

**Ўзбекистон республикаси олий ва урта махсус
таълим вазирлиги
Бухоро озик – овкат ва енгил саноат технологияси
институти**

«ОЛИЙ МАТЕМАТИКА» кафедраси

**«Эхтимолликлар назарияси
ва математик статистика»**

фанидан

МАЪРУЗАЛАР ТУПЛАМИ

(II – КИСМ. Математик статистика)

БУХОРО – 2002 й

Ушбу маърузалар матнлари “Олий математика” кафедрасининг 2002 йил 15 ноябр кунги йигилишида (мажлис баёни № 2), “Тукимачилик ва енгил саноат” факультети илмий кенгашида (2002 йил 20 ноябр, мажлис баёни № 3) ва институт услубий кенгашида (2002 йил 25 ноябр, мажлис баёни № 3) муҳокама этилди ва чоп этишга тавсия этилди.

ТУЗУВЧИ :

Бух ОО ва ЕСТИ
“Олий математика” кафедрасининг
доценти **РАСУЛОВ Н.П.**

ТАКРИЗЧИЛАР :

БухДУ кафедра мудири,
доц. **МАЪМУРОВ Б.**
Бух ОО ва ЕСТИ
“Информацион ва педагогик технология”
кафедрасининг доценти **УРИНОВ И.К.**

МУХАРРИР :

Бух ОО ва ЕСТИ
“Олий математика” кафедрасининг
доценти **САЛИХОВ Ш.Н.**

Ушбу тупламда “Математик статистика” фанининг асосий тушунча, натижа ва усуллари ёритувчи 10 та маъруза матнлари келтирилган.

К И Р И Ш .

Олий таълимнинг “Менежмент” (касбий таълим), “Маркетинг” (касбий таълим), “Иктисод” (касбий таълим) ва “Менежмент” (сохалар буйича) йуналишлари буйича бакалаврлар тайёрлашнинг уқув режаларида “Эхтимолликлар назарияси ва математик статистика” фанини уқитилиши кузда тутилган. Бу фаннинг уқув дастурида 36 соат маърузалар утилиши режалаштирилган. Ушбу тупламда 24 та маърузалар матни келтирилган бўлиб, қулайлик учун икки қисмга ажратилган.

I қисмда «Эхтимолликлар назарияси» буйича 14 та маъруза матни келтирилган бўлиб, уларда бу фан буйича дастурдаги мавзулар асосан ёритилган. Бунда эхтимоллик билан боғлиқ тушунчалар ва натижалар иктисодий мазмунли мисоллар билан тушунтиришга ҳаракат қилинган .

II қисмда «Математик статистика» фани буйича 10 та маърузалар матни келтирилган. Уларда асосий статистик тушунчалар, масалалар ва усуллар буйича дастурдаги мавзулар асосан ёритилган. Барча назарий натижалар амалий мисоллар орқали мустаҳкамланишига ҳаракат қилинган.

Ҳар бир маъруза бошида таянч иборалар руйхати, маъруза режаси ва адабиётларга курсатмалар, охирида эса талаба уз-узини назорат қилиш учун саволлар келтирилган.

Ушбу тупламда «Эхтимолликлар назарияси ва математик статистика» фанининг ишчи уқув дастури ва бу фан буйича ўзбек тилидаги айрим адабиётлар руйхати ҳам келтирилган.

“ЭХТИМОЛЛИКЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА” ФАНИНИНГ ИШЧИ УКУВ ДАСТУРИ.

МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА.

Математик статистика предмети ва асосий масалалари. Математик статистиканинг эхтимолликлар назариясига боғликлиги.

Бош туплам ва унинг хажми. Танланма, унинг хажми, репрезентативлиги ва қуринишлари.

Танланманинг вариацион катори ва статистик тақсимот қонуни. Полигон ва гистограмма. Эмпирик тақсимот функцияси.

Статистик баҳо. Силжимаган, асосли, эффектив баҳолар. Ҳақиқатга максимал ухшашлик усули. Танланма урта қиймат ва танланма дисперсия. Нуқтавий ва интервал баҳолар. Ишончлилиқ эхтимоли.

Корреляцион масала. Танланма корреляция қўэффициенти ва унинг хоссалари.

Регрессион масала. Энг кичик квадратлар усули. Тугри қизикли регрессия тенгламаси.

Статистик тахминлар. Асосий ва муқобил тахминлар. I ва II тур ҳатоликлар. Статистик критерий. Критик соҳа. Статистик мезоннинг қийматдорчилиқ даражаси ва қуввати. Нормал тақсимот параметрлари учун статистик тахминларни текшириш.

Мувофиқлик критерийлари. Пирсоннинг мувофиқлик критерийси.

15 - МАЪРУЗА
МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ПРЕДМЕТИ,
АСОСИЙ МАСАЛАЛАРИ ВА ТУШУНЧАЛАРИ.

Таянч иборалар : Математик статистика предмети, бош туплам ва унинг хажми, танланма ва унинг хажми, репрезентатив танланма, такрорий ва нотаكرорий танланма.

МАЪРУЗА РЕЖАСИ:

1. Математик статистика предмети.
2. Математик статистиканинг асосий масалалари.
3. Бош туплам ва унинг хажми.
4. Танланма ва унинг хажми.
5. Танланманинг репрезентативлиги.
6. Танланма турлари.

Адабиёт.

[1] VIII боб, §§ 1-2

[2] XV боб, §§ 1-5

[4] 14 боб, §§ 45-46

Математик статистика ва эхтимолликлар назарияси узаро боглик фанлар булиб, буни куйидаги мисолда курсатиш мумкин.

Партияда N дона бир хил махсулот булиб, уларнинг хар бири $p(0 < p < 1)$ эхтимоллик билан сифатли булиши мумкин булсин. Шу партиядан n дона махсулот таваккалига танлаб олинган десак, уларни текширувдан утказмасдан роппа-роса k донаси сифатли булишини аник айта олмасдан, факатгина бу ходисанинг эхтимоллигини хисоблаб, унинг тугрисида маълум бир хулоса чикара оламиз. Бу эхтимолликлар назариясининг асосий масалаларидан биридир.

Энди шу партиядаги махсулотнинг сифатли булиш эхтимоллиги p номаълум булсин.

Таваккалига олинган n дона махсулот текширувдан утказилиб, улардан роппа-роса k донаси сифатли эканлиги аникланди. Шу махсулотларга асосан номаълум p эхтимоллик хакида маълум бир хулосалар чикариш мумкин. Бу математик статистиканинг масалаларидан биридир.

Бу мисолдан эхтимолликлар назарияси ва математик статистика масалалари бир-бирига тескари деб айтиш мумкин. Эхтимоллик назарияси бирор A ходиса хакида унинг устида кузатув, тажриба утказилгунга кадар хулоса чикаришга имкон беради. Математик статистика эса бу A ходиса хакида унинг устида утказилган кузатув, тажриба натижалари асосида хулоса чикаради.

Шундай килиб математик статистика, эхтимолликлар назариясига асосланган холда, тасодифий ходиса ёки микдорларни улар устида утказилган кузатув натижаларига асосан урганувчи фандир.

Математик статистиканинг асосий масалаларидан бир нечтасини келтирамиз:

1. Тасодифий X микдор устида утказилган кузатув натижаларидан фойдаланиб, унинг номаълум $F(x)$ таксимот функцияси хакида хулосалар чикариш. Бу таксимотни баҳолаш масаласи деб аталади.
2. X тасодифий микдорнинг таксимот функцияси $F(x, a_1, a_2, \dots, a_m)$ курунишда булиб, $a_1, a_2, \dots, a_m$ номаълум параметрларга боглик булсин. Бу холда параметрларнинг кийматларини кузатув натижаларига асосан баҳолашга тугри келади.
Бу параметрларни баҳолаш масаласи дейилади.
3. Маълум бир мулохазаларга асосан таксимот функцияси $F(x)$ деб тахмин килинмокда. Кузатув натижаларига асосан бу тахмин тугри ёки нотугри эканлиги хакида хулоса чикаришимиз лозим.
Бу статистик тахминларни текшириш масаласи дейилади.
4. Иккита X ва Y тасодифий микдорлар устида утказилган кузатув натижаларига асосан улар боглик ёки боглик эмас, богликлик кучи ва куруниши тугрисида хулосалар чикариш талаб этилади.
Бу корреляция ва регрессион масала дейилади.

Энди математик статистиканинг асосий тушунчаларига утамиз.

ТАЪРИФ 1: Урганилаётган X тасодифий микдорнинг курилаётган объектда мумкин булган барча кийматлар туплами **бош туплам**, ундаги элементлар сони эса бош тупламнинг **хажми** деб аталади.

Бош туплам хажми чекли ёки чексиз булиши мумкин. Масалан, корхонада 120 ишчи булиб, X уларнинг хар бирини кун давомида ишлаб чикарган махсулотлар сонини ифодаласа, бу холда бош туплам хажми чекли ва 120 га тенг булади. Агарда X оркали автоматда кадокланаётган сариёг огирлигини (гр.) белгиласак, бу холда, масалан, $X \in [195, 205]$ булиб, бош туплам хажми чексиз булади.

ТАЪРИФ 2: Урганилаётган X тасодифий микдорнинг текширувда кузатилган кийматлар туплами **танланма туплам** ёки кискача **танланма**, ундаги элементлар сони эса **танланма хажми** деб аталади.

Таърифдан келиб чикадики, танланма бош тупламнинг кисми (туплам ости) булиб, амалий нуктаи-назардан унинг хажми доимо чекли булади.

ТАЪРИФ 3: Агарда танланма урганилаётган X тасодифий микдор буйича бош тупламни нисбатан тугри ифодаласа, у **репрезентатив** (ваколатли) **танланма** дейилади.

Масалан, партиядаги 100 дона махсулотдан 85 донаси сифатли, колгани сифатсиз булсин. Шу партиядан 10 дона махсулот олинди, яъни хажми 10 булган танланма хосил килинди. Шу танланма буйича партиядаги сифатли

махсулотлар улуши % киймати хакида хулоса чиқариш талаб этилсин. Агарда танланмага 10 дона факат сифатсиз ёки аксинча, 10 дона факат сифатли махсулотлар тушган бўлса, партиядаги сифатли махсулотлар улуши 0% ёки 100% деган нотугри хулосалар келиб чиқади. Шундай қилиб, бу иккала танланма репрезентатив бўлмайди. Бу мисолда репрезентатив бўлиши учун унда тахминан 15% сифатсиз ва 85% сифатли махсулот бўлиши керак.

Танланманинг репрезентативлигини икки усулда амалга ошириш мумкин:

1. танланма ҳажмини катта қилиб олиш;
2. танланмага элементларни бош тупламдан тасодифий равишда олиш;

Бу шартларда танланманинг репрезентатив бўлиши эҳтимолликлар назариясининг катта сонлар қонунига асосан келиб чиқади.

Танланма икки хил йул билан ҳосил қилиниши мумкин ва шунга мос равишда такрорий ёки нотақрорий танланма деб аталади.

ТАЪРИФ 4 : Агарда бош тупламдан қузатув учун танлаб олинган элемент текширувдан кейин бош тупламга қайтарилса (қайтарилмаса), натижада ҳосил бўлган танланма **такрорий (нотақрорий)** деб аталади.

Шундай қилиб такрорий танланмада бош тупламнинг элементи бир неча марта қатнашиши мумкин. Нотақрорий танланмада эса бош тупламнинг элементи факат бир марта қатнашиши мумкин.

С а в о л л а р :

1. Математик статистика предмети нимадан иборат ?
2. Математик статистиканинг асосий масалаларига мисол келтиринг.
3. Бош туплам ва унинг ҳажми қандай таърифланади ?
4. Танланма ва унинг ҳажми қандай таърифланади ?
5. Қачон танланма репрезентатив дейилади ?
6. Такрорий ва нотақрорий танланма қандай аамалга оширилади ?

16 – МА Ъ Р У ЗА СТАТИСТИК ТАКСИМОТЛАР.

Таянч иборалар : Варианта, частота, нисбий частота, статистик таксимот конуни, эмпирик таксимот функцияси, полигон, гистограмма.

МАЪРУЗА РЕЖАСИ:

1. Статистик таксимот конуни.
2. Эмпирик таксимот функцияси.
3. Эмпирик таксимот функцияси хоссалари.
4. Кузатув натижалари полигони.
5. Кузатув натижалари гистограммаси.

Адабиёт.

- [1] VIII боб, §§ 3-4 [2] XV боб, §§ 6-7 [3] IX боб, §§ 1-3
[4] 14 боб, §§ 47-48

Текширилаётган X белгининг кузатилган кийматлари

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \quad (1)$$

булиб, ҳажми n булган танланмани ташкил этсин. Бу ерда x_i ; $i = 1, 2, \dots, n$, **варианталар** деб аталади.

(1) танланмадаги вариантларни ушиб бориш тартибида жойлаштиришдан хосил килинган

$$x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^* \quad (2)$$

кетма-кетлик вариацион катор дейилади.

(1) танланмадаги турли кийматли вариантларни $x_1, x_2, \dots, x_m$ ва уларнинг такрорланишлар сонини $n_1, n_2, \dots, n_m$ деб белгилаймиз. Бу ҳолда n_i ; $i = 1, 2, \dots, m$, сонлар **частоталар** деб аталади ва улар

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = n \quad (3)$$

тенгликни каноатлантиради. Бунда n – танланма ҳажмидир. Бу ҳолда танланмани ушбу

x_i	x_1	x_2		x_m
n_i	n_1	n_2		n_m

(4)

жадвал курунишда ифодалаш мумкин ва у X белгининг берилган танланма буйича **статистик таксимот конуни** деб аталади. Купинча n_i частота урнига **нисбий частота** деб аталадиган $w_i = n_i/n$ сонлардан фойдаланилади. Бу ҳолда статистик таксимот конуни

X_i	x_1	x_2		x_m
W_i	w_1	w_2		w_m

(5)

куринишда булади ва унда

$$w_1 + w_2 + \dots + w_m = 1 \quad (6)$$

муносабат уринли булади.

Мисол: Дуконда кун давомида сотилган телевизорлар сони X булсин. 10 кун давомида утказилган кузатувларда

$$5, 2, 4, 0, 2, 5, 0, 4, 1, 2$$

натижалардан иборат танланма олинди. Бу танланманинг вариацион катори

$$0, 0, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 5, 5$$

буйича ундаги турли вариантлар

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 4, x_5 = 5,$$

уларнинг частоталари

$$n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 3, n_4 = 2, n_5 = 2$$

нисбий частоталари

$$w_1 = 0.2, w_2 = 0.1, w_3 = 0.3, w_4 = 0.2, w_5 = 0.2$$

эканлигини топамиз. Демак бу танланма буйича X белгининг статистик таксимот конуни куйидагича булади :

x_i	0	1	2	4	5
n_i	2	1	3	2	2
w_i	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1

Бу ерда

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 2 + 1 + 3 + 2 + 2 = 10 = n$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,2 + 0,2 = 1$$

тенгликлар бажарилади.

Энди ихтиёрий x хакикий сони учун n_x оркали (1) танланмадаги киймати x сондан кичик булган вариантлар сонини белгилаймиз. Бу n_x сонини (2) вариацион катордан аниклаш осонрок булишини таъкидлаб утамиз.

Бу холда (n – танланма хажми)

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n} \quad (7)$$

формула барча хакикий сонлар тупламида аникланган функцияни ифодалайди.

Бу функция куйидаги хоссаларга эга:

$$I. 0 \leq F_n^*(x) \leq 1, x \in (-\infty, \infty)$$

Бу хосса $0 \leq n_x \leq n$ эканлигидан келиб чиқади.

II. $F_n^*(x)$ камаймовчи функция, яъни $x_1 < x_2$ булса, у холда

$$F_n^*(x_1) \leq F_n^*(x_2)$$

Бу хосса $x_1 < x_2$ булганда $n_{x_1} \leq n_{x_2}$ эканлигидан келиб чиқади.

III. $F_n^*(x) = 0$, агар $x \leq x_1^*$ булса. Бунда x_1^* - танланманинг вариацион каторидаги биринчи элементни билдириб, кузатув натижаларининг энг кичик кийматини ифодалайди.

Бу хосса $x \leq x_1^*$ булганда $n_x = 0$ эканлигидан келиб чиқади.

Жумладан доимо $F_n^*(-\infty) = 0$ муносабат уринли.

IV. $F_n^*(x) = 1$, агар $x > x_n^*$ булса. Бу ерда x_n^* вариацион катордаги охирги элемент булиб, кузатув натижаларининг энг катта кийматига тенг булади.

Бу хосса $x > x_n^*$ булганда $n_x = n$ эканлигидан келиб чиқади.

Жумладан, доимо $F_n^*(+\infty) = 1$ муносабат уринлидир.

Бу ердан $F_n^*(x)$ хоссалари таксимот функцияси хоссаларига ухшашлиги келиб чиқади. Бу ухшашлик бежиз булмасдан, катта сонлар конунининг Бернулли теоремасига асосан ихтиёрий кичик $\varepsilon > 0$ ва хар кандай $x \in (-\infty, \infty)$ учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|F_n^*(x) - F(x)| < \varepsilon) = 1$$

муносабат уринли эканлиги келиб чиқади. Бу ерда $F(x)$ каралаётган X белгининг таксимот функциясини билдиради. Шу сабабли $F_n^*(x)$ урганилаётган X белгининг берилган танланма буйича **эмпирик таксимот функцияси** дейилади ва номаълум $F(x)$ таксимот функцияси учун бахо сифатида, яъни $F(x) \approx F_n^*(x)$ деб каралади.

Бизнинг мисолда эмпирик таксимот функцияси

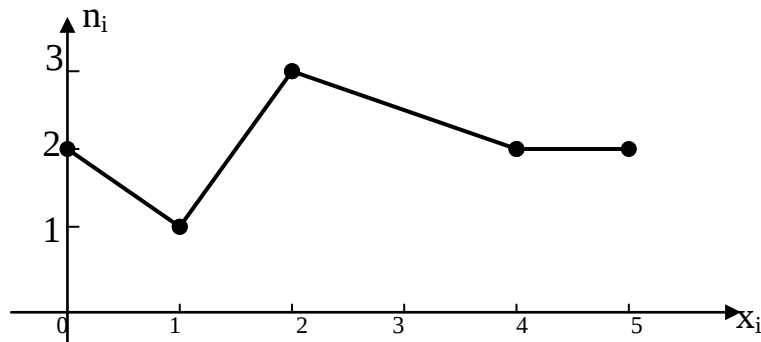
$$F_{10}^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,2, & 0 < x \leq 1 \\ 0,3, & 1 < x \leq 2 \\ 0,6, & 2 < x \leq 4 \\ 0,8, & 4 < x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

куринишда булиб, унинг графиги погонасимон булади.

Танланманинг таксимотини график равишда ифодалаш учун полигон ва гистограммадан фойдаланилади.

ХОУ Декарт координаталар системасини киритиб, унинг абсциссалар укига x_i , $i = 1, 2, \dots, m$, вариаталарни, ординаталар укига эга n_i частоталарни ёки w_i нисбий частоталарни жойлаштирамиз. Сунгра координата текислигида (x_i, n_i) ёки (x_i, w_i) $i = 1, 2, \dots, m$, нукталарни топамиз ва уларни кетма-кет тугри чизик кесмалари билан туташтирамиз. Натижада хосил булган синик чизик частоталар ёки нисбий частоталар **полигони** дейилади.

Бизнинг мисолда частоталар полигони куйидагича булади :



Агарда танланма хажми n катта ёки X белги узлуксиз тасодифий микдордан иборат булса, полигон урнига гистограмма чизилади. Бунинг учун X белгининг кузатилган кийматлари жойлашган $(x_1^*, x_m^*) = (x_{min}, x_{max})$ оралик k та тенг h узунликдаги $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ интервалларга булинади. Бу интервалларга тушган вариантлар сони $m_1, m_2, \dots, m_k$ булсин. Энди асослари h узунликли Δ_i интерваллардан, баландликлари эса $m_i/h, i=1, 2, \dots, k$ булган тугри туртбурчакларни чизамиз. Бу тугри туртбурчаклар хосил килган погонасимон шакл **частоталар гистограммаси** дейилади ва унинг юзаси

$$S = \frac{m_1}{h} \cdot h + \frac{m_2}{h} \cdot h + \dots + \frac{m_k}{h} \cdot h = m_1 + m_2 + \dots + m_k = n,$$

булади. Бу ерда n -танланма хажмидир.

Купинча m_i частоталар урнига $v_i = m_i/n$ нисбий частоталар олиниб **нисбий частоталар гистограммаси** хосил килинади ва унинг юзаси

$$S = \frac{v_1}{h} \cdot h + \frac{v_2}{h} \cdot h + \dots + \frac{v_k}{h} \cdot h = v_1 + v_2 + \dots + v_k = 1$$

булади.

М и с о л : X белги устида утказилган 30 та кузатув натижалари куйидагича:

3.5	2.3	-1.5	5.0	3.2	1.7	1.0	-1.8	4.2	2.2
0.7	5.4	2.9	1.7	-0.6	3.2	6.0	2.9	3.3	0.7
-2.0	3.5	1.5	4.7	5.0	3.1	1.8	2.7	3.5	1.7

Бу ерда $x_{min} = -2$, $x_{max} = 6$ ва танланмани гистограммасини хосил килиш учун кузатувлар жойлашган $[-2, 6]$ кесмани $k=4$ та бир хил узунликли ораликларга ажратамиз. Бу ораликлар узунлиги

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{6 - (-2)}{4} = 2$$

ораликлар эса

$$\Delta_1 = [-2,0), \quad \Delta_2 = [0,2), \quad \Delta_3 = [2,4), \quad \Delta_4 = [4,6]$$

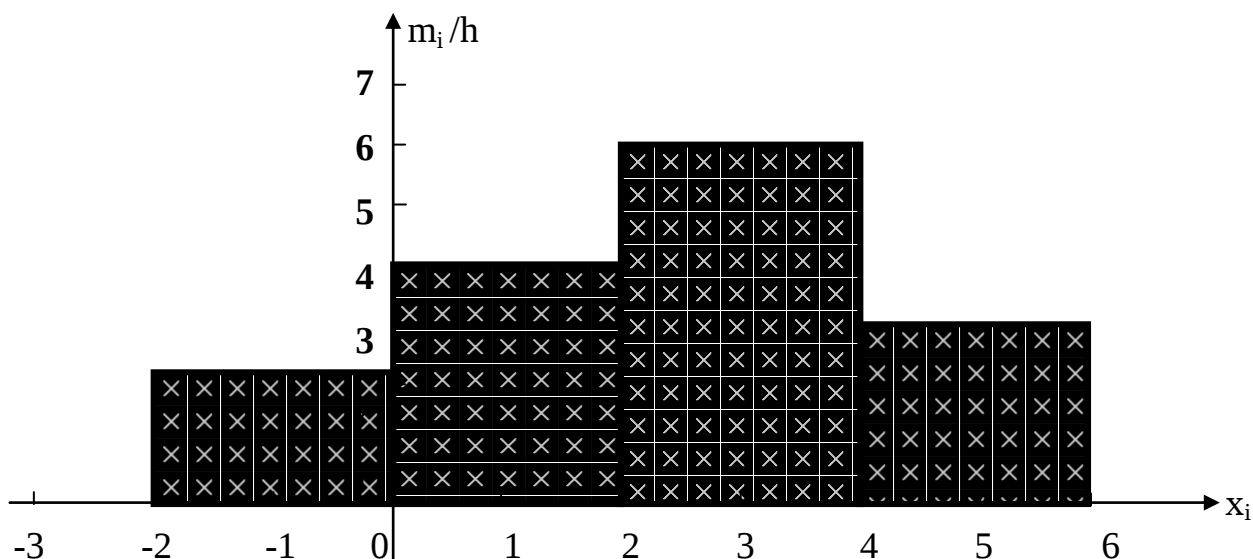
булади. Танланма буйича

$$m_1 = 4, \quad m_2 = 8, \quad m_3 = 12, \quad m_4 = 6$$

эканлигини топамиз. Бу холда

$$\frac{m_1}{h} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{m_2}{h} = \frac{8}{2} = 4, \quad \frac{m_3}{h} = \frac{12}{2} = 6, \quad \frac{m_4}{h} = \frac{6}{2} = 3$$

булади ва частоталар гистограммаси куйидаги куринишда булади:



Шуни таъкидлаб утиш керакки, нисбий частоталар гистограммасини номаълум $f(x) = F'(x)$ зичлик функцияси учун бахо сифатида караш мумкин. Танланма хажми n ошган ва интерваллар узунлиги h камайган сари бу бахо яхшиланиб боради.

С а в о л л а р :

1. Статистик таксимот конуни кандай аникланади ?
2. Эмпирик таксимот функцияси кандай аникланади ?
3. Эмпирик таксимот функцияси нима максадда кулланилади ?
4. Полигон деганда нима тушунилади ?
5. Гистограмма таърифини келтиринг ва уни нима максадда кулланилишини курсатинг.

17- МА Ё Р У З А

СТАТИСТИК БАХОЛАР ВА УЛАРНИНГ ТУРЛАРИ.

Таянч иборалар : Статистик баҳо, силжимаган ва силжиган баҳо, асосли баҳо, эффектив баҳо, хакикатга максимал ухшашлик усули ва бахоси.

МАЪРУЗА РЕЖАСИ:

1. Статистик баҳо.
2. Статистик юахога куйиладиган талаблар.
3. Хакикатга максимал ухшашлик усули.

Адабиёт.

- [1] IX боб, §§ 1-2 [2] XVII боб, §§ 1-2 [4] 14 боб, §§ 49-50

Куп холларда урганилаётган X тасодифий микдорнинг тахсимотининг куруниши маълум булиб, аммо уни тулик аниқловчи параметрлар киймати номаълум булади. Масалан, бирор курсаткични улчада йул куйилаётган хатолик X тасодифий булиб, у нормал тахсимотга эга булишини назарий курсатиш мумкин. Аммо бу $N(a, \sigma^2)$ нормал тахсимотни тула аниқлаш учун керак булган a ва σ^2 параметрлар кийматини назарий топиб булмайди. Шу сабабли бу параметрларнинг тақрибий кийматларини статистик кузатув натижаларига асосан топиш масаласи пайдо булади.

Соддалик учун X тасодифий микдор тахсимоти битта номаълум θ параметрга боглик ва $F(x, \theta)$ курунишда деб хисоблаймиз. Каралаётган X тасодифий микдор устида утказилган n та богликмас кузатув натижалари $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонлардан иборат булиб, улар хажми n , булган танланмани хосил килади. Статистик назарияда бу кузатув натижалари узаро богликмас, бир хил $F(x, \theta)$ тахсимотга эга булган $X_1, X_2, \dots, X_n$ тасодифий микдорлар кетма-кетлик каби каралади.

ТА Ё Р И Ф 1: Статистик кузатув натижаларидан тузилган ихтиёрий $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ функция **статистика** ёки **статистик баҳо** деб аталади.

Хар бир статистик баҳо $X_1, X_2, \dots, X_n$ тасодифий микдорлардан хосил килингани учун унинг узи ҳам тасодифий микдордан иборат булади. Амалий татбиқларда $X_1, X_2, \dots, X_n$ тасодифий микдорларлар урнига $x_1, x_2, \dots, x_n$ танланма олинади ва бу холда $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ статистик баҳонинг кузатилган кийматидан иборат булиб, аниқ бир сонга тенг булади.

Номаълум θ параметр учун олинган статистик баҳони $\theta^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ёки кискача θ_n^* каби белгилаймиз. Бунда θ_n^* тасодифий микдор, θ эса тасодифий булмаган номаълум бир сон булгани учун, $\theta_n^* \approx \theta$ тақрибий тенглик хакида гапириб булмайди. Шу сабабли θ_n^* статистик баҳони θ параметр

кийматига якинлигини фақат эҳтимоллар билан боглик тушунчалар оркали ифодалаш мумкин.

ТАЪРИФ 2 : Номалум θ параметр учун олинган θ_n^* статистик баҳо силжисмаган дейилади, агарда унинг математик кутилиши

$$M(\theta_n^*) = \theta \quad (1)$$

шартни катноатлантиса.

(1) шарт θ_n^* статистик баҳо систематик, яъни доимий хатоликка эга булмасдан, фақат тасодикий хатоликларга эга эканлигини ифодалайди. Агарда $M(\theta_n^*) = \theta + \varepsilon$, $\varepsilon \neq 0$, булса статистик баҳо силжисган деб аталади. Масалан, бирор катталиқ сантиметрли чизгичда улчанаётган булса, унда албатта систематик ε ($|\varepsilon| < 1\text{см}$) хатоликка йул куйилаётган булади ва шу сабабли бу холда каралаётган баҳолар силжиган булади.

ТАЪРИФ 3 : Статистик баҳо θ_n^* асосли дейилади, агарда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ кичик сон учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon\} = 1 \quad (2)$$

шарт бажарилса.

Шундай килиб асосли баҳо учун $n \rightarrow \infty$ да эҳтимоллик буйича $\theta_n^* \rightarrow \theta$ муносабат уринли булади ва маълум маънода θ_n^* кийматлари номалум θ сонга якин деб айтиш мумкин.

ТЕОРЕМА : Агарда θ_n^* силжисмаган статистик баҳо булиб, унинг дисперсияси

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\theta_n^*) = 0 \quad (3)$$

шартни каноатлантиса, у асосли баҳо булади.

И с б о т : Шартга кура $M(\theta_n^*) = \theta$ булгани учун, Чебышев тенгсизлигига ва (3) шартга асосан

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\theta_n^* - M(\theta_n^*)| < \varepsilon\} \geq \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{D(\theta_n^*)}{\varepsilon^2}\right) = 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} D(\theta_n^*) = 1 \end{aligned}$$

Аммо $P\{|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon\} > 1$ була олмайди ва шу сабабли олинган тенгсизликдан (2) тенглик келиб чиқади.

ТАЪРИФ 4 : Берилган n хажмли танланмада θ параметр учун мавжуд барча статистик баҳолар ичида энг кичик дисперсияга эга булган θ_n^* баҳо эффектив (самарали) деб аталади.

Эффекти θ_n^* бахонинг кийматлари θ параметрга бошка баҳоларга нисбатан якинрок жойлашган деб тушуниш мумкин.

ТАЪРИФ 5: Агарда θ_n^* статистик баҳо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\theta_n^*) = \theta \quad (4)$$

шартни каноатлантирса, у асимптотик силжимаган баҳо дейилади.

Агарда $\tilde{\theta}_n$ номаълум θ параметр учун эффектив, θ_n^* эса бошка бир баҳо булса, $e_n = D(\tilde{\theta}_n) / D(\theta_n^*)$ сон шу бахонинг эффективлиги деб аталади. Маъносига кура, хар кандай θ_n^* баҳо ва ихтиёрий n учун $0 \leq e_n \leq 1$ муносабат уринли булади.

ТАЪРИФ 6: Агарда θ_n^* статистик баҳо учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 1 \quad (5)$$

шарт бажарилса, у асимптотик эффектив баҳо дейилади.

Куп холларда асимптотик силжимаган ёки эффектив баҳоларни топиш масаласи нисбатан осонрок хал этилиши мумкин.

Энди $\mathfrak{Z}(x, \theta)$ таксимотдаги ноъмалум θ параметр учун $x_1, x_2, \dots, x_n$ танланма буйича θ_n^* статистик баҳо хосил килиш усуллардан бирини куриб утамыз. Бу хакикатга максимал ўхшашлик усули деб аталади. Бунда дастлаб берилган таксимот куриниши ва танланма буйича

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \mathfrak{Z}(x_1, \theta) \cdot \mathfrak{Z}(x_2, \theta) \cdots \mathfrak{Z}(x_n, \theta) \quad (6)$$

функцияни хосил киламиз. (6) хакикатга максимал ўхшашлик функцияси дейилади ва у n та богликмас кузатувларда X тасодифий микдоримиз $x_1, x_2, \dots, x_n$ кийматлар кабул килиш эхтимоллиги хакида маълумот беради. Бу функцияда $x_1, x_2, \dots, x_n$ кузатув натижалари булгани учун узгармас сонлар сифатида каралади ва θ узгарувчи деб олинади. Ноъмалум θ параметрга θ_n^* баҳо сифатида (6) функцияга энг катта (максимум) киймат берувчи θ узгарувчи киймати олинади ва у хакикатга максимал ўхшашлик баҳоси деб аталади.

Демак, хакикатга максимал ўхшашлик баҳоси (6) функциянинг критик нуктаси каби аникланади ва шу сабабли экстремумлар назариясига асосан

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (7)$$

тенгламадан топилади (7) хакикатга максимал ўхшашлик тенгламаси дейилади. Хисоблашларни осонлаштириш максадида баъзи таксимотлар учун (7) тенглама урнига

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (8)$$

тенгламани ҳам караш мумкин. Бунга сабаб шуки, (7) ва (8) тенглама илдишлари доимо бир хил булади.

Агарда X тасодифий микдорнинг таксимооти $\mathfrak{Z}(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ курунишда булиб, m та θ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, номаълум параметрларга боғлиқ булса, улар учун ҳақиқатга максимал ухшашлик баҳолари $\theta_n^*(i)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ёки

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

тенгламалар системасидан топилади.

Исботлаш мумкинки, $\mathfrak{Z}(x)$ таксимотларнинг анча кенг синфлари учун ҳақиқатга максимал ухшашлик баҳолари асосли ва асимптотик эффектив булади. Аммо улар силжиган баҳолар булиши мумкин.

С а в о л л а р :

1. Статистик баҳо деганда нима тушунилади ?
2. Статистик баҳо қачон силжимаган ёки силжиган дейилади ?
3. Қандай статистик баҳо асосли дейилади ?
4. Қачон статистик баҳо эффектив дейилади ?
5. Ҳақиқатга максимал ухшашлик усулини моҳияти нимадан иборат ?

18 – МАЪРУЗА
НОРМАЛ ТАКСИМОТ ПАРАМЕТРЛАРИНИ БАХОЛАШ.
ТАНЛАНМА УРТА КИЙМАТ ВА ДИСПЕРСИЯ.

Таянч иборалар: Танланма урта киймат, танланма дисперсия, тузатилган танланма дисперсия.

МАЪРУЗА РЕЖАСИ:

1. Нормал таксимот учун хакикатга максимал ухшашлик усулини куллаш.
2. Танланма урта киймат ва унинг ахамияти.
3. Танланма урта киймат хоссалари.
4. Танланма дисперсия ва унинг мохияти.
5. Танланма дисперсия хоссалари.

Адабиёт.

- [1] IX боб, §§ 1 [2] XVI боб, §§ 3-13 [3] X боб, § 1
 [4] 14 боб, §§ 49-51

Урганилаётган X тасодифий микдор $N(a, \sigma^2)$ нормал таксимотга эга булиб, унинг a ва σ^2 номаълум параметрларини $X_1, X_2, \dots, X_n$ танланма буйича хакикатга максимал ухшашлик усулида баҳолаш масаласини курамиз. Бу ерда нормал таксимотнинг

$$f(x, a, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

зичлик формуласидан фойдаланамиз. Бу холда хакикатга максимал ухшашлик функциясини топамиз:

$$\begin{aligned} L(X_1, X_2, \dots, X_n, a, \sigma^2) &= f(X_1, a, \sigma^2) \cdot f(X_2, a, \sigma^2) \cdots f(X_n, a, \sigma^2) = \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2\right\}. \end{aligned}$$

Хисоблашлар соддалаштириш максидида бу функциянинг натурал логарифмини караймаз:

$$\ln L(X_1, X_2, \dots, X_n, a, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$$

Бу функциядан a ва σ^2 параметрлар буйича хосилалар олиб, ушбу

$$\frac{\partial \ln L(X_1, X_2, \dots, X_n, a, \sigma^2)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - a) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L(X_1, X_2, \dots, X_n, a, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 = 0$$

хакикатга максимал ухшашлик тенгламалар системасини ҳосил киламиз. Бу системани ечиб, a ва σ^2 параметрлар учун $a_n^*, (\sigma^2)_n^*$ хакикатга максимал ухшашлик баҳоларини топамиз:

$$a_n^* = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1)$$

$$(\sigma^2)_n^* = \frac{1}{n}[(X_1 - a_n^*)^2 + (X_2 - a_n^*)^2 + \dots + (X_n - a_n^*)^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a_n^*)^2 \quad (2)$$

Агарда X тасодифий микдор $N(a, \sigma^2)$ нормал тақсимотга эга бўлса, у ҳолда $a = M(X)$, $\sigma^2 = D(X)$

бўлади. Демак (1) ва (2) формулалар билан аниқланадиган $a_n^*, (\sigma^2)_n^*$ нормал тақсимотнинг урта қиймати (математик кутилиши) $M(X)$ ва дисперсияси $D(X)$ учун статистик баҳолар бўлади. Улар нормал тақсимотдан ташқари бошқа жуда куп тақсимотларнинг урта қиймати ва дисперсияси учун ҳам яхши статистик баҳо бўлишини курсатиш мумкин. Шу сабабли (1) ва (2) формулалар орқали топиладиган статистик баҳолар мос равишда танланма урта қиймати ва танланма дисперсия деб аталади ҳамда $\bar{X}$ ва S^2 каби белгиланади :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (3)$$

Бу баҳоларнинг хоссаларини урганамиз.

Бунинг учун $X_i, i=1,2,\dots,n$, боғлиқмас, бир хил тақсимланган тасодифий микдорлар бўлиб,

$$M(X_i) = a, \quad D(X_i) = \sigma^2, \quad i=1,2,\dots,n$$

эканлигидан фойдаланамиз.

$$M(\bar{X}) = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a = a \quad (4)$$

Демак $\bar{X}$ танланма урта қиймат номаълум $M(X)=a$ математик кутилиш учун силжимаган баҳо бўлади.

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad (5)$$

Бу ердан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\bar{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

эканлиги келиб чиқади. Демак $\bar{X}$ танланма урта қиймат $a = M(X)$ математик кутилиш учун асосли баҳо бўлади.

Бундан ташқари нормал тақсимот учун бу баҳо эффектив, бошқа тақсимотларнинг купи учун эса асимптотик эффектив бўлишини исботлаш мумкин.

S^2 танланма дисперсия хоссаларини урганиш учун уни куйидаги курунишга келтирамиз:

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(X_i - a) - (\bar{X} - a)]^2 = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 - \frac{2}{n} (\bar{X} - a) \sum_{i=1}^n (X_i - a) + \frac{1}{n} \cdot n (\bar{X} - a)^2 = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 - \frac{2}{n} (\bar{X} - a) \cdot n (\bar{X} - a) + (\bar{X} - a)^2 = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 - (\bar{X} - a)^2
 \end{aligned} \tag{6}$$

Бу ерда

$$\sum_{i=1}^n (X_i - a) = \sum_{i=1}^n X_i - na = n\bar{X} - na = n(\bar{X} - a)$$

эканлигидан фойдаланилди.

Энди, дисперсия таърифига асосан

$$M(X_i - a)^2 = M(X_i - M(X_i))^2 = D(X_i) = \sigma^2$$

ва (4)-(5) тенгликларга асосан

$$M(\bar{X} - a)^2 = M(\bar{X} - M(\bar{X}))^2 = D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

эканлигидан фойдаланиб, (6) тенгликдан ушбу натижани оламиз:

$$\begin{aligned}
 M(S^2) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i - a)^2 - M(\bar{X} - a)^2 = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n} n \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n} \sigma^2
 \end{aligned} \tag{7}$$

Демак,

$$M(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2$$

ва танланма дисперсия S^2 номаълум $D(X) = \sigma^2$ дисперсия учун силжиган баҳо булади.

Аммо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(S^2) = \sigma^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \sigma^2,$$

яъни S^2 асимптотик силжимаган баҳо булади. Шу сабабли танланма хажми n етарли катта булса, S^2 баҳони силжимаган деб хисоблаш мумкин. Агар танланма хажми n катта булмаса, σ^2 дисперсия учун силжимаган баҳо сифатида

$$(S^2)^* = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \tag{8}$$

бахони караш мумкин. Бу баҳо тузатилган танланма дисперсия деб аталади ва унинг учун

$$M(S^2)^* = M\left(\frac{n}{n-1} S^2\right) = \frac{n}{n-1} M(S^2) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2$$

муносабат уринли булади, яъни $(S^2)^*$ силжимаган баҳо булади. S^2 ва $(S^2)^*$ танланма дисперсиялар $\sigma^2 = D(X)$ дисперсия учун асосли баҳо булишини курсатиш мумкин.

Агарда X устидаги кузатув натижалари статистик тахсимот конуни оркали берилган булса, танланма урта киймат $\bar{X}$ ва танланма дисперсия S^2

$$\bar{X} = \frac{\sum_{k=1}^m X_k n_k}{\sum_{k=1}^m n_k}, \quad S^2 = \frac{\sum_{k=1}^m (X_k - \bar{X})^2 n_k}{\sum_{k=1}^m n_k} \quad (9)$$

формулар билан топилади. Бу ерда X_k , $k=1,2,\dots,m$, каралаётган X тасодикий микдорнинг узаро тенг булмаган кузатилган кийматларини, n_k эса шу кийматлар частотасини ифодалайди.

Масалан, X устидаги $n=10$ кузатув натижалари

x_k	1	1	2	5
n_k	1	3	4	2

статистик тахсимот конуни билан берилган булсин. Бу холда

$$\bar{X} = \frac{-1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{1 + 3 + 4 + 2} = \frac{20}{10} = 2, \\ S^2 = \frac{(-1-2)^2 \cdot 1 + (1-2)^2 \cdot 3 + (2-2)^2 \cdot 4 + (5-2)^2 \cdot 2}{1 + 3 + 4 + 2} = \frac{30}{10} = 3$$

С а в о л л а р :

1. Танланма урта киймат кандай аникланади ва нима мақсадда қулланилади?
2. Танланма урта киймат кандай хоссаларга эга ?
3. Танланма дисперсия кандай аникланади ва нима мақсадда қулланилади ?
4. Танланма дисперсия камчилиги нимадан иборат ва у кандай тузатилади ?
5. Тузатилган танланма дисперсия формуласини ёзинг.

19 – МАЪРУЗА ИНТЕРВАЛ БАХОЛАР ВА УЛАРНИ НОРМАЛ ТАКСИМОТ УЧУН ЯСАШ.

Таянч иборалар : Нуктавий баҳолар, баҳо аниқлиги, ишончли эҳтимоллик , интервал баҳо.

МАЪРУЗА РЕЖАСИ:

1. Нуктавий баҳолар ва уларнинг аниқлиги.
2. Ишончилиқ эҳтимоллиги ва интервал баҳо.
3. Интервал баҳони ясаш алгоритми.
4. Нормал таксимот параметрлари учун интервал баҳолар.

Адабиёт.

- [1] IX боб, §2 [2] XVI боб, §§ 14-18 [3] X боб, § 2
[4] 14 боб, §§ 52

Урганилаётган X тасодифий микдор таксимотини аниқловчи номаълум θ параметр учун $X_1, X_2, \dots, X_n$ танланма бўйича

$$\theta_n^* = \theta^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

статистик баҳо қурилган бўлсин.

Хар бир танланмада бу баҳо қиймати бирор сондан иборат бўлади.

ТАЪРИФ 1 : Қийматлари сондан иборат бўлган статистик баҳолар **нуктавий** деб аталади.

Масалан, танланма урта қиймат $\bar{X}$ ёки танланма дисперсия S^2 нуктавий баҳолардир.

Номаълум θ параметр учун θ_n^* статистик баҳо бўлса, $|\theta - \theta_n^*|$ ифода канчалик кичик бўлса, θ_n^* баҳо шунчалик яхши деб ҳисоблаш табиийдир.

ТАЪРИФ 2 : Агарда $|\theta - \theta_n^*| < \delta$ бўлса, δ сон θ_n^* **баҳонинг аниқлиги** дейилади.

Равшанки, $\delta > 0$ сони канчалик кичик бўлса, θ_n^* баҳо θ параметрни шунчалик аниқроқ ифодалайди. Аммо θ_n^* баҳо тасодифий микдор бўлгани учун, $|\theta - \theta_n^*| < \delta$ тенгсизликни бажарилиши тасодифий ходиса бўлиб, бу ходисани юз беришини факат маълум бир эҳтимоллик билан қафолатлаш мумкин.

ТАЪРИФ 3 : Ушбу

$$P\{|\theta - \theta_n^*| < \delta\} = \gamma$$

тенглик билан аникланган γ сони θ_n^* бахонинг ишончлилик эхтимоллиги деб аталади.

Одатда γ ишончлилик эхтимоллик киймати олдиндан берилади ва купинчалик 0.95 ёки 0.99 ёки 0.999 деб олинади.

ТАЪРИФ 4: Номалум θ параметрни бирор эхтимоллик билан уз ичига олган (α, β) оралик шу параметрнинг интервал бахоси деб аталади.

Танланма хажми n унчалик катта булмаганда нуктавий бахоларнинг хатолиги анча купол булиши мумкин. Шу сабабли бундай холларда интервал бахолардан фойдаланилади.

Интервал бахоларни курилган θ_n^* нуктавий бахо ва берилган γ ишончлилик эхтимоллиги оркали куйидагича топиш мумкин :

- 1) θ_n^* нуктавий бахонинг таксимотини топамиз;
- 2) топилган таксимотдан фойдаланиб, (1) тенгликдан δ бахо аниклигини аниклаймиз;
- 3) $|\theta - \theta_n^*| < \delta$ тенгсизликни унга тенг кучли

$$\theta_n^* - \delta < \theta < \theta_n^* + \delta$$

куш тенгсизлик билан алмаштириб, чегаралари

$$\alpha = \theta_n^* - \delta, \quad \beta = \theta_n^* + \delta$$

булган интервал бахони хосил киламиз.

Топилган $(\theta_n^* - \delta, \theta_n^* + \delta)$ интервал бахо (1) тенгликка асосан номалум θ параметрни γ эхтимоллик билан уз ичига олади ва γ ишончли эхтимолликли ишончли интервал деб аталади.

Энди $N(a, \sigma^2)$ нормал таксимот параметрлари учун γ ишончли эхтимолликли ишончли интерваллар топиш масаласини курамиз.

Бу ерда уч холни куриб утамиз.

I хол. Таксимотнинг $\sigma^2 = D(X)$ дисперсияси маълум булиб, $a = M(X)$ номалум урта киймати учун ишончли интервал топиш талаб этилади.

Бу ерда номалум a параметр учун нуктавий бахо сифатида $\bar{X}$ танланма урта кийматни оламиз ва нормал таксимотли бош туплам учун $\bar{X}$ тасодифий микдор хам нормал таксимотга эга булишидан фойдаланамиз (Бу тасдики исботсиз кабул киламиз). Олдинги маърузада

$$M(\bar{X}) = a, \quad D(\bar{X}) = \sigma^2/n$$

эканлиги курсатилган эди. Демак $\bar{X}$ танланма урта киймат $N(a, \sigma^2/n)$ таксимотга эга. Шу сабабли, олдинги маърузаларга асосан,

$$P\left\{|\bar{X} - a| < \delta\right\} = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

тенглик уринли булади. Бу ердан $t = \delta\sqrt{n}/\sigma$ деб олиб ва берилган γ ишончлилик эхтимоллигидан фойдаланиб

$$P\{|\bar{X} - a| < \delta\} = 2\Phi(t) = \gamma \Rightarrow \Phi(t) = \gamma/2 \quad (2)$$

тенгламани ҳосил киламиз. Бу тенглама илдизини $\Phi(x)$ Лаплас функцияси жадвали ёрдамида топамиз. Бу ҳолда баҳо аниқлиги $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$ тенглик билан аниқланади. Демак $a = M(X)$ учун ишончли интервал чегаралари

$$\alpha = \bar{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{X} - \delta, \quad \beta = \bar{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{X} + \delta \quad (3)$$

тенгликлар орқали топилади.

Мисол: $\sigma^2 = 9$, $n=36$, $\bar{X}=4.1$, $\gamma = 0,95$ булсин. Бу ҳолда $\Phi(t)=0,95/2=0,475$ тенглама илдизи Лаплас функцияси жадвали орқали $t=1.96$ эканлигини топамиз. Бу ердан баҳо аниқлиги

$$\delta = \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} = \frac{3 \cdot 1,96}{\sqrt{36}} = 0,98$$

ишончли интервал чегаралари (3) га асосан

$$\alpha = \bar{X} - \delta = 4.1 - 0.98 = 3.12,$$

$$\beta = \bar{X} + \delta = 4.1 + 0.98 = 5.08$$

эканлигини аниқлаймиз. Шундай қилиб, $\gamma=0.95$ эҳтимоллик билан (3.12, 5.08) интервал номаълум $a=M(X)$ урта қийматни уз ичига олади.

II ҳол. $\sigma^2=D(X)$ дисперсия номаълум бўлиб, $a=M(X)$ номаълум урта қиймат учун ишончли интервал топиш керак.

Бу ҳолда дастлаб берилган n хажмли танланма бўйича $\bar{X}$ танланма урта қиймат ва S^2 тузатилган танланма дисперсияни ҳисоблаймиз ва $(\bar{X} - a)\sqrt{n}/S$ тасодифий микдор параметри $k = n-1$ булган Стъюдент таксимотига эга бўлишидан фойдаланамиз (бу тасдиқни исботсиз қабул киламиз). Берилган γ ишончилилик эҳтимоллиги бўйича Стъюдент таксимоти жадвалидан фойдаланиб,

$$P\{|\bar{X} - a|\sqrt{n}/S < t\} = \gamma \quad (4)$$

тенгламадан t қийматини топамиз. Одатда берилган n ва γ бўйича t қиймати махсус жадвалдан топилади. Бу ҳолда $\bar{X}$ баҳо аниқлиги $\delta = St/\sqrt{n}$, ишончли интервал чегаралари эса

$$\alpha = \bar{X} - \delta = \bar{X} - \frac{St}{\sqrt{n}}, \quad \beta = \bar{X} + \delta = \bar{X} + \frac{St}{\sqrt{n}} \quad (5)$$

формулалардан топилади.

Мисол: $n=16$, $\bar{X}=20.2$, $S^2=0,64$, $\gamma=0,95$ булсин. Жадвалдан $n=16$, $\gamma=0.95$ учун $t=2.13$ бўлишини топамиз. Демак $\bar{X}=20.2$ баҳонинг аниқлиги (0.95 эҳтимоллик билан)

$$\delta = \frac{St}{\sqrt{n}} = \frac{0,8 \cdot 2,13}{\sqrt{16}} = 0,46.$$

ишончли интервал чегаралари (5) га асосан

$$\alpha = \bar{X} - \delta = 20,2 - 0,426 = 19,774$$

$$\beta = \bar{X} + \delta = 20,2 + 0,426 = 20,626$$

булади. Шундай килиб 0,95 эхтимоллик билан (19.774,20.626) интервал номаълум $a = M(x)$ параметрни коплайди.

III хол. $\sigma^2 = D(X)$ номаълум дисперсия учун ишончли интервал тузиш талаб этилсин. Бу ерда $a = M(x)$ маълум ёки номаълум булиши хам мумкин.

Дастлаб хажми n булган танланма буйича S^2 танланма дисперсиясини топамиз. Бу холда $n S^2 / \sigma^2$ тасодифий микдор параметри $k = n-1$ булган хи-квадрат деб аталадиган таксимотга эга булади. (Бу тасдиқни исботсиз кабул киламиз). Бу таксимотнинг жадвалидан фойдаланиб, берилган γ ишончлилик эхтимоллиги буйича ушбу

$$P\left\{\frac{nS^2}{\sigma^2} < x_1\right\} = \frac{1-\gamma}{2} \quad (6)$$

$$P\left\{\frac{nS^2}{\sigma^2} < x_2\right\} = \frac{1+\gamma}{2} \quad (7)$$

тенгламалардан x_1 ва x_2 сонларини топамиз. Бу холда

$$P\left\{x_1 < \frac{nS^2}{\sigma^2} < x_2\right\} = P\left\{\frac{nS^2}{\sigma^2} < x_2\right\} - P\left\{\frac{nS^2}{\sigma^2} < x_1\right\} = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2} = \gamma$$

тенглик уринли булади. Шу холда

$$x_1 < \frac{nS^2}{\sigma^2} < x_2 \quad \text{ва} \quad \frac{nS^2}{x_2} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{x_1}$$

куш тенгсизликлар тенг кучли булгани учун, изланган ишончли интервал чегаралари

$$\alpha = \frac{nS^2}{x_2}, \quad \beta = \frac{nS^2}{x_1} \quad (8)$$

эканлигини топамиз.

М и с о л : $n=22$, $S^2=0,0289$, $\gamma=0,98$ булсин. Бу холда $(1-\gamma)/2 = 0,01$, $(1+\gamma)/2 = 0,99$, $k = n-1=21$ булгани учун хи-квадрат таксимот жадвалларидан фойдаланиб, (6) ва (7) тенглама илдизлари $x_1=8,90$, $x_2=38,9$, эканлигини топамиз. Шу сабабли ишончли интервал чегалари (8)га асосан

$$\alpha = \frac{22 \cdot 0,0289}{38,9} = 0,0163, \quad \beta = \frac{22 \cdot 0,0289}{8,9} = 0,0714$$

булади. Демак 0,98 эхтамоллик билан (0.0163,0.0714) интервал номаълум σ^2 дисперсияни коплайди.

С а в о л л а р :

1. Кандай бахолар нуктавий деб аталади ?
2. Бахонинг аниклиги кандай аникланади ?
3. Интервал баҳо кандай таърифланади ?
4. Ишончли эҳтимоллик ва ишончли интервал нима ?
5. Нуктавий баҳо оркали интервал баҳо тузиш боскичларини курсатинг.
6. Дисперсияси маълум нормал тахсимотнинг урта қиймати учун интервал баҳо кандай топилади?
7. Дисперсияси номаълум нормал тахсимотнинг урта қиймати учун интервал баҳо кандай топилади?
8. Нормал тахсимотнинг номаълум дисперсияси учун интервал баҳо кандай топилади?

20 – М А Ъ Р У З А

КОРРЕЛЯЦИОН ВА РЕГРЕСИОН МАСАЛАЛАР

Таянч иборалар : Функционал боғланиш, статистик боғланиш, корреляцион боғланиш, регрессия тенгламаси, энг кичик квадратлар усули, танланма корреляция коэффиценти.

МАЪРУЗА РЕЖАСИ:

1. Функционал боғланган тасодифий микдорлар.
2. Статистик боғланган тасодифий микдорлар.
3. Корреляцион боғланган тасодифий микдорлар.
4. Регрессия тенгламаси ва уни мохияти.
5. Энг кичик квадратлар усули.
6. Танланма корреляция коэффиценти ва унинг мохияти.
7. Танланма корреляция коэффиценти хоссалари.

Адабиёт.

- [1] IX боб, §4 [2] XVIII боб, §§ 1-7 [3] XII боб, § 1
[4] 14 боб, §§ 60-69

Куп масалаларни ечишда иккита X ва Y тасодифий микдорлар орасидаги боғланишни урганишга тугри келади. Бу боғланишлар функционал ва статистик курунишда булади.

ТАЪРИФ 1 : Агарда X тасодифий микдорнинг мумкин булган хар бир x кийматига Y тасодифий микдорнинг мумкин булган битта y киймати мос келса, X ва Y тасодифий микдорлар функционал боғланган дейилади ва $Y=\varphi(X)$ курунишда ёзилади.

Масалан , тасодифий олинган айлананинг радиуси X ва узунлиги Y булсин. Бу холда X ва Y тасодифий микдорлар булиб, улар $Y=2\pi X$ тенглик билан ифодаланувчи функционал боғланишда булади.

Аммо бундай функционал боғланишлар амалиётда кам учрайди . Куп холларда X тасодифий микдорнинг мумкин булган x кийматига Y тасодифий микдорнинг мумкин булган $y_1, y_2, \dots, y_n$, кийматларидан хар бири кандайдир $p_1, p_2, \dots, p_n$, эхтимолликлар билан мос келиши мумкин. Демак $X=x$ булганда , унга аник бир $Y=y$ киймат мос келмасдан, Y тасодифий микдорнинг кандайдир

Y	Y_1	Y_2	$\dots$	Y_n
P	P_1	P_2	$\dots$	P_n

таксимот конуни мос келади.

ТАЪРИФ 2 : Агарда X тасодифий микдорнинг ҳар бир мумкин бўлган x кийматига Y тасодифий микдорнинг бирор тақсимот қонуни мос келса, X ва Y тасодифий микдорлар статистик боғланган дейилади.

Масалан X бир гектар ерга солинган уғит микдори, Y эса шу ердан олинган ҳосил микдори бўлсин. Бу ҳолда X ва Y тасодифий микдорлар статистик боғланганда бўлади, чунки уғит микдори X бўйича ҳосилдорлик Y бир кийматли аниқланмайди.

ТАЪРИФ 3: X ва Y статистик боғланган бўлса, $X=x$ бўлганда Y тасодифий микдорнинг математик кутилиши (урта киймати) шартли урта киймат деб аталади ва $\bar{Y}_x$ каби белгиланади.

Қўп ҳолларда $\bar{Y}_x$ шартли урта кийматни ҳисоблаганда Y тасодифий микдорга X тасодифий микдордан бошқа тасодифий омилларнинг таъсири йўқолиб кетади деб қараш мумкин. Масалан, Y ҳосилдорликка X уғит микдоридан ташқари тупроқ нави, ёгингарчилик, ҳавонинг ҳарорати каби жуда қўп омиллар таъсир этади. Аммо уртача $\bar{Y}_x$ ҳосилдорликни қараганда, уларнинг таъсирларини ҳисобга олмаслик ва бу қатталиқ факат уғит микдори X билан аниқланади деб айтиш мумкин.

ТАЪРИФ 4 : Агарда X ва Y статистик боғланган, аммо $\bar{Y}_x$ ва X эса функционал боғланган бўлса, X ва Y уртасида корреляцион боғланиш мавжуд деб аталади.

Агарда X ва Y корреляцион боғланган бўлса, у ҳолда

$$\bar{Y}_x = \varphi(X) \quad (1)$$

деб ёзиш мумкин.

ТАЪРИФ 5 : (1) Y тасодифий микдорнинг X тасодифий микдорга регрессия тенгламаси, $\varphi(X)$ эса регрессия функцияси деб аталади.

Математик статистикадан X ва Y тасодифий микдорлар устида ўтказилган n та боғлиқмас кузатув натижалари

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \quad (2)$$

асосида $\varphi(X)$ регрессия функцияси тугрисида ҳулосалар чиқарилади ва бу регрессион масала дейилади. Қўп ҳолларда регрессия функцияси $\varphi(X)=aX+b$ қизикли қуринишда деб қараш мумкин. Қизикли регрессия тенгламасидаги номаълум a ва b параметрлар танланмадаги кузатув натижаларига асосан энг кичик квадратлар усули деб аталадиган усулда баҳоланади. Бу усулнинг моҳиятини қўрсатиш учун корреляцион боғланишдаги X ва Y тасодифий микдорларни оламиз. $X=x_i, i=1,2,\dots,n$, бўлганда Y тасодифий микдорнинг кузатув натижаларига асосан топилган танланма шартли урта кийматини $\bar{Y}_i(t)$, (1) регрессия тенгламасига асосан топилган назарий шартли урта кийматини $\bar{Y}_i(n)$ каби белгилаймиз. Бу ҳолда

$$F = \sum_{i=1}^n (\bar{Y}_i(n) - \bar{Y}_i(m))^2$$

йигинди назарий ва амалий шартли урта кийматлар орасидаги умумий фаркни, тафовутни ифодалайди.

Энг кичик квадратлар усулида (1) тенгламадаги $\varphi(X)$ регрессия функцияси шундай танланадики, бу тафовут энг кичик, яъни $F = \min$ булсин.

Биз кураётган кузатув натижалари энг содда (2) куринишда, регрессия функцияси $\varphi(X) = aX + b$ каби булган холда $\bar{Y}_i(t) = \bar{Y}_i$, $\bar{Y}_i(n) = ax_i + b$ булади. Бу холда

$$F = \sum_{i=1}^n (\bar{Y}_i(n) - \bar{Y}_i(m))^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 = F(a, b)$$

функцияга энг кичик киймат берувчи a ва b параметрлар киймати

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) \cdot 1 = 0$$

чизикли тенгламалар системасидан топилади.

Бу системани ечиб,

$$a = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{S_x^2}, \quad b = \frac{\overline{X^2} \cdot \bar{Y} - \bar{X} \cdot \overline{XY}}{S_x^2} \quad (3)$$

натижаларни оламиз. Бу ерда

$$\overline{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \overline{X^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

$$S_x^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2$$

белгилашлар кулланилган.

Кузатув натижалари умумий булган холда ҳам a ва b параметрларнинг бахолари (3) формула оркали топилади, факат $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\overline{XY}$, $\overline{X^2}$ бошқачарок хисобланади.

Регрессион масалада X ва Y орасидаги боғланиш куринишини аниклаш масаласи каралади. Баъзи бир масалаларда эса X ва Y орасидаги боғланиш кучини аниклашга тугри келади. Бу **корреляцион масала** дейилади. Бу масалани ечиш учун математик статистикада танланмадаги кузатув натижаларига асосан турли курсатгичлар хисобланиб, уларнинг кийматлари буйича тегишли хулосалар чикарилади. Бу курсатгичларнинг энг соддаси **танланма корреляция коэффициенти** деб аталади. У R_{XY} каби белгиланади ва юкоридаги белгилашлардан фойдаланилган холда

$$R_{XY} = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{S_X \cdot S_Y} \quad (4)$$

формула билан хисобланади. Бу ерда S_Y^2 берилган Y тасодифий микдорнинг танланма дисперсиясини ифодалайди ва

$$S_Y^2 = \overline{Y^2} - (\bar{Y})^2$$

формула билан хисобланади.

Танланма корреляция коэффиценти куйидаги хоссаларга эга булишини исботлаш мумкин:

1. Хар кандай X ва Y тасодифий микдорлар учун $-1 \leq R_{XY} \leq 1$

2. Агар X ва Y богликмас булса, $R_{XY} = 0$.

И з о х : $R_{XY} = 0$ эканлигидан X ва Y богликмаслиги келиб чикмайди.

3. Агарда $R_{XY} = \pm 1$ булса, у холда X ва Y тасодифий микдорлар $Y = AX + B$ чизикли функционал богланишга эга булади.

4. R_{XY} абсолют киймати ошиб борган сари, X ва Y орасидаги богланиш кучи хам ортиб боради ва $|R_{XY}| = 1$ булганда энг кучли, функционал богланишга утади.

Демак, R_{XY} корреляция коэффиценти X ва Y белгилар уртасидаги чизикли богланиш кучини ифодалайди. Шу сабабли $R_{XY} = 0$ булганда факат X ва Y уртасида чизикли богланиш мавжуд эмас деб айта оламиз ва бошка куринишдаги богланиш мавжуд булиши мумкин. $|R_{XY}|$ киймати бирга якинлашган сари богланиш кучи шунча катта (кучли), нолга якинлашган сари богланиш кучи шунча кичик (кучсиз) булади

С а в о л л а р :

1. Качон тасодифий микдорлар функционал богланган дейилади ?
2. Качон тасодифий микдорлар статистик богланган дейилади ?
3. Качон тасодифий микдорлар корреляцион богланган дейилади ?
4. Регрессия тенгламаси кандай аникланади ?
5. Энг кичик квадратлар усулининг мохияти нимадан иборат ?
6. Регрессион масала мохияти нимадан иборат ?
7. Корреляцион масала мохияти нимадан иборат ?
8. Танланма корреляция коэффиценти кандай аникланади ва нима максадда кулланилади ?
9. Танланма корреляция коэффиценти кандай хоссаларга эга ?

21 – МАЪРУЗА СТАТИСТИК ТАХМИНЛАРНИ ТЕКШИРИШ.

Таянч иборалар : Статистик тахмин, асосий ва муқобил тахминлар, статистик мезон, критик соҳа, кийматдорчилик даражаси , мезоннинг қуввати, критик нуқта, унғ ва чап томонлама критик соҳа, икки томонлама критик соҳа.

МАЪРУЗА РЕЖАСИ.

1. Статистик тахмин.
2. Статистик тахминни текширишда унинг I ва II тур хатоликлари.
3. Статистик мезон (критерий).
4. Статистик мезоннинг критик соҳаси.
5. Статистик мезоннинг кийматдорлик даражаси ва қуввати.
6. Статистик тахминни текширишнинг асосий босқичлари.
7. Критик нуқталар ва ораликлар.

Адабиёт.

- [1] IX боб, §3 [2] XIX боб, §§ 1-7 [3] XIII боб, § 1
[4] 14 боб, § 57

Математик статистикада қаралаётган масалаларда урганилаётган X тасодифий миқдорнинг тақсимооти ёки уни аниқловчи параметрлар номаълум бўлади. Баъзи ҳолларда масаланинг моҳияти ёки тажрибага асосланиб, бу номаълум тақсимоот $F(x)$ функция қурилишида ёки тақсимоот параметри θ га тенг деган фикрга, тахминга келамиз. Бу тахминимиз тугри ёки нотугри бўлиши мумкин. Бунинг учун уни статистик қузатув натижаларига асосланиб текширамиз. Шу сабабли бундай тахминлар **статистик тахмин** деб аталади.

Биз тугри деб қараётган статистик тахмин **асосий (нолинчи)** тахмин деб аталади ва H_0 каби белгиланади. Унга зид фикрни ифодаловчи тахмин эса **рақобатчи (конкурент)** ёки **муқобил (альтернатив) тахмин** дейилади ва H_1 каби белгиланади.

Масалан, номаълум θ параметр учун асосий тахмин $\theta=3$ деб таъкидласа (қискача $H_0 : \theta=3$), муқобил тахмин $H_1: \theta=5$ ёки $H_1: \theta<3$ ёки $H_1: \theta\neq 3$ каби қурилишларда бўлиши мумкин. Асосий H_0 тахминнинг тугри ёки нотугрилиги танланмадаги қузатув натижаларига асосан текширилади. Бу қузатув натижалари тасодифий характерга эга бўлгани учун статистик тахминни текширишда икки тур хатоликка йул қуйишимиз мумкин.

I тур хатолик шундан иборатки, унда тугри бўлган H_0 тахмин нотугри деб, рад этилади.

II тур хатоликда эса нотугри булган H_0 тахмин тугри деб кабул килинади.

Масалан, H_0 асосий тахмин «ишлаб чикарилган махсулотлар партияси сифатли» деган маънога эга булсин. Бу холда I тур хатоликда сифатли махсулотлар партияси сифатсиз деб хисобланади. Шу сабабли бу хатоликни **ишлаб чикарувчининг таваккали** деб караш мумкин.

II тур хатоликда эса сифатсиз махсулотлар партияси сифатли деб хисобланади. Шу сабабли бу хатоликни **истеъмолчининг таваккали** деб караш мумкин.

Статистик тахминларни текшириш учун махсус бир K тасодифий микдор олинади ва у **статистик мезон** (критерий) деб аталади. Бу статистик мезон K шундай танланиши керакки, H_0 асосий тахмин уринли деган фаразда унинг таксимоти аник ёки такрибий топилиши мумкин булсин.

Тегишли K статистик мезон танлангач, унинг мумкин булган кийматлар туплами S иккита кесишмайдиган S_1 ва S_2 кисм тупламларга ажратилади ($S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$). Агарда $K \in S_1$ булса, H_0 асосий тахмин кабул килинади ва S_1 **тахминни кабул килиниш сохаси** деб аталади. Агарда $K \in S_2$ булса H_0 асосий тахмин рад этилади ва S_2 **критик соха** дейилади.

H тахмин уринли булганда K статистик мезоннинг эхтимолликлар таксимотини P_n оркали белгилаймиз. Бу холда P_{n_0} ($K \in S_2$) I тур хатолик эхтимоллигини, P_{n_1} ($K \in S_1$) эса II тур хатолик эхтимоллигини ифодалайди. Бунда P_{n_0} ($K \in S_2$) = α сони статистик мезоннинг **кийматдорлик даражаси** деб аталади ва одатда $\alpha = 0,05$ ёки $0,01$ деб олинади. Агарда P_{n_1} ($K \in S_1$) = β деб олсак, $1 - \beta$ сони статистик **мезоннинг куввати** деб аталади. Бунда $1 - \beta = 1 - P_{n_1}$ ($K \in S_1$) = P_{n_1} ($K \in S_2$) булгани учун, мезон куввати нотугри тахминни рад этиш ёки II тур хатоликка йул куймаслик эхтимоллигини ифодалайди.

Албатта I ва II тур хатоликлари эхтимолликлари α ва β канча кичик булса, статистик тахминни текшириш натижаси шунча яхши булади. Аммо α ва β эхтимолликларни бир пайтда кичрайтириш мумкин эмас ва α канчалик кичик булса, β шунчалик катта булади. Шу сабабли статистик мезоннинг кийматдорчилик даражаси α каралаётган масаланинг мохиятига караб, тадқиқотчи томонидан берилади. Берилган α буйича II тур хатолик эхтимоллиги β энг кичик, яъни критерий куввати максимал булган критик S_2 соха математик статистиканинг Нейман ва Пирсон теоремалари оркали аникланади.

Шундай килиб, статистик тахминни текшириш куйидаги боскичлардан иборат булади:

1. X тасодифий микдор устида n та богликмас кузатувлар утказиб,

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

танланма хосил киламиз ;

2. Асосий H_0 ва мукобил H_1 статистик тахминларни киритамиз ;

3. $K = K(X_1, X_2, \dots, X_n)$ статистик мезонни танлаймиз ва уни H_0 тахминдаги

$P_{H_0}(K)$ таксимотини топамиз ;

4. Масала мохияти, мазмунига караб $\alpha=0.05$ ёки $\alpha=0.01$ кийматдорчилик даражасини берамиз;

5. Нейман ва Пирсон теоремалари ва $P_{H_0}(K \in S_2) = \alpha$ тенгламадан фойдаланиб S_2 критик сохани топамиз;

6. $K=K(X_1, X_2, \dots, X_n)$ статистик мезонда $X_1, X_2, \dots, X_n$ тасодифий микдорлар урнига танланмага тушган $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонларни куйиб, статистик мезоннинг $K_{куз}=K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кузатилган кийматини хисоблаймиз.

7. $K_{куз} \in S_2$ булса, H_0 асосий тахминни рад этамиз, $K_{куз} \in S_1$ булса уни кабул киламиз.

Шуни таъкидлаб утиш керакки, статистик текширув натижасида H_0 тахмин кабул килинганидан, унинг тугри эканлиги исботланган булмайди. Бундай холларда H_0 тахмин бошка усуллар ёки танланма хажмини ошириш ёрдамида қайта текширилади. Шу сабабли математик статистикада H_0 асосий тахминни рад этишга купрок харакат килинади.

Танлаб олинган K статистик мезоннинг барча кийматлар туплами S бирор ораликлардан иборат булади. Шу сабабли тахминни кабул килиш сохаси S_1 ва критик соха S_2 хам ораликлардан иборат булиб, уларни ажратиб турувчи нукталар **критик нукталар** дейилади ва $k_{кр}$ каби белгиланади.

$K > k_{кр} > 0$ тенгсизлик билан аникланадиган $(k_{кр}, \infty)$ оралик **унг томонлама**, $K < k_{кр} < 0$ тенгсизлик билан аникланадиган $(-\infty, k_{кр})$ оралик **чан томонлама критик соха** дейилади. $K < k_1$ ва $K > k_2$ ($k_1 > k_2$) тенгсизликлар билан аникланадиган $(-\infty, k_1) \cup (k_2, \infty)$ соха **икки томонлама критик соха** дейилади.

Критик нукталар K мезон учун берилган α кийматдорчилик даражасига караб

$P_{H_0}(K > k_{кр}) = \alpha$ ёки $P_{H_0}(K < k_{кр}) = \alpha$ ёки $P_{H_0}(K < k_1, K > k_2) = \alpha$ тенгламадан топилади. Одатда куп ишлатиладиган статистик мезонлар учун бу тенгламанинг илдизлари махсус жадваллардан топилади.

С а в о л л а р :

1. Статистик тахмин деганда нима тушунилади ?
2. Асосий ва мукобил тахминлар кандай аникланади ?
3. I тур хатолик кандай аникланади ва унинг иктисодий маъноси нимадан иборат ?
4. II тур хатолик кандай аникланади ва унинг иктисодий маъноси нимадан иборат ?
5. Статистик мезон деб нимага айтилади ?
6. Статистик тахминни кабул килиш ва критик сохалари кандай аникланади ?
7. Статистик тахминнинг кийматдорчилик даражаси нима ?
8. Статистик мезоннинг куввати нима ?
9. Критик нукта кандай таърифланади ?

10. Унғ томонлама, чап томонлама , икки томонлама критик сохалар кандай курунишда булади ?

22 – МАЪРУЗА

НОРМАЛ ТАКСИМОТ УРТА КИЙМАТИ УЧУН СТАТИСТИК ТАХМИНЛАРНИ ТЕКШИРИШ.

Таянч иборалар : Дисперсия маълум булганда урта киймат учун статистик тахмин ва статистик мезон, дисперсия номаълум булганда урта киймат учун статистик тахмин ва статистик мезон.

МАЪРУЗА РЕЖАСИ.

1. Дисперсияси маълум булган нормал тахсимотнинг урта киймати учун статистик тахминни текшириш.
2. Дисперсияси номаълум булган нормал тахсимотнинг урта киймати учун статистик тахминни текшириш.
3. Стъюдент тахсимоти ва унинг критик нукталари жадвали.

Адабиёт.

[2] XIX боб, § 13 [3] XIII боб, §

Текширилаётган X тасодифий микдор $N(a, \sigma^2)$ нормал тахсимотга эга булсин. Бу нормал тахсимотнинг урта киймати булмиш номаълум a параметр хақидаги $H_0: a = a_0$ асосий тахминни статистик текшириш масаласини курамиз.

I ҳол. Тахсимот дисперсияси булмиш иккинчи параметр σ^2 маълум булсин. Бу ҳолда статистик критерий сифатида

$$U = \frac{\bar{X} - a_0}{\sqrt{D(\bar{X})}} = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} \quad (1)$$

тасодифий микдорни оламиз. Бунда $\bar{X}$ танланма урта киймат булиб, H_0 асосий тахмин уринли булганда

$$M(\bar{X}) = a_0, \quad D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

тенгликлар уринли булади. Бу натижалардан фойдаланиб, U критерий учун $M(U)=0$, $D(U)=1$ эканлигини курсатиш кийин эмас.

ЛЕММА: H_0 асосий тахмин уринли булганда U критерий $N(0,1)$ нормал тахсимотга эга.

Бу леммани исботсиз қабул киламиз. Энди берилган α кийматдорлик даражаси буйича S_2 критик сохани топамиз. Бу соха қурилиши H_1 муқобил тахминга қараб аниқланади.

1) Муқобил тахмин $H_1: a > a_0$ қурилишда булсин. Бу ҳолда критик сохани унғ томонлама, яъни $S_2 = (u_{кр}, \infty)$ қурилишда излаймиз. Берилган α кийматдорчилик даражаси таърифига асосан

$$\alpha = P_{H_0}(U \in S_2) = P_{H_0}(U > u_{кр}) = 1 - P_{H_0}(U \leq u_{кр}) = 1 - \Phi(u_{кр})$$

тенликка эга буламиз Бу ерда

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$$

булиб, $N(0,1)$ нормал таксимот функциясини ифодалайди.

Демак критик нукта $u_{кр}$

$$\Phi(u_{кр}) = 1 - \alpha \quad \text{ёки} \quad \Phi(u_{кр}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} \quad (2)$$

тенгламадан топилади. Бу тенглама илдизи $\Phi(x)$ ёки $\Phi_0(x)$ функция жадвалидан фойдаланиб топилади.

К о и д а № 1 Кузатув натижалари буйича (1) критерийнинг кузатилган кийматини ($U_{куз}$) хисоблаймиз. Агарда $U_{куз} > u_{кр}$ булса, H_0 асосий тахминни рад этамиз. Акс холда H_0 тахминни қабул қиламиз.

М а с а л а № 1. $\sigma^2=4$, $n=64$, $\bar{X}=5,3$ маълумотларга асосан $H_0:a=5$ асосий тахмин $H_1:a>5$ муқобил тахминда $\alpha=0,05$ кийматдорчилик даражасида текширилсин.

Е ч и ш : $\alpha=0,05$ кийматдорчилик даражаси буйича

$$\Phi_0(u_{кр}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} = \frac{1 - 0,1}{2} = 0,45$$

тенгламадан $\Phi_0(x)$ функция жадвали буйича $u_{кр}=1,65$ эканлигини топамиз. U критерийнинг кузатилган кийматини хисоблаймиз:

$$U_{куз} = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(5,3 - 5)\sqrt{64}}{2} = 1,2 < 1,65 = u_{кр}$$

$U_{куз} < u_{кр}$, булгани учун H_0 асосий тахмин $\alpha=0,05$ кийматдорчилик даражаси билан қабул қилинади.

2) Муқобил тахмин $H_1 : a < a_0$ қурилишида бўлсин. Бу холда $S_2 = (-\infty, -u_{кр})$ қурилишида қаралади. Бу холда

$$\alpha = P_{H_0}(U \in S_2) = P_{H_0}(U < -u_{кр}) = \Phi(-u_{кр}) = \frac{1}{2} + \Phi_0(-u_{кр}) = \frac{1}{2} - \Phi_0(u_{кр})$$

булгани учун критик нукта

$$\Phi(u_{кр}) = \alpha \quad \text{ёки} \quad \Phi(u_{кр}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} \quad (3)$$

тенгламадан жадвал ёрдамида топилади.

К о и д а № 2 Агарда $U_{куз} < -u_{кр}$ булса, H_0 асосий тахмин рад этилади, акс холда эса қабул қилинади.

М а с а л а № 2. $\sigma^2=9$, $n=900$, $\bar{X}=6,7$ маълумотларга асосан $H_0:a=7$ асосий тахмин $H_1:a>7$ муқобил тахминда $\alpha=0,01$ кийматдорчилик даражасида текширилсин.

Е ч и ш : $\alpha=0,01$ кийматдорчилик даражаси учун

$$\Phi_0(u_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-0,02}{2} = 0,49$$

тенгламадан жадвал буйича $u_{кр}=2,33$ эканлигини топамиз. Демак критик соха $S_2 = (-\infty, -2.33)$ булади. Критерийнинг кузатилган кийматини хисоблаймиз:

$$U_{куз} = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(6,7 - 7)\sqrt{900}}{3} = -3 < -2,33 = -u_{кр}$$

Демак $U_{куз} < -u_{кр}$, яъни $U_{куз} \in S_2$, ва шу сабабли H_0 тахмин рад этилади.

3) Мукобил тахмин $H_1: a \neq a_0$ куринишда булсин. Бу холда икки томонлама

$$S_2 = (-\infty, -u_{кр}) \cup (u_{кр}, \infty)$$

куринишдаги критик соха каралади. Бу холда

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{H_0}(U \in S_2) = P_{H_0}(U < -u_{кр}) + P_{H_0}(U > u_{кр}) = \Phi(-u_{кр}) + 1 - \Phi(u_{кр}) = \\ &= \frac{1}{2} + \Phi_0(-u_{кр}) + 1 - \frac{1}{2} - \Phi_0(u_{кр}) = 1 - 2\Phi_0(u_{кр}) = \alpha \end{aligned}$$

тенгликка асосан, унг критик нукта $u_{кр}$

$$\Phi_0(u_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2} \quad (4)$$

тенгламадан жадвал буйича топилади.

К о и д а № 3 Агарда $|U_{куз}| > u_{кр}$ булса, H_0 асосий тахмин рад этилади, акс холда эса кабул килинади.

М а с а л а № 3. $\sigma^2=16$, $n=400$, $\bar{X} = 0,7$, $\alpha=0,1$, $H_0:a=0$, $H_1:a \neq 0$ холда H_0 тахминни текширинг.

Е ч и ш : $\alpha=0,1$ кийматдорчилик даражаси учун

$$\Phi_0(u_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-0,1}{2} = 0,45$$

тенгламадан жадвал буйича $u_{кр}=1,65$ критик нуктани топамиз. Бу холда критик соха

$$S_2 = (-\infty, -1.65) \cup (1.65, \infty)$$

булади. Критерийнинг кузатилган киймати

$$U_{куз} = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(0,7 - 0)20}{4} = 3,5 > 1,65.$$

Демак $U_{куз} \in S_2$ ва шу сабабли $H_0:a=0$ асосий тахмин рад этилади.

И х о л . Таксимот дисперсияси σ^2 номаълум .

Бу холда (1) критерий урнига

$$T = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{S^*} \quad (5)$$

критерийдан фойдаланилади. Бунда $(S^2)^*$ -тузатилган танланма дисперсияни ифодалайди.

ЛЕММА : Асосий H_0 тахмин уринли булганда T критерий параметри $k=n-1$ булган Стьюдент таксимомага эга.

1) $H_1: a > a_0$ мукобил тахминда критик соха $S_2 = (t_{кр}, \infty)$ куринишда, яъни унги томонлама деб олинади. Критик нукта $t_{кр}$ берилган α кийматдорчилик даражаси ва $k=n-1$ параметр буйича Стъюдент таксимотининг критик нукталари жадвалидан олинади.

К о и ѓ а № 4 Агарда (5) критерийнинг кузатилган киймати $T_{куз} > T_{кр}$ булса, H_0 асосий тахмин рад этилади, акс холда эса кабул килинади.

М а с а л а № 4. $n=25$, $\bar{X} = 3,2$, $S^* = 2,5$ маълумотлар буйича $H_0: a = 2,7$ асосий тахминни $H_1: a > 2,7$ мукобил тахмин остида $\alpha = 0,05$ кийматдорчилик даражасида текширинг.

Е ч и ш : $\alpha = 0,05$ ва $k=n-1=25-1=24$ параметрлар буйича Стъюдени таксимотининг критик нукталари жадвалидан $t_{кр}=1,71$ натижани оламиз. Критерийнинг кузатилган киймати

$$T_{куз} = \frac{(\bar{X} - a_0) \sqrt{n}}{S^*} = \frac{(3,2 - 2,7) \cdot 5}{2,5} = 1 < 1,71 = t_{кр}.$$

Демак $T_{куз} < t_{кр}$, яъни $T_{куз} \in S_1$, ва шу сабабли $H_0: a = 2,7$ асосий тахмин рад этилмайди.

2) $H_1: a < a_0$ мукобил тахминда критик соха чап томонлама, яъни $S_2 = (-\infty, -t_{кр})$ куринишда олинади. Бунда $t_{кр}$ худди олдинги холдагидай топилади.

К о и ѓ а № 5 $T_{куз} < -t_{кр}$ булса, H_0 асосий тахмин рад этилади, акс холда эса кабул килинади.

М а с а л а № 5. $n=64$, $\bar{X} = 5,2$, $S^* = 2$, $\alpha = 0,01$, $H_0: a = 5,5$ ва $H_1: a < 5,5$ шартларда H_0 асосий тахмин текширилсин.

Е ч и ш : $\alpha = 0,01$ ва $k=n-1=24$ параметрлар буйича Стъюдени таксимотининг критик нукталари жадвалидан $t_{кр}=2,39$ натижани оламиз.

$$T_{куз} = \frac{(5,2 - 5,5) \cdot 8}{2} = -1,2 > -2,39 = -t_{кр}$$

булгани учун $H_0: a = 5,5$ асосий тахмин кабул килинади.

3) $H_1: a \neq a_0$ мукобил тахминда икки томонлама критик соха

$$S_2 = (-\infty, -t_{кр}) \cup (t_{кр}, \infty)$$

каралади. Критик нукта $t_{кр}$ кийматини α кийматдорчилик даражаси ва $k=n-1$ параметрлар буйича Стъюдени таксимотининг критик нукталари жадвалидан топилади.

К о и ѓ а № 6 Агарда $|T_{куз}| > t_{кр}$ булса, H_0 асосий тахмин рад этилади.

М а с а л а № 6. $n=81$, $\bar{X} = 1,9$, $S^* = 4$, $\alpha = 0,1$, $H_0: a = 1$; $H_1: a \neq 1$ шартларда H_0 асосий тахмин текширилсин.

Е ч и ш : $\alpha = 0,1$ ва $k=n-1=80$ параметрлар буйича жадвалдан икки томонлама соха критик нуктаси $t_{кр}=1,67$ эканлигини топамиз.

Бу холда

$$T_{куз} = \frac{(1,9 - 1) \cdot 9}{4} = \frac{8,1}{4} = 2,025 > 1,67 = t_{кр}$$

булгани учун $T_{\text{куз}} \in S_2$ булади ва шу сабабли $H_0: a=1$ асосий тахмин рад этилади.

С а в о л л а р :

1. Нормал таксимотда дисперсия маълум булганда урта киймат учун статистик тахмин кандай текширилади ?
2. Нормал таксимотда дисперсия номаълум булганда урта киймат учун статистик тахмин кандай текширилади ?

23 – М А Ъ Р У З А

НОРМАЛ ТАКСИМОТ ДИСПЕРСИЯСИ ХАКИДАГИ СТАТИСТИК ТАХМИНЛАРНИ ТЕКШИРИШ.

Таянч иборалар : Нормал таксимот дисперсияси учун статистик тахминлар.

МАЪРУЗА РЕЖАСИ.

1. Нормал таксимот дисперсияси учун статистик тахминни текшириш мезони.
2. Унг томонлама критик сохани тузиш.
3. Икки томонлама критик сохани тузиш.
4. Чап томонлама критик сохани тузиш.

Адабиёт.

[2] XIX боб, § 9 [3] XIII боб, § 3

Урганилаётган X тасодифий микдор $N(a, \sigma^2)$ нормал таксимотга эга булиб, унинг дисперсияси $D(X) = \sigma^2$ номаълум булсин. Номаълум дисперсия тугрисидаги $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ асосий тахминни статистик текшириш масаласини курамиз. Бунинг учун дастлаб X устида утказилган кузатув натижалари асосида $(S^2)^*$ тузатилган танланма дисперсиясини топамиз. Сунгра асосий тахминни текшириш учун

$$\chi^2 = \frac{(n-1)(S^2)^*}{\sigma_0^2}$$

критерийни оламиз. Эхтимолликлар назарияси фанида бу тасодифий микдор эркинлик даражаси $k=n-1$ булган χ^2 -таксимот деб аталувчи таксимотга эга эканлиги исботланади. Бу таксимот факат танланма хажми n га боглик эканлигини таъкидлаб утамиз.

Энди берилган α кийматдорчилик даражаси буйича S_2 критик сохани топишга утамиз. Бу сохани H_1 мукобил тахмин курунишига караб аниклаймиз.

I хол. $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$. Бу холда унг томонлама $S_2 = (\chi_{kp}^2, \infty)$ критик соха тузилади.

Критик соханинг критик нуктаси χ_{kp}^2

$$P_{H_0}(\chi^2 \in S_2) = P_{H_0}(\chi^2 > \chi_{kp}^2) = \alpha$$

тенгламадан топилади. Бу тенглама ечими берилган $k=n-1$ ва α буйича махсус

χ^2 -таксимотнинг критик нукталари жадвалидан топилади.

К о и д а № 1: Агарда критерийнинг кузатилган киймати $\chi_{куз}^2 > \chi_{кр}^2$ шартни каноатлантурса асосий тахмин H_0 рад этилади. Акс холда H_0 асосий тахмин кабул этилади.

Мисол № 1: $n=16$, $(S)^*=4,1$, $\alpha=0,05$, $H_0:\sigma^2=5,2$, $H_0:\sigma^2>5,2$, булса, асосий тахминни текширинг.

Ечиш: $k=n-1=16-1=15$, $\alpha=0,05$ буйича χ^2 -таксимотнинг критик нукталари жадвалидан $\chi_{kp}^2=25,0$ эканлигини топамиз.

Энди χ^2 -критерийнинг кузатилган кийматини хисоблаймиз:

$$\chi_{куз}^2 = \frac{(n-1)(S^2)^*}{\sigma_0^2} = \frac{15 \cdot 4,1}{5,2} = 11,8 < 25.$$

Бу ерда $\chi_{куз}^2 < \chi_{kp}^2$ булгани учун H_0 асосий тахминни рад этишимизга асос йукдир.

II хол. $H_1:\sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Бу холда икки томонлама $S_2 = [0, \chi_{kp}^2 (\text{чап})) \cup (\chi_{kp}^2 (\text{унг}), \infty) = S_2' \cup S_2''$ критик соха каралади. Чап $\chi_{kp}^2 (\text{чап})$ ва унг $\chi_{kp}^2 (\text{унг})$ критик нукталарни берилган α кийматдорчилик даражаси буйича

$$P_{H_0} \{ \chi^2 \in S_2' \} = P_{H_0} \{ \chi^2 \in S_2'' \} = \frac{\alpha}{2}$$

тенгламалардан топилади. Бу холда

$$P_{H_0} \{ \chi^2 \in S_2 \} = P_{H_0} (\chi^2 \in S_2') + P_{H_0} (\chi^2 \in S_2'') = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

муносабат уринли булади.

$$P_{H_0} (\chi^2 \in S_2'') = P_{H_0} (\chi^2 > \chi_{kp}^2 (\text{унг})) = \frac{\alpha}{2}$$

тенгламадан берилган $k=n-1$ ва $\frac{\alpha}{2}$ буйича жадвалдан унг $\chi_{kp}^2 (\text{унг})$ критик нуктани топамиз. Аммо жадвалда факат унг критик нукталар берилган холос. Шу сабабли чап $\chi_{kp}^2 (\text{чап})$ критик нуктани топиш учун унинг тенгламасини куйидагича ёзамиз:

$$P_{H_0} (\chi^2 \in S_2') = P_{H_0} (\chi^2 < \chi_{kp}^2 (\text{чап})) = 1 - P_{H_0} (\chi^2 > \chi_{kp}^2 (\text{чап})) = \frac{\alpha}{2}$$

Бу ерда A ва $\bar{A}$ карама-карши ходисалар эхтимолликлари учун $P(A)=1-P(\bar{A})$ формула уринли эканлигидан фойдаландик.

Охирги тенгламани

$$P_{H_0} (\chi^2 > \chi_{kp}^2 (\text{чап})) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

куринишда ёзамиз. Демак $\chi_{kp}^2 (\text{чап})$ критик нуктани жадвалдан $k=n-1$ ва

$1 - \frac{\alpha}{2}$ параметрли унг критик нукта сингари топиш мумкин экан.

Коида № 3 Агарда критерийнинг кузатилган киймати

$$\chi_{kp}^2 (\text{чап}) < \chi_{куз}^2 < \chi_{kp}^2 (\text{унг})$$

шартни каноатлантиса, H_0 асосий тахмин қабул қилинади, акс ҳолда H_0 рад этилади.

Мисол № 2. $n=21$, $(S^2)^* = 15.1$, $\alpha=0,02$, $H_0 : \sigma^2=7.8$, $H_1: \sigma^2 \neq 7.8$ ҳолда H_0 асосий тахмин текширилсин.

Ечиш: $k=n-1=20$, $\frac{\alpha}{2}=0,01$ параметрлар бўйича жадвалдан унг критик нукта $\chi^2_{кр}(\text{унг})=37.6$, $k=20$ ва $1-\frac{\alpha}{2}=0,99$ параметрлар бўйича чап критик нукта $\chi^2_{кр}(\text{чап}) = 8,26$ эканлигини топамиз. Критерийнинг кузатилган қийматини ҳисоблаймиз:

$$\chi^2_{куз} = \frac{(n-1)(S^2)^*}{\sigma_0^2} = \frac{20 \cdot 15,1}{7.8} = 38,7 > 37.6$$

Бу ерда $\chi^2_{куз} > \chi^2_{кр}(\text{унг})$ булгани учун H_0 асосий тахмин рад этилади.

III ҳол. $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$. Бу ҳолда чап томонлама $S_2=[0, \chi^2_{кр}]$ критик соҳа тузилади.

Берилган α қийматдорчилик даражаси бўйича $\chi^2_{кр}$ критик нукта

$$P_{H_0}(\chi^2 \in S_2) = P_{H_0}(\chi^2 < \chi^2_{кр}) = 1 - P_{H_0}(\chi^2 > \chi^2_{кр}) = \alpha$$

тенгламадан топилади. Бу тенгламани

$$P_{H_0}(\chi^2 > \chi^2_{кр}) = 1 - \alpha$$

қуринишда ёзиб, $\chi^2_{кр}$ критик нукталар жадвалидан $k=n-1$ ва $1-\alpha$ параметрлар бўйича топилишини кураимиз.

Қоида № 3 Агарда $\chi^2_{куз} > \chi^2_{кр}$ булса, H_0 асосий тахмин рад этилади, акс ҳолда H_0 тахмин қабул қилинади.

Мисол № 3: $n=17$, $(S^2)^* = 14,7$, $\alpha=0,05$, $H_0 : \sigma^2=10.2$, $H_1: \sigma^2 < 10.2$

Ечиш: $k=16$ ва $1-\alpha=0,95$ параметрлар бўйича χ^2 - тахсимотнинг критик нукталари жадвалидан $\chi^2_{кр}=7.96$ эканлигини топамиз. Критерийнинг кузатилган қиймати

$$\chi^2_{куз} = \frac{(n-1)(S^2)^*}{\sigma_0^2} = \frac{16 \cdot 14,7}{10,2} = 23,06 > \chi^2_{кр}$$

Демак $\chi^2_{куз} > \chi^2_{кр}$ ва шу сабабли H_0 асосий тахмин қабул қилинади.

С а в о л л а р :

1. Нормал таксимот дисперсияси учун статистик тахмин кайси мезон оркали текширилади ?
2. Дисперсия учун статистик тахминнинг унг томонлама критик сохалари кандай топилади ?
3. Дисперсия учун статистик тахминнинг икки томонлама критик сохалари кандай топилади ?
4. Дисперсия учун статистик тахминнинг чап томонлама критик сохалари кандай топилади ?

24 – МАЪРУЗА

БОШ ТУПЛАМ ТАКСИМОТИ ХАКИДАГИ СТАТИСТИК ТАХМИНЛАРНИ
ТЕКШИРИШ.

Таянч иборалар: Мувофиклик критерийси (мезони), Пирсоннинг мувофиклик критерийси.

МАЪРУЗА РЕЖАСИ:

1. Мувофиклик мезонларининг моҳияти.
2. Пирсоннинг мувофиклик мезони.
3. Пирсон мезонини тадбик этиш шартлари.

Адабиёт.

- [1] IX боб, § 3 [3] XIX боб, §§ 22-23 [3] XIII боб, § 12-13
[4] 14 боб, §§ 58-59

Олдинги маърузаларда урганилаётган X тасодифий микдорнинг тахсимот конуни, яъни бош туплам тахсимот конуни қуриниши маълум деб, унга қирувчи номаълум параметрлар ҳақидаги статистик тахминларни текшириш масаласи қуриб утилган эди. Энди бош тупламнинг тахсимот конуни тулик номаълум бўлиб, H_0 асосий тахминда бу тахсимот конуни маълум бир $\mathfrak{Z}$ конундан иборат деб тасдиқланади. Бу статистик тахминни текшириш учун қузатув натижалари асосида ҳосил қилинган махсус бир K тасодифий микдори, критерийни қиритамиз. Одатда K мувофиклик критерийси деб аталади. Математик статистикада Пирсон (χ^2 -квадрат), Колмогоров, Смирнов мувофиклик критерийлари қаралади. Биз Пирсон (χ^2 -квадрат) мувофиклик критерийси асосида H_0 асосий тахминни текшириш устида тухталиб утамиз. Бунинг учун X устида утқазилган n та боғлиқмас қузатувлар натижасида олинган танланма асосида ушбу статистик тахсимот конуни ҳосил қилинган бўлсин:

Варианталар , x_i	x_1	x_2		x_m
Частоталар , n_i	n_1	n_2		n_m

Бу ерда n_i эмпирик қузатилган частоталарни ифодалайди. Энди n_i^* орқали тегишли назарий частоталарни белгилаймиз. Улар қуйидагича ҳисобланади.

I ҳол. H_0 асосий тахминдаги $\mathfrak{Z}$ дискрет тахсимот конуни бўлсин. Бу тахсимот ёрдамида x_i , $i = \overline{1, m}$, қузатилган вариантларнинг $p_i = P_{H_0} \{X = x_i\}$ эҳтимолликларини ҳисоблаймиз. Танланма ҳажмини $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$

тенгликдан топамиз. Бу холда назарий частоталар $n_i^* = np_i$ тенгликдан аникланади.

II хол. $\mathfrak{Z}$ узлуксиз таксимот конуни булсин. Бу холда хар бир x_i варианта учун уларнинг эхтимоллиги $p_i = P\{X = x_i\} = 0$ булади ва шу сабабли юкоридаги усулдан фойдаланиб булмайди. Шунинг учун дастлаб барча вариантлар ётган $[a, b]$ кесмани ($a = \min x_i, b = \max x_i$) кандайдир S та бир хил узунликли (x_j^*, x_{j+1}^*) кисмий интервалларга буламиз. Статистик таксимот конуни (ёки танланма) буйича бу кисмий интервалларга тушган x_i вариантлар сонини, яъни $n_j, j = \overline{1, S}$, эмпирик частоталарни топамиз. Энди тахмин килинаётган $\mathfrak{Z}$ таксимот конун ёрдамида

$$p_j = P_{H_0}(x_j^* < X < x_{j+1}^*)$$

эхтимолликларни хисоблаймиз. Бу холда $n_j^*, j = \overline{1, S}$, назарий частоталарни яна $n_j^* = np_j$ тенглик оркали аниклаймиз. Бу ерда n – танланма хажми эканлигини эслатиб утамиз.

Яна H_0 асосий тахминни текшириш масаласига кайтамиз. Мувофиклик критерийси сифатида эмпирик n_j ва назарий n_j^* частоталар оркали хосил килинган

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^S \frac{(n_j - n_j^*)^2}{n_j^*}$$

тасодифий микдорни оламиз. Инглиз статистиги Пирсон томонидан бу тасодифий микдор $n \rightarrow \infty$ булганда, H_0 асосий тахминда каралаётган $\mathfrak{Z}$ таксимот конуни кандай булишидан катъий назар, эркинлик даражаси k булган χ^2 таксимот конунига эга булиши исботланган. Шу сабабли бу мувофиклик критерийси Пирсон ёки χ^2 (хи квадрат) критерийси дейилади.

Бу ерда эркинлик даражаси $k = S - c - 1$ тенглик буйича топилади. Бунда S – танланмада хосил килинган кисмий интерваллар (гурухлар) сонини, c эса тахмин килинаётган $\mathfrak{Z}$ таксимот конунидаги параметрлар сонини ифодалайди. Масалан, $\mathfrak{Z}$ Пуассон таксимоти булса, $c = 1$ ёки $\mathfrak{Z}$ нормал таксимот булса, $c = 2$ булади.

H_0 асосий тахминни текшириш учун унг томонлама $S_2 = (\chi_{кр}^2, \infty)$ критик сохани оламиз. Берилган α кийматдорчилик даражасида бу сохани аникловчи $\chi_{кр}^2$ критик нуктани

$$P_{H_0}\{\chi^2 > \chi_{кр}^2\} = \alpha$$

тенгламадан эркинлик даражаси $k = S - c - 1$ булган χ^2 таксимот конуни жадвали ёрдамида топамиз.

К о и д а : Агарда χ^2 критерийнинг кузатилган киймати $\chi_{куз}^2 > \chi_{кр}^2$ шартни каноатлантурса, H_0 асосий тахмин рад этилади. Акс холда H_0 асосий тахмин қабул этилади.

К у ш и м ч а л а р : 1. Танланма хажми n етарлича катта ($n \geq 50$) булиши керак.

2. Хар бир (χ_j^*, χ_{j+1}^*) кисмий гурухлар камида 5-8 та x_i вариантани уч ичига олиши керак, яъни эмпирик частоталар $n_j \geq 5$ шартни каноатлантириши керак. Бу шарт бажарилмаса, кисмий интерваллар узунлигини катталаштириш ёки иккита кичик интервалларни бирлаштириш керак.

3. Хисоблашларни соддалаштириш ёки текшириш мақсадида Пирсоннинг мувофиклик критерийсини

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^s \frac{n_j^2}{n_j^*} - n$$

формула билан ҳам хисоблаш мумкинлигидан фойдаланиш маслахат берилади.

М и с о л : Бош туплам нормал тақсимот қонунига эга ҳақидаги H_0 асосий тахминни текшириш учун танланма асосида n_j эмпирик ва n_j^* назарий частоталар топилган :

n_j	8	16	35	72	60	53	36
n_j^*	5	12	39	81	65	49	29

$$\sum n_j = 8+16+35+72+60+53+36=280$$

$$\sum n_j^* = 5+12+39+81+65+49+29=280$$

$\alpha = 0,05$ кийматдорчилик даражасида H_0 асосий тахминни текшираемиз. Бунинг учун дастлаб χ^2 критерийнинг кузатилган $\chi_{куз}^2$ кийматини топаемиз. Хисоблашларни ушбу жадвал қуринишида ифодалаймиз:

J	n_j	n_j^*	$n_j - n_j^*$	$(n_j - n_j^*)^2$	$\frac{(n_j - n_j^*)^2}{n_j^*}$
1	8	5	3	9	1,80
2	16	12	4	16	1,33
3	35	39	-4	16	0,41
4	72	81	-9	81	1,00
5	60	65	-5	25	0,38
6	53	49	4	16	0,33
7	36	29	7	49	1,69
Σ	280	280			6,94

Демак $\chi^2_{\text{куз}} = 6,94$. Кисмий интерваллар сони $S = 7$, нормал таксимотда параметрлари сони $\nu = 2$ булгани учун χ^2 таксимотнинг эркинлик даражаси

$$K = S - \nu - 1 = 7 - 2 - 1 = 4$$

булади. χ^2 таксимот жадвалидан $k = 4$, $\alpha = 0,05$ буйича критик нукта $\chi^2_{\text{кр}} = 9,5$ эканлигини топамиз. $\chi^2_{\text{куз}} < \chi^2_{\text{кр}}$ ($6,94 < 9,5$) булгани учун H_0 асосий тахмин қабул қилинади, яъни бош туплам нормал таксимотга эга деб қараш мумкин.

С а в о л л а р :

1. Мувофиклик критерийси ёрдамида қандай мазмунли статистик тахминлар?
2. Пирсоннинг мувофиклик критерийси нимага асосланган ?
3. Пирсоннинг мувофиклик критерийсини қўллаш учун қандай шартлар бажарилиши керак?

АДАБИЁТЛАР РҲЙХАТИ.

1. **СИРОЖИДДИНОВ С.Х., МАМАТОВ М.** Эхтимоллар назарияси ва математик статистика. Тошкент, Укитувчи, 1978 й.
2. **ГМУРМАН В.Е.** Эхтимоллар назарияси ва математик статистика. Тошкент, Укитувчи, 1977 й.
3. **ГМУРМАН В.Е.** Эхтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечиш буйича кулланма. Тошкент, Укитувчи, 1980 й.
4. **СОАТОВ Ё.У.** Олий математика. II жилд, Тошкент, Укитувчи, 1994й.
5. **ШОДИЕВ Т.Ш., ТУРСУНОВ Р.Т., МИРВАЛИЕВ М.** ва бошқалар. Эконометрика, Тошкент, «Шарк» , 1999 й.
6. **СУЛТАНОВА М.М.** Вариацион статистика, Тошкент, Укитувчи, 1970 й.

МУНДАРИЖА

К И Р И Ш	3
“ЭХТИМОЛЛИКЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА” ФАНИНИНГ ИШЧИ УКУВ ДАСТУРИ.....	4
15 – <i>М А Ъ Р У З А</i> МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ПРЕДМЕТИ, АСОСИЙ МАСАЛАЛАРИ ВА ТУШУНЧАЛАРИ.....	5
16 – <i>М А Ъ Р У З А</i> СТАТИСТИК ТАКСИМОТЛАР.....	8
17- <i>М А Ъ Р У З А</i> СТАТИСТИК БАХОЛАР ВА УЛАРНИНГ ТУРЛАРИ.	13
18 – <i>М А Ъ Р У З А</i> НОРМАЛ ТАКСИМОТ ПАРАМЕТРЛАРИНИ БАХОЛАШ. ТАНЛАНМА УРТА КИЙМАТ ВА ДИСПЕРСИЯ.	17
19 – <i>М А Ъ Р У З А</i> ИНТЕРВАЛ БАХОЛАР ВА УЛАРНИ НОРМАЛ ТАКСИМОТ УЧУН ЯСАШ.	21
20 – <i>М А Ъ Р У З А</i> КОРРЕЛЯЦИОН ВА РЕГРЕСИОН МАСАЛАЛАР	26
21 – <i>М А Ъ Р У З А</i> СТАТИСТИК ТАХМИНЛАРНИ ТЕКШИРИШ.....	30
22 – <i>М А Ъ Р У З А</i> НОРМАЛ ТАКСИМОТ УРТА КИЙМАТИ УЧУН СТАТИСТИК ТАХМИНЛАРНИ ТЕКШИРИШ.	344
23 – <i>М А Ъ Р У З А</i> НОРМАЛ ТАКСИМОТ ДИСПЕРСИЯСИ ХАКИДАГИ СТАТИСТИК ТАХМИНЛАРНИ ТЕКШИРИШ.	399
24 – <i>М А Ъ Р У З А</i> БОШ ТУПЛАМ ТАКСИМОТИ ХАКИДАГИ СТАТИСТИК ТАХМИНЛАРНИ ТЕКШИРИШ.	433
АДАБИЁТЛАР РУЙХАТИ.....	477