

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

Ташкентский государственный технический университет

**Энергетический факультет**

**Кафедра «Электроснабжение»**

**МЕТОДИЧЕСКОЕ УКАЗАНИЕ**

**к практическим занятиям по курсу:**

**«ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ И РЕГУЛИРОВАНИЯ»**

**для студентов направления специальности  
5520200 - «Электроэнергетика»**

**ТАШКЕНТ 2007 г.**

Составитель: д.т.н. профессор. Каримов Х.Г.

Методическое указание к практическим занятиям по курсу: «Основы теории автоматического управления и регулирования»

Печатается по решению научно методического совета Ташкентского государственного технического университета

Протокол №1 от « 30 » августа 2006 года

## **АННОТАЦИЯ**

Методическое указание к практическим занятиям по курсу «Основы автоматического управления и регулирования» предназначено для студентов направления 5520200 – «Электроэнергетика» и представляет сборник задач и примеров расчета по основным разделам курса.

Ряд задач в указание имеют решения и ответы, а часть типовых задач дается без решения. Эти задачи могут использоваться студентами для самостоятельной работы, а также для контрольных работ.

Составитель:      Каримов Х.Г.

## Введение

Электрическая система является совокупностью подсистем, содержащих большое число отдельных элементов – генераторов, трансформаторов, преобразователей, нагрузок и линий электропередач высокого напряжения, низкого напряжения передающих, распределительных и т.д. Она содержит также элементы управления, изменяющие и регулирующие состояние системы или режим системы. С помощью этих устройств управления, в процессе работы электрической системы осуществляется связь сложных технических устройств и элементов, работа которых основана на различных физических принципах (механических, электрических и др.).

Необходимость автоматического управления элементами системы электроэнергетики обусловлена высокими требованиями, предъявляемыми к надежности электроснабжения потребителей и большой скоростью протекания процессов в электрической системе при возникновении нарушений. Требования высокой надежности справедливы и для самих систем автоматического управления. В связи с этим, для обеспечения качественного проектирования и эксплуатации подобных систем необходимо изучить и приобрести соответствующие навыки решения задач по дисциплине «Основы автоматического управления и регулирования» (ТАУ).

Теория автоматического управления входит в число научных дисциплин, образующих науку об управлении, и изучается в настоящее время всеми инженерами, занимающимися проектированием и эксплуатацией сложного технического оборудования во всех сферах промышленного и энергетического производства. Она рассматривает статику, динамику процессов автоматического управления техническими объектами – производственными, энергетическими, транспортными и т.п.

Под термином управление в ТАУ понимают процесс воздействия на объект с целью приведения его в желаемое состояние или положение. Задачей автоматического управления является разработка принципов и средств, необходимых для управления техническими объектами без участия человека.

Чтобы создать автоматическое устройство, необходимо прежде всего четко определить программу работы и требования, предъявляемые к нему. Затем проектируемое автоматическое устройство следует разбить на элементы, каждый из которых выполняет определенную функцию. Часто эти элементы разбиваются, в свою очередь, на еще более простые. Иначе, этот процесс называется составлением структурной схемы сложного автоматического устройства.

Обычно устройства автоматики значительно дешевле по сравнению с первичным оборудованием, в связи с чем всякое улучшение свойств энергосистемы предпочтительнее производить за счет автоматики, а не первичного оборудования: генераторов, трансформаторов, ЛЭП, компенсирующих устройств и т.д. Это требует от инженера, работающего в области автоматики энергосистем, не только хорошего знания существующих устройств, но и умения пра-

вильно с проектировать новое устройство, удовлетворяющее повышенным требованиям. Здесь необходим творческий подход и выработка навыков решения практических задач.

Как известно, овладеть предметом, даже выучив наизусть материал учебника или основные его положения нельзя. Овладеть предметом – это значит уметь применять знание к решению конкретных вопросов практики.

Если обучающийся знает материал учебника или лекций преподавателя и может ответить на заданный вопрос словами учебника или лекций, это еще не значит, что он знает предмет. И магнитофон повторяет напетую певцом мелодию. Умение применять свои знания к решению конкретных вопросов, не рассмотренных в учебнике, содержит элементы творчества. Можно при этом посмотреть и в учебник или воспользоваться другой литературой.

Настоящее пособие предназначается для овладения практическими навыками при решении задач по курсу: «Основы автоматического управления и регулирования» и для упражнений в творческой работе. Пособие может служить не только для упражнений, но и для контроля знания предмета.

Построения пособия соответствует изложенным материалам по курсу «Основы автоматического управления и регулирования» и «Математические задачи энергетики» для высших учебных заведений по направлению 5520200 – «Электроэнергетика». Ряд задач в пособии имеют решения и ответы, а часть типовых задач дается без решения. Эти задачи могут использоваться студентами для самостоятельной работы, а также для контрольных работ.

Основное время при решении задачи должно занимать обдумывание методов решения. Сами же расчеты отнимают небольшое время. Имеются задачи и вовсе не требующие расчетов. Задачи не требуют для своего решения пользование обширной литературой. Все необходимые данные содержатся в самой задаче и в справочных разделах.

## ГЛАВА I

### УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.

#### 1.1. Математический аппарат. Преобразование Лапласа.

Известно, что многие системы автоматического управления при малых отклонениях координат от начального стационарного состояния могут быть описаны системой линейных дифференциальных уравнений и следовательно, для их исследований можно применить все методы, разработанные в теории линейных дифференциальных уравнений. Одним из таких методов является преобразование Лапласа.

Формула прямого преобразования Лапласа:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = F(p) \quad (1.1.1)$$

Здесь функция  $F(p)$  называется изображением функции  $f(t)$  в комплексной плоскости;

$f(t)$  называется оригиналом функции  $F(p)$ .

Обратное преобразование Лапласа имеет вид:

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp \quad (1.1.2)$$

Основные свойства преобразования Лапласа.

1. Линейность. Изображения линейной комбинации функций равно линейной комбинаций этих функций

$$L\left\{\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n a_i L\{f_i(t)\} \quad (1.1.3)$$

2. Изображение производной от функции имеет вид

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) \quad (1.1.4)$$

3. Изображение интеграла от функции

$$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{p} F(p) \quad (1.1.5)$$

4. Изображение от функции с запаздывающим или опережающим аргументов

$$L\{f(t \pm E)\} = e^{\pm pE} F(p) \quad (1.1.6)$$

5. Изменение масштаба времени

$$L\{f(Tt)\} = \frac{1}{T} F\left(\frac{p}{T}\right) \quad (1.1.7)$$

6. Нахождение предельного значения функции в вещественной области

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pL\{f(t)\} \quad (1.1.8)$$

7. Связь начального значения функции и ее изображения

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pL\{f(t)\} \quad (1.1.9)$$

## 1.2. Методика составления операторных уравнений и определения передаточных функций.

Составление уравнений и определение передаточных функций объектов и элементов систем автоматического управления производится на основе физических законов, характеризующих их эксплуатационные режимы (например, законы электромеханики для электромеханических систем). Однако, здесь необходимо уметь инженеру определить ту допустимую степень идеализации и упрощения, которая позволила бы выделить главное в объектах или элементах системы автоматического управления и опустить второстепенные явления, процессы, связи и т.д. Необходимо также уметь правильно представлять и преобразовывать полученные уравнения к виду, наиболее удобному для расчетов.

Строго говоря, любая реальная динамическая система является нелинейной, но большинство непрерывных систем управления могут быть линеаризованы, т.е. заменены приближенно эквивалентными системами, переходные процессы в которых описываются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Линеаризация исходных систем основывается на методе малых отклонений. Сущность этого метода заключается в том, что динамические свойства системы управления исследуются не во всем возможном диапазоне изменения переменных систем, а вблизи их некоторых значений, соответствующих характерным режимам работы (например, номинальный установившийся режим).

При составлении дифференциальных уравнений первоначально, выявляют вектор  $\bar{Y}$  (координату), который характеризует выход системы регулирования; затем управляющее ( $\bar{U}$ ) и возмущающее ( $\bar{f}$ ) воздействия, характеризующие векторы (координаты) входных величин и составляют уравнения вида

$$\bar{Y} = f(\bar{U}, \bar{f}) \quad (1.2.1)$$

затем уравнение (1.2.1) выражают в операторной форме

$$K(p)X(p) = D(p)Y(p) \quad (1.2.2)$$

где  $p = \frac{d}{dt}$  - символ дифференцирования.

Уравнения (1.2.2) может быть представлена в виде передаточной функций

$$W(P) = \frac{Y(P)}{X(P)} = \frac{K(P)}{D(P)} \quad (1.2.3)$$

где  $K(P) = \sum_{i=0}^m K_i P^i$ ;  $D(P) = \sum_{i=0}^n d_i P^i$ ;

Таким образом, любое линейное звено системы, обладающее направленным действием, т.е. передающее сигнал только в одном направлении – от входа к выходу, может списываться уравнением

$$Y(P) = W(P)X(P) \quad (1.2.4)$$

и изображаться структурной схемой (рис. 1.2.1).

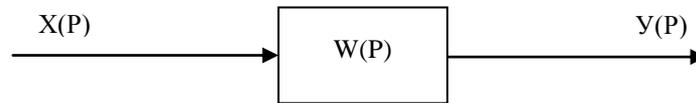


Рис. 1.2.1

### 1.3. Примеры определения передаточных функций отдельных элементов.

**Пример 1.3.1.** Составить дифференциальное уравнение и определить передаточную функцию генератора постоянного тока с независимым возбуждением (рис.1.3.1).

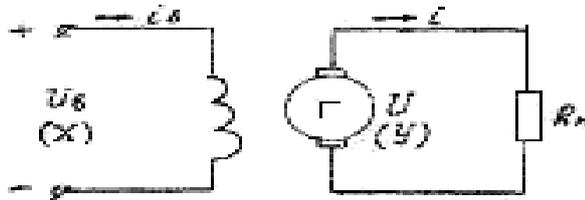


Рис. 1.3.1

**Решение.** Входной величиной генератора постоянного тока (ГПТ) является напряжение на его обмотке возбуждения  $U_B(x)$ , а выходной регулируемой напряжением на якоре  $U(y)$ .

Составим уравнения равновесия напряжения цепи возбуждения:

$$U_B = i_B \Gamma_B + L_B \frac{di_B}{dt} \quad (1.3.1)$$

где  $i_B$ ,  $\Gamma_B$ ,  $L_B$  - ток, сопротивление и индуктивность обмотки возбуждения генератора. Разделив уравнение (1.3.1) на  $\Gamma_B$  и преобразован его по Лапласу получи:

$$q_B U_B(p) = (T_B p + 1) i_B(p) \quad (1.3.2)$$

где  $U_B(p)$ ,  $i_B(p)$  - оперативные изображения напряжения и тока возбуждения;

$$q_B = \frac{1}{\Gamma_B} \text{ - проводимость обмотки возбуждения;}$$

$T_B = L_B / \Gamma_B$  - электромагнитная постоянная времени обмотки возбуждения.

Операторное уравнение главной цепи якоря при пренебрежении индуктивностью якоря

$$U(p) = e(p) - i(p)R \quad (1.3.3)$$

где  $U(p), e(p), i(p)R$  - операторные изображения напряжения, Э.Д.С. и тока генератора;

$R$  - сопротивление цепи якоря генератора.

Считая характеристику холостого хода генератора линейной, можем записать

$$e(p) = K_B i_B(p) \quad (1.3.4)$$

где  $K_B$  - коэффициент пропорциональности между Э.Д.С. и током возбуждения генератора.

Учитывая, что  $i = U / R_H$  и решив совместно соотношения (1.3.2), (1.3.3) и (1.3.4), получим операторное уравнение генератора в виде:

$$q_B U_B(p) = (T_B + 1) \left(1 + \frac{R}{R_H}\right) \frac{U(p)}{K_B} \quad \text{или} \\ (T_B + 1)U(p) = \alpha\beta U_B(p) \quad (1.3.5)$$

где  $\alpha = \frac{R_H}{R_H + R}; \beta = K_B q_B = \frac{E}{U_B}$

Из (1.3.5) следует передаточная функция генератора

$$W(p) = Y(p) / X(p) = U(p) / U_B(p) = \alpha\beta (T_B + 1) \quad (1.3.6)$$

Пример 1.3.2. На рис 1.3.2. представлена принципиальная схема двигателя постоянного тока с независимым возбуждением (ДПТ с НВ). Требуется

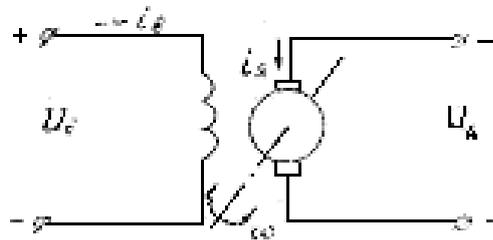


Рис. 1.3.2

составить уравнение и найти передаточную функцию ( $U_B = const$ ).

Решение. Вращающий момент  $M_{BP}$  определяется как

$$M_{BP} = C_1 \Phi i_{я} \quad (1.3.7)$$

Так как  $U_B = const$ , то дифференциальные уравнения для ДПТ составляются со стороны якорной цепи.

Уравнения равновесия напряжений для якорной цепи имеет вид

$$U_{я} = R_{я} i_{я} + L_{я} \frac{di_{я}}{dt} + e \quad (1.3.8)$$

где  $R_{я}$  и  $L_{я}$  - активное и индуктивное сопротивление якорной цепи;

$e$  - Э.Д.С., наводимая в обмотке якоря при его вращении, т.е.

$$e = c_2 \omega \quad (1.3.9)$$

Уравнение (1.3.8) с учетом (1.3.9) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{R_{\text{я}}} U_{\text{я}} = T_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + i_{\text{я}} + \frac{C_2}{R_{\text{я}}} \omega \quad (1.3.10)$$

или в операторной форме

$$\frac{1}{R_{\text{я}}} U_{\text{я}}(p) = (T_{\text{я}} p + 1) i_{\text{я}}(p) + \frac{C_2}{R_{\text{я}}} \omega(p) \quad (1.3.10a)$$

где  $T_{\text{я}} = \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}}$  - электромагнитная постоянная времени двигателя.

На основе законов механики можно записать уравнение для моментов

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{вп}} - M_{\text{с}} \quad (1.3.11)$$

или в операторной форме

$$J p \omega(p) = M_{\text{вп}} - M_{\text{с}} \quad (1.3.11a)$$

где  $J$  - момент инерции вала двигателя (с учетом нагрузки);  
 $M_{\text{с}}$  - момент сопротивления.

Вращающий момент с учетом  $U_{\text{в}} = \text{const}$  пропорционален току якоря, тогда уравнение (1.3.7) примет вид:

$$M_{\text{вп}} = C_3 i_{\text{я}} \quad (1.3.7a)$$

Значение постоянной  $C_3$  зависит от тока возбуждения и конструкции двигателя.

Подставляя (1.3.7a) и (1.3.11a) получим

$$J p \omega(p) = C_3 i_{\text{я}}(p) - M_{\text{с}}(p) \quad (1.3.12)$$

Исключив из (1.3.10a) и (1.3.12) ток  $i_{\text{я}}$ , получим

$$\frac{1}{R_{\text{я}}} U_{\text{я}} (1 + T_{\text{я}}) \left[ \frac{J}{C_3} p \omega(p) + \frac{1}{C_3} M_{\text{с}}(p) \right] + \frac{C_2}{R_{\text{я}}} \omega(p)$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$K_{\text{д1}} U_{\text{я}}(p) - K_{\text{д2}} (1 + T_{\text{я}} p) M_{\text{с}}(p) = (T_{\text{я}} T_{\text{эм}} p + 1) \omega(p) \quad (1.3.13)$$

где  $T_{\text{эм}} = J R_{\text{я}} / C_2 C_3$  - электромеханическая постоянная времени

$$K_{\text{д1}} = \frac{I}{C_2}; K_{\text{д2}} = \frac{R_{\text{я}}}{C_2 C_3} - \text{передаточные коэффициенты.}$$

Полагая, что управляющей входной величиной является напряжение якорной цепи  $U_{\text{я}}(p)$ , выходной скоростью вращения вала  $\omega(p)$ , получим передаточную функцию двигателя: по управляющему воздействию

$$W_U(p) = \frac{K_{\text{д1}}}{(T_{\text{я}} T_{\text{эм}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1)} \quad (1.3.14)$$

по возмущению (моменту сопротивления  $M_{\text{с}}/p$ )

$$W_M(p) = \frac{K_{\text{д2}}}{(T_{\text{я}} T_{\text{эм}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1)} \quad (1.3.15)$$

**Пример 1.3.3.** На рис. 1.3.3. представлен транзисторный усилитель постоянного тока, который является самым простым звеном. Выходная величина его прямо пропорциональна входной величине. Надо найти передаточную функцию.

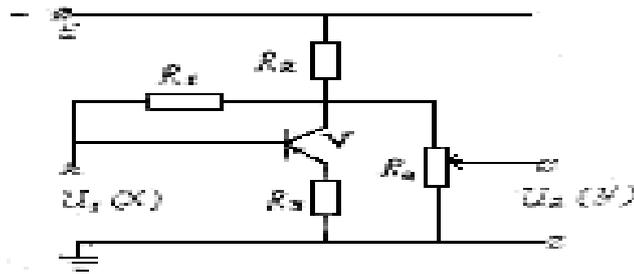


Рис. 1.3.3.

Решение. Уравнение такого звена имеет вид

$$y = K_y x \quad (1.3.16)$$

где  $K_y$  - коэффициент передачи (усиления) электронного усилителя. Передаточная функция электронного усилителя имеет вид

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = K_y \quad (1.3.17)$$

Пример 1.3.4. Составить дифференциальное уравнение к определить передаточную функцию магнитного усилителя (рис. 1.3.4);

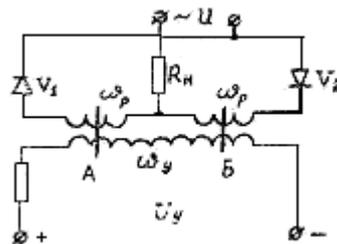


Рис. 1.3.4.

Решение. Уравнение для цепи управления МУ однотактного может быть представлен в виде

$$U_y = (R_y + R_d) i_y + \omega_y S \cdot 10^{-8} \left( \frac{dB_a}{dt} - \frac{dB_b}{dt} \right) \quad (1.3.18)$$

где  $U_y, i_y$  - напряжение и ток в цепи управления;

$R_y, R_d$  - сопротивление обмотки управления и добавочное сопротивление в цепи управления;

$S$  - площадь сечения;

$B_a, B_b$  - магнитная индукция в сердечниках А и В.

Второй член уравнения (1.3.18) представляет Э.Д.С., индуцируемого в цепи управления. Учитывая, что  $B_a = B_b + 2B_c$ , получим

$$U_Y = (R_Y + R_D)i_Y + 2\omega_Y S \cdot 10^{-8} \frac{dB_c}{dt} \quad (1.3.18a)$$

где  $B_0$  - постоянная составляющая индукции в каждом сердечнике

$$B_0 = B_S \quad B_m + \frac{R \quad \omega_Y i_Y}{8f\omega_p^2 S \quad 10^{-8}} \quad (1.3.19)$$

$B_m$  - амплитуда переменной составляющей индукции;

$B_S$  - амплитуда значение индукции насыщения;

$f$  - частота питающего напряжение;

$R = R_U + R_V + R_p$  - сопротивление цепи нагрузки, разное сумме сопротивлений нагрузки, вентиля и рабочих обмоток.

Подставив  $B_0$  из уравнения (1.3.19) в уравнение (1.3.18a), после дифференцирования и преобразований получим

$$T_Y \frac{1}{1 + R_g / R_Y} \frac{di_Y}{dt} + i_Y = \frac{U_Y}{R_Y + R_g} \quad (1.3.20)$$

где  $T_Y = \frac{R\omega_p^2}{R_Y\omega_p^2} \frac{1}{4f}$  - постоянная времени обмотки управления.

Введем обозначения:

$$T_M = T_Y \frac{R_Y}{R_Y + R_g}; \quad K_M = K_Y \frac{R_Y}{R_Y + R_g}; \quad U_M = K_Y i_Y R_Y$$

Учитывая последнее уравнение (1.3.20) в операторной форме представится

$$(T_M p + 1)U_H(p) = K_M U_Y(p)$$

где  $T_M, K_M$  - постоянная времени и коэффициент усиления МУ

Передаточная функция МУ имеет вид

$$W(p) = \frac{U_H(p)}{U_Y(p)} = \frac{K_M}{(1 + T_M p)} \quad (1.3.21)$$

Пример 1.3.5. Составить дифференциальное уравнение и определить передаточную функцию стабилизирующего трансформатора (рис. 1.3.5).

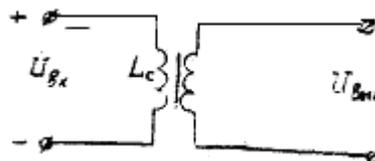


Рис. 1.3.5.

Решение. Трансформатор стабилизирующий представляет однофазный трансформатор напряжения, индуктивность которого может регулироваться путем изменения воздушного зазора магнитной цепи. Трансформатор кроме того, позволяет установить требуемый коэффициент усиления путем изменения отношения числа витков первичной и вторичной обмоток. Для входной и вы-

ходной цепей стабилизирующего трансформатора, работающего в режиме, близком к холостому ходу (при относительно большом сопротивлении нагрузки), справедливы уравнения;

$$U_{\text{ex}} = iR_e + L_C \frac{di}{dt} \quad (1.3.22)$$

$$U_{\text{ввх}} = M \frac{di}{dt}, \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{M} U_{\text{ввх}} \quad (1.3.23)$$

Из (1.3.23) можно найти

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{1}{M} \frac{dU_{\text{ввх}}}{dt}$$

где  $M$  – взаимная индуктивность.

Продифференцировав уравнение (1.3.22) и подставив в него значения  $di/dt$  и  $d^2 i/dt^2$ , найденные из выражений (1.3.23), получим

$$T_C \frac{dU_{\text{ввх}}}{dt} + U_{\text{ввх}} = K_C T_C \frac{dU_{\text{ex}}}{dt} \quad (1.3.24)$$

где  $T_C = \frac{L_C}{R_C}$  – электрическая постоянная времени трансформатора;

$$K_C = \frac{M}{L_C} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ – коэффициент передачи трансформатора.}$$

Уравнения (1.3.24) в операторной форме имеет вид

$$U_{\text{ввх}}(p)(1 + T_C p) = U_{\text{ex}}(p)K_C T_C p \quad (1.3.25)$$

Откуда передаточная функция стабилизирующего трансформатора

$$W_{TC}(p) = \frac{K_C T_C p}{1 + T_C p} \quad (1.3.26)$$

Пример 1.3.6. Для четырехполюсника (рис 1.3.6) составить уравнение и определить передаточную функцию



Рис. 1.3.6

Решение. Для четырехполюсника составим уравнения входа и выхода

$$U_{\text{ex}} = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int idt \quad (1.3.27)$$

$$U_{\text{ввх}} = \frac{1}{c} \int idt \quad (1.3.28)$$

Продифференцируем выражения (1.3.28).

$$\frac{dU_{\text{ввх}}}{dt} = \frac{1}{c} i \Rightarrow i = c \frac{dU_{\text{ввх}}}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = c \frac{d^2 U_{\text{ввх}}}{dt^2}$$

Подставим уравнение (1.3.28) и последние полученные выражения в (1.3.27), тогда имеем

$$U_{\text{ex}} = LC \frac{d^2 U_{\text{вых}}}{dt^2} + RC \frac{dU_{\text{вых}}}{dt} + U_{\text{вых}} \quad (1.3.29)$$

обозначим  $RC = T_1; T_2 = \frac{L}{R}$  - постоянные времени четырехполюсника и

уравнение (1.3.29) запишем в операторной форма

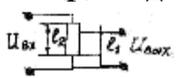
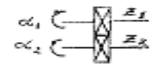
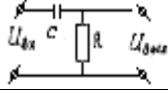
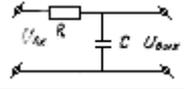
$$U_{\text{ex}}(p) = U_{\text{вых}}(p)(T_1 T_2 p^2 + T_1 p + 1) \quad (1.3.30)$$

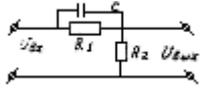
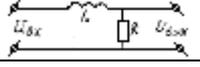
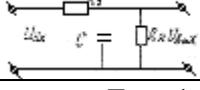
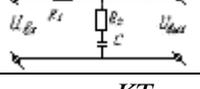
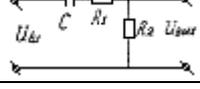
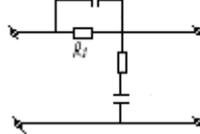
Откуда передаточная функция четырехполюсника имеет вид

$$W(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{ex}}(p)} = \frac{1}{T_1 T_2 p^2 + T_1 p + 1} \quad (1.3.31)$$

Условия следующих примеров, ответы и некоторые замечания по решению сведены в таблицы 1.3.1.

**Таблица 1.3.1.**

| При-<br>мера | Основные данные   | Ответы  | Примечание  |
|--------------|---|---|---|
| 1            | 2   | 3   | 4   |
| 1.3.1.       | Для напряжения составить уравнение к найти передаточную функцию                     | $W(p) = K_D$<br>                  | $K_D = \frac{l_1}{l_2}$   |
| 1.3.2.       | Для редуктора составить уравнение и найти передаточную функцию                      | $W(p) = K_P$<br>                | $K_P = \frac{1}{i_{\text{РЕД}}}$  |
| 1.3.3.       | Для трансформатора напряжения составить уравнение и определить передаточную функцию | $W(p) = K_{\text{ТН}} \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$  | $T_1 = \frac{L_H}{r_H};$<br>$T_2 = \frac{L_H + L_1}{r_H + r_1}; T_1 > T_2$<br>$K_{\text{ТН}} = \frac{r_H}{r_H + r_1}$ |
| 1.3.4.       | Для трансформатора тока составить уравнение и определить передаточную функцию       | $W(p) = \frac{U(p)}{I_1} = \frac{r_H}{r_H + r_H}$<br>$\times \frac{pL'_{\text{нам}}}{T_p + 1}$                      | $T = \frac{L_H + L'_{\text{ном}}}{r_B + r_H}$   |
| 1.3.5.       | Найти передаточную функцию  | $W(p) = \frac{T_p}{1 + T_p}$<br> | $T = RC$  |
| 1.3.6.       | Найти передаточную функцию  | $W(p) = \frac{1}{T_p + 1}$<br>  | $T = RC$  |

| 1       | 2                          | 3   | 4   |
|---------|----------------------------|---|---|
| 1.3.7.  | Найти передаточную функцию | $W(p) = \frac{K(1+T_1p)}{1+T_2p}$   | $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ $T_1 = RC$ $T_2 = \frac{cR_1R_2}{R_1 + R_2}$  |
| 1.3.8.  | Найти передаточную функцию | $W(p) = \frac{1}{T_p + 1}$    | $T = \frac{L}{R}$   |
| 1.3.9.  | Найти передаточную функцию | $W(p) = \frac{K}{T_p + 1}$    | $T_1 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}c$ $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$   |
| 1.3.10. | Найти передаточную функцию | $W(p) = \frac{T_2p + 1}{T_1p + 1}$    | $T_1 = (R_1 + R_2)c$ $T_2 = R_2c$   |
| 1.3.11. | Найти передаточную функцию | $W(p) = \frac{KT_p}{T_p + 1}$   | $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ $T = (R_1 + R_2)c$  |
| 1.3.12. | Найти передаточную функцию | $W(p) = \frac{(T_2p + 1) \cdot (T_3p + 1)}{(T_1p + 1) \cdot (T_4p + 1)}$  | $T_1T_4 = T_2T_3;$ $T_2 = R_1C_1;$ $T_3 = R_2C_2;$ $K = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ $T_1 = \frac{I}{K}T_2;$ $T_4 = KT_3$ |

## ГЛАВА 2.

### 2.1. Частотные характеристики линейных систем.

Для анализа и синтеза систем автоматического управления используются различные методы, основанные на частотных характеристиках. Как известно, имея в своем распоряжении частотные характеристики разомкнутой системы, легко определить свойства замкнутой системы.

Частотная характеристика разомкнутой системы или отдельных элементов  $W(j\omega)$  может быть получена заменой "p" «р» на  $j\omega$  в выражении передаточной функции. График функция  $W(j\omega)$  называется амплитудно-фазочастотной или просто амплитудно-фазовой характеристикой. Выделим и в выражении частотной характеристики вещественную  $P(\omega)$  и мнимую  $Q(\omega)$  составляющие

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (2.1.1)$$

Графики  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  называется амплитудно-фазочастотной характеристикой соответственно вещественной и мнимой частотной характеристикой. Амплитудная частотная характеристика или модуль амплитудно-фазовой характеристики определяется из выражения

$$A(j\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad (2.1.2)$$

Фазо-частотная характеристика или аргумент амплитудно-фазовой характеристики определяется на выражения

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad (2.1.3)$$

Логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ) используются при исследовании систем автоматического управления с помощью частотных методов и представляют собой амплитудную и фазовую частотные троечные в полулогарифмическом масштабе.

Логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАХ) системы или элементов называется кривая, соответствующая 20 десятичным логарифмам модуля частотной характеристики системы или элементов, построенная десятичным в логарифмическом логарифмическом масштабе частот

$$L(\omega) = 20 \lg |A(j\omega)| \quad (2.1.2a)$$

где  $L(\omega)$  - логарифмическая амплитудная частотная характеристика системы или элементов.

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ФЧХ) системы или элементов называется фазовая характеристика  $\varphi(\omega)$ , построенная в десятичном логарифмическом масштабе частот.

При построении ЛЧХ на оси абсцисс откладывают десятичные логарифмы частоты  $\omega$  или значения самой частоты в логарифмическом масштабе (рис.2.1.1.a).

Пример 2.1.1. Построить амплитудно-фазовую характеристику системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{35}{p(0,15p + 1)(0,04p + 1)}$$

Решение. Первый способ построения.

Подставим вместо  $p = j\omega$ , получим

$$W(j\omega) = \frac{35}{j\omega(0,15j\omega + 1)(0,04j\omega + 1)} \quad (2.1.4)$$

Выделим в (2.1.4) вещественную и мнимую части. Для этого сначала раскроем скобки в знаменателе

$$W(j\omega) = \frac{35}{(j0,006\omega^3 - 0,15\omega^2 - 0,04\omega^2 + j\omega)} = \frac{35}{0,19\omega^2 + j\omega} \quad (2.1.5)$$

Умножим числитель и знаменатель выражения (2.1.5) на комплексно-сопряженное число  $(0,19\omega^2 + j(0,006\omega^3 - \omega))$ , тогда и получим:

$$W(j\omega) = \frac{6,65\omega^2}{(0,036\omega^4 + (0,006\omega^3 - \omega)^2)} + \frac{35(0,006\omega^3 - \omega)}{0,036\omega^4 + (0,006\omega^3 - \omega)^2} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где

$$P(\omega) = \frac{6,65\omega^2}{(0,036\omega^4 + (0,006\omega^3 - \omega)^2)} - \text{вещественная часть};$$

$$Q(\omega) = \frac{35(0,006\omega^3 - \omega)}{0,036\omega^4 + (0,006\omega^3 - \omega)^2} - \text{мнимая часть}.$$

Учитывая выражения (2.1.2) и (2.1.3), найдем:

$$A(\omega) = \sqrt{\left[ \frac{6,65\omega^2}{0,036\omega^4 + (0,006\omega^3 - \omega)^2} + \frac{35(0,006\omega^3 - \omega)}{0,036\omega^4 + (0,006\omega^3 - \omega)^2} \right]^2} - \text{амплитудная}$$

частотная характеристика;

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{35(0,006\omega^3 - \omega)}{-6,65\omega^2} = -\text{arctg} \frac{5,26}{\omega} (0,06\omega^2 - 1) - \text{фаза-частотная характе-}$$

ристика.

Подставляя значения частоты в интервале  $0 < \omega < \infty$

**Таблица 2.1.1.**

| $\omega$          | 5        | 10       | 15       | 20       |
|-------------------|----------|----------|----------|----------|
| $P(\omega)$       | -4       | -1,8     | -0,66    | -0,3     |
| $Q(\omega)$       | -3,7     | -0,38    | 0,11     | 0,12     |
| $A(\omega)$       | 5,5      | 1,8      | 0,67     | 0,3      |
| $\varphi(\omega)$ | $-135^0$ | $-170^0$ | $-185^0$ | $-198^0$ |

Построенные по данным таблицы 2.1.1. амплитудно-фазовая, амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики приведены на рис.2.1.3 и рис 2.1.4.

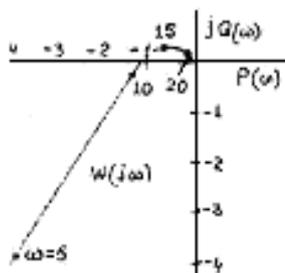


Рис. 2.1.3

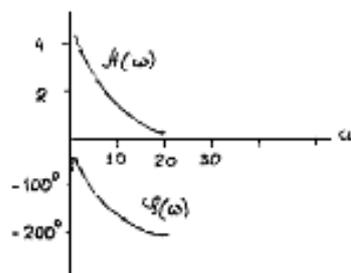


Рис. 2.1.4.

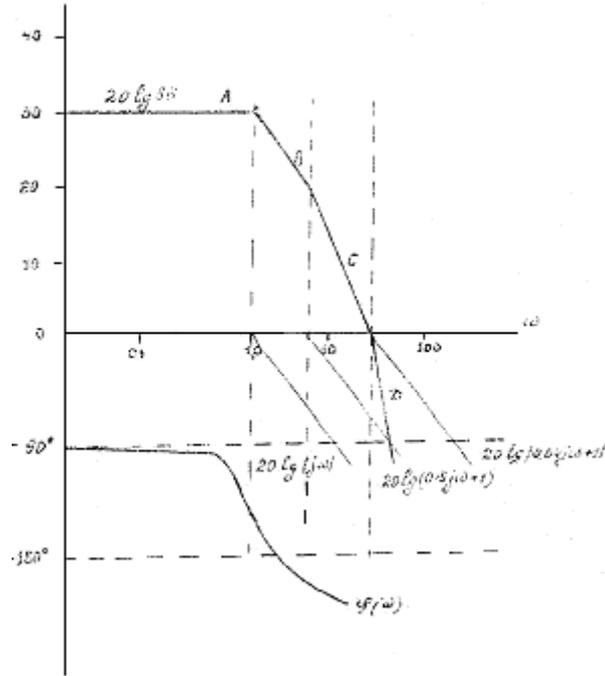


Рис 2.1.5.

Второй способ. Амплитудно-фазовая характеристика системы может быть построена по амплитудно-фазовым характеристикам отдельных звеньев. Выражение 2.1.5. можно представить как произведение трех частотных характеристик, т.е.

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) \cdot W_3(j\omega)K \quad (2.1.6)$$

$$\text{где } W_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega}; \quad W_2(j\omega) = \frac{1}{0,15j\omega + 1}; \quad W_3(j\omega) = \frac{1}{0,04j\omega + 1};$$

Амплитудно-фазовая характеристика  $W_1(j\omega)$  интегрирующего звена совпадает с отрицательной мнимой осью (рис.2.1.5а), амплитудно-фазовые характеристики  $W_2(j\omega)$  и  $W_3(j\omega)$  апериодических звеньев представляют собой полуокружности с диаметров, равным единице (рис 2.1.5б и рис 2.1.5в) .

Задаваясь различными величинами  $\omega$ , определим значения модуля  $A(\omega)$  и фазы  $\varphi(\omega)$  для каждого звена. Далее, вычисляя произведение  $A_1(\omega)A_2(\omega)A_3(\omega)$  и сумму  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$ , найдем вектор полной амплитудно-фазовой характеристики, после чего легко получим показанную ранее амплитудно-фазовую характеристику  $W(j\omega)$  (рис.2.1.3.). Значения модулей и фаз для трех амплитудно-фазовых характеристик приведены в таблице 2.1.2. В этой же таблице помещены суммарные значения фазы  $\varphi(\omega)$  и модуля  $A(\omega)$ .

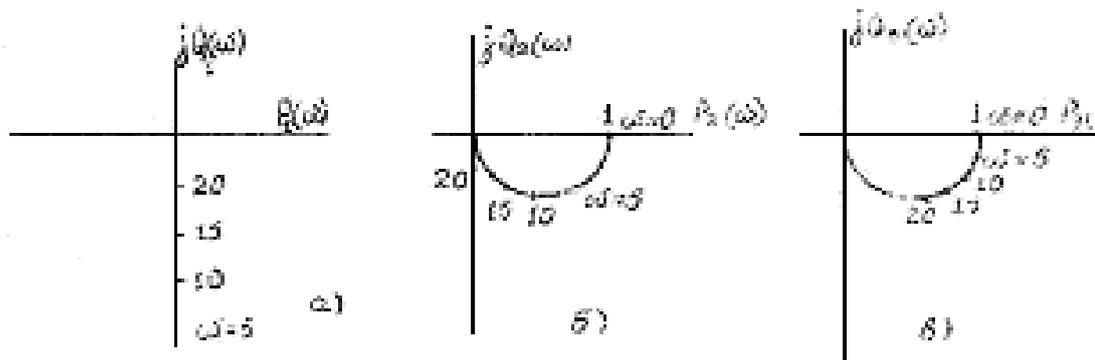


Рис.2.1.3.

Таблица 2.1.2.

| $\omega$            | 5        | 10       | 15       | 20       |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|
| $A_1(\omega)$       | 0,2      | 0,1      | 0,067    | 0,05     |
| $A_2(\omega)$       | 0,78     | 0,52     | 0,37     | 0,28     |
| $A_3(\omega)$       | 0,99     | 0,86     | 0,86     | 0,78     |
| $\varphi_1(\omega)$ | $-90^0$  | $-90^0$  | $-90^0$  | $-90^0$  |
| $\varphi_2(\omega)$ | $-37^0$  | $-57^0$  | $-66^0$  | $-72^0$  |
| $\varphi_3(\omega)$ | $-11^0$  | $-22^0$  | $-31^0$  | $-39^0$  |
| $A(\omega)$         | 5,4      | 1,7      | 0,74     | 0,37     |
| $\varphi(\omega)$   | $-138^0$ | $-169^0$ | $-187^0$ | $-201^0$ |

Как видно из таблицы 2.1.2. значения и фазы и полного модуля  $A(\omega)$  совпадают с соответствующими значениями, помещенными в таблице 2.1.1.

**Пример 2.1.2.** Построить логарифмические амплитудно и фазовую частотные характеристики для систем, передаточная функция которой

$$W(p) = \frac{35}{P(0,15p+1)(0,04p+1)} \quad (2.1.7)$$

Подставим  $p = j\omega$ , получим

$$W(j\omega) = \frac{35}{j\omega(0,15j\omega+1)(0,04j\omega+1)} \quad (2.1.8)$$

откуда

$$20\lg|W(j\omega)| = 20\lg 35 - 20\lg|(j\omega)| - 20\lg|0,15j\omega+1| - 20\lg|0,04j\omega+1| \quad (2.1.9)$$

В практических расчетах целесообразно пользоваться асимптотическими логарифмическими характеристиками, которые представляют собой отрезки прямых линий, сопрягающиеся при  $\omega = 1/T$ , где  $T$  – постоянная времени звена. Рассматриваемая система состоит из одного интегрирующего звена и двух апериодических звеньев первого порядка. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика интегрирующего звена при  $k=1$  – прямая с наклоном

– 20 дб/дек, проходящая через точку  $\omega = 1$  на оси частот. Логарифмические амплитудно-частотные характеристики апериодических звеньев при  $k=1$  состоят на двух прямых – одной, совпадающей с осью частот, и второй, проходящей с наклоном – 20 дб/дек к оси частот. Обе прямые сопрягаются на оси частот в точке  $\omega = 1/T$ . Сопрягающие частоты равны:

$$\omega_1 = 1/0,15 = 6,6 \text{сек}^{-1}; \quad \omega_2 = 1/0,04 = 25 \text{сек}^{-1};$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика, соответствующая усилительному звену с коэффициентом передачи  $k=35$ , представляют собой прямую, параллельную оси частот к отстоящую от нас на расстоянии  $20 \lg 35 = 29,7 \text{дб}$ .

Складывая характеристики звеньев, получим искомую логарифмическую амплитудно частотную характеристику системы (ломанная линия А-В-С-Д на рис 2.1.4.).

Чтобы построить логарифмические фазовые частотные характеристики звеньев, следует определить фазовый угол  $\varphi$  для каждого звена по формуле

$$\varphi_i(\omega) = \text{arctg} \left[ \frac{Q_i(\omega)}{P_i(\omega)} \right] \quad (2.1.10.)$$

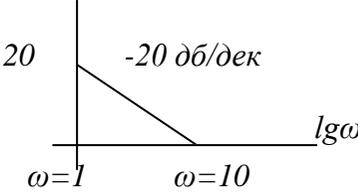
Просуммаров фазовые углы звеньев в определенном диапазоне частот получим фазовую характеристику системы  $\varphi(\omega)$  (см. таблице 2.1.3.).

Таблица 2.1.3.

|                   |     |     |     |     |     |     |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $\omega$          | 0,1 | 1,0 | 10  | 20  | 60  | 100 |
| $\varphi(\omega)$ | 91  | 101 | 167 | 205 | 230 | 245 |

Условия следующих примеров, ответы и некоторые указания по решению сведены в таблице 2.1.4.

Таблица 2.1.4.

| № примера | Основные данные  | Ответы  | Примечание  |
|-----------|--|---|---|
| 1         | 2  | 3   | 4   |
| 2.1.3.    | Для интегрирующего звена с передаточной функцией $W(p) = 10/P$ построить амплитудно-фазочастотную характеристику $[W(j\omega)]$ , амплитудно-частотную характеристику $[A(\omega)]$ , фазочастотную $[\varphi(\omega)]$ , логарифмическую амплитудно-частотную характеристику ( $L$ ). | $W(j\omega) = 10/j\omega$ $A(\omega) = 10/\omega$ $\varphi(\omega) = -\pi/2$ $L = 20\lg[10/\omega]$  | Логарифмическая амплитудная характеристика $20\lg [10/\omega]$ в функции $\omega$ имеет вид кривой. При $\omega = \kappa = 10$ ; $L = 0$ . При $\omega=1$ $L = 20$ .  |
| 2.1.4.    | Для дифференцирующего звена $W(p) = 10p$ , найти и построить те же характеристики, что и в примера 2.1.3.  | $W(j\omega) = 10/j\omega$ $A(\omega) = 10\kappa$ $\varphi(\omega) = \pi/2$ $L = 20\lg[10\omega]$  | Логарифмическая амплитудная частотная характеристика имеет положительный наклон в 20 дБ/дек. При $\omega=1$ , $L = 20$ . а при $\omega=0,1$ , $L = 0$ .   |
| 2.1.5.    | Для инерционного звена с передаточной функцией $W(p) = 10/1 + 0,01p$ , определить и построить те же характеристики, что и в примере 2.1.3.   | $W(j\omega) = 10/1 + 0,01j\omega$ $A(\omega) = 10/[1 + (0,01\omega)^2]$ $\varphi = \arctg 0,01\omega$ $L = 20\lg[A(\omega)] = 20\lg 10 - 10\lg[1 + (0,01\omega)^2]$                     | При построении логарифмической амплитудно-частотной характеристики пользуются асимптотами:<br>$L_a(\omega) = \begin{cases} 20\lg 10 \\ 20\lg 10 - 20\lg 0,01 \end{cases}$ первой составляющей до частоты $\omega \leq 100$ и второй при $\omega \geq 100$ |
| 2.1.6.    | Построить амплитудно-фазовую характеристику для системы, имеющей передаточную функцию  | $W(j\omega) = \frac{10 - 0,86\omega^3}{D(p)} - \frac{j6,6\omega - 0,03\omega^{-3}}{D(p)}$   | $D(p) = (1 + 0,086\omega^2)^2 + (0,66\omega - 0,003\omega^3)^2$ . Решение задачи провести двумя способами.  |

|        |  |   |   |
|--------|--|---|---|
|        | $W(p) = \frac{10}{(0,1p+1)(0,03p^2+0,56p+1)}$  | $A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{D(p)}};$ $\varphi(\omega) = -\text{arctg} \frac{6,6\omega - 0,03\omega^3}{10 - 0,86\omega^2}$  |   |
| 2.1.7. | <p>Построить логарифмическую амплитудно частотную характеристику для системы, передаточная функция которой</p> $W(p) = \frac{20}{p(0,1p+1)(0,02p+1)(0,01p+1)}$ | $L_1(\omega) = 20 \lg 20 = 20 \text{дб}$ $L_2(\omega) = 20 \lg \omega; \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2};$ $L_3(\omega) = -10 \lg(1 + 0,01\omega^2);$ $\varphi_3(\omega) = -\text{arctg} 0,1\omega$ $L_4(\omega) = -10 \lg(0,02\omega^2 + 1)$ $\varphi_4(\omega) = -\text{arctg} 0,02\omega$ $L_5(\omega) = -10 \lg(0,01^2 \omega^2 + 1)$ $\varphi_5(\omega) = -\text{arctg} 0,01\omega$ | <p>Для построения ЛЧХ, <math>W(p)</math> представляют в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев</p> $\omega_{c1} = 1/0,1 = 10$ $\omega_{c2} = 1/0,02 = 50$ $\omega_{c3} = 1/0,01 = 100$ |

## ГЛАВА 3. Структурные схемы и их преобразования.

### 3.1. Соединение звеньев.

Структурная схема системы автоматического управления показывает, из каких элементарных звеньев она состоит и как эти звенья соединены между собой. Элементарные динамические звенья могут быть соединены между собой тремя различными способами: последовательным, параллельным и встречно-параллельным.

Последовательное соединение рис 3.1.1.

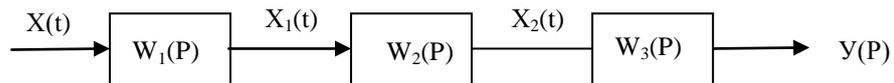


Рис. 3.1.1

При последовательном соединении звеньев передаточная функция системы равна произведению передаточных функций каждого звена.

$$W(P) = W_1(P)W_2(P)W_3(P) \quad (3.1.1.)$$

Параллельное соединение рис.3.1.2.

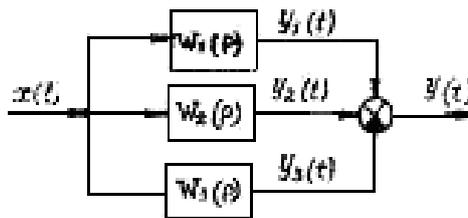


Рис. 3.1.2.

При параллельном соединении звеньев передаточная функция системы равна сумме передаточных функций отдельных звеньев.

$$W(P) = W_1(P) + W_2(P) + W_3(P) \quad (3.1.2.)$$

Встречно-параллельное соединение рис.3.1.3.

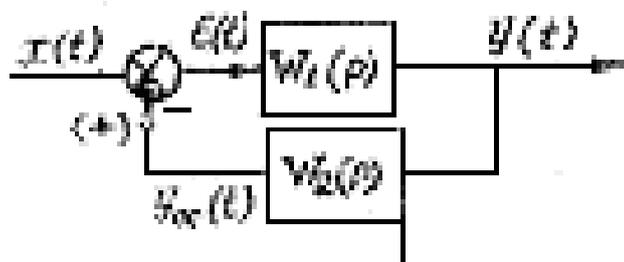


Рис.3.1.3.

При встречно-параллельном соединении звеньев передаточная функция системы определяется по выражению

$$W(P) = \frac{W_1(P)}{1 \pm W_1(P)W_2(P)} \quad (3.1.3.)$$

где знак "+" соответствует отрицательной, а знак "-" – положительной обратной связи.

### 3.2. Примеры составления структурных схем.

Пример 3.2.1. На рис 3.2.1а приведена система автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока и его функциональная схема рис. 3.2.1б.

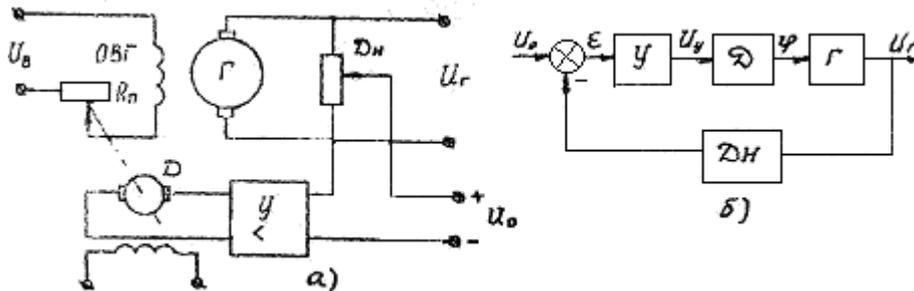


Рис. 3.2.1.

С делителя напряжения ДН снимается напряжение  $U_G$ , пропорциональное регулируемому напряжению  $U_G$ . Оно сравнивается с напряжением  $U_0$  задания. Разность  $\varepsilon = U_0 - U_G$  подается на вход электронного усилителя  $y$ , к выходу которого подключен двигатель постоянного тока  $Д$ . двигатель приводит в движение регулирующий орган – реостат, включенный в цепи обмотки возбуждения ОВГ генератора. При увеличении  $U_G$  сверх заданной величины двигатель переместит ползунок реостата так, чтобы сопротивление реостата увеличилось и напряжение, подводимое к ОВГ уменьшилось. Следствием будет уменьшение регулируемого напряжения.

На рис. 3.2.2. приведена структурная схема системы автоматического регулирования напряжения генератора, составленная по функциональной схема рис. 3.2.1б и передаточным функциям, полученным в первой главе данного пособия.

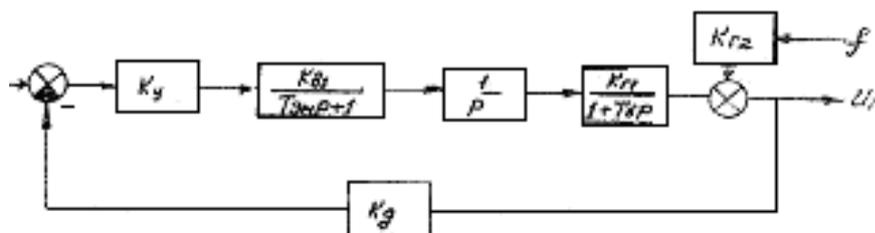


Рис.3.2.2.

**Пример 3.2.2.** На рис 3.2.3а приведена система автоматической стабилизации скорости двигателя постоянного тока в схеме Г-Д и его функциональная схема на рис.3.2.3б.

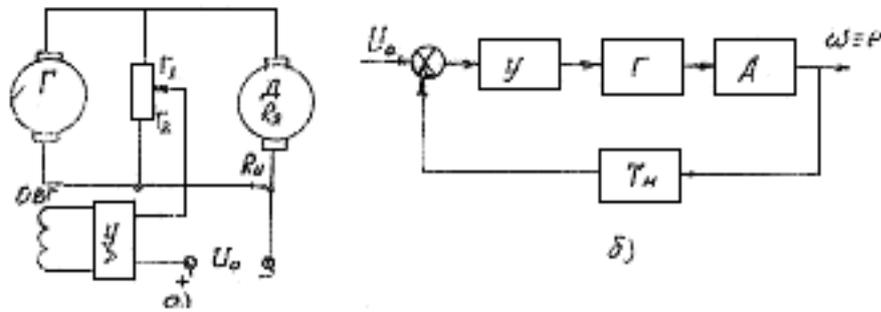


Рис. 3.2.3.

Схема с отрицательной обратной связью по скорости. Отрицательная обратная связь осуществляется при помощи тахометрического моста. При увеличении нагрузки на валу двигателя его скорость уменьшается, вследствие чего разность между напряжением, снимаемым с тахометрического моста  $U_{т.м.} = \gamma e$ , увеличивается. Эта разность усиливается усилителем  $u$  и подается в ОВГ, что приводит к увеличению напряжения на выходе генератора и впоследствии к росту скорости ДПТ.

На рис.3.2.4. приведена структурная схема системы автоматического управления по стабилизации скорости двигателя, составленная по функциональной схеме (рис.3.2.3б) и передаточным функциям, полученным в первой главе данного пособия.

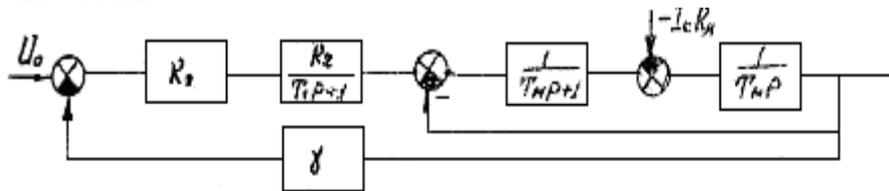


Рис.3.2.4.

### 3.3. Преобразование структурных схем. Передаточные функции систем автоматического управления.

Согласно структурных схем используя правило преобразования структурных схем можно определить передаточную функцию системы автоматического управления.

**Пример 3.3.1.** Определить передаточную функцию системы автоматического регулирования напряжения генератора (рис.3.2.2. см. пример 3.2.1.).

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(P) = \frac{K_p}{(T_{ЭМ}P + I)(T_B P + 1)P} \quad (3.3.1.)$$

где  $K_p = K_y K_{д1} K_p K_{д}$  – коэффициент усиления разомкнутой системы. Передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию  $U_0$

$$W_{зи}(P) = \frac{W_p(P)}{1 + W_p(P)} = \frac{K_3}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}; \quad (3.3.2.)$$

где  $K_3 = K_p / K_{д} = K_y K_{д1} K_{д}$ ;  $a_2 = T_{эм} T_B$ ;  $a_1 = T_{эм} + T_B$ ;  $a_0 = 1 + K_3$ .

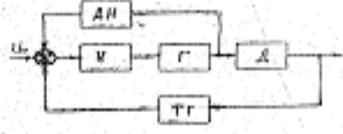
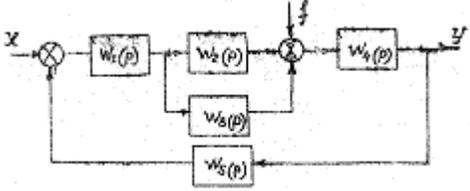
Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию  $f$

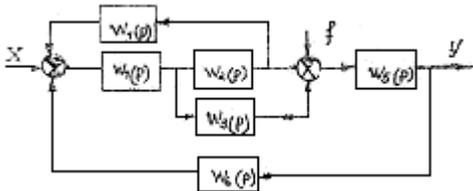
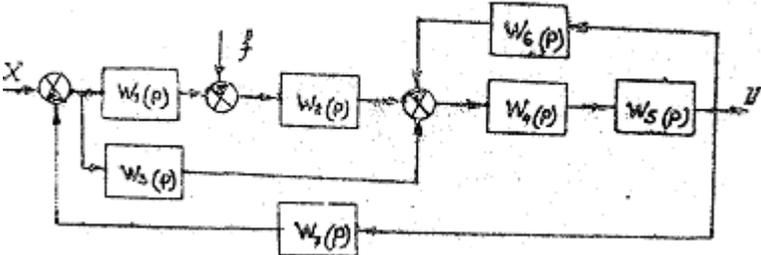
$$W_{зф}(P) = - \frac{(a_2 p^2 + a_1 p) K_{г2}}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \quad (3.3.3.)$$

Условия следующих примеров, ответы и некоторые указания по решению сведены в таблицу 3.3.1.

Таблица 3.3.1.

| № примера | Основные данные   | Ответы   | Примечание   |
|-----------|---|--|--|
| 1         | 2   | 3  | 4  |
| 3.3.2.    | Исследовать характеристики последовательного соединения интегрирующего и инерционного звеньев.                                    | $W(p) = \frac{K}{p(1+T_p)}$ $W(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+Tj\omega)}$ $A(\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{1+(\omega T)^2}}$ $\varphi(\omega) = -\text{arctg} \frac{1}{\omega T}$ $L(\omega) = 20\lg K - 20\lg \omega - 10\lg[1+(\omega T)^2]$             | При последовательном соединении двух звеньев справедливо выражение 3.1.1. Передаточная функция интегрирующего звена $W_1(p) = 1/P$ , а инерционного звена $W_2(p) = \frac{K}{1+T_p}$ |
| 3.3.3.    | Определить частотные характеристики согласно параллельного соединения двух инерционных звеньев, включаемых с одинаковыми знаками. | $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ <p>где <math display="block">P(\omega) = \left[ \frac{K_1}{1+(\omega T)^2} + \frac{K_2}{1+(\omega T)^2} \right]</math></p> $Q(\omega) = \frac{K_1\omega T_1}{1+(\omega T)^2} + \frac{K_2\omega T_2}{1+(\omega T)^2}$ | $W_1(p) = \frac{K_1}{1+T_1 p};$ $W_2(p) = \frac{K_2}{1+T_2 p}$ <p>Пользуясь выражением (3.1.2), получим передаточную функцию и частотные характеристики</p>                          |
| 3.3.4.    | Какие звено образуется, если интегрирующее звено $[W_1(p) = K_1/p]$ охвачено жесткой обратной связью $[W_2(p) = K_2]$             | Апериодическое звено.  | Пользуемся выражением (3.1.3.)   |

|        |  |   |  |
|--------|--|---|--|
| 3.3.5. | Для системы, структурная схема которой изображена на рис.3.2.4., определить передаточную функцию по возмущающему и управляющему воздействиям.  |  |  |
| 3.3.6. | Составить принципиальную схему и структурную схему системы автоматического управления по стабилизации скорости двигателя постоянного тока, питаемого от генератора постоянного тока. В схеме используются отрицательная обратная связь по скорости и по напряжению генератора. Найти передаточную функцию по управляющему воздействию. | Функционального схема предполагаемой системы имеет вид показанный на рисунке.       |  |
| 3.3.7. | Преобразовать структурную схему. Найти передаточные функции по задающему «х» и возмущающему «f» воздействиям.  |  |  |

|         |   |  |  |
|---------|---|--|--|
| 3.3.8.  | Преобразовать структурную схему. Найти передаточные функции по задающему « $x$ » и возмущающему « $f$ » воздействиям. |  |  |
| 3.3.9.  | Преобразовать структурную схему. Найти передаточные функции по задающему « $x$ » и возмущающему « $f$ » воздействиям. |  |  |
| 3.3.10. | Для САУ, изображенной на рисунке примера 3.3.9. вычислить сигнал на выходе, если сигнал на входе составляет $x=10$    |  |  |

## Глава 4.

### Исследование устойчивости линейных систем.

Под устойчивостью понимают способность системы возвращаться в установившееся состояние после снятия воздействия, которое вывело ее из состояния равновесия. Было предложено оценивать устойчивость систем по расположению корней характеристического уравнения на комплексной плоскости корней. При этом необходимым и достаточным условием устойчивости является отрицательность вещественной части всех корней характеристического уравнения.

Однако решение характеристического уравнения возможно далеко не во всех случаях, поэтому для анализа устойчивости систем используют косвенные оценки-критерии, позволяющие ответить на главный вопрос – устойчива или неустойчива система. Критерии устойчивости делятся на алгебраические, куда входят критерии устойчивости Рауса и Гурвица и частотные, куда входят критерии устойчивости Михайлова и Найквиста.

#### 4.1. Исследование устойчивости линейных систем с помощью алгебраических критериев.

Пример 4.1.1. Исследовать систему с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K_1}{p(1+T_a p)(1+T_{Я} p)(1+T_{ЭМ}) + K_1} \quad \text{на устойчивость по критерию Гурвица.}$$

Если имеем  $K_1=20$ ,  $T_{Э}=0,1$ ;  $T_{Я}=0,01$ ;  $T_{ЭМ}=0,02$ .

С учетом параметров системы можно записать характеристическое уравнение системы

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \quad (4.1.1.)$$

где  $a_4=T_{Я}T_{Э}T_{ЭМ}=0,2 \cdot 10^{-4}$ ;  $a_3=T_{Я}T_{ЭМ}+T_{Э}T_{ЭМ}+T_{Я}T_{Э}=0,32 \cdot 10^{-2}$ ;  
 $a_2=T_{Я}+T_{Э}+T_{ЭМ}=0,13$ ;  $a_1=1$ ;  $a_0=K_1=20$ , тогда

$$0,2 \cdot 10^{-4} p^4 + 0,32 \cdot 10^{-2} p^3 + 0,13 p^2 + p + 20 = 0 \quad (4.1.2.)$$

Согласно критерию из коэффициентов характеристического уравнения (4.1.1.) строят главный определитель Гурвица

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (4.1.3.)$$

По критерию Гурвица, условия устойчивости для уравнений четвертой степени (4.1.3) сводится и выполнению неравенств:

$$a_4 > 0; a_3 > 0; a_2 > 0; a_1 > 0; \text{ и } a_0 > 0; \text{ а также}$$

$$\Delta_3 = a_1(a_3 a_2 - a_1 a_4) - a_3^2 a_0 > 0 \quad (4.1.4.)$$

из главного определителя Гурвица находим определитель третьего порядка

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_4 a_2 a_1 - a_3^2 a_0 - a_1^2 a_4$$

Проверяем условие (4.1.4). т.к. условие положительности коэффициента характеристического уравнения выполняется (см. (4.1.2)), тогда далее проверяем

$$\Delta_3 = a_1(a_3 a_2 - a_1 a_4) - a_3^2 a_0 = 0,32 \cdot 10^{-2} (0,13 \cdot 1 - 0,32 \cdot 10^{-3} \cdot 20) - 1^2 \cdot 0,2 \cdot 10^{-4} = 1,912 \cdot 10^{-4} > 0$$

Таким образом, условия устойчивости по критерию Гурвица выдержаны, это дает нам основание заключить, что исследуемая система устойчива.

Пример 4.1.2. Пользуясь положениями критерия Гурвица для системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K_1}{p(1+T_a p)(1+T_y p)(1+T_{эм} p) + K_1} \quad \text{/см. пример (4.1.1.)/} \quad (4.1.5.)$$

найти предельный коэффициент усиления  $K_{\text{ПРЕД}}$  при котором система перестает быть устойчивой.

Предельный коэффициент усиления можно найти из условия, когда по (4.1.4) будет  $\Delta_3 = 0$ , записав в виде

$$a_1(a_3 a_2 - a_1 a_4) = a_3^2 a_0 \quad (4.1.6.)$$

учитывая, что  $a_4 = K_1$  /см. пример (4.1.1.)/, найдем

$$K_{\text{ПРЕД}} = \frac{a_1 a_3 a_2 - a_2 - a_0 a_3^2}{a_1^2} = 38,7 \quad (4.1.7.)$$

Пример 4.1.3. Исследовать систему с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K}{a_4 \cdot p^4 + a_3 \cdot p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0} \quad \text{на устойчивость по критерию Рауса,}$$

если имеем  $K=200$ ;  $a_4=1,0 \cdot 10^{-4}$ ;  $a_3=1,1 \cdot 10^{-2}$ ;  $a_2=0,2$ ;  $a_1=1$ ;  $a_0=10$ .

С учетом параметров системы запишем характеристическое уравнение

$$1 \cdot 10^{-4} \cdot p^4 + 1,1 \cdot 10^{-2} p^3 + 0,2 p^2 + p + 10 = 0 \quad (4.1.8.)$$

Согласно критерию сначала составляется таблица Рауса /см. таблицу 4.1.1./ Здесь в первой строке записывают в порядке убывания индексов коэффициенты характеристического уравнения (4.1.8.), имеющие четный индекс  $a_0, a_2, a_4$ ; во второй строке коэффициенты (4.1.8.) а нечетными индексами.

Таблица 4.1.1.

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
| -  | $C_{11} = a_4 = 1 \cdot 10^{-4}$                         | $C_{21} = a_2 = 0,2$   | $C_{21} = a_0 = 10$                        |
| -  | $C_{12} = a_3 = 1,1 \cdot 10^{-2}$                       | $C_{22} = a_1 = 1$   | $C_{32} = 0$                               |
| $r_3 = C_{11} / C_{12} = a_4 / a_3 = 0,0091$   | $C_{13} = a_2 - r_3 a_1 = 0,2 - 0,00909 = 0,191$         | $C_{23} = a_0 - r_3 0 = 10 - 0,00901 \cdot 0 = 10$             | $C_{33} = C_{41} - r_3 C_{42} = 0 - 0 = 0$ |
| $r_4 = C_{12} / C_{13} = a_3 / C_{13} = 0,058$ | $C_{14} = a_1 - r_4 C_{23} = 1 - 0,58 = 0,42$            | $C_{24} = C_{32} - r_4 C_{33} = 0 - 0,058 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ | $C_{34} = C_{42} - r_4 C_{43} = 0$         |
| $r_5 = C_{13} / C_{14} = 0,191 / 0,42 = 0,455$ | $C_{15} = C_{23} - r_5 C_{24} = 10 - 0,455 \cdot 0 = 10$ |  |  |

Любой из остальных коэффициентов таблицы определяют как

$$C_{k,i} = C_{k+1,i-2} - r_i C_{k+1,i-1} \quad (4.1.9.)$$

$$r_i = C_{1,i-2} / C_{1,i-1} \quad (4.1.10.)$$

где  $k$  – индекс означающий номер столбца табл. 4.1.1.;

$i$  – номер строки той же таблицы.

Заполнив таблицу 4.1.1., по ней делают суждение об устойчивости системы. Для того, чтобы система автоматического управления по критерию Рауса была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы 4.1.1. имели и тот же знак, т.е. при  $a_4 > 0$  были положительными:  $a_4 > 0$ ;  $a_3 > 0$ ;  $c_{13} > 0$ ;  $c_{14} > 0$ ;  $c_{15} > 0$ .

Таблица Рауса (табл.4.1.1.) показывает, что система автоматического управления устойчива.

4.2. Исследование устойчивости линейных систем с помощью частотных критериев.

Пример 4.2.1. Исследовать систему с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K}{p[(1+T_{\text{Я}} \cdot p)(1+T_{\text{Я}} \cdot p)(1+T_{\text{ЭМ}}p) + K_1] + K}$$

на устойчивость по критерию Михайлова, если имеем  $K=1$ ;  $K_1=10$ ;  $T_{\text{Э}}=0,1$ ;  $T_{\text{Я}}=0,01$ ;  $T_{\text{ЭМ}}=0,02$ .

С учетом параметров системы можно записать характеристическое уравнение

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0, \quad (4.2.1.)$$

где  $a_4 = T_{\text{Э}} \cdot T_{\text{Я}} \cdot T_{\text{ЭМ}} = 0,2 \cdot 10^{-4}$ ;  $a_3 = T_{\text{Я}} \cdot T_{\text{ЭМ}} + T_{\text{Э}} \cdot T_{\text{ЭМ}} + T_{\text{Я}} \cdot T_{\text{Э}} = 0,32 \cdot 10^{-2}$ ;

$$a_2 = T_{\text{Я}} + T_{\text{Э}} + T_{\text{Э}} + T_{\text{ЭМ}} = 0,13; \quad a_1 = 11; \quad a_0 = 1$$

$$0,2 \cdot 10^{-4} p^4 + 0,32 \cdot 10^{-2} p^3 + 0,13 p^2 + 11 p + 1 = 0 \quad (4.2.2.)$$

Согласно критерию оператор "р" характеристического уравнения (4.2.2.) заменяется на "jω" и строится годограф Михайлова при изменении частоты ω

$$M(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (4.2.3.)$$

Критерий устойчивости Михайлова формулируется так для того, чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова при изменении частоты от 0 до ∞, начинаясь при ω=0 на вещественной положительной полуоси, обходил только против часовой стрелки (в положительном направлении) последовательно "n" квадрантов координатной плоскости, где "n" – порядок характеристического уравнения.

Согласно (4.2.3.) годограф Михайлова

$$M(j\omega) = (a_4 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_0) + j(a_1 \omega - a_3 \omega^3) \quad (4.2.4.)$$

или с учетом числовых значений

$$M(j\omega) = (0,2 \cdot 10^{-4} \omega^4 - 0,13 \omega^2 + 1) + j(11 \omega - 0,32 \omega^3 \cdot 10^{-2}) \quad (4.2.5.)$$

Здесь  $P(\omega) = 0,2 \cdot 10^{-4} \omega^4 - 0,13 \omega^2 + 1$  – вещественная часть;

$$Q(\omega) = 11\omega - 0,32 \cdot 10^{-2} \omega^3 \quad - \text{ мнимая часть.}$$

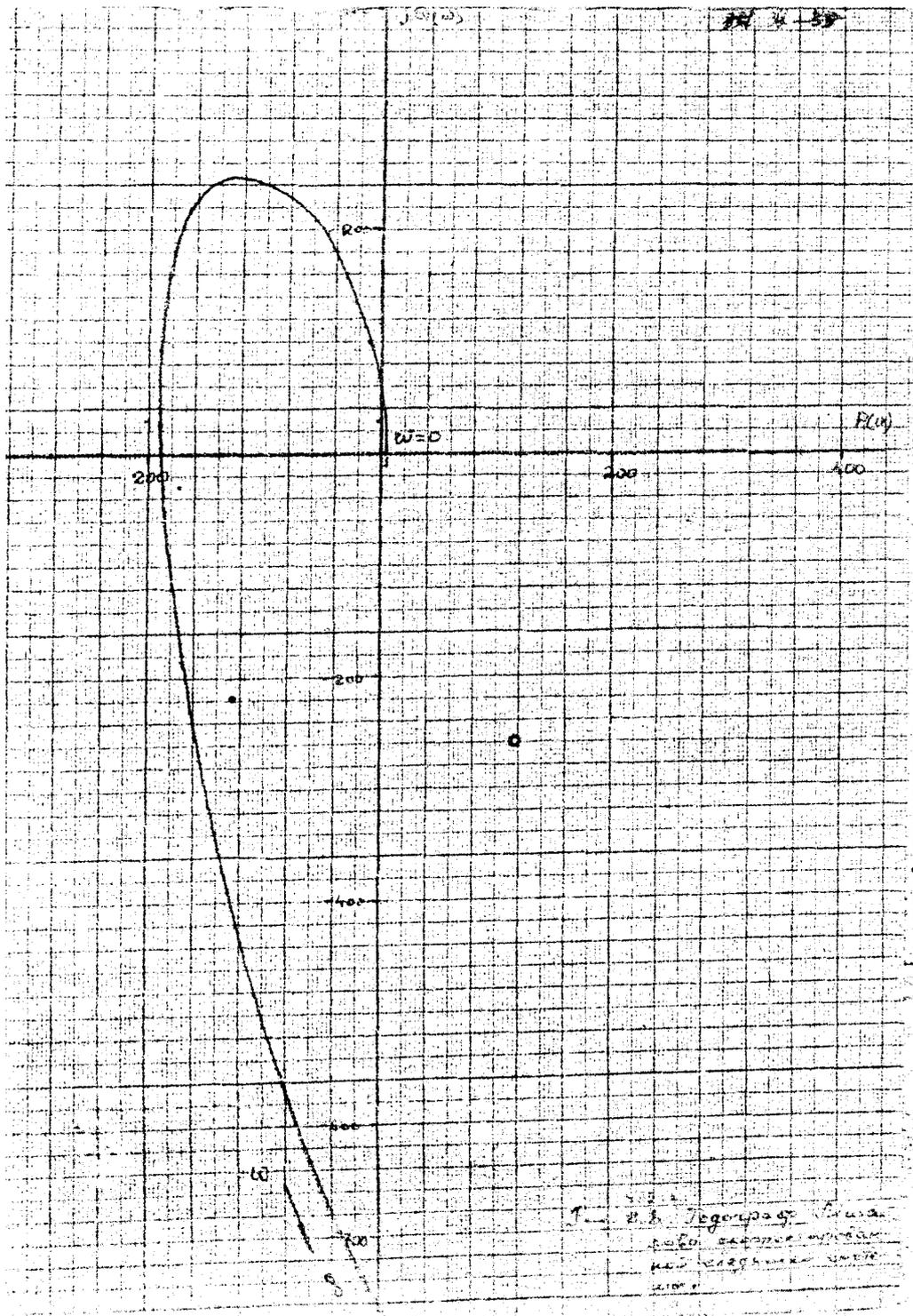
**Таблица 4.2.1.**

|             |   |      |      |      |       |       |       |       |
|-------------|---|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| $\omega$    | 0 | 1    | 2    | 2,76 | 4     | 10    | 20    | 30    |
| $P(\omega)$ | 1 | 0,87 | 0,48 | 0    | -1,08 | -11,8 | -47,8 | -99,8 |
| $Q(\omega)$ | 0 | 11   | 21,9 | 30,3 | 43,8  | 106,8 | 194,4 | 243,6 |

**Продолжение таблицы 4.2.1.**

|             |        |        |        |        |       |      |
|-------------|--------|--------|--------|--------|-------|------|
| $\omega$    | 40     | 58,8   | 60     | 80     | 100   | 200  |
| $P(\omega)$ | -155,8 | -209,5 | -207,8 | -11,8  | 701   | 1126 |
| $Q(\omega)$ | 235,2  | 0      | -31,2  | -758,4 | -2100 | 4560 |

Как видно из рис. 4.2.1 исследуемая система автоматического управления устойчива, так как годограф Михайлова описывается кривой, соответствующей формулировке критерия устойчивости.



**Пример 4.2.2.** Пользуясь положениями критерия Михайлова, для системы с параметрами, приведенными в примере 4.2.1., найти предельный коэффициент усиления  $K_{\text{ПРЕД}}$ , при котором система перестает быть устойчивой. Из рис.4.2.1. видно, что система будет на границе устойчивости, если значение  $K$  будет равно  $K_{\text{ПРЕД}}$ , при котором годограф  $M(j\omega)$  пройдет через начала координат. Следовательно величина  $K_{\text{ПРЕД}}$  может быть определена из уравнений

$$Q(\omega_n) = 0 \text{ и } P(\omega_n) = 0 \quad (4.2.6.)$$

т.е.

$$0,2 \cdot 10^{-4} \omega_n - 0,13 \omega_n^2 + K_{\text{ПРЕД}} = 0$$

$$11 \cdot \omega_n - 0,32 \omega_n^2 - 10^{-2} = 0 \quad (4.2.6a)$$

из второго уравнения системы (4.2.6a) найдем

$$\omega_n = 58,63$$

Подставляя это выражения в первое уравнение системы (4.2.6a) найдем  $K_{\text{ПРЕД}}$

$$K_{\text{ПРЕД}} = 210,5$$

Таким образом при значении  $K_{\text{ПРЕД}} = 210,5$  система автоматического управления скажется на границе устойчивости.

**Пример 4.2.3.** Исследовать систему с передаточной функцией в разомкнутом

$$W_p(p) = \frac{K}{(T_J T_{ЭМ} p^2 + T_{ЭМ} p + 1)(T_B p + 1)} \quad (4.2.7.)$$

пользуясь критерием устойчивости Найквиста, если имеем  $K=10$ ,  $T_J=0,01$ ,  $T_{ЭМ}=0,1$ ,  $T_B=0,1$ .

Согласно критерия Найквиста строится амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , далее по этой характеристике судят об устойчивости замкнутой САУ.

Заменив в (4.2.7.) оператор «P» на « $j\omega$ », получим амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы

$$W_p(j\omega) = \frac{K}{(a_0 \omega^4 - a_2 \omega^2) - j(a_1 \omega^3 - a_3 \omega)} \quad (4.2.8.)$$

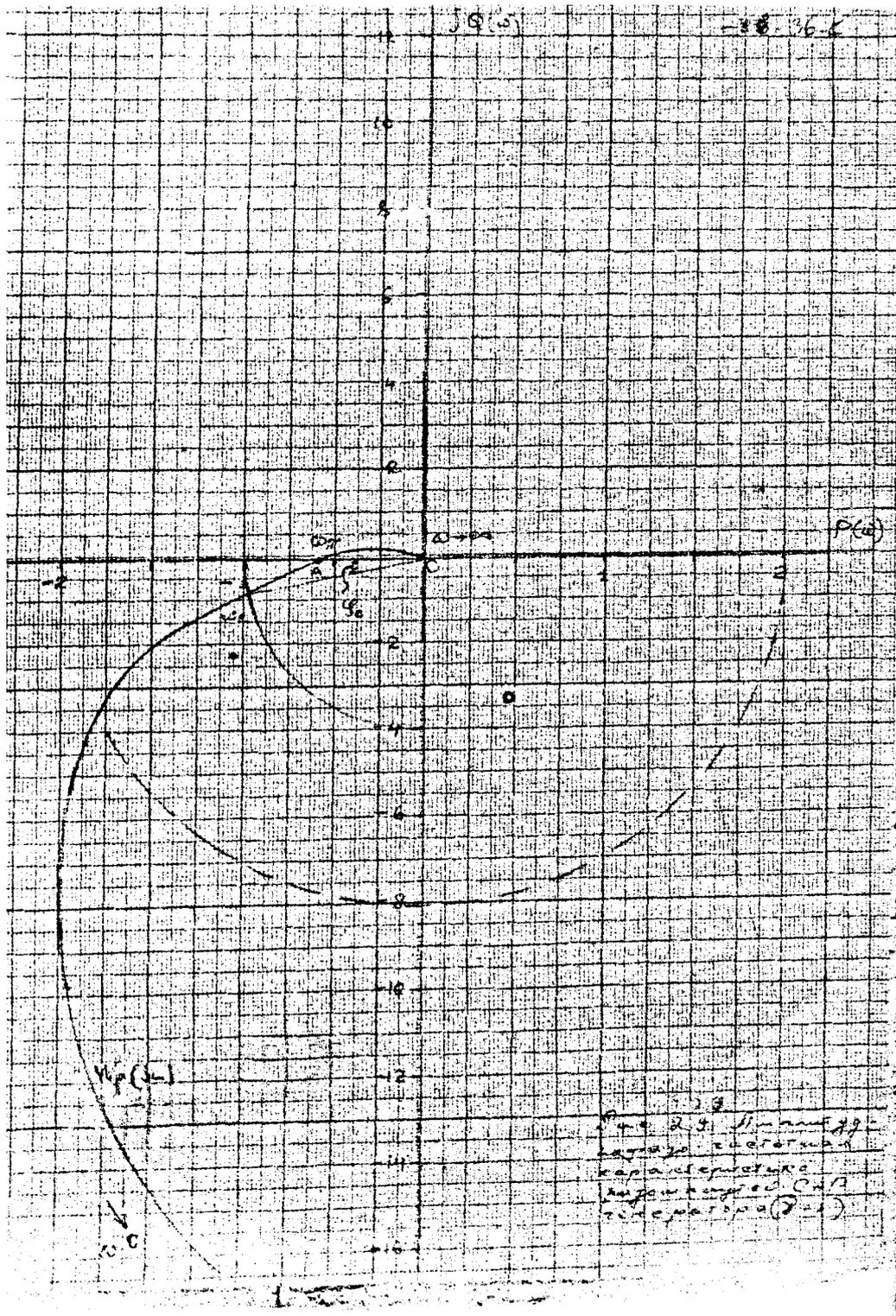
где  $a_0 = T_J T_{ЭМ} T_B = 1 \cdot 10^{-4}$ ;  $a_1 = (T_J + T_B) T_{ЭМ} = 1,1 \cdot 10^{-2}$ ;  $a_2 = T_{ЭМ} + T_B = 0,2$ ;  $a_3 = 1$ ;  $a_4 = K = 10$ .

Умножим числитель и знаменатель уравнения (4.2.8.) на комплексно-сопряженное число  $(a_0 \omega^4 - a_2 \omega^2) + j(a_1 \omega^3 - a_3 \omega)$ , получим

$$W_p(j\omega) = \frac{K(a_0 \omega^4 - a_2 \omega^2)}{(a_0 \omega^4 - a_2 \omega^2)^2 + j(a_1 \omega^3 - a_3 \omega)^2} + j \frac{K_3(a_1 \omega^3 - a_3 \omega)}{(a_0 \omega^4 - a_2 \omega^2)^2 + (a_1 \omega^3 - a_3 \omega)^2}$$

$$\text{где } P(\omega) = \frac{K_3(a_0 \omega^4 - a_2 \omega^2)}{(a_0 \omega^4 - a_2 \omega^2)^2 + (a_1 \omega^3 - a_3 \omega)^2} = \frac{10(1 \cdot 10^{-4} \omega^4 - 0,2 \omega^2)}{(1 \cdot 10^{-4} \omega^4 - 0,2 \omega^2)^2 + (\omega^3 1,1 \cdot 10^{-2} - \omega)^4}$$

$$Q(\omega) = \frac{K_3(a_1 \omega^3 - a_3 \omega)}{(a_0 \omega^4 - a_2 \omega^2)^2 + (a_1 \omega^3 - a_3 \omega)^2} = \frac{10(1,1 \cdot 10^{-2} \omega^3 - \omega)}{(1 \cdot 10^{-4} \omega^4 - 0,2 \omega^2)^2 + (1,1 \cdot 10^{-2} \omega - \omega)^2}$$



1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

Таблица 4.2.2.

| $\omega$    | 0,1  | 1     | 2     | 4     | 6     | 8     | 9,53  | 10    | 20    | 40     | 80 | 100 |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|----|-----|
| $P(\omega)$ | -2   | -1,92 | -1,86 | -1,52 | -1,12 | -0,78 | -0,57 | -0,52 | -0,07 | -0,001 | 0  | 0   |
| $Q(\omega)$ | -100 | 62    | -4,45 | -1,57 | -0,57 | -0,15 | 0     | 0,028 | 0,08  | 0,015  | 0  | 0   |

Условие устойчивости Найквиста для системы автоматического управления, дополненной дугой бесконечного радиуса при  $\omega=0$  выполняется (см.рис.4.2.2.). т.е. кривая  $W(p)j\omega$  не охватывает точку  $(-1; j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

Пример 4.2.4. Исследовать устойчивость системы автоматического управления передаточная функция которой

$$W(p) = \frac{K}{(T_1 T_2 p^2 + T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)} \quad (4.2.9.)$$

$$K=190; T_1=0,13c; T_2=0,044c; T_3=0,009c; T_4=0,114c.$$

Исследование провести следующими критериями: а) критерий Гурвица; б) критерий Рауса; в) критерий Михайлова; г) критерий Найквиста.

Ответ: система с передаточной функцией (4.2.9) в замкнутом состоянии неустойчива.

Пример 4.2.5. Для системы исследованной в предыдущем примере (2.4.4). Найти критическое значение коэффициента усиления  $K_{кр}$  при котором система находится на граница устойчивости. Решение проводить пользуясь положениями следующих критерий: а) критерий Гурвица; б) критерий Михайлова; в) критерий Найквиста.

$$\text{Ответ: } K_{кр} = 7,5.$$

Пример 4.2.6. Пусть дано характеристическое уравнение  $(1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_3)+K=0$ . Необходимо найти предельное значение  $K_{пред}$ , при котором система перестает быть устойчивой (пользуясь критерием Гурвица).

$$\text{Ответ: } K_{пред} = (1 + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_1})(1 + \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_1}{T_3}) = 1$$

Пример 4.2.7. Пусть характеристическое уравнение имеет вид

$$p^6 + 6p^5 + 21p^4 + 44p^3 + 62p^2 + 52p + 100 = 0$$

Определить количество корней, лежащих в правой полуплоскости (пользуясь критерием устойчивости Рауса).

Ответ: Рассматриваемое характеристическое уравнение имеет два корня в правой полуплоскости и соответствует неустойчивой системе.

Пример 4.2.8. Используя критерий устойчивости Михайлова, определить устойчивость электромеханической системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии равна

$$W_p(p) = \frac{K}{(P(1+T_1 p)(1+T_2 p))}$$

$$\text{если имеем } K=58; T_1=0,01c; T_2=0,57c.$$

Ответ: Система устойчива. Годограф Михайлова последовательно проходит через три квадранта.

Пример 4.2.9. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(p) = \frac{K}{P(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)}$$

где  $K$  – коэффициент усиления разомкнутой системы;  $T_1=0,5c$ ;  $T_2 = 0,1c$ ;  $T_3 = 0,02c$ . С помощью критерия устойчивости Михайлова определить критическое значение общего коэффициента усиления разомкнутой системы  $K_{KP}$ , при котором система оказывается на граница устойчивости.

Ответ:  $K_{KP}=9,6$ .

Пример 4.2.10. Передаточная функция электромеханической системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W_p(p) = \frac{K}{P(1+T_g p)(1+T_y p)}$$

Используя критерий устойчивости Найквиста определить устойчивость системы в замкнутом состоянии при следующих параметрах: а)  $K=100$ ;  $T=0,1c$ ;  $T_y=0,02c$ ; б)  $K=50$ ;  $T=10,1c$ ;  $T_y=0,025$ ; в)  $K=200$ ;  $T=0,02c$ ,  $T_y=0,002c$ ; г)  $K=50$ ;  $T=0,1c$ ;  $T_y=0,005c$ .

Ответ; а) замкнутая система неустойчива; б) система на границе устойчивости; в) система устойчива; г) система устойчива.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Анхимюк В.П. – «Теория автоматического управления». Минск; Высшая школа, 1979г, с.350.
2. «Теория автоматического управления» - ч.1., под.ред., проф. А.В. Нетушина М., «Высшая школа», 1975г., с.400.
3. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управлений (под.ред. Бесекарского В.А., М., «Наука», 1978г., с.512).
4. Задачник по теории автоматического управления – М., «Энергия», 1971г., с.380 (под.ред. А.С.Шаталова)
5. Юревич Е.И. – «Теория автоматического управления» - Л., «Энергия», 1979г.
6. Методическая указания к практическим занятиям по курсу «Теория автоматического управления (спец Каримов Х.Г. Азизов А. спец. ТашДТИ, 1990).