Министерство высшего и среднего специального
образования республики Узбекистан

Ташкентский Автомобильно-дорожный институт

Кафедра: «Высшая математика»

Конспект лекций

По «Высшей математике»
для специальностей экономика,
менеджмент и маркетинг
1 курс, I I семестр (18 часов)

Ташкент 2006 год.

Аннотация

Предлагаемый конспект содержит разделы математического анализа и дифференциальных уравнений.

Излагаемый материал сопровождается пояснительными примерами из области экономической теории.

Составители: проф. Гафуров М.У.
доц. Зокиров Ф.М.

Рецензенты: доц. Ким Л.В.
ТГЭУ

Конспект лекций утвержден на заседании кафедры «Высшая математика» и на научно-методическом совете естественных, общетехнических кафедр.

&-1. Понятие функции нескольких переменных. Модель фирмы.

До сих пор мы изучали совместное изменение двух переменных, из которых одна зависела от другой. Нередки, однако, случаи, когда независимых переменных оказывается несколько.

Пусть производственная фирма выпускает один вид продукции или много видов. Тогда годовой выпуск фирмы в натурально – вещественной форме $Y-$это число единиц продукции одного вида или чисто многономенклатурных агрегатов.

Для производства продукции такая фирма использует настоящий труд L (среднее число занятых в год либо отработанные за год человек о часы) и прошлый труд K в виде средств труда (затраченное за год топливо, энергия, сырье, материалы, комплектующие и.т.п.).

Каждый из этих двух агрегированных видов ресурсов (труд L, фонды и материалы K) имеет определенное число разновидностей (труд разной квалификации, оборудование различного вида и т.п.). Обозначим вектор-столбец возможных объемов затрат различных видов ресурсов через $x=(x_1,x_2,...,x_m)$. Тогда технология фирмы определяется ее производственной функцией $Y=F(K,L)$.

1.1. Функция m переменных и область ее определения.

Рассмотрим арифметическое $m-$мерное пространство(см.под параграф 1.2 главы 4). Говоря об изменении m независимых переменных $x_1,...,x_m$, мы должны всякий раз указывать, какие m значений $(x_1,...,x_m)$ они могут принимать совместно. Множество μ таких точек и будет областью определения переменных $x_1,...,x_m$.

Определение. Переменная z (с областью изменения Z) называется функцией независимых переменных $x_1,...,x_m$ на множестве μ, если каждой точке $(x_1,...,x_m)$ из μ по некоторому правилу (или закону) ставится в соответствие одно определенное значение z (из Z).

Множеств $\mu-$область определения функции; сами переменные $x_1,...,x_m$ го отношение к их функции z называются ее аргументами. Функциональная зависимость будет иметь вид: $z=f(x_1,...,x_m)$.

1.2. Предел функции нескольких переменных.

Рассмотрим в $m-$мерном пространстве последовательность точек

$$\{M_n(x_1^{(n)},x_2^{(n)},...,x_m^{(n)})\},\quad n=1,2,3,... .$$

Будем говорить, что эта последовательность сходится к предельной точке $M_0(a_1,a_2,...,a_m)$, если координаты точки M_n порознь стремятся к соответствующим координатам точки M_0, т.е. если при $n\to\infty x_1^{(n)}\to a_1, x_2^{(n)}\to a_2,...,x_m^{(n)}\to a_m$.

Говорят, что функция $f(x_1,x_2,...,x_m)=f(M)$ имеет пределом число A при стремлении переменных $x_1,x_2,...,x_m$ к $a_1,a_2,...,a_m$, если, какую бы ни извлечь из множества μ последовательность отличных от $M_0(a_1,a_2,...,a_m)$ точек, сходящуюся к M_0, числовая последовательность $\{f(x_1^{(n)},...,x_m^{(n)})\}=\{f(M_n)\}$, состоящая из соответствующих значений функции, всегда сходится к A:

$$A=\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \cdots\cdots\\ x_m\to a_m}} f(x_1,x_2,...,x_m),\quad \text{или } A=\lim_{M\to M_0} f(M).$$

Говорят, что функция $f(x_1,x_2,...,x_m)$ имеет пределом число A при стремлении $x_1,x_2,...,x_m$ соответственно к $a_1,a_2,...,a_m$, если для каждого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что $|f(x_1,x_2,...,x_m)-A|<\varepsilon$, лишь только

$|x_1 - a_1| < \delta, ..., |x_m - a_m| < \delta.$ При этом предполагается, что точка $(x_1, x_2, ..., x_m)$ взята из μ отлично от $(a_1, a_2, ..., a_m)$.

Введем для точек $(x_1, x_2, ..., x_m)$ и $(a_1, a_2, ..., a_m)$ обозначения M и M_0. Тогда в геометрических терминах можно перефразировать сказанное так: число A называется пределом функции $f(M)$ при стремлении точки M к M_0, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $r > 0 : |f(M) - A| < \varepsilon,$ лишь только расстояние $\overline{M_0 M} < r$.

&-2. Дифференцирование функций нескольких переменных. Дифференциальное описание модели фирмы.

2.1. Частные производные.

Пусть в некоторой (открытой) области $D \in R^3$ имеем функцию $u = f(x, y, z)$. Возьмем точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ в этой области. Если мы припишем переменным y и z постоянные значения y_0 и z_0 и будем изменять x, то u будет функцией от одной переменной x в окрестности x_0.

Можно вычислить производную функции $u = f(x, y_0, z_0)$ в точке x_0. Дадим этому значению x_0 приращение Δx, тогда функция получит приращение $\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$, которое можно было бы назвать ее частным приращением (по x). По определению производной находим (если существует) предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

Этот предел называется частной производной функции $f(x, y, z)$ по x в точке (x_0, y_0, z_0). Частную производную будем обозначать: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}, u'_x, f'_x, f'_x(M_0)$.

Если x и z – постоянны, y – переменная, тогда

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Если x и y – постоянны, z – переменная, тогда

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

2.2. Полное приращение функции.

Если исходя из значений $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ независимых переменных дать всем трем некоторые приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, то функция $u = f(x, y, z)$ получит приращение $\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$, которое называется полным приращением функции.

Для функции $y = f(x)$ от одной переменной, в предположении существования в точке x_0 конечной производной $f'(x_0)$, приращение функции

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Для функции $u = f(x, y, z)$ аналогично получается:

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z,$$

где $\alpha, \beta, \gamma \to 0$ при $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$.

Если частные производные $f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)$ существуют не только в точке (x_0, y_0, z_0), но и в некоторой ее окрестности и, кроме того, непрерывны (как функции от x, y, z) в этой точке, то имеет место формула.

2.3. Полный дифференциал.

Пусть

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z + o(\rho),$$

где $o(\rho)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, тогда функция $f(x, y, z)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0, z_0) и выражение

$$u'_x\,\Delta x + u'_y\,\Delta y + u'_z\,\Delta z = f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z.$$

называется ее полным дифференциалом и обозначается du или $df(x_0, y_0, z_0)$:

$$du = u'_x\,dx + u'_y\,dy + u'_z\,dz,$$

$$df(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)dx + f'_y(x_0, y_0, z_0)dy + f'_z(x_0, y_0, z_0)dz.$$

Очевидно, что если $u = f(x)$ – функция одной переменной, то $du = u'_x\,dx$ – ее дифференциал.

Вернемся к модели фирмы. Технология фирмы определяется ее производственной функцией, выражающей связь между затратами ресурсов (K и L) и выпуском: $Y = F(K, L)$. В общем случае $Y = F(X)$, где $X = (x_1, ..., x_m)$.

Мы уже говорили, что производственная функция F удовлетворяет двум аксиомам.

Первая из них утверждает, что существует подмножество пространства затрат, называемое экономической областью E, в которой увеличение любого вида затрат не приводит к уменьшению выпуска. Таким образом, если X_1, X_2 – две точки этой области, то $X_1 \geq X_2$ влечет $F(X_1) \geq F(X_2)$.

В дифференциальной форме это выражается в том, что в этой области все первые частные производные функции F неотрицательны: $\partial F / \partial x_i \geq 0.$ Эти производные называются предельными продуктами, а вектор $\partial F / \partial x = (\partial F / \partial x_1, ..., \partial F / \partial x_m)$ – вектором предельных продуктов.

Вторая аксиома утверждает, что существует выпуклое подмножество S экономической области, для которой подмножества $\{X \in S : F(X) \geq a\}$ выпуклы для всех $a \geq 0.$ В этом подмножестве S должны быть отрицательны все вторые производные функции $\partial^2 F / \partial x_i^2 < 0$ для любого $i = 1, ..., m.$

Остановимся на экономическом содержании этих аксиом.

Первая аксиома утверждает, что производственная функция не какая-то совершенно абстрактная функция, придуманная теоретиком-математиком. Она, пусть и не на всей своей области определения, а только лишь на ее части, отражает экономически важное, бесспорное и в то же время тривиальной утверждение: в любой разумной экономике увеличение затрат не может привести к уменьшению выпуска.

Из второй аксиомы поясним только экономический смысл требования, чтобы производная $\partial^2 F / \partial x_i^2$ была меньше нуля для каждого вида затрат. Это свойство называется в экономике ном убывающей отдачи или убывающей доходности: по мере увеличения затрат, начиная с некоторого момента (при входе в область S), уменьшается предельный продукт.

Классическим примером этого закона является добавление все большего и большего количества труда в производство зерна на фиксированном участке земли.

В дальнейшем подразумевается, что производственная функция рассматривается на области S, в которой обе аксиомы справедливы.

2.4. Производственная функция Кобба - Дугласа.

В качестве примера рассмотрим одну из наиболее распространенных производственных

функций – функцию Кобба – Дугласа: $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где $A, \alpha, \beta > 0$ – константы, $\alpha + \beta < 1;$ K – объем фондов либо в стоимостном выражении, либо в натуральном количестве, скажем, -число станков; L - объем трудовых ресурсов также либо в стоимостном выражении, либо в натуральном количестве – число рабочих, число человека – дней и.т.п. и, наконец, Y – выпуск продукции в стоимостном или натуральном выражении.

Проверим, выполняются ли для нее основные требования к производственным функциям.

1. Положительность предельных продуктов имеем, так как $\partial Y/\partial K = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} > 0, \partial Y/\partial L = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} > 0.$
2. Отрицательность вторых частных производных, т.е. убывание предельных продуктов также имеет место: $\partial^2 Y/\partial K^2 = A\alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{\beta} < 0, \partial^2 Y/\partial L^2 = A\beta(\beta-1)K^{\alpha}L^{\beta-2} < 0.$

Перейдем к основным экономико-математическим характеристикам производственной функции Кобба – Дугласа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Средняя производительность труда $y = Y/L -$ отношение объема произведенного продукта к количеству затраченного труда; средняя фондоотдача $k = Y/K$ - это отношение объема произведенного продукта к величине фондов.

Для функции Кобба- Дугласа средняя производительность труда $y = AK^{\alpha}L^{\beta-1}$ является убывающей функцией $L,$ т.е с увеличением затрат труда средняя производительность труда падает. Этот вывод допускает естественное объяснение – поскольку величина второго фактора K остается неизменной, то, значит, вновь привлекаемая рабочая сила не обеспечивается дополнительными средствами производства, что и приводит к снижению производительности труда (это справедливо и в самом общем случае – на уровне производственных множеств, см.).

Предельная производительность труда есть частная производная функции по труда $\partial Y/\partial L = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1},$ откуда видно, что для функции Кобба – Дугласа предельная производительности и меньше нее. Аналогично определяются средняя и предельная фондоотдачи. Для них также справедливо указанное соотношение – предельная фондоотдача пропорциональна средней фондоотдаче и меньше нее.

Найдем теперь эластичность продукции по труда $(\partial Y/\partial L):(Y/L) = (\partial Y/\partial L)L/Y = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}L/(AK^{\alpha}L^{\beta}) = \beta.$

Теперь нам ясен смысл параметра $\beta -$ это эластичность продукции по труду. Аналогичный смысл имеет параметр $\alpha -$ это эластичность продукции по фондам.

И еще одно замечание представляется интересным. Пусть $\alpha + \beta = 1.$ Легко проверить, что $Y = (\partial Y/\partial K)K + (\partial Y/\partial L)L.$ Будем считать, что общество состоит только из рабочих и предпринимателей. Тогда доход X распадается на две части – доход рабочих и доход предпринимателей. Поскольку при оптимальном размере фирмы величина $\partial Y/\partial L -$ предельный продукт по труду – совпадает с заработной платой, то $(\partial Y/\partial L)L$ представляет собой доход рабочих. Аналогично величина $\partial Y/\partial K$ есть предельная фондоотдача, экономический смысл которой есть норма прибыли, следовательно, $(\partial Y/\partial K)K$ представляет доход предпринимателей.

Вообще, понятие предельных показателей, связанных с нахождением частных производных, в экономической теории играет особую роль, так как имеет строго определенный экономический смысл.

2.5. Теория фирмы.

Теперь введем в рассмотрение цены. Пусть $P -$ вектор цен. Если $T = (X, Y) -$ технология, т.е. вектор «затраты – выпуск», $X -$ затраты, $Y -$ выпуск, то их скалярное произведение $PT = PX + PY$ есть прибыль от использования технология T (затраты – отрицательные величины).

Задача производителя состоит в том, что он выбирает, ищет технологию из своего производственного множества, стремясь максимизировать прибыль.

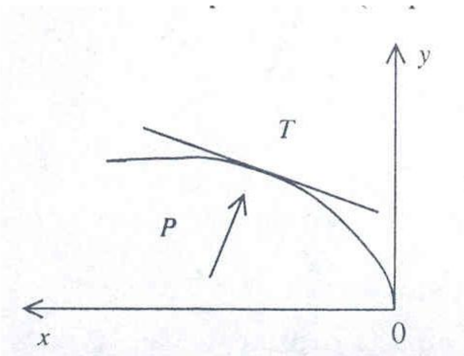
Итак, производитель решает следующую задачу:

$PT \to \max, T \in \tau.$

Это резко упрощает ситуацию выбора. Так, если цены положительны, что естественно, то компонента «выпуск» решения этой задачи автоматически будет лежать на кривой производственных возможностей.

Действительно, пусть $T=(X,Y)-$какое-нибудь решение задачи. Тогда существует $Z \in K_x$, где K_x – кривая производственных возможностей – множество лучших выпусков при данных затратах $X, Z \geq Y,$ следовательно, $P(X,Z) \geq P(X,Y),$ значит, точка (X,Z) также есть решение задачи производителя.

Для случая двух видов затрат задачу можно решить графически, так как для любого вектора затрат X все наилучшие выпуски лежат на кривой производственных возможностей. Для этого надо «двигать» прямую линию, перпендикулярную вектору $P,$ в направлении, куда он показывает; тогда последняя точка, когда эта прямая линия еще пересекает производственное множество, и будет оптимальным решением.



Мы видим, что строгая выпуклость нужной части производственного множества гарантирует единственность решения.

Примерно такие же рассуждения действуют и в общем случае, для большего числа видов затрат и выпуска.

Однако мы не пойдем по этому пути, а используем аппарат теории производственных функций и производителя.

Итак, выпуск фирмы можно охарактеризовать одной величиной – либо объемом выпуска, если выпускается один товар, либо суммарной стоимостью всего выпуска. Пространство затрат $m-$мерно, вектор затрат $X=(x_1,...,x_m)$. Затраты однозначно определяют выпуск $Y,$ а эта связь и есть производственная функция $Y=F(X)$.

В данной ситуации обозначим через P вектор цен на товары – затраты, и пусть $\nu-$цена единицы выпускаемого товара. Следовательно, прибыль W, являющаяся в итоге функцией X (и цен, но они считаются постоянными), есть

$W(X)=\nu Y-PX=\nu F(X)-P(X).$

Приходим к задаче фирмы: $W(X)=\nu F(X)-PX \to \max, X \geq 0.$

Приравнивая частные производные функции W нулю, получим:

$\nu(\partial F/\partial x_i)=p_i$ для $j=1,...,m$ или $\nu(\partial F/\partial X)=P.$

Будем предполагать, что все затраты строго положительны (нулевые можно просто исключить из рассмотрения). Тогда точка определяемая соотношением, оказывается внутренней, т.е. точкой экстремума. И поскольку еще предполагается отрицательность вторых производных функции F (см. требования к производственным функциям под параграфе 17.2), то это точка максимума.

Итак, при естественных предположения на производственную функцию (эти предположения выполняются для производителя со здравым смыслом и в разумной экономике) соотношение дает решение задачи фирмы, т.е. определяет объем X^* перерабатываемых ресурсов, в результате чего получается выпуск $Y^*=F(X^*)$. Точку $X^*,$ или $(X^*,F(X^*)),$ назовем оптимальным решением фирмы. Остановимся на экономическом смысле соотношения.

Как говорилось ранее, но в наших обозначениях, $\partial F/\partial K=(\partial F/x_1,...,\partial F/\partial x_m)$ называется предельным вектором – продуктам, или вектором предельных продуктов, а $\partial F/\partial x_i$ называется $i-$м предельным продуктом, или откликом выпуска на изменение $i-$го товара затрат. Следовательно, $\nu(\partial F/\partial x_i)dx_i-$это стоимость

$i-$го предельного продукта, дополнительно полученного из dx_i единиц $i-$го ресурса. Однако стоимость dx_i единиц $i-$го ресурса равна $p_i dx_i$, т.е получилось равновесие: можно вовлечь в производство дополнительно dx_i единиц $i-$го ресурса, потратив на его закупку $p_i dx_i$, но выигрыша не будет, так как после переработки продукции получим ровно такую же сумму, какую и затратили. Итак, оптимальная точка, определяемая соотношением, является точкой равновесия – уже невозможно выжать из товаров – ресурсов больше, чем затрачено на их покупку.

ПРИМЕР. Объем добычи щебня Y (т/ч) зависит от количества вложенного труда (чел.$\times$ч) так: $Y = 6\sqrt{x}$. Цена щебня $\nu = 40$ руб./т, зарплата работника $p = 30$ руб./ч. Кроме зарплаты другие издержки не учитываются. Найти оптимальное количество x вложенного труда.

Решение. Прибыль найдем по формуле $W = \nu Y - px = 240\sqrt{x} - 30x.$ Для максимизации прибыли найдем ее производную и приравняем нулю. Получим $W = 240/(2\sqrt{x}) - 30 = 0,$ откуда оптимальное решение $x^* = 16.$

Для поиска решения можно использовать и соотношение. В данном случае предельное соотношение будет выглядеть так: $40 \cdot 6/(2\sqrt{x}) = 30,$ что опять же дает ответ: $x^* = 16.$

Уместно также для иллюстрации схематически построить график. На графике производственной функции $Y = 6\sqrt{x}$ надо найти точку $A,$ в которой касательная имеет угол наклона с тангенсом $p/\nu = 30/40 = 3/4$.

&-3. Неопределенный интеграл.

Ранее мы рассматривали такую задачу: дана функция $F(x)$; требуется найти ее производную, т.е. функцию $f(x) = F(x)$.

Теперь мы будем рассматривать обратную задачу: дана функция $f(x)$, требуется найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т.е. $F(x) = f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на $[a,b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство: $F(x) = f(x)$.

Найдем первообразную, например, для функции $f(x) = x^2$. Из определения первообразной следует, что функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ является первообразной, так как $\left(\dfrac{x^3}{3}\right) = x^2$.
Легко видеть что если для данной функции $f(x)$ существует первообразная, то эта первообразная не является единственной. В качестве первообразных можно было взять также следующие функции:

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 1$; $\quad F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 7$; $\quad F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C, C -$ произвольная постоянная, так как $\left(\dfrac{x^3}{3} + C\right) = x^2$. С другой стороны, можно доказать, что функциями вида $\dfrac{x^3}{3} + C$

исчерпываются все первообразные для функции x^2. Это вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4.34. Если $F_1(x)$ и $F_2(x) -$ две первообразные от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то разность между ними равна постоянному числу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если функция $F(x)$ является некоторой первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx.$

Таким образом, $\int f(x)dx = F(x) + C,$ если $F(x) = f(x)$. При этом функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx -$ подынтегральным выражением.

Неопределенный интеграл представляет собой семейство функций $y = F(x) + C$ (семейство кривых, сдвинутых вверх или вниз).

Для всякой ли функции $f(x)$ существуют первообразные (и, следовательно, неопределенный интеграл)? Нет, не для всякой.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для этой функции существует первообразная (а значит, и неопределенный интеграл).

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется интегрированием функции $f(x)$.

Из определения не неопределенного интеграла вытекают следующие утверждения:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. если $F(x) = f(x)$, то и $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$, значит, дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$;

2) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная $\int dF(x) = F(x) + C$ (легко проверить дифференцированием обеих частей).

Таблица интегралов.

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3. $\int \sin xdx = -\cos x + C;$

4. $\int \cos xdx = \sin x + C;$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

7. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C;$

8. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C;$

9. $\int e^x dx = e^x + C;$

10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$

11\`. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$

12. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

13\`. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

3.1. Некоторые свойства неопределенного интеграла. Основные правила вычисления неопределенного интеграла.

ТЕОРЕМА 4.35. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

ТЕОРЕМА 4.36. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $a = const,$ то

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ справедливы следующие правила:

1. $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C.$
2. $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C.$
3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

В качестве примера докажем правило 1.

Действительно, дифференцируя левую и правую части, получим

$(\int f(ax)dx)` = f(ax);$

$\left(\frac{1}{a}F(ax)\right)` = \frac{1}{a}(F(ax))` = \frac{1}{a}F`(ax)a = F`(ax) = f(ax).$

ПРИМЕР. Найти интеграл $\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})dx.$

Решение.

$$\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})dx = \int 2x^3dx - \int 3\sin xdx + \int 5\sqrt{x}dx = 2\int x^3dx - 3\int \sin xdx + 5\int \sqrt{x}dx =$$

$$= 2\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.$$

3.2

3.3. Интегрирование методом замены переменной.

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx,$ причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует. Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, положив

$$x=\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ – непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда $dx=\varphi`(t)dt$. Докажем, что

$$\int f(x)dx\int f[\varphi(t)]\varphi`(t)dt.$$

Найдем производную от левой части равенства:

$$(\int f(x)dx)`= f(x).$$

Правую часть будем дифференцировать по x как сложную функцию, где t – промежуточный аргумент. Зависимость t от x выражается равенством, при этом $\frac{dx}{dt}=\varphi`(t)$ и по правилу дифференцирования обратной функции $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi`(t)}.$ Итак,

$$(\int f[(\varphi(t)]\varphi' dt)'_x=(f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt)'_t\frac{dt}{dx}= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}= f\{\varphi(t)]= f(x).$$

Значит производные по x от правой и левой частей равенства равны.

3.3. Интегрирование по частям.

Пусть u и v - две дифференцируемые от x. Тогда $d(uv)=udv+vdu,\Rightarrow$ $uv=\int udv+\int vdu,\Rightarrow$ $\int udv=uv-\int vdu$ – формула интегрирования по частям.

ПРИМЕР. Интегрированием по частям вычислить интегралы: а) $\int x^2e^xdx;$ б) $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решение.

а)

$$\int x^2e^xdx=\left|\begin{matrix}u=x^2\\ dv=e^xdx\\ du=2xdx\\ v=e^x\end{matrix}\right|=x^2e^x-2\int xe^xdx=\left|\begin{matrix}u_1=x\\ dv_1=e^xdx\\ du_1=dx\\ v_1=e^x\end{matrix}\right|=x^2e^x-2xe^x+2\int e^xdx=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+$$

$$+C=e^x(x^2-2x+2)+C;$$

б) $$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}-\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

Найдем

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int x\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left|\begin{matrix}u=x\\ dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}\\ du=dx\\ v=-\sqrt{a^2-x^2}\end{matrix}\right|=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int\sqrt{a^2-x^2}dx,$$

тогда

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Откуда

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

3.4. Метод неопределенных коэффициентов.

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – целые многочлены, причем степень $P(x)$ меньше степени $Q(x)$, и многочлен $Q(x)$ имеет только вещественные корни $a,...,l$, тогда дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_a}{(x-a)^a}+...+\frac{L_1}{(x-l)}+\frac{L_2}{(x-l)^2}+...+\frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}.$$

Неопределенные коэффициенты $A_1,...,A_\alpha,...,L_1,...,L_\lambda$ можно найти, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в числителях слева и справа.

ПРИМЕР. Вычислить методом неопределенных коэффициентов $\int\frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}=I$.

Решение. Разложим подынтегральное выражение следующим образом:

$$\frac{X}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Откуда.

$$x\equiv A(x+1)^2+B_1(x-1)(x+1)+B_2(x-1);$$

$$x\equiv(A+B_1)x^2+(2A+B_2)x+(A-B_1-B_2).$$

Тогда

$$0\cdot x^2+1\cdot x+0=(A+B_1)x^2+(2A+B_2)x+(A-B_1-B_2).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$0=A+B_1;\ 1=2A+B_2;\ 0=A-B_1-B_2.$$

Отсюда: $A=\frac{1}{4}$; $B_1=-\frac{1}{4}$; $B_2=\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{-1}{2(x+1)}+C=\frac{-1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

Этот пример можно решить по-другому. Так как равенство – тождество, то, придавая переменной x последовательно значения $0,-1$ и 1, получим

$$\begin{cases}0=A-B_1-B_2;\\ -1=-2B_2;\\ 1=4A.\end{cases}$$

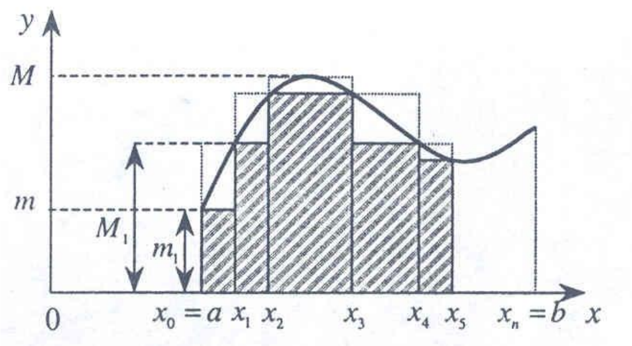
Отсюда найдем $A=\frac{1}{4}$; $B_1=-\frac{1}{4}$; $B_2=\frac{1}{2}$.

& 4. Определенный интеграл.

4.1. Определение определенного интеграла.

Мощным средствам исследования в математике, физике, экономике, статистике, социологии и других науках является определенный интеграл – одно из основных понятий математического анализа.

Вычисление площадей, ограниченных кривыми, сводится к вычислению определенного интеграла.



Пусть отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Обозначим через m и M ее наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками деления $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$, причем $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$, и положим $x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, ..., x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$.

Обозначим далее наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x_1]$ через m_1 и M_1, на отрезке $[x_1, x_2]$ через m_2 и M_2,..., на отрезке $[x_{n-1}, x_n]$ через m_n и M_n. Составим суммы

$$\underline{S_n} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + ... + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i;$$

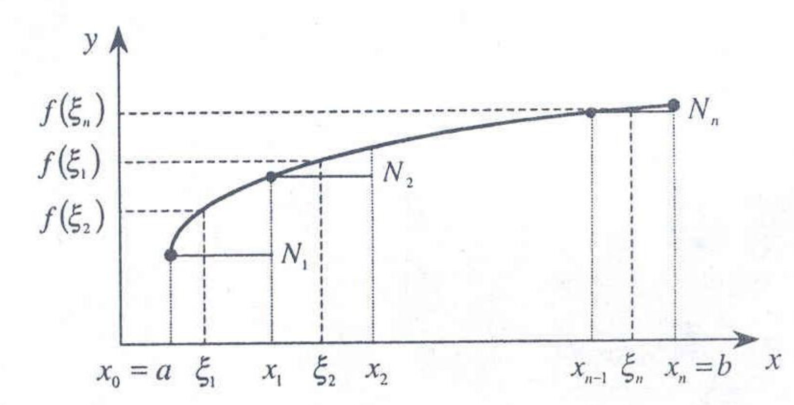
$$\underline{S_n} = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + ... + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

Сумму $\underline{S_n}$ называют нижней интегральной суммой, а сумму $\overline{S_n}$ – верхней интегральной суммой. При $f(x) \ge 0$ площадь заштрихованной фигуры содержится между числами $\underline{S_n}$ и $\overline{S_n}$.

В каждом из отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ возьмем по произвольной точке, которые обозначим $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n; x_0 < \xi_1 < x_1, x_1 < \xi_2 < x_2, x_{n-1} < \xi_n < x_n$.

В каждой из этих точек вычислим значение функции $f(\xi_1), f(\xi_2), ..., f(\xi_n)$. Составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$



Эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Рассмотрим некоторую последовательность разбиений, у которых $\max \Delta x_i \to 0$ при $n \to +\infty$. При каждом разбиении выбираем произвольно точки ξ_i^*, получим последовательность интегральных сумм. Предположим, что эта последовательность интегральных сумм S_n^* стремится к некоторому пределу

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_n^* = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\Delta x_i = S.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если при любых разбиениях отрезка $[a,b]$ таких, что при $n \to +\infty$ $\max \Delta x_i \to 0,$ и при любом выборе точек ξ_i на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ стремится к одному и тому же пределу $S,$ то этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

При $f(x) \geq 0$ значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ равно площади заштрихованной фигуры (криволинейной трапеции). Таким образом, по определению

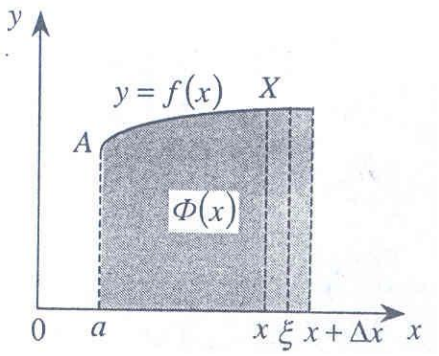
$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Число a называется нижним пределом интеграла, b – верхним пределом. Отрезок $[a,b]$ называется отрезком интегрирования, x – переменной интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

ОПРЕДЕЛНИЕ. Если для функции $f(x)$ предел существует, то функцию называют интегрируемой на отрезке $[a,b]$.

4.2 Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть в определенном интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a закреплен, а верхний предел b меняется. Тогда будет меняться и значение интеграла, т.е. интеграл есть функция верхнего предела. Пусть верхний предел x, переменная интегрирования t. Тогда получим интеграл $\int_a^x f(t)dt.$



При постоянном a этот интеграл будет представлять собой функцию верхнего предела x.

Обозначим эту функцию через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Если $f(t)$ – неотрицательная функция, то величина $\Phi(x)$ численно равна площади криволинейной трапеции $aAXx.$ Очевидно, что эта площадь изменяется в зависимости от x.

ТЕОРЕМА. Если $f(x)$ – непрерывная функция и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$ то $\Phi'(x) = f(x).$

Иными словами, производная от определенного интеграла по верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которой вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела (при условии, что подынтегральная функция непрерывна).

ТЕОРЕМА. Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

Отметим, что разность $F(b) - F(a)$ не зависит от выбора первообразной F, так как все первообразные отличаются на постоянную величину, которая при вычитании уничтожается.

Если ввести обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$, то формулу модно переписать так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(x) - F(a).$$

ПРИМЕР. Вычислить определенный интеграл $\int_a^b xdx.$.

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница имеем:

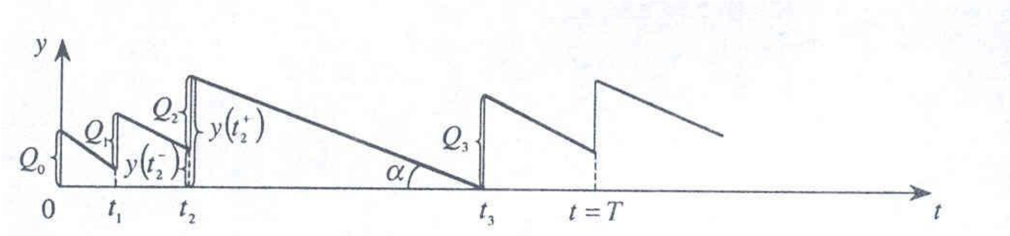
$$\int_a^b xdx = \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

При вычислении определенных интегралов методика для вычисления неопределенных интегралов остается верной с той лишь разницей, что теперь необходимо учитывать пределы интегрирования.

&-5. Некоторые приложения интегрального исчисления.

5.1. Классическая модель Вильсона управления запасами.

Пусть $y(t)$ – величина запаса некоторого товара на складе в момент времени $t, t \geq 0$. Дефицит на складе не допускается, т.е. $y(t) \geq 0$ при $t \geq 0$. Товар пользуется равномерным спросам с интенсивностью μ, т.е. за время Δt со склада извлекается часть запаса величиной $\mu\Delta t$. С другой стороны, в моменты времени $t_0 = 0, t_1, t_2, ...$ на склад приходят поставки величиной $Q_0, Q_1, Q_2, ...$ соответственно. Таким образом, изменение запаса $y(t)$ товара на складе может быть изображено зубчатой ломаной, наклонные отрезки которой параллельны, при этом $tg\alpha = \mu$.



Примем следующие обозначения. Если t_2 – момент очередной поставки, то величину запаса на складе в момент непосредственно перед поставкой будем обозначать $y(t_2^-)$, а величину запаса в момент поступления партии размера Q_2 будем обозначать $y(t_2^+)$. Таким образом, $y(t_2^+) = y(t_2^-) + Q_2$.

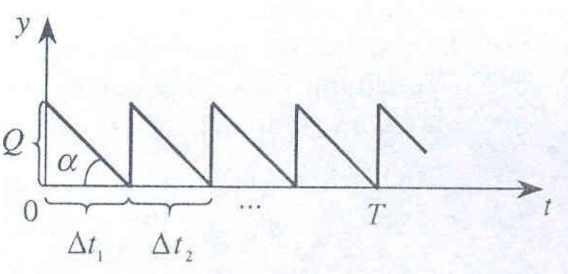
Пусть s – плата за хранение единицы продукта в течение единицы времени, g – плата за доставку одной партии (не зависящая от размера поставки). Тогда средние издержки за время T

$$f_T(y) = f_T(y(t), 0 \leq t \leq T) = \frac{1}{T}\left(s\int_0^T y(t)dt + gn(T) \right),$$

где $n(T)$ – количество поставок в интервале $[0, T]$.

Запись в левой части формулы означает, что средние издержки зависят от значений функции $y(t)$ при всех $0 \leq t \leq T$. Условна функция обозначена как y. Область определения $f_T(y)$ – не множество чисел, а множество функций.

Для оптимизации системы управления запасами необходимо выбрать моменты поставки $t_1, t_2, t_3, ...$ и величины поставок $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, ...$ так, чтобы минимизировать значение $f_T(y)$ при фиксированном T. При этом период времени T будем называть горизонтом планирования.



Задание моментов приходов поставок и их величин полностью определяет функцию $y(t), 0 \leq t \leq T$, и наоборот: функция $y(t)$ полностью задает моменты прихода поставок и их величины. И то и другое будем называть планом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Планом Вильсона, соответствующим величине поставки Q, называется план, в котором все поставки равны, т.е. $Q_0 = Q_1 = Q_2 = ... = Q$, и все временные интервалы равны одному и тому же значению $\Delta t_1 = Q/\mu$, где $i = 1,2,3...$.

ТЕОРЕМА. Для любого периода времени T существует оптимальные план, на котором $f_T(y)$ достигает минимума. Этим планом является план Вильсона.

Пусть Q – размер поставки в плане Вильсона на отрезке $[0,T]$, соответствующий числу поставок $n(T)$, т.е. $\mu T = Qn(T)$. Тогда

$$f_T(y) = \frac{1}{T}\left(\frac{s\mu}{2}\frac{T^2}{n(T)} + gn(T)\right) = \frac{sQ}{2} + \frac{q\mu}{Q}.$$

Выражение в правой части формулы достигает минимума при $Q = Q_0$, где

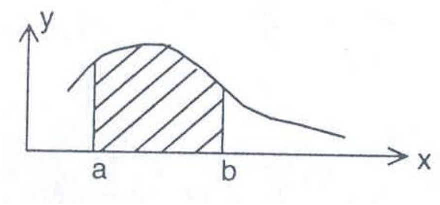
$$Q_0 = \sqrt{2\mu g / s}.$$

В том случае, если $\mu T / Q_0$ является целым числом, Q_0 определяет оптимальный размер поставки, и, следовательно, соответствующий план является планом Вильсона. Формула – знаменитая «формула квадратного корня», приводимая во всех учебниках по теории управления запасами. Минимальное значение выражения равно $Q_0 = \sqrt{2\mu g / s}$.

&-6. Несобственные интегралы.

Интегралы с бесконечными пределами. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех значениях x, таких, что $a \le x \le +\infty.$ Рассмотрим интеграл:

$$I(b) = \int_a^b f(x)dx.$$



Этот интеграл имеет смысл при любом $b > a$. При изменение b интеграл изменяется, он является непрерывной функцией $b.$

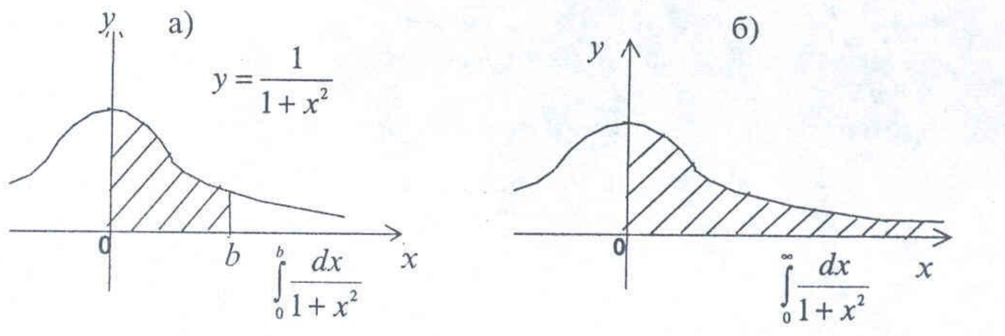
Рассмотрим вопрос о поведении этого интеграла при $b \to +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx,$ то этот предел называют несобственным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ и обозначают так: $\int_a^{+\infty} f(x)dx.$

Следовательно, по определению имеем:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$ Говорят, что в этом случае несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ существует или сходится. Если $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ не имеет конечного предела, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ не существует или расходится.

Геометрический смысл несобственного интеграла в случае, когда $f(x) \ge 0$: Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ выражает площадь области, ограниченной кривой $y = f(x),$ осью абсцисс и ординатами $x = a$, $x = b$, то будем считать, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ выражает площадь неограниченной (бесконечной) области, заключенной между линиями $y = f(x), x = a$ и осью абсцисс.



Аналогичным образом определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Последнее равенство следует понимать так: если каждый из несобственных интегралов, стоящих справа, существует, то существует(сходится) и интеграл, стоящий слева.

ПРИМЕР. Вычислить интеграл $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

По определению несобственного интеграла и с учетом a,b:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctg(x)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} arctg(b) = \frac{\pi}{2}.$$

ТЕОРЕМА. Если для всех значений $x(x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq (x)$ и если $\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$ сходится, то $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ также сходится, при этом: $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \leq \int_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx.$ Если же выполняется неравенство $0 \leq \varphi(x) \leq f(x),$ причем интеграл $\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

Для случая функции $f(x)$, меняющей знак в бесконечном интервале, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если интеграл $\int_{a}^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$ В этом случае последний интеграл называется абсолютно сходящимся.

Интеграл от разрывной функции. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \leq x \leq c,$ а при $x = c$ функция либо не определена, либо терпит разрыв. В этом случае нельзя говорить об интеграле $\int_{a}^{c} f(x)dx$ как о пределе интегральных сумм, так как $f(x)$ не является непрерывной на отрезке $[a,c],$ и поэтому этот предел может и не существовать.

Интеграл $\int_{a}^{c} f(x)dx$ от функции $f(x),$ разрывной в точке $c,$ определяется следующим образом: $\int_{a}^{c} f(x)dx = \lim_{b\to c-0}\int_{a}^{b} f(x)dx.$ Если предел, стоящий справа, существует, то интеграл называют несобственным сходящимся интегралом, в противном случае интеграл называют расходящимся.

Если функция $f(x)$ имеет разрыв в левом конце отрезка $[a,c]$ (т.е. при $x = a$), то, по определению, $\int_{a}^{c} f(x)dx = \int_{a}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{a} f(x)dx.$

Если функция $f(x)$ имеет разрыв в некоторой точке $x = x_0$ внутри отрезка $[a,c]$, то полагают $\int_a^c f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^c f(x)dx$, если оба несобственных интеграла, стоящих в правой части равенства, существуют.

Замечание. Если функция $f(x)$, определенная на $[a,b]$, имеет внутри этого отрезка конечное число точек разрыва $a_1, a_2, ..., a_n$, то интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ определяется следующим образом:

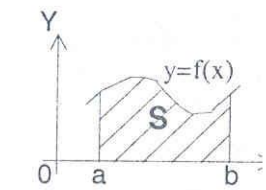
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_a^{a_2} f(x)dx + ... + \int_{a_n}^b f(x)dx,$$

если каждый из несобственных интегралов в правой части равенства сходится.

Если же хотя бы один из этих интегралов расходится, то и $\int_a^b f(x)dx$ называют расходящимся.

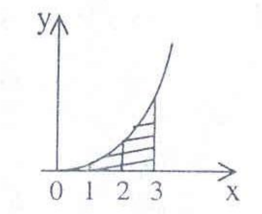
6.1. Примеры вычисления площадей плоских фигур.

Если непрерывная кривая задана в прямоугольных координатах уравнением $y = f(x)(f(x) \geq 0)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями в точках $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси абсцисс $a \leq x \leq b$, определяется формулой:



$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

ПРИМЕР. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 1$, $x = 3$ и осью абсцисс.



Решение. Искомая площадь выражается интегралом:

$$S = \int_1^3 \frac{x^2}{2} dx = 4\frac{1}{3}.$$

ПРИМЕР. Вычислить площадь, ограниченную кривой $x = 2 - y - y^2$ и осью ординат.

Решение. Здесь изменены роли осей координат, и потому искомая площадь выражается интегралом:

$$S = \int_{-2}^1 (2 - y - y^2)dy = 4\frac{1}{2},$$

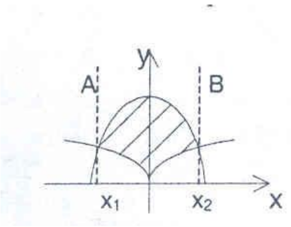
где пределы интегрирования $y_1 = -2$ и $y_2 = 1$ найдены как ординаты точек пересечения данной кривой с осью ординат.

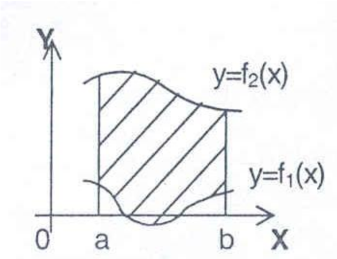
ПРИМЕР. Вычислить площадь S, заключенную между кривыми:

$$y = 2 - x^2, y^3 = x^2.$$

Решение. Решая совместно систему уравнений, находим пределы интегрирования $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Используя геометрические соображения и определение интеграла, получим:

$$S=\int_{-1}^{1}(2-x^2-x^{2/3})dx=(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{5}x^{5/3})\Big|_{-1}^{1}=2\frac{2}{15}.$$





То есть, в более общем случае, если площадь S ограничена двумя непрерывными кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b,$ где $f_1(x)\le f_2(x)$ при $a\le x\le b,$ будем иметь:

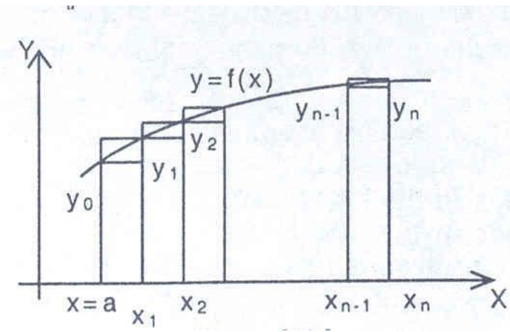
$$S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx.$$

6.2. Приближенное вычисление определенных интегралов.

Известно, что не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих случаях вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница затруднительно, и на практике применяются различные методы приближенного вычисления определенных интегралов. Изложим несколько способов приближенного интегрирования, исходя из понятия определенного интеграла как предела суммы.

Формула прямоугольников . Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y=f(x).$ Требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx.$ Разделим отрезок $[a,b]$ точками $x_0=a, x_1, x_2, ..., x_n=b$ на n равных частей длины $\Delta x: \Delta x=\frac{b-a}{n}.$ Обозначим далее через $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ значения функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, x_2, ..., x_n,$ т.е. $y_0=f(x_0),$ $y_1=f(x_1), ..., y_n=f(x_n).$

Составим суммы: $y_0\Delta x+y_1\Delta x+...+y_{n-1}\Delta x, y_1\Delta x+y_2\Delta x+...+y_n\Delta x.$



Каждая из этих сумм является интегральной суммой для $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и потому приближенно выражает интеграл:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+...+y_{n-1}),$$ или

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+y_3+...+y_n).$$

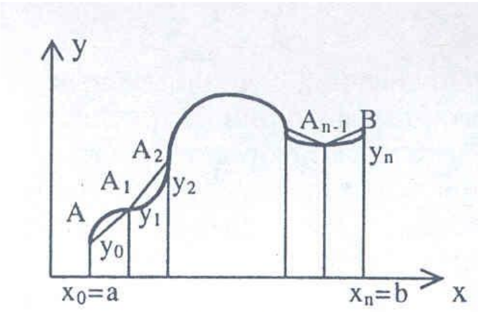
Это есть формула прямоугольников. Из видно, что формула выражает площадь ступенчатой фигуры, составленное из прямоугольников под кривой, а формула – площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников над кривой.

Формула трапеций. Мы получим более точное значение определенного интеграла, если данную кривую $y=f(x)$ заменим не ступенчатой линией, как это было в формуле прямоугольников, а вписанной ломаной. Тогда площадь криволинейной трапеции *aABb* заменится суммой площадей прямолинейных трапеций, ограниченных сверху хордами

$AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}B.$ Так как площадь первой из этих трапеций равна $\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x,$ площадь второй равна $\frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x$ и т.д., то

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + ... + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x\right), \text{ или}$$

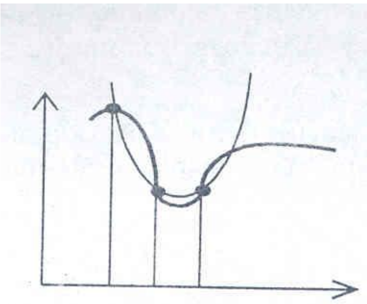
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right).$$



Формула называется формулой трапеций. Отметим, что число, стоящее в правой части формулы, есть среднее арифметическое чисел, стоящих в правых частях формул и.

Число n выбирается произвольно. Чем больше будет это число, тем меньше будет шаг $x = \frac{b-a}{n}$, значит, с большей точностью сумма, написанная в правой части приближенного равенства, будет соответствовать значению интеграла.

Формула парабол (формула Симпсона). Разделим отрезок $[a,b]$ на четное число равных частей, т.е. $n = 2m,$ где $m = 1,2,...$. Площадь криволинейной трапеции, соответствующей первым двум отрезкам $[x_0, x_1]$ и $[x_1, x_2]$ и ограниченной заданной кривой $y = f(x),$ заменим площадью криволинейной трапеции, которая ограниченна параболой, проходящей через три точки $M_0(x_0; y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2; y_2)$ и имеющей ось, параллельную оси Oy. Такую криволинейную трапецию будем называть параболической трапецией.



Уравнение параболы с осью, параллельной оси $Oy,$ имеет вид $y = Ax^2 + Bx + C.$ Коэффициенты A, B, C однозначно определяются из условия, что парабола проходит через три заданные точки.

Аналогичные параболы строим и для других строим и для других пар отрезков. Сумма площадей параболических трапеций и даст приближенное значение интеграла.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если криволинейная трапеция ограничена параболой $y = Ax^2 + Bx + C,$ осью Ox и двумя ординатами, расстояние между которыми равно $2h$, то ее площадь равна:

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

где y_0 и y_2 - крайние ординаты, а y_1 – ордината кривой в середине отрезка.

Теперь, пользуясь формулой, можем написать следующие приближенные равенства $(h = \Delta x)$:

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

....

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m=b}} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Складывая левые и правые части, получим слева искомый интеграл, справа – его приближенное значение:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}), \text{ или}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1})).$$

Это и есть формула Симпсона. Здесь число точек деления $2m$ произвольно, но чем это число больше, тем точнее сумма в правой части дает значение интеграла.

&-7. Дифференциальные уравнения.

7.1. Понятие о дифференциальном уравнение и его решении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальным уравнением называется уравнение входящие произвольные или дифференциалы неизвестной функции.

Дифференциальные уравнения называются обыкновенными, если входящие и них функции зависят от одного аргумента.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок высшей производной, содержащейся в этом уравнении. Так, уравнение $y''+2xy-y^2=0$ – второго порядка; $y'-xy=x^2$ – первого порядка.

Функция, обращающая дифференциальное уравнение в тождество, называется решением этого уравнения.

Например, функция $y=5x$ является решением уравнения $y''-2xy+2y=0,$ так как вычислив производные этой функции $y'=5, y''=0$ и подставив в данное уравнение их значения и $y,$ получим тождество

$-10x+10x=0.$

Дифференциальное уравнение первого порядка, его общее решение и начальные условия. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x,y,y')=0,$$

или (если его можно разрешить относительно y')

$$y'=f(x,y).$$

Решение уравнения или, содержащее произвольную постоянную $C,$ то есть имеющее вид $y=\varphi(x,C),$ называется общим решением этого уравнения. Если это решение получается в неявной форме $\Phi(x,y,C)=0,$ то соотношение $\Phi(x,y,C)=0$ называется общим интегралом уравнения или.

Если придать произвольной постоянной C некоторой фиксированное значение, то из общего решения (общего интеграла) получим частное решение (частный интеграл) этого уравнения.

Для уравнения справедлива следующая теорема, называемая теоремой о существовании и единственности решения.

ТЕОРЕМА (теорема Коши). Если в уравнение функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области $D,$ содержащей точку $(x_0,y_0),$ то существует единственное решение этого уравнения $y=\varphi(x)$, удовлетворяющее условию: при $x=x_0$ $y=y_0$.

Условие, что при $x=x_0$ функция у должна равняться заданному числу y_0, называется начальным условием. Начальное условие дает возможность выделить из общего решения уравнения частное решение. Для этого из уравнения $y_0=\varphi(x_0,C)$ определяется конкретное значение $C=C_0$, и тогда искомое частное решение имеет вид: $y=\varphi(x,C_0)=\psi(x).$

Задача нахождения решения уравнения, удовлетворяющего начальному условию, называется задачей Коши – из множества интегральных кривых выделяется та, которая проходит через заданную точку (x_0,y_0) области $D.$ В ряде случаев, когда условия теоремы Коши не выполнены, через некоторые точки плоскости Oxy либо не проходит ни одна интегральная кривая, либо проходит более одной интегральной кривой.

ПРИМЕР. Показать, что функция $y=\sqrt{x^2+Cx}$ является общим решением уравнения $2xyy'=x^2+y^2$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(-1)=2$.

Решение. Вычислим производную: $y'=\dfrac{2x+C}{2\sqrt{x^2+Cx}}$. Подставив в заданное уравнение значения y и y', получим тождество $2x^2+Cx=2x^2+Cx.$ Следовательно, функция $y=\sqrt{x^2+Cx}$ является общим решением данного уравнения.

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, надо найти соответствующее значение произвольной постоянной $C.$ Для этого в общее решение подставим начальное условие, т.е. $x=-1, y=2.$ Получим уравнение $2=\sqrt{1-C}$, откуда $C=-3.$ Следовательно, решение $y=\sqrt{x^2-3x}$ есть то частное решение, которое удовлетворяет заданному начальному условию.

Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнение первого порядка $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если функции $P(x,y)$ и $q(x,y)$ разлагаются на множители, каждый из которых зависит только от одной переменной:

$$f_1(x)f_2(y)dx+\varphi_1(x)\varphi_2(y)dy=0.$$

В уравнении путем деления его членов на произведение $f_2(y)\cdot\varphi_1(x)$ переменные разделяются следующим образом:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy=0, \quad (f_2(y)\neq 0; \varphi_1(x)\neq 0).$$

Общий интеграл находится по членным интегрированием:

$$\int\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}dy=C, \ (C=const).$$

В общем случае, разделив на произведение $f_2(y)\varphi_1(x),$ можно потерять те решения исходного уравнения, которые обращают это произведение в нуль. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция $y=b,$ где $b-$ корень уравнения $f_2(y)=0$, есть решение исходного дифференциального уравнения. Аналогично, функция $x=a,$ где $a-$корень уравнения $\varphi_1(x)=0,$ также является решением исходного уравнения.

ПРИМЕР. Найти общий интеграл уравнения:

$xyy'=1-x^2$.

Решение. Заменим $y'=\dfrac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения на dx:

$$xydy=(1-x^2)dx.$$

Разделим обе части уравнения на x: $ydy=\left(\dfrac{1}{x}-x\right)dx.$

Интегрируя, получим общий интеграл $\int ydy=\int\left(\dfrac{1}{x}-x\right)dx.$

Тогда решение найдем из уравнения $\dfrac{y^2}{2}=\ln|x|-\dfrac{x^2}{2}+C.$

Предлагаем читателю сделать это самостоятельно.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$ называется однородным, если функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию

$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$

С помощью подстановки $y=tx,$ где $t-$новая искомая функция от $x,$ однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

ПРИМЕР. Решить уравнение $y'=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right).$

Решение. Правая часть уравнения $f(x,y)=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$ обладает свойством

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda y}{\lambda x}\left(1+\ln\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)=f(x,y).$$

Поэтому данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Применим подстановку $y=tx.$ Отсюда $y'=t'x+t.$ Исходное уравнение принимает вид:

$$t'x+t=t(1+\ln t);\quad t'x=t\ln t.$$

Заменив $t'=\frac{dt}{dx}$ и разделив переменные, получим $\frac{dt}{t\ln t}=\frac{dx}{x}.$ Интегрируя полученное уравнение, будем иметь:

$$\int\frac{dt}{t\ln t}=\int\frac{dx}{x};\int\frac{d(\ln t)}{\ln t}=\ln|x|+C;\ln|\ln t|=\ln|x|+\ln C,$$

что после потенцирования даст $\ln t=Cx,$ или $t=e^{Cx}.$ Так как $t=\frac{y}{x},$ то $\frac{y}{x}=e^{Cx},$ откуда $y=xe^{Cx}-$ общее решение данного уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(x,y)$ называется однородной порядка $m,$ если имеет место тождество:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(x,y).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальное уравнение первого порядка $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ называется однородным дифференциальным уравнением, если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же порядка.

ПРИМЕР. Решить уравнение $(x-y)dx-(x+y)dx=0.$

Решение. Коэффициенты при дифференциалах dx и $dy,$ то есть функции $M(x,y)=-(x+y)$ и $N(x,y)=x-y,$ являются однородными функциями первого порядка:

$$M(\lambda x,\lambda y)=-(\lambda x+\lambda y)=-\lambda(x+y)=\lambda\cdot M(x,y),$$

$$N(\lambda x,\lambda y)=\lambda x-\lambda y=\lambda(x-y)=\lambda\cdot N(x,y).$$

Следовательно, данное уравнение – однородное. Положим $y=tx,$ где $t-$ некоторая функция переменной $x.$ Так как $dy=t\cdot dx++x\cdot dt,$ то данное уравнение примет вид: $(x-tx)(tdx+xdt)-(x+tx)dx=0.$ После упрощений получим: $x(1-t)dt=(t^2+1)dx.$ Произведем разделение переменных:

$$\frac{(1-t)dt}{1+t^2}=\frac{dx}{x}.$$

После интегрирования обеих частей уравнения получаем:

$$\int\frac{(1-t)dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{1+t^2}-\int\frac{tdt}{1+t^2}=arctgt-\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|;$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$$

Таким образом,

$$arctg\,t-\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|=\ln|x|+C;$$

$$arctg\,t-\ln\sqrt{1+t^2}-\ln|x|=C;$$

$$arctg\,t-\ln\sqrt{1+t^2}\cdot x=C.$$

Так как $t = \frac{y}{x}$, то получаем $arctg\frac{y}{x} - \ln\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot x = C,$ или

$arctg\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2+y^2} = C -$ общее решение заданного уравнения.

7.2. Линейные уравнения первого порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение вида $y' + p(x)y = f(x),$ где $p(x)$ и $f(x) -$ заданные непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Для решение линейного уравнения применим подстановку $y = u \cdot v,$ причем функцию $u = u(x)$ будем считать новой неизвестной функцией, а функцию $v = v(x)$ выбираем произвольно. Эта подстановка дает

$$u'v + uv'p(x)uv = f(x) \text{ или } u'v + [v' + p(x)v]u = f(x).$$

Выбираем функцию $v(x)$ так, чтобы $v' + p(x)v = 0.$ Тогда предыдущее уравнение сводится к следующим двум уравнениям:

1) $v' + p(x)v = 0$ и 2) $u'v = f(x),$

каждое из которых есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

ПРИМЕР. Решить уравнение $y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$

Решение. Убедившись, что данное уравнение линейное, полагаем $y' = u \cdot v,$ тогда $y' = u'v + uv'$ и данное уравнение преобразуется к виду:

$$u'v + uv' - 2xy = 2xe^{x^e},$$

или

$$u'v + u(v' - 2xy) = 2xe^{x^2}.$$

Так как функция y представлена в виде произведения двух вспомогательных функций u и $v,$ то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем в качестве v какой-либо частный интеграл уравнения $v' - 2xv = 0.$ Тогда для отыскания функции и получим уравнение $u'v = 2xe^{x^2}.$

Решая первое из этих уравнений, найдем $v;$ разделяя переменные и интегрируя, найдем его простейший интеграл:

$\frac{dv}{v} = 2xdx; \ln|v| = x^2$ (положим $C = 0$).

Потенцируя, находим $v = e^{x^2}.$

Подставляя $v = e^{x^2}$ во второе уравнение, получим

$u'e^{x^2} = 2xe^{x^2}; u' = 2x.$

Находим общее решение этого уравнения: $u = x^2 + C.$ Зная u и $v,$ находим искомую функцию $y: y = u \cdot v = (x^2 + C)e^{x^2}.$

7.3. Уравнение Бернулли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x)y^n,$$

где $p(x)$ и $f(x) -$ заданные непрерывные функции, а $n \neq 0, n \neq 1,$ называется уравнением Бернулли.

Отметим, что при $n - 0$ это уравнение становится линейным уравнением, а при $n = 1 -$ уравнением с разделяющимися переменными.

При помощи подстановки $z = y^{1-n}$ уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению относительно новой функции $z.$

Уравнение Бернулли можно решить с помощью подстановки $y = u(x)v(x)$, не сводя его предварительно к линейному.

ПРИМЕР. Найти частное решение уравнения $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли. Положим $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + uv'$, и уравнение примет вид:

$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -xu^2v^2$, или $u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = -xu^2v^2$.

Отсюда для нахождения u и v имеем два уравнения:

1) $v' + \frac{v}{x} = 0$; и 2) $u' = -xu^2v^2$.

Из первого уравнения находим функцию v:

$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0;\ \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x};\ \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x};\ \ln|v| = -\ln|x|.$

Здесь для простоты постоянная $C = 0$. Отсюда $v = \frac{1}{x}$.

Подставляем $v = \frac{1}{x}$ во второе уравнение и, решая его, находим функцию u:

$$u' = -xu^2 \cdot \frac{1}{x}; u' = -u^2; \frac{du}{dx} = -u^2; -\frac{du}{u^2} = dx; -\int\frac{du}{u^2} = \int dx + C;\ \frac{1}{u} = x + C;\ u = \frac{1}{x+C}.$$

Тогда $y = u \cdot v = \frac{1}{x+C} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2 + Cx}$ – общее решение данного уравнения.

Подставляя сюда заданные значения переменных $x = 1,\ y = 1$, находим значение произвольной постоянной $C = 0$.

При $C = 0$ из общего решения получаем $y = \frac{1}{x^2}$. Это и будет частное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(1) = 1$.

7.4. Дифференциальные уравнения второго порядка.

Дифференциальное уравнение второго порядка, его общее решение и начальные условия. Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, удовлетворяющая уравнению при любых значениях произвольных постоянных C_1 и C_2, называется его общим решением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решение уравнения, получающееся из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных C_1 и C_2, называется частным решением этого уравнения.

Так как в функцию $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ входят две произвольные постоянные C_1 и C_2, то для выделения из общего решения уравнения некоторого частного решения необходимо иметь два начальных условия: если $x = x_0$, то $y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_0$, то есть $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

$$\text{Тогда } \begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2), \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, C_2). \end{cases}$$

Из этой системы можно определить постоянные C_1 и C_2, и тем самым найти частное решение уравнения.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. В следующих частных случаях уравнения второго порядка сводятся к дифференциальным уравнениям первого порядка.

СЛУЧАЙ 1. Уравнение имеет вид:

$$y''=f(x),$$

где $f(x)-$ непрерывная на интервале (a,b) функция. Так как $y''=(y')'=\dfrac{dy'}{dx}$, то данное уравнение можно записать так:

$$\frac{dy'}{dx}=f(x) \text{ или } dy'=f(x)dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим:

$$y'=\int f(x)dx+C_1.$$

Интегрируя еще один раз, получим общее решение уравнения:

$$y=\int(\int f(x)dx)dx+C_1x+C_2.$$

ПРИМЕР. Найти общее решение уравнения $y''=8e^{2x}+12x.$

Решение. Так как $y''=\dfrac{dy'}{dx}$, то данное уравнение можно записать так:

$$\frac{dy'}{dx}=8e^{2x}+12x, \text{ или } dy'=(8e^{2x}+12x)dx.$$

Интегрируя, получим:

$$y'=4\int e^{2x}d(2x)+12\int xdx=4e^{2x}+6x^2+C_1.$$

Отсюда $dy=(4e^{2x}+6x^2+C_1)dx$ и, значит,

$$y=2\int e^{2x}d(2x)+\int x^2dx+C_1\int dx=2e^{2x}+2x^3+C_1x+C_2.$$

Итак, $y=2e^{2x}+2x^3+C_1x+C_2-$ общее решение заданного уравнения.

СЛУЧАЙ 2. Пусть уравнение не содержит y, то есть имеет вид:

$$F(x,y',y'')=0.$$

Положим $y'=z,$ где $z-$ некоторое функция аргумента $x.$ Тогда $y''=z'$ и уравнение становится уравнением первого порядка:

$$F(x,z,z')=0.$$

ПРИМЕР. Найти общее решение уравнения $xy''=y'.$

Решение. Данное уравнение не содержит явным образом $y.$ Положим $y'=z.$

Тогда $y''=z'.$ Имеем:

$$xz'=z;\ x\frac{dz}{dx}=z;\ \frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим $\ln|z|=\ln|x|+\ln C_1$ или, потенцируя, $z=C_1x.$ Так как $z=y'=\dfrac{dy}{dx}$, то $dy=C_1xdx.$ Интегрируя еще раз, получим общее решение заданного уравнения:

$$y=C_1\cdot\frac{x^2}{2}+C_2.$$

СЛУЧАЙ 3. Пусть уравнение не содержит x, то есть имеет вид:

$$F(y,y',y'')=0.$$

Тогда в качестве неизвестной функции опять берется y', но за аргумент вместо x принимаем $y.$ Пусть $y'=p.$ Применяя правило дифференцирования сложной функции, будем иметь

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

С учетом этого уравнение примет вид $F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right)=0-$это дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции p.

ПРИМЕР. Найти общее решение уравнения $2yy''=1+(y')^2$.

Решение. Пусть $y'=p,$ тогда $y''=p\frac{dp}{dy}$ и заданное уравнение примет вид $2yp\frac{dp}{dy}=1+p^2$. Разделяя в нем переменные, получим $\frac{2pdp}{1+p^2}=\frac{dy}{y}$.

Интегрируем это уравнение:

$$\int\frac{2pdp}{1+p^2}=\int\frac{dy}{y};\ \int\frac{d(1+p^2)}{1+p^2}=\ln|y|+\ln C_1;\ \ln(1+p^2)=\ln C_1|y|;$$

$$1+p^2=C_1y.$$

Откуда $p^2=C_1y-1,$ или $(y')^2=C_1y-1,$ и $y'=\pm\sqrt{C_1y-1}.$

Далее, так как $y'=\frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1y-1};\ \pm\frac{dy}{\sqrt{C_1y-1}}=dx.$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\frac{1}{\pm C_1}\int(C_1y-1)^{-\frac{1}{2}}d(C_1y-1)=x+C_2.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и выражая потому, получим $y=\frac{C_1}{4}(x+C_2)^2+\frac{1}{C_1}-$общее решение заданного уравнения.

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение вида

$$y''+py'+qy=0,$$

где p и $q-$постоянные действительные числа, называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами; p и $q-$его коэффициенты.

Общее решение уравнения находится с помощью характеристического уравнения

$$k^2+pk+q=0,$$

которое получается из уравнения, если, сохраняя в нем коэффициенты p и q, заменить функцию y единицей, а все ее производные $k-$го порядка соответствующими степенями k.

При этом справедливы правила:

1°. если корни k_1 и k_2 характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение уравнения выражается формулой:

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x};$$

2°. если корни k_1 и k_2 характеристического уравнения действительные и равные $(k_1=k_2),$ то общее решение уравнения выражается формулой:

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k_1x}=e^{k_1x}(C_1+C_2x);$$

3°. если корни k_1 и k_2 характеристического уравнения комплексные $(k_1=\alpha+\beta i,$ $k_2=\alpha-\beta i),$ то общее решение уравнения есть

$$y = e^{ax}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

ПРИМЕР. Найти общее решение уравнений:

а) $y''-y'-6y=0;$ б) $y''-22y'+121y=0;$ в) $y''+16y=0;$ г) $y''-4y'++20y=0.$

Решение. а) Заменяя в данном уравнение функцию y единицей, а ее производные соответствующими степенями $k,$ напишем его характеристическое уравнение: $k^2-k-6=0.$

Корни этого уравнения $k_1=-2,\ k_2=3$ действительные и различные. Поэтому, согласно правилу $1°$ искомое общее решение данного уравнения будет

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x};$$

б) по указанному правилу составляем характеристическое уравнение: $k^2-22k+121=0$. Решая это уравнение, получим $k_1=k_2=11.$ Согласно правилу $2°$ общим решением данного уравнения будет $y=C_1xe^{11x}+C_2xe^{11x};$

в) характеристическое уравнение $k_2+16=0$ имеет корни $k_1=4i;\ k_2=-4i.$ Согласно правилу $3°$ общее решение данного уравнения имеет вид: $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

Полагая в этом равенстве $\alpha=0, \beta=4,$ получим общее решение данного уравнения: $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x;$

г) характеристическое уравнение $k^2-4k+20=0$ имеет комплексные корни $k_1=2+4i,\ k_2=2-4i.$ По правилу $3°,$ полагая в равенстве $\alpha=2, \beta=4,$ получим общее решение заданного уравнения

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение вида

$$y''+py'qy = f(x),$$

где p и $q-$действительные числа, $f(x)-$известная непрерывная функция, называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для общего решения неоднородного уравнения справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Общее решение y неоднородного уравнения равно сумме общего решения y_1 соответствующего однородного уравнения.

$$y''+py'+qy=0$$

и любого частного решения $\bar{y}$ данного неоднородного уравнения.

Согласно этой теорема для решения уравнения вначале находится функция y_1 (по правилом $1°-3°$), а затем – функция $\bar{y}.$ Их сумма и дает общее решение y неоднородного уравнения:

$$y = y_1 + \bar{y}.$$

Для некоторых специальных видов функции $f(x)$ частное решение $\bar{y}$ можно найти методом неопределенных коэффициентов. По виду правой части $f(x)$ можно заранее указать вид частного решения $\bar{y}$, где неизвестны лишь числовые коэффициенты, в следующих простейших случаях.

СЛУЧАИ 1. $f(x)=P(x),$ где $P(x)-$многочлен некоторой степени.

В этом случае $\bar{y}$ есть многочлен $Q(x)$ той же самой степени, что и $P(x),$ если число 0 не является корнем характеристического уравнения; если же число 0 является корнем характеристического уравнения кратности $r,$ то $\bar{y}=x^r\cdot Q(x).$

СЛУЧАИ 2. $f(x)=e^{mx}$ ($a, m-$некоторые числа), В этом случае $\bar{y} = Ae^{mx}$, если число m не является корнем характеристического уравнения, и $\bar{y} = Ax^r e^{mx}$, если число m является корнем характеристического уравнения кратности r.

Здесь A – подлежащий определению коэффициент.

СЛУЧАИ 3. $f(x) = e^{mx} \cdot P(x)$, где $P(x)$ – многочлен некоторой степени.

В этом случае $\bar{y} = e^{mx} \cdot Q(x)$, если число m не является корнем характеристического уравнения, и $\bar{y} = x^r e^{mx} \cdot Q(x)$, если число m – корень характеристического уравнения кратности r.

Здесь $Q(x)$ – многочлен той же степени, что и $P(x)$, коэффициенты которого подлежат определению.

Заметим, что из случая 3 при $m = 0$ получаем случай 1; а если $P(x) = a$ (многочлен нулевой степени), то $f(x) = ae^{mx}$, и из случая 3 получаем случай 2.

СЛУЧАИ 4. $f(x) = e^{mx}(a\cos nx + b\sin nx)$.

Тогда $\bar{y} = e^{mx}(A\cos nx + B\sin x)$, если числа $m \pm ni$ не является корнями характеристического уравнения, и $\bar{y} = xe^{mx}(A\cos nx + B\sin x)$, если числа $m \pm ni$ являются корнями характеристического уравнения.

Здесь A и B - подлежащие определению коэффициенты.

СЛУЧАИ 5. Правая часть уравнения, функция $f(x)$, есть сумма указанных функций.

Тогда часть решение $\bar{y}$ этого уравнения есть сумма частных решений уравнений с той же левой частью, что и уравнение, а правые части уравнений есть каждое слагаемое правой части уравнения.

ПРИМЕР. Решить уравнения:

а) $y''+y'-2y = 6x^2$. б) $y''-3y' = 2 - 6x$.

в) $y''-6y'+9y = -8e^x$. г) $y''+5y' = e^{-5x}$.

д) $y''-4y = xe^{-x}$. е) $y''+9y = 12\cos 3x + 18\sin 3x$.

ж) $y''-y' = (2x+3)e^x$.

Решение. а) Сначала находим общее решение однородного уравнения $y''+y'-2y = 0$, соответствующего данному неоднородному уравнению. Его характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = -2,\ k_2 = 1$. Поэтому (согласно правилу $1°$) $y_{odn} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$.

Теперь находим частное решение $\bar{y}$ данного неоднорого уравнения. Для правой части данного уравнения $f(x) = 6x^2$. Согласно указанному правилу (случай 1, число 0 не является корнем характеристического уравнения), $\bar{y}$ есть многочлен той же степени, что и $f(x) = 6x^2$, то есть многочлен второй степени: $\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$. Отсюда, дифференцируя, находим $\bar{y}' = 2Ax + B, \bar{y}'' = 2A$ и подставляя $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в данное уравнение, получим равенство $2A + 2Ax + B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 6x^2$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x из обеих его частей, а только при этом условии оно будет тождественным, получим систему

$$\begin{cases} -2A = 6; \\ 2A - 2B = 0; \\ 2A + b - 2C = 0, \end{cases}$$

из которой находим $A = -3, B = -3,\ C = -4{,}5$. Следовательно, $y = -3x^2 - 3x - 4{,}5$, а искомое общее решение данного неоднородного уравнения

$$y = y_{odn} + \bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 3x^2 - 3x - 4{,}5.$$

б) Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 3k = 0$, определяем его корни $k_1 = 0, k_2 = 3$ и (согласно правилу $2°$) находим общее решение y_{odn} однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному уравнению: $y_{odn} = C_1 + C_2 e^{3x}$.

Частным решением $\bar{y}$ данного неодродного уравнения в соответствии с его правой частью $f(x) = 2 - 6x$ (случай1, число 0 – корень характеристического уравнения) будет функцтя вида $\bar{y} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$.

Подставляя функцию $\bar{y}$ и ее производные $\bar{y}' = 2Ax + B, \bar{y}'' = 2A$ в данное неодродное уравнение, получим равенство

$$2A - 6Ax - 3B = 2 - 6x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x обеих его частей, получим систему

$$\begin{cases} -6A = -6, \\ 2A - 3B = 2. \end{cases}$$

Решая ее, находим $A = 1, = 0.$ Следовательно, $\bar{y} = x^2$, общее решение

$$y = y_{odn} + \bar{y} = C_1 + C_2 e^{3x} + x^2.$$

в) Здесь характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 3.$ Поэтому общее решение однородного уравнения есть функция $y_{odn} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x}$. Частное решение $\bar{y}$ неоднородного уравнения следует искать в виде $\bar{y} = Ae^x$ согласно указанному правилу (случаи 2, число $m = 1$ не является корнем характеристического уравнения). Находим $y' = Ae^x, y'' = Ae^x$. Подставим $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в данное уравнение и определим значение коэффициента A:

$$Ae^x - 6Ae^x + 9Ae^x = -8e^x; 4Ae^x = -8e^x; A = -2.$$

Следовательно, $\bar{y} = -2e^x$, $y = y_{odn} + \bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 xe^{3x} - 2e^x$.

г) Характеристическое уравнение $k^2 + 5k = 0$ имеет корни $k_1 = 0,\ k_2 - 5.$ Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения (по правилу $1°$) $y_{odn} = C_1 + C_2 e^{-5x}$.

Согласно указанному правилу и случаю 2 число $m = -5$ является корнем характеристического уравнения $\bar{y} = xAe^{-5x}$. Находим

$$y' = Ae^{-5x} - 5Axe^{-5x},$$

$$\bar{y}'' = -5Ae^{-5x} - 5Ae^{-5x} + 25Axe^{-5x} = -10Ae^{-5x} + 25Axe^{-5x}.$$

Подставляя $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в данное уравнение, получим

$$-10Ae^{-5x} + 25Axe^{-5x} + 5Ae^{-5x} - 25Axe^{-5x} = e^{-5x},\ \text{отсюда найдем } A = -0{,}2.$$

Следовательно, $\bar{y} = -0{,}2xe^{-5x}, y = y_{odn} + \bar{y} = C_1 + C_2 e^{-5x} - 0{,}2xe^x$.

д) Характеристическое уравнение $k^2 - 4 = 0$ имеет корни $k_1 = -2, k_2 = 2.$ Поэтому общее решение соответствующего одноордного уравнения:

$$y_{odn} = C_1 e^{-2x} + C^2 e^{2x}.$$

Частным решением неоднородного уравнения будет функция $\bar{y} = (Ax + B)e^{-x}$ (случай 3, $m = -1$ не является корнем характеристического уравнения). Находим

$$\bar{y}' = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} = (A - B)e^{-x} - Axe^{-x},$$

$$\bar{y}'' = -(A - B)e^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} = (B - 2A)e^{-x} + Axe^{-x}.$$

Подставим $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в данное уравнение, получим:

$$(B - 2A)e^{-x} + Axe^{-x} - 4(Ax + B)e^{-x} = xe^{-x};$$

$$(B-2A+Ax-4Ax-4B)e^{-x}=xe^{-x};-2A-3B-3Ax=x.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, получим систему уравнений для определения A и B:

$$\begin{cases} -3A=1, \\ -2A-3B=0. \end{cases}$$

Решая ее, находим $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{2}{9}$. Следовательно, $\bar{y}\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}\right)e^{-x}$. Значит,

$$y=y_{odn}+\bar{y}=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}\right)e^{-x}.$$

е) Характеристическое уравнение $k^2+9=0$ имеет корни $k_1=3i, k_2=-3i.$ Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения (см. правило $3°$, где $\alpha=0, \beta=3$) $y_{odn}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$

Частное решение $\bar{y}$ данного неоднорого уравнения будет $\bar{y}=x(A\cos 3x+B\sin x)$ (случай 4, $m=0, n=3$ и числа $m\pm ni=\pm 3i$ являются корнями характеристического уравнения).

Дифференцируя дважды это равенство, находим $\bar{y}''$:

$$\bar{y}'=(A\cos 3x+B\sin x)+x(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)=(A+3Bx)\cos 3x+(B-3Ax)\sin 3x;$$

$$\bar{y}''=3B\cos 3x-(A+3Bx)\cdot 3\sin 3x-3A\sin 3x+(B-3Ax)\cdot 3\cos 3x=(6B9Ax)\cos 3x+(-6A-9Bx)$$
$$\sin 3x.$$

Подставив $\bar{y}$ и $\bar{y}''$ в данное уравнение, пооучим

$$6B\cos 3x-9Ax\cos 3x-6A\sin 3x-9Bx\sin 3x+9Ax\cos 3x+9Bx\sin 3x=12\cos 3x+18\sin 3x;$$

$$6B\cos 3x-6A\sin 3x=12\cos 3x+18\sin 3x.$$

Приравнивая коэффициенты у подобных членов в обеих частях равенства, найдем $6B=12;-6A=18.$ Значит, $A=-3, B=2.$

Следовательно, $\bar{y}=x(-3\cos 3x+2\sin 3x),$

$$y=y_{odn}+\bar{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x(2\sin 3x-3\cos 3x).$$

ж) Характеристическое уравнение $k^2-k=0$ имеет корни $k_1=0, k_2=1.$ Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения.

$$y_{odn}=C_1+C_2e^x.$$

Частным решением неоднородного уравнения будет функция $\bar{y}=x(Ax+B)e^x=(Ax^2+$

$+Bx)e^x$ (согласно указанном правилу, случай 3, $m=1$ является корнем характеристического уравнения). Находим

$$\bar{y}'=(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^2=[Ax^2+(2A+B)x+B]e^x,$$

$$\bar{y}''=[2Ax+2A+B]e^x+[Ax^2+(2A+B)x+B]e^x=[Ax^2+(4A+B)x+2A+2B]e^x.$$

Подставляя $\bar{y}$ и $\bar{y}''$ в данное уравнение и сокращая все слагаемые на множитель $e^x\neq 0,$ получаем

$Ax^2+(4A+B)x+2A+2B-Ax^2-(2A+B)x-B=2x+3,$ или после упрощения $2Ax+2A+B=2x+3.$

Отсюда, приравнивая коэффициенты приодинаковых степенях x и свободные члены в обеих частях равенства, получим

$$\begin{cases} 2A=2, \\ 2A+B=3. \end{cases}$$

Откуда $A=1, B=1$. Следовательно, $\bar{y}(x^2+x)e^x$, а искомое решение данного неоднородного уравнения:

$$y = y_{odn} + \bar{y} = C_1 + C_2 e^x + x(x+1)e^x.$$

&-8. Числовые ряды.

8.1. Понятие ряда. Признаки сходимости рядов.

Числовой ряд. Определение ряда, понтятие схидомости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовым рядам называется выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n ...,$ называемые членами ряда, образуют известную числовую последовательность.

Число a_n называется общим членом ряда. Общий член ряда является функцией от n. Если известно аналитическое выражение этой функции, то придавая числу n последовательно значения 1,2,3,…, можно найти сколько угодно членов ряда.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовой ряд называется сходящимся, если сумма первых его членов $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ при $n \to \infty$ имеет конечный предел. Этот предел называется суммой сходящегося ряда. Если же конечный предел суммы S_n не существует, то ряд называется расходящимся. В этом случае нет смысла говорить о его сумме.

Если ряд сходится, и его сумма равна S, то разность $S - S_n = R_n$ называется $n-$м остатком ряда:

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots .$$

Очевидно, R_n – также числовой ряд.

Для установления сходимости или расходимости рядов применяются признаки сходимости.

Необходимый признак сходимости ряда.

ТЕОРЕМА. (необходимый признак сходимости). Если числовой ряд $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ сходится, то его общий член a_n стретимся к нулю при $n \to \infty$, то есть $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Это необходимый, но не достаточный признак сходимости для всякого ряда.

Если же $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$ то ряд расходится. (это достаточный признак расходимости для всякого ряда).

ПРИМЕР. Написать пять первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)}$.

Решение. Подставляя в формулу общего члена $a_n = \frac{2n+3}{n(n+1)}$ последовательно значения $n = 1, 2, 3, 4, 5,$ получим

$$a_1 = \frac{5}{2};\ a_2 = \frac{7}{6};\ a_3 = \frac{3}{4};\ a_4 = \frac{11}{20};\ a_5 = \frac{13}{30}.$$

ПРИМЕР. Написать формулу общего члена для каждого ряда:

а) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + ...;$ б) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots .$

Решение. Для ряда а) числители члена ряда – натуральный ряд чисел, знаменатели – числа, которые могут быть получены по формуле $n+1,$ где $n = 1, 2, 3, \dots .$

Следовательно, общий чле ряда $a_n = \frac{n}{n+1}.$

Числители членов ряда б) – нечетные числа вида $2n-1,$ а знаменатели могут быть получены по формуле 2^n, то есть $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$ – общий член ряда б).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ называется гармоническим.

Этот ряд расходится, хотя для него выполняется необходимый признак сходимости.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами. Применение достаточных признаков при исследовании рядов в требуется в тех случаях, когда выполнен необходимый признак сходимости $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$.

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ. Если каждый член ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

с положительными членами, начиная с некоторого номера, не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ...,$$

то ряд тоже сходится.

Если же каждый член ряда, начиная с некоторого номера, не меньше соответствующего члена расходящегося ряда, то данный ряд тоже расходится.

При приминении этого признака исследуемый ряд часто сравнивается или с бесконечной геометрической прогрессией:

$$1+q+q^2+...+q^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}q^n \ \ (q>0),$$

которая сходится при $0<q<1$, а при $q \geq 1$расходится, или с расходящимся гармоническим рядом:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...+=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

ВТОРОЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ. Если существует конечный отличный от нуля предел при $n\to\infty$отношения общих членов рядов и $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1\neq 0\right)$, то это ряды одновременно либо сходятся, либо расходятся.

ПРИМЕР. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$.

Решение. Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и применим второй признак сравнения. Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\neq 0,$ то данный ряд расходится.

ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА. Пусть для ряда с положительными членами

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

существует предел отношения поледующего члена к предыдущему при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

то при $0<q<1$ряд сходится, а при $q>1$ряд расходится. При $q=1$вопрос о сходимости ряда остается непрешенным.

ПРИМЕР. Исследовать по признаку Даламбера сходимость рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n}$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3n}$;   в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$.

Решение. а) Зная $n-$й член ряда, находим следующий за ним $(n+1)-$й член, заменяя в выражении $n-$го члена n на $n+1$. Затем ищем предел отношения последующего члена a_{n+1} к предыдущему a_n при $n\to\infty$:

$$a_n=\frac{n^2}{2n};\qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}.$$

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot(n+1)^2}{2^{n+1}\cdot n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot 2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Так как $q=\frac{1}{2}<1,$ то согласно признаку Даламбера данный ряд сходится.

б) $a_n=\frac{n!}{3^n};\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}.$

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=\infty.$$

Согласно признаку Даламбера данный ряд расходится.

в) $a_n=\frac{3^n}{2^n(2n+1)};\quad a_{n+1}=\frac{3^n}{2^{n+1}(2n+3)}.$

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot 2^n\cdot(2n+1)}{2^{n+1}\cdot(2n+3)\cdot 3^n}=\frac{3}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{3}{2}.$$

Здесь $q=\frac{3}{2}>1.$ По признаку Даламбера данный ряд расходится.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ (КОШИ). Если функция $f(x)$ на интервале $[1;\infty]$ непрерывна, положительна, монотонно убывает, то числовой ряд $a_1+a_2+...+a_n+...$, где $a_n=f(n),$ сходится (расходится), если сходится (расходится) несобственный интеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx.$

ПРИМЕР. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$, где $a-$действительное число.

Решение. При $a\le 0$ предел при $n\to\infty$ общего члена ряда отличен от нуля, то есть не выполняется необходимый признак сходимости ряда. Поэтому ряд в этом случае расходится. Для исследования сходимости ряда при $a>0$ применим признак Коши.

1. Пусть $a=1.$ Тогда $a_n=\frac{1}{n}$ (ряд гармонический); тогда интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}[\ln x]_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty.$$

Несобственный интеграл расходится, тем самым расходится и данный гармонический ряд.

2 Пусть $a>1$. Тогда

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^a}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}x^{-a}dx=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-a+1}}{1-a}\right]_1^b=\tfrac{1}{1-a}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{x^{a-1}}\right]_1^b=\frac{1}{1-a}\lim_{b\to\infty}\left(b^{\frac{1}{1-a}}-1\right)=\frac{1}{a-1}.$$

Сходимость этого интеграла обосновывает сходимость ряда.

3. Если $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1}{b^{a-1}} = \infty$ и несобственный интеграл расходится.

Таким образом, данный ряд сходится при $a > 1$ и расходится при $a \le 1$.

8.2. Знакочередующиеся ряды. Их признаки сходимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ряд называется знакочередующимся (или знакопеременным), если любые два соседних члена его противоположны по своим знакам. Знакочередующийся ряд можно записать так:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots,$$

где все числа $a_n\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$ положительны.

Сходимость знакочередующегося ряда может быть установлена признаком сходимости знакочередующегося ряда (признаком Лейбница).

ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА. Если члены закочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то такой ряд сходится, и его сумма по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого члена.

ПРИМЕР. Исследовать сходимость знакочередующихся рядов:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}.$$

Решение. а) Члены данного ряда монотонно убывают по абсолютной величине:

$$1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots \text{ и } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Поэтому, согласно признаку Лейбница, данный ряд сходится.

б) Члены данного ряда по аюсолютной величине монотонно возрастают:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \ldots \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \ne 0.$$

Условия признаки Лейбница не выполняются, значит, исследуемый ряд расходится.

Абсолютная и условия сходимость знакочередующегося ряда.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Знакопеременный сходящийся ряд называется условна сходящимся, если ряд расходится.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.

ПРИМЕР. Исследовать сходимость знакопеременного ряда (определить: является ли он абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся):

$$\text{а)}\ \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}; \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n5^n}; \quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2n^2+1}.$$

Решение. а) Члены данного знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине:

$$\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{\ln 4} > \ldots \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} = 0.$$

Поэтому, согласно признаку Лейбница, данный ряд сходится. Чтобы установить, сходится он абсолютно ил условно, исследуем ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда.

Применяя признак сравнения с расходящимся гармоническим рядом, получим $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n}$, значит, ряд с положительными членами расходится. Следовательно данный ряд а) сходится условно.

б) Члены данного знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине:

$$\frac{1}{5} > \frac{1}{2\cdot 5^2} > \frac{1}{3\cdot 5^2}\ldots \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n5^n} = 0.$$

Поэтому, согласно признаку Лейбница, он сходится. Ряд, состаленнный из абсолютных величин членов данного ряда, также сходится согласно признаку Даламбера:

$$a_n = \frac{1}{n5^n},\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)5^{n+1}},\ q = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n5^n}{(n+1)5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{5(n+1)} = \frac{1}{5} < 1.$$

Следовательно, данный ряд абсолютно сходящийся.

в) Для данного знакомпеременного ряда не выполняется необходымый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Значит, данный ряд расходится.

8.3. Степенной ряд и область его сходимости.

Функциональные ряды. Их сходимость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$, члены которого являются функциями от переменной x, имеющими общую область определения, называется функциональным.

При различных значениях x из функционального ряда получаем числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися.

Совокупность значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется его областьюсходимости.

Из всех функциональных рядов простейшими и наиболее употребительными является степенные ряды вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots .$$

Степенной ряд сходится при $x = 0.$ Определение области сходимости степенного ряда базируется на теореме Абеля.

ТЕОРЕМА АБЕЛЯ. Если степенной ряд сходится при $x = x_0 (x_0 \neq 0)$, то он сходится абсолютно при любом значении x, удовлетворяющем неравенству: $|x| > |x_0|.$ Если же степенной рядрасходится при $x = x_0$, то он расходится при любом значении x, удовлетворящем неравенству $|x| > |x_0|.$

Из теоремы Абеля следует, что если степенной ряд сходится в точке $x_0 \neq 0,$ то он сходится в интервале $(-|x_0|, |x_0|).$

Можно доказать, что для всякого степенного ряда, который имеет точки сходимости (кроме точки $x=0$) и точки расходимости, существует некоторое число $R>0;$ при этом ряд сходится во всех точках, для которых $|x|<R.$ Это число называется радиусом сходимости ряда.

Если ряд сходится только при $x=0,$ то пологаем $R=0.$ Если же ряд сходится при любом значении $x,$ то полагают $R=\infty.$ Интервалом сходимости ряда называется интервал $(-R,R).$

Чтобы найти область сходимости степенного ряда, надо определить интервал сходимости $(-R,R),$ а затем выяснить вопрос о сходимости ряда на концах интервала, то есть при $x=-R$ и при $x=R$.

Радиус сходимости степенного ряда отыскивают с помощью признака Даламбера.

Применим признак Даламбера к ряду, составленному из абсолютных величин членов ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = q\cdot|x|, \quad \text{где} \quad q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Ряд сходится абсолютно при всех значениях $x,$ удовлетворяющих неравенству:

$$q|x|<1, \quad \text{или} \quad |x|<\frac{1}{q}, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{q}<x<\frac{1}{q}, \; -R<x<R,$$

где радиус сходимости $R=\dfrac{1}{q}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$

ПРИМЕР. Определить область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}.$$

Решение. Здесь $a_n=\dfrac{1}{n2^n}$; $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$. Поськолку

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=2,$$

исследуемый ряд сходится при всех значениях $x,$ принадлежащих интервалу $(-2;2).$

Граничные точки $x=\pm 2$ этого интервала, для которых $q=1$ и признак Даламбера не решает вопроса о сходимости ряда, исследуем особо.

При $x=-2$ получим числовой знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

который сходится согласно признаку Лейбница (члены этого ряда монотонно убывают по абсолютной величине и общий член ряда стретимся к нулю).

При $x=2$ получим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n},$ который расходится.

Следовательно, областью сходимости данного ряда является полуоткрытый интервал $[-2;2]$.

Ряды Тейлора и Маклорена. Если функция $f(x)$ имеет в окрестности точки точки $x=a$ производные $(n+1)-$го порядка, то по формуле Тейлора она может быть представлена в виде суммы многочлена степени n и остаточного члена $R_n(x)$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f`(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{f(n+1)(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $a < c < x$ или $x < c < a$.

Если в формуле положить $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, то получим снова ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f`(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ...$$

Положив в ряде Тейлора $a = 0$, получим ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f`(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{1!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

Для разложимости функции $f(x)$ в ряд Маклорена необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0,$$

где число c заключено между 0 и x.

Если это условие не выполняется, то степенной ряд не представляет собой функцию $f(x)$. Если условие выполняется на некотором интервале, то на этом интервале составленный ряд Маклорена сходится к функциии $f(x)$.

Для разложения данной функции в ряд Маклорена нужно:

1) вычислить значения этой функции и ее производных при $x = 0$ и подставить их в общее выражение ряда Маклорена для произвольной функции;

2) определить совокупность значений x, при которых полученный ряд сходится к данной функции (т.е. при которых выполняется условие).

Для многих функций, употребляемых на практике, каждая точка x сходимости ряда Маклорена является и точкой сходимости этого ряда к породившей его функции. Поэтому при разложении многих функций в ряд Маклорена можно вместо проверки выполнения условия, что во многих случаях весьма затруднительно, исследовать сходимость самого ряда Маклорена как обычного степенного ряда.

ПРИМЕР. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^x$.

Решение. Последовательно дифференцируя функция $f(x) = e^x$, будем иметь:

$$f`(x) = e^x,\ f''(x) = e^x, ...,\ f^{(n)}(x) = e^x.$$

Высичлим значения самой функции и ее производных при $x = 0$:

Подставляя полученные значения $f(0) = 1, f`(0) = 1, f''(0) = 1, ..., f^{(n)}(0) = 1$ в общее выражение ряда Маклорена для произьволной функции, получим

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x_n}{n!} + ...$$

Исследуем сходимость полученного ряда по признаку Даламбера:

$$u_n = \frac{x^n}{n!},\ u_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{(n+1)!},\ R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n(n+1)!}{n!\,x^{n+1}}\right| = \frac{1}{|x|}\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

то есть данный ряд сходится при любом x. Можно доказать, что при любом x он сходится именно к данной функции $f(x) = e^x$. Итак,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...,\ (-\infty < x < \infty).$$

Аналогично получаются разложения в ряд следующих функций:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{(n+1)}\frac{x2^{n-1}}{(2n-1)!} + ..,\ (-\infty < x < \infty).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...,\ (-\infty < x < \infty).$$

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\ (-1<x<1).$$

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\ (-1<x\le 1).$$

Операцию разложения элементарных функций в степенные ряды позволяет значительно упросить применение следующих свойств степенных рядов:

1) Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать (по правилу умножения многочленов). При этом областью сходимости полученного нового степенного ряда будет совокупность всех точек, в которых одновременно сходятся оба ряда.

2) Степенной ряд в области его сходимости можно почленно интегрировать, а внутри области сходимости можно почленно дифференцировать.

ПРИМЕР. Разложить в степенной ряд функцию

$$f(x) == \cos(-3x).$$

Решение. Заменив x в ряде Маклорена для $\cos x$ на $(-3x)$, получим

$$\cos(-3x)=1-\frac{(-3x)^2}{2!}+\frac{(-3x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(-3x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

или

$$\cos(-3x)=1-\frac{3^2x^2}{2!}+\frac{3^4x^4}{4!}-\frac{3^6x^6}{6!}+\ldots,\ (-\infty<x<\infty).$$

8.4. Современная стоимость денег, дисконтирование.

Теория сходимости рядов имеет свое прямое приложение в финансовом корпоративном управлении. Приведем лишь несколько примеров из этой области знаний.

Рассмотрим сначалу задачу, обратную той, что рассматривалась в подпараграфе 2.1 главы 2. Пусть требуется накопить через год определенную сумму денег FV. Банк принимает вклады по ставке i. Какую сумму надо иметь сегодня для того, чтобы при помещении ее банк по ставке i иметь через год заданную сумму FV. Ответ на этот вопрос дает соотношение, переписанное в виде:

$$PV=\frac{FV}{1+i}.$$

Если бы требовалось накопить нужную сумму FV не через один год, а через n лет, то согласно,

$$PV=\frac{FV}{(1+i)^n}.$$

Соотношения, решают поставленную задачу, то есть позволяют определить современную, или текущую, стоимость денег, исходя из будущей стоимости и сложной процентной ставки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Процесс привидения будущей суммы денег к современной стоимости называется дисконтированием.

Коэффициент, входящий в

$$\frac{1}{(1+i)^n},$$

является обратным коэффициенту наращения и называется коэффициентом дисконтирования. В задачах о дисконтировании процентную ставку i принято называть ставкой дисконтирования. Другие названия ставки дисконтирования – стоимость привлечения капитала, пороговая доходность, ставка альтернативного капитала, ставка альтернативного вложения, или ставка альтернативной доходности.

Для того чтобы расшифровать последнее название (ставка альтернативного капитала, ставка альтернативного вложения или доходности), рассмотрим простой пример.

Вы собираетесь инвестировать средства в определенный проект, который спустя n лет принесет доход, равный FV . Какую сумму денег следует вложить в данный проект? Для того чтобы ответить на этот вопрос, следует сравнить предлагаемый проект с другими альтернативными вложениями. Пусть i – средняя рыночная ставка ставка доходности (ставка альтернативного вложения). Для того чтобы получить такую же сумму FV через n лет при осуществлении альтернативного проекта, сегодня следует вложить сумму PV, определяемую соотношением. Следовательно, инвестировать в предлагаемый прект следует сумму, не превышающую

$$\frac{FV}{(1+i)^n}.$$

Данную сумму называют современной, или рыночной, стоимостью инвестиционного проекта.

Приведенные примеры иллюстрируют, почему ставку дисконтирования называют ставкой альтернативного вложения или ставкой альтернативной доходности.

Дисконтирование – важная прцедура при проведении финансовых расчетов. Метод дисконтирования широка используется для определения современной рыночной стоимости объекта инвестиций, в частности, для определения текущей стоимости ценных бумаг.

Процесс дисконтирования позволяет также сравнивать различные доходы, полученные в разное вркмя, путем приведения стоимости этих будущих потоков к настоящему моменту.

ПРИМЕР. Какую сумму нужно поместить в банк для того, чтобы чрез 6 лет накопить сумму 200 000 руб.? Депозитная процентная ставка банка равна 25%.

Решение. В данном случае депозитная ставка банка выбрана в качестве ставки дисконтирования. Согласно имеем

$$FV = \frac{200\,000}{1{,}25^6} = 52\,428{,}80 \text{ руб.}$$

То есть, для того чтобы через 6 лет накопить 200 000 руб. при ставке 25% следует поместить на счет 52 428,80 руб.

ПРИМЕР. По векселю через 3 месяца должна быть выплачена сумма 350 000 руб. Найти текущую стоимость векселя, если ставка дискотирования выбрана 28,5%.

Решение. Считаем $Fv = 350\,000$ руб., $n = 0{,}25$ лет. Рыночная стоимость векселя определяется с помощью дисконтирования:

$$PV = \frac{350\,000}{(1+0{,}285)^{0{,}25}} = 328\,732{,}21 \text{руб.}$$

Текущая стоимость аннуитета. Рассмотрим теперь такое важное понятие финансового анализа, как аннуитет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Аннуитетом,** или **рентой,** называется постоянный доход, получаемый через равные промежутки времени.

Примерами аннуитета являются: доход, приносимый облигацией с постоянным купоном без погошения, дивиденды по привилегированным акциям, доход, приносимый сданной в аренду недвижимостью. Доходы, получаемые в разные моменты времени, имеют разную приведенную стоимость. Современная стоимость аннуитета, таким образом, складывается из современных стоимостей всех будущих доходов, представляя собой ряд вида:

$$PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{PMT}{(1+i)^k}.$$

Коэффициент, входящий в правую часть последнего соотнешения:

$$PV = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

представляет собой коэффициент дисконтирования аннуитета.

Соотношение определяет стоимость аннуитета в том случае, когда постоянные доходы поступают один раз в конце года. Иначе, модно утверждать, что формула определяет рыночную стоимость объекта, приносящего ежегодный постоянный доход.

Если постоянные выплаты PMT происходят несколько раз в году (каждый раз в конце периода), например m раз в году, то можно записать

$$PV = m \cdot PMT \cdot \frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-n \cdot m}}{j},$$

где j – номинальная процентная ставки при условии начисления процентов m раз в году, n – количество лет, пока происходят выплаты; всего за n лет будет произведено nm выплат.

ПРИМЕР. Согласно долговой бумаге на протяжении 5 лет будут производиться ежегодные выплаты в размере 1000 руб. Какова текущая стоимость долговой бумаги, если ставка дисконтирования выбрана 19,25%?

Решение. $PV = 1000 \cdot \frac{1-(1{,}1925)^{-5}}{0{,}1925} = 3040{,}65$ руб.

ПРИМЕР. В условиях предыдущего примера считать, что выплаты происходят ежеквартально, то есть по 250 руб. каждые три месяца. Доход от ценной бумаги поступает в течение 5 лет. Ставка дисконтирования (номинальная при ежеквартальном начислении процентов $m = 4$) равна $j = 18\%$[1]. Какова текущая стоимость ценной бумаги?

Решение. Имеем: $PMT = 250,\ j = 0{,}18,\ n = 5,\ m = 4.$

$$PV = 4 \cdot 250 \cdot \frac{1-(1+\frac{0{,}18}{4})^{-20}}{0{,}18} = 3251{,}98 \text{ руб.}$$

Видно, что стоимость ценной бумаги выше, чем в прдыдущем примере. Это произошло из-за того, что выплаты приблизились к сегодняшнему дню.

Финансовые вычисления по облигациям. Облигации относятся к долговым ценным бумагам. По существу, эмиссия облигаций есть способ получения займа – эмитент выступает в роли заемщика, так как обязуется выплачивать определенный доход по облигациям, а покупатель облигации выступает в роли кредитора. Облигации, как правило, являются ценными бумагами с фиксированным доходом в отличие от акций, когда доход определяется прибылью предприятия. Доход по облигациям, как правило, бывает меньше, чем по другим ценным бумагам, в тоже время облигации считаются юолее надежным инструментом рынка ценных бумаг. Ведущие рейтинговые агенства, такие как $S\tan dard\ \&\ Poors$ и $Moody's$, присваивают облигациям рейтинги. Чем выше рейтинг облигации, тем меньше ее доходность.

По облигациям выплачивается периодически купонный доход, а в конце срока происходит погашение номинала.

Основные параметры облигации – дата покупки облигации, дата погашения, номинальная цена или номинал облигации, цена погашения, если она отличается от номинала (такая ситуация бывает, как правило, в случае нескольких дат погашения), годовой купонный доход, купонная процентная ставка, количество выплат купонов в году.

Облигация может иметь две или больше даты погашения. В этом случае, как правило, ставка купонного дохода увеличивается к каждой следующей дате погашения. При этом возможны следующие варианты: в первом случае владелец облигации сам выбирает, когда погасить облигацию, во втором случае эмитент оставляет за собой право погасить облигацию в любой из указанных сроков.

Возможно также ситуация, когда эмитент имеет право досрочного выкупа облигаций. Рейтинг таких облигаций ниже, чем у облигаций с запретом досрочного выкупа, так как высока неопределенность для инвестора.

Введем следующие обозначения основных параметров облигаций, которые понадобятся нам в дальнейшем:

N – номинал облигации, выплачивается при погашении;

P – рыночная цена;

$K = \frac{P}{N} \cdot 100$ – курс облигации, он определяет текущую стоимость облигации в процентах от номинала;

g – годовая купонная процентная ставка в процентах или десятичных долях;

$C = g \cdot N$ – годовой купонный доход в рублях, он определяет суммарный годовой доход, выплаченный по купонам;

$i_t = \frac{C}{P} = \frac{g \cdot N}{P} = \frac{g}{K} \cdot 100$ – текущая доходность (для аннуитетов совпадает с полной доходностью облигации);

i – полная доходность облигации за период владения ею; если владелец облигации держит ее вплоть до погашения в конце срока, то величина показывает доходность к погашению. В зависимости от задача буквой i будем еще обозначать ставку дисконтирования.

Если облигация куплена по цене, равной номинальной цене, то говорят, что такая облигация куплена по номиналу, если облигация куплена по цене ниже номинала, то говорят, что облигация куплена с дисконтом, если по цене выше номинала – с премией (последнее не означает, что доход по такой облигации не может быть получен).

Доход, полученный за все время владения облигацией, складывается из купонных выплат и цены погашения, выплачиваемой в конце срока владения (как правило, эта цена совпадает с номинальной ценой).

Обозначим через $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$ купонные доходы, полученные владельцем в течение времени владения облигацией. В конце срока происходит погашение облигации по номиналу N. Сюда относятся выплаты по купонам и цена погашения облигации. Тогда современная (рыночная) стоимость облигации P представляет собой ряд и равна сумме всех дисконтированных доходов:

$$P = \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + ... + \frac{C_n + N}{(1+i)^n},$$

где i – доходность облигации к погашению.

Соотношение связывает рыночную цену облигации с доходностью к погашению или со ставкой дисконтирования. Если будущие доходы известны, фиксированы, то соотношение позволяет решать две основные задачи: а) определяеть цену облигации, если известна доходность (ставка дисконтирования); б) определять доходность облигации, если известна цена облигации. Очевидно, что эти две задачи являются обратными друг другу.

Контрольные вопросы.

1. Какая последовательность называется монотонной, ограниченной, сходящейся (расходящейся)?
2. В чем суть теорем о пределах функций?
3. Какую функцию называют бесконечно малой, непрерывной, разрывной?
4. Каковы основные правила и формулы дифференцирования функций?
5. Пересекаются ли функции предельных и средних издержек?

6. Каковы основные правило и приемы, используемые при вычислениях неопределенных интегралов?

7. Зачем будущему экономисту нужно умение считать определенные интегралы? Приведите пример их использования.

8. Какие дифференциальные уравнения называют линейными, однородными, первого и второго порядков?

9. Перечислите основные признаки сходимости знакопеременного ряда.

10. Какой ряд называют аблютно сходящимся?

Упражнения.

Доказать, используя определение предела, что:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+3}=2.$ 2. $\lim\limits_{x\to5}(3x-4)=11.$ 3. $\lim\limits_{x\to2}(x^2-3)=1.$

Найти предел:

4. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{2x-7}{x-8}.$ 5. $\lim\limits_{x\to5}(x-5)\sin\dfrac{1}{x-5}.$ 6. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{5x-2x^2-2}{2x-1}.$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}.$ 8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}.$ 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^2}{1+x^2+3x^3}.$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}.$ 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x-3^x}{2^x+3^x}.$ 12. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x).$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}).$ 14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{x^2}.$ 15. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)\sin\left(\dfrac{1}{x-5}\right).$

16. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}/2-\cos x}.$ 17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{\sqrt{x+1}-1}.$ 18. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(2xtgx-\dfrac{\pi}{\cos x}\right).$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x.$ 20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{5x}.$ 21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^3-5}.$

22. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2x}}.$ 23. $\lim\limits_{x\to0}(1+tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}.$

24. Первоначальный вклад, положенный в банк под 10% годовых, составил 60 тыс. руб. Найти размер вклада через 5 лет при начислении процентов:

а) ежегодном; б) поквартальном; в) непрерывном.

25. Пусть темп инфляции составляет 3% в день. Насколько изменится первоначальная сумма через 3 месяца?

Найти производную функции:

26. $y=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4.$ 27. $y=x^4(8\ln^2x-4\ln x+1).$ 28. $y=\sqrt[3]{x}(e^{3x}-5).$

29. $\sqrt[4]{1+e^{4x}}+\sqrt{5}.$ 30. $y=\ln\sqrt[3]{\left(\dfrac{1-3x}{1+3x}\right)^2}.$ 31. $y=\ln\dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$

32. $y=3x\ln(1-x^2).$ 33. $y=x^3\ln2x.$ 34. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-e^{4x}}{e^{4x}}}.$

35. $y=(xe^{2x}+x^3)^5.$ 36. $y=(x^2-1)\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$ 37. $y=\sin(x^2+2^x).$

38. $y=4e^{\sqrt{\ln x}}(1-\sqrt{\ln x}).$ 39. $y=\dfrac{\ln\cos x}{\cos x}.$ 40. $y=\cos^2x+\ln tg\dfrac{x}{2}.$

41. $y=\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-\ln(\sqrt{1+e^x}+1)$.

Исследовать функцию и построить ее график:

42. $y=x^2+x$. 43. $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$. 44. $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

45. $y=x^3-12x^2+36x$. 46. $y=x+\dfrac{27}{x^3}$.

47. Найти все частные производные функции:

а) $z=x^2\sin^2 y$; б) $z=x^{y^2}$; в) $u=e^{x^2+y^2+z^2}$.

48. Найти польной дифференциал от функции:

а) $z=x^2+xy^2+\sin y$; б) $z=\ln(xy)$.

49. Найти польный дифференциал dz функции:

а) $z=x^2+y^2$, если $x=\ln u+\dfrac{1}{v}+w^4$, $y=\dfrac{1}{u}+vw$, $u=t^2$, $v=\dfrac{1}{t}$, $w=2t$.

б) $z=xe^y$, если $x=3u^2+2v-w^3$, $y=au^2+bv^3+cw^4$, $u=\ln t$, $v=\dfrac{1}{t}$, $w=t$.

50. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=e^{u-2v}$, $u=\sin x, v=x3+y2$.

51. Найти все частные производные функции $z=\arcsin(u+v)$, если $u=\sin x\cos\alpha$, $v=\cos x\sin\alpha$.

52. $\int xarctgxdx..$ 53. $\int \arcsin xdx$. 54. $\int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+z}}dx$.

55. $\int arctg\sqrt{7x-1}\,dx$. 56. $\int \dfrac{arctgx}{x^2}dx$. 57. $\int \dfrac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

58. $\int \ln xdx$. 59. $\int x\ln xdx$. 60. $\int x\ln(3x+2)dx$.

61. $\int (x^2+3x+2)\ln xdx$. 62. $\int (4x^3+6x-7)\ln xdx$. 63. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$.

64. $\int \dfrac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$. 65. $\int \dfrac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$. 66. $\int \dfrac{3x^2+2x-3}{x(x-2)(x+5)}dx$.

67. $\int \dfrac{2x+3}{(x-2)^3}dx$. 68. $\int \dfrac{dx}{(x+1)(x-2)}$.

69. На складе хранится некоторая продукция, пользующаяся равномерным спросом. Ежедевно со склада извлекается 5 тонн продукции, плата за хранение 1 тонны продукции в день – 5тыс. руб., плата за доставку одной партии – 98 тыс. руб. Найти оптимальный план поставок.

70. Найти частный интеграл дифференциального уравнения при заданных начальных условиях: $y^2+x^2y`=0, y(-1)=1$.

71. Найти общее решение уравнения $y-y`=e^x$.

72. Найти частное решения уравнения при указанных начальных условиях: $y''-5y`+4y=0$, $y(0)=1$, $y`(0)=1$.

73. Найти общее решение уравнения: $y''+y=6\sin 2x$.

74. Написать первые пять членов ряда и проверить, выполняется ли дли него необходимый признак сходимости: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

75. Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$.

76. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

Ответы к упражнениям.

4. ∞. 5.0 6. 1,5 7. 4 8. 3. 9. -1. 10. -1. 11. -1. 12. 0,5. 13. 0. 14. 8. 15. 1. 16. 2. 17. 8 18. -2. 19. e^2. 20. 1. 21. ∞. 22 $1/\sqrt{e}$. 23. $\sqrt{e}$.

26. $\frac{16x(x^2-1)^3}{(x^2+1)^5}$. 27. $32x^3\ln^2 x$. 28. $\frac{e^{3x}(9x+1)-5}{3\sqrt[3]{x^2}}$. 29. $\frac{e^{4s}}{\sqrt[4]{(1+e^{4x})^3}}$. 30. $\frac{4}{9x^2-1}$.

31. $\frac{2x^4-3x^2-1}{x(x^4-1)}$. 32. $3\left(\ln(1-x^2)-\frac{2x^2}{1-x^2}\right)$. 33. $x^2\ln x(3\ln x+2)$. 34. $\frac{-4}{3\sqrt[3]{(1-e^{4x})^2e^{4x}}}$.

35. $5e^{2x}(xe^{2x}+3)^4(2x+1)$. 36. $x\ln x\frac{1-x}{1+x}+1$. 37. $(2x+2^x\ln 2)\cos(x^2+2^x)$. 38. $-2e^{\sqrt{\ln x}}$.

39. $\frac{\sin x(\ln\cos x-1)}{\cos^2 x}$. 40. $\frac{1-\sin x\cdot\sin 2x}{\sin x}$. 41. $\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$.

42. $y_{\min}(-1/2)=-1/4$, функция убывает на $(-\infty,-1/2)$, возрастает на $(-1/2;+\infty)$, выпукла вниз на $(-\infty;+\infty)$.

43. Асимптота $x=0$; $y_{\min}(-1)=2$, функция убывает на $(-\infty;-1)$ и на $(0;1)$, возрастает на $(-1;0)$ и на $(1;+\infty)$. Выпукла вниз на $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$. Точек перегиба нет.

44. Асимптота $x=-1, y=x-5$; $y_{\min}=(-5)=-27/2$, функция возрастает на $(-\infty;-5)$ и на $(-1;+\infty)$, убывает на (-5;-1). Точка перегиба (1;0).

45. $y_{\max}(2)=32, y_{\max}(6)=0$, функция возрастает на $(-\infty;2)$ и на $(6;+\infty)$, убывает на (2;6). Выпукла вверх на $(-\infty;4)$, вывпукла вниз на $(4;+\infty)$. Точка перегиба (4;16).

46. Асимптоты $x=0$, $y=x$; $y_{\max}(3)=4, y_{\max}(-3)=-4$, функция возрастает на $(-\infty;-3)$ и на $(3;+\infty)$, убывает на (-3;0) и (0;3). Выпукла вверх на $(-\infty;0)$, выпукла вниз на $(0;+\infty)$. Точек перегиба нет.

52. $\frac{x^2+1}{2}arctgx-\frac{x}{2}+C$. 53. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. 54. $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$.

55. $xarctg\sqrt{7x-1}-\frac{1}{7}\sqrt{7x-1}+C$. 56. $\frac{arctgx}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+C$.

57. $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$. 58. $x(\ln x-1)+C$. 59. $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$.

60. $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{9}\right)\ln(3x+2)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}+C$. 61. $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-\frac{3x^2}{4}-2x+C$.

62. $(x^4+3x^2-7x)\ln x-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-7x\right)+C$.

63. $x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arcsin x+C$.

64. $2\ln|x-2|-\ln|x-3|+C$. 65. $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$. 66. $3\ln|x|+\ln|x-1|-\ln|x+1|+C$.

67. $-\dfrac{7}{2(x-2)^2}-\dfrac{2}{x-2}+C$. 68. $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|+C$. 69. $x+y=0$. 70. $y=(x+C)e^x$.

71. $y=e^x$. 72. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sin x$.

73. $\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{3}{\sqrt{10}},\dfrac{4}{\sqrt{17}},\dfrac{5}{\sqrt{26}}$; не выполняется.

74. Сходится. 75. $[-1;1]$.