}^1 + x_{14}^1 + 6x_{21}^1 + 4x_{22}^1 + 8x_{23}^1 + 2x_{24}^1 + 18x_{31}^1 + 9x_{32}^1 + 15x_{33}^1 + 6x_{34}^1 \rightarrow \min.$$

Masalani quyidagi jadvalga joylashtirib, uni potentsiallar usuli bilan

echamiz:

7. 27 jadval

$b_j \backslash a_i$	50	30	100	20	20
90	2 20	1 30	3	1 20	0 20
110	6	4	8	2	0
20	18	9	15	6	0

Masalada $\sum_i a_i = 220 > \sum_j b_j = 200$.

Demak, buni ochiq modeli transport masalasi deb qaraymiz va uni soxta iste'molchi qo'shish yo'li bilan yopiq modeli masalaga aylantiramiz. Boshlang'ich bazis yechimni minimal xarajatlar usulini qo'llab topamiz:

I. 7. 28 jadval

$b_j \backslash a_i$	50	30	100	20	20	u_i
90	2 $20+\theta$	1 30	3	1 $20-\theta$	0 20	$u_1=0$
110	6 $30-\theta$	4	$\frac{1}{8}$ $80+\theta$	2	0	$u_2=4$
20	18	$\frac{1}{9}$	15	$\frac{3}{6}$ $+\theta$	$\frac{4}{8}$ 11	$u_3=11$
v_j	-5 $v_1=2$	3 $V_2=1$	$20-\theta$ $v_3=4$	6 $v_4=1$	$v_5=0$	$\theta=20$

So'ngra potentsiallar usulini qo'llab, 8-bosqichda quyidagi natijaga ega bo'lamiz. Bu natija yechimning optimallik shartini qanoatlantiradi.

VIII. 7. 29 jadval

$b_j \backslash a_i$	50	30	100	20	20	u_i
90	2	1	3 90	1	0	$u_1=0$
110	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-2}{4}$	8	$\frac{-4}{2}$	$\frac{-5}{0}$	$u_2=5$

	90	30	10	20		
20	18	9	15	6	$\frac{0}{0}$	$u_3=5$
	-12	-5	-7	-4	20	
v_j	$v_1=2$	$v_2=-1$	$v_3=3$	$v_4=-3$	$v_5=-5$	

Demak, topilgan yechim optimal yechim bo'ladi, ya'ni

$$\begin{aligned}x_{13}^1 &= 90, & x_{11}^1 &= 0, & x_{12}^1 &= 0, \\x_{21}^1 &= 50, & x_{22}^1 &= 30, & x_{23}^1 &= 10, & x_{24}^1 &= 20 \\x_{31}^1 &= x_{32}^1 = x_{33}^1 = x_{34}^1 &= 0.\end{aligned}$$

$$F_{\min}(x^1)=850.$$

Yuqoridagi (11) belgilashlardan foydalanib, dastlab berilgan taqsimot masalaning yechimini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned}x_{11} &= 0, & x_{12} &= 0, & x_{13} &= 90, & x_{14} &= 0; \\x_{21} &= 2x_{21}^1 = 2 \cdot 50 = 100; & x_{22} &= 2x_{22}^1 = 2 \cdot 30 = 60; \\x_{23} &= 2x_{23}^1 = 2 \cdot 10 = 20; & x_{24} &= 2x_{24}^1 = 2 \cdot 20 = 40; \\x_{31} &= 2x_{31}^1 = 3 \cdot 0 = 0; & x_{32} &= 0, & x_{33} &= 0, & x_{34} &= 0.\end{aligned}$$

Shunday qilib, yechimlar matritsasi

$$X_{onm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 & 0 & 0 \\ 100 & 60 & 20 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lib, bu yechimdagi maqsad funktsiyaning qiymati $F(X_{\text{opt}}) = 1450$ bo'ladi.

Javob: I stanok S mahsulot ishlab chiqarishda 90 soat ishlashi kerak, II stanok esa A, V, S, D mahsulotlar ishlab chiqarishda mos ravishda 10, 60, 20, 40 soat ishlashi kerak, III stanok mahsulot ishlab chiqarishda umuman ishlatilmaydi.

Tayanch so'z va iboralar

Taqsimot masalalari, maksimum mezonli transport masalasi, mahsulotlarning tannarxini minimallashtirish masalasi.

Nazorat savollari

1. Yuk tashishning klassik masalasi qanday?
2. Mutaxassislarni ish o'rinlariga taqsimlash masalasining matematik modeli qanday?
3. Mutaxassislarni ish o'rinlariga taqsimlash masalasida maqsad funktsiya

qanday ma'noga ega?

4. Uskunalaridan turli mahsulotlar ishlab chiqarishda optimal foydalanish (uskunalarni ish faoliyatlariga taqsimlash) masalasining matematik modeli qanday?
5. Uskunalarini turli mahsulotlar ishlab chiqarishga taqsimlash masalasi qanday yo'l bilan transport masalasiga keltiriladi?

Masalalar

1. Beshta tokarlik stanoklari 5 xil detallarga ishlov beradi. Bunda har bir stanokda faqat bitta detalga ishlov beriladi va har bir detalga faqat bitta stanok ishlov beradi. Har bir detalni turli stanoklarda ishlov berishga sarflanadigan vaqt normasi ma'lum va ular quyidagi matritsa qo'rinishda berilgan:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 9 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Detallarga ishlov berish jarayonini turli stanoklarga qanday taqsimlanganda barcha detallarga minimal vaqt ichida ishlov beriladi?

Javob. $x_{15}=1, x_{21}=1, x_{32}=1, x_{44}=1, x_{53}=1.$

$$F_{\min}(x)=11.$$

2. Uchta A_1, A_2, A_3 uskunalarning har biri uchta V_1, V_2, V_3 ishlardan birini amalga oshirishda qo'llaniladi. Turli ishlarni amalga oshirishdagi uskunalarning mehnat unumdorligi quyidagi jadvalda keltirilgan.

7.30 jadval

Uskunalar	Ish turlari		
	V_1	V_2	V_3
A_1	1	2	3
A_2	2	4	1
A_3	3	1	5

Uskunalarini turli ishlarga shunday taqsimlash kerakki, umumiy mehnat unumdorligi maksamil bo'lsin.

3. Sanoat birlashmasiga tegishli bo'lgan 4 ta A_1, A_2, A_3, A_4 filiallarda 4 xil V_1, V_2, V_3, V_4 mahsulotlar ishlab chiqariladi.

Har bir filial faqat 1 ta mahsulot ishlab chiqarishga ixtisoslashgan bo'lsin hamda har bir mahsulot faqat bitta filialda ishlab chiqarilsin, mahsulotlarning filiallar bo'yicha tannarxlari ma'lum va ular quyidagi

matritsa ko‘rinishda berilgan:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Qaysi mahsulotni qaysi filialda ishlab chiqarganda mahsulotlar tannarxi minimal bo‘ladi?

Javob: A_1 filialda B_4 , A_2 filialda B_1 , A_3 filialda B_3 va A_4 filialda B_2 mahsulotlar ishlab chiqarish kerak.

4. Uchta samolyotni 3 ta havo yo‘llariga shunday taqsimlash kerakki, bunda 1 ta samolyot faqat 1 ta havo yo‘lida uchishi kerak va 1 ta havo yo‘li faqat 1 ta samolyotga tegishli bo‘lishi kerak. Har bir samolyotni har bir havo yo‘lida ishlatishdan olinadigan tashishlariga (yo‘lovchilar soni) hisoblangan va quyidagi jadvalda keltirilgan:

7.31 jadval

Turli samolyotlar turi	Havo yo‘llari			Samolyot soni
	B_1	B_2	B_3	
A_1	66	118	86	1
A_2	26	45	34	1
A_3	85	180	100	1

Aviakompaniyaga maksimal samaradorlik keltiruvchi (maksimal miqdorda yo‘lovchilarni tashishni ta’minlovchi) samolyotlardan havo yo‘llarida foydalanish rejasini toping.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Башарин Г. П. Начала финансовой математики. – Учебное пособие. М.: Infra-m, 1997.
2. Ващенко Т.В. Математика финансового менеджмента. М.: Перспектива, 1996. – 140с.
3. Замков О.О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике. – М.: Изд. ДИС, 1998.
4. Исследование операции в экономике. / Под редакцией Н.Ш. Кремера. (Учебное пособие). М.: ЮНИТИ, 1997.
5. Малихин В. И. Математика в экономике: Учебное пособие. М.: «ИНФРА-М», 2002.-320с.
6. Mamurov E.N., Adirov T. X. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. O‘quv qo‘llanma – T.: “Iqtisod-Moliya”, 2006.
7. Masagutova R. V. Matematika v zadachax dlya ekonomistov. T.: “O‘qituvchi”, 1996.
8. Математические методы и модели исследования операций. Учебник М.: «Дашков и К». 2006 г.
9. Капитоненко В.В. финансовая математика и её приложения. Учебное пособие для ВУЗ ов. М.: «Из-во ПРИОР», 2000.
10. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов. Теория, примеры, задачи. М.: «Екзамен», 2005.
11. Колемаев В.А., Калинина В.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. М.: Инфра-М, 1997.
12. Кочович Е. Финансовая математика. М.: Статистика, 1994. – 222с.
13. Красс М.С., Чупринов Б.П. Математика для экономического бакалавриата. Учебник. М.: Дело, 2005. – 576с.
14. Красс М.С., Чупринов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. Учебник. 5-е изд. М.: Дело, 2006. – 720с.
15. Кремер Ш.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ, 2001.
16. Общий курс высшей математики для экономистов. Учебник. / Под общей редакцией В.И. Ермакова. : ИНФРА – М, 2007. – 656с.
17. Практикум по высшей математики для экономистов: Учебное пособие для вузов. / Кремер Н.Ш. и др. / Под редакции проф. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 320с

- 18.Safaeva Q. «Moliya matematikasi» fanidan masalalar to‘plami. – T.: «IQTISOD-MOLIYA», 2006.
- 19.Safaeva Q. Moliya matematikasi. O‘quv qo‘llanma. T.: «IQTISOD-MOLIYA», 2008.
- 20.Safaeva Q., Mamurov E., Bobojonov Sh., Shomansurova F. «Matematik programmalash» fanidan masalalar to‘plami. T.: TMI, 2003.
- 21.Справочник по математике для экономистов. /Под ред. В.И. Ермакова. М.: Высшая школа, 1987. – 160с.
- 22.Q. Safaeva. Matematik dasturlash, Darslik, Toshkent, “Ibn Sino” 2004 y.
- 23.Q. Safaeva. Matematik dasturlash. (Darslik). T. “IQTISOD-MOLIYA”, 2007 y.
- 24.Четиркин Е.М. Финансовая математика. Учебник. М.: «Дело», 2000.Пинегина М.В. Математические методы и модели в экономике. (Учебное пособие). М.: «Экзамен», 2004.
- 25.Хазанова Л.Е. Математическое моделирование в экономике. (Учебное пособие). М: Из-во БЕК, 1998.
- 26.Wilkes F.M. Mathematics for business. – Finance and Economics. Routledge, London, 1994.
- 27.Q.Safaeva Matematik prgrammalash. O‘quv qo‘llanma. T.: «O‘AJBNT» Markazi, 2004.
- 28.Q. Safaeva, F.Shomansurova “Matematik programmalashtirish”. 2-oliy ta’lim uchun o‘quv qo‘llanma. Toshkent, «IQTISOD-MOLIYA», 2009.
- 29.Q. Safaeva., F. Shomansurova. “Matematik programmalash”. Ma’ruza kurslari. T. «IQTISOD-MOLIYA», 2006.
- 30.Q. Safaeva, E.Adigamova, Sh.Bobojonov, E.Mamurov «Matematicheskoe programmirovaniye» Sbornik zadach. T.: TMI, 2006.
- 31.A. С. Солодовников и др. Математика в экономике. Учебник, част 1. М.: «Финанси и статистика», 2003.
- 32.S. S. G‘ulomov va boshqalar. Mikroiqtisodiyot. T.: «Sharq» nashiryoti, 2002.

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
-------------	---

I bob. SONLAR VA ULARNING IQTISODIYOTDA QO‘LLANISHI

Zarur matematik tushuncha va faktlar	5
1.1-§. Chiqim, daromad, foyda va zarar. Mahsulot tannarxi va samaradorlik.....	9
1.2-§. Mehnat unumdorligi va hosildorlik O‘rtacha miqdorlar .	13
1.3-§. Foizga doir iqtisodiy mazmundagi aralash masalalar	16
1.4-§. Aralash masalalar	18

II bob. ALGEBRAIK IFODALAR VA ULARNING IQTISODIYOTDA QO‘LLANISHI

Zarur matematik tushunchalar va faktlar.....	20
2.1-§. Yalpi milliy mahsulot.....	22
2.2-§. Iqtisodiy o‘shish	28
2.3-§. Inflyatsiya darajasini hisoblash. Narx indeksleri	32
2.4-§. Pul muomalasi qonuni. Fisher tenglamasi.....	38
2.5-§. Real va nominal ish haqi	44
2.6-§. Soliqlar. Ish haqidan olinadigan daromad solig‘ini hisoblash	48
2.7-§. Ishsizlik darajasini hisoblash.....	57
2.8-§. Import va eksport. Davlat to‘lov balansi	61

2.9-§. Valyutalar kursi.....	68
2.10-§. Aralash masalalar	72

III bob. SONLI KETMA-KETLIKLARNING IQTISODIYOTDA QO‘LLANISHI

Zarur matematik tushunchalar va faktlar.....	76
3.1-§. Bank krediti va foizi. Oddiy foizlar usuli bilan foiz to‘lovini hisoblash	77
3.2-§. Qarz amortizatsiyasi.....	82
3. 3-§. Kredit foizini hisoblashda murakkab foizlar usuli	88
3.4 – §. Jamg‘armaning yig‘ma miqdori va yig‘ma koeffitsienti	92
3.5-§. Aralash masalalar.....	94

IV bob. FUNKTSIYA VA GRAFIKLARNING IQTISODIYOTDA QO‘LLANISHI

Zarur matematik tushunchalar va faktlar.....	96
4.1-§. O‘zgarma va o‘zgaruvchan xarajatlar. Umumiy xarajat funksiyasi. Yalpi daromad va foyda funksiyalari.....	100
4.2-§. Ishlab chiqarish funksiyalari	109
4.3-§. Talab va taklif funksiyasi. Bozor (muvozanat) narxini topish.....	116
4.4-§. Yalpi talab va taklif. Makroiqtisodiy muvozanat.....	121
4.5-§. Aralash masalalar	130

V bob. HOSILALAR VA ULAR YORDAMIDA YECHILADIGAN IQTISODIY MASALALAR

Zarur matematik tushuncha va faktlar	133
5. 1-§. Talab va taklif egiluvchanligi.....	137
5.2-§. Daromad, xarajat va foyda funksiyalarining o‘zgarish sur’ati. Marjinal miqdorlar.....	144
5.3-§. Xarajatlarni minimallashtirish va foydani maksimallashtirishga doir masalalar.....	150

5.4-§. Aralash masalalar	159
--------------------------------	-----

VI bob. BIR ARGUMENTLI FUNKTSIYANING INTEGRAL HISOBI VA UNING IQTISODIYOTGA TATBIG‘I

Zarur matematik tushuncha va faktlar. Boshlang‘ich funktsiya. Integral. Nyuton-Leybnits formulasi.	162
6. 1-§. Iste‘molchining va ta‘minotchining ortiqcha foydasi ..	165
6.2-§. Marjinal daromad, xarajat va foyda funktsiyasiga ko‘ra yalpi daromad, umumiy xarajat va yalpi foyda funktsiyalarini topish	171
6.3-§. Talab va taklif egiluvchanlik funktsiyalariga ko‘ra talab va taklif funktsiyalarini topish	174
6.4-§. Kobb-Duglas funktsiyasi asosida ishlab chiqarish hajmini aniqlash. Daromadni aholi o‘rtasidagi taqsimotining notekislik darajasini (Jini koeffitsientini) aniqlash	179
6.5-§. Aralash masalalar.....	182

VII bob. CHIZIQLI DASTURLASH MASALALARI

Zarur matematik tushuncha va faktlar.....	185
7.1-§. Resurslarni optimal taqsimlash masalalari	208
7.2-§. Optimal ovqatlanish rejasini aniqlash (dieta) masalasi .	218
7. 3-§. Chiqindilarni minimallashtiruvchi optimal bichish masalasi	225
7.4-§. Transport masalasiga keltiriladigan iqtisodiy masalalar	230

Q. SAFAEVA, F. SHOMANSUROVA

**IQTISODIYOTDA
MATEMATIKA**

Kasb-hunar kolleji talabalari uchun o'quv qo'llanma

Muharrir *N.Rustamova*

Texnik muharrir *M.Alimov*

Kompyuterda sahifalovchi *A.Yuldasheva*

Bosishga ruxsat etildi 06.12.2010. Qog'oz bichimi 60x84¹/₁₆.

Hisob-nashr tabog'i 15,25. Adadi 96.

Buyurtma № ____

«IQTISOD-MOLIYA» nashriyotida tayyorlandi.
100084, Toshkent, Kichik halqa yo'li ko'chasi, 7-uy.

«HUMOYUNBEK-ISTIQLOL MO'JIZASI» bosmaxonasi
100000, Toshkent, Qori-Niyoziy ko'chasi, 39-uy.