АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи
УДК 517.91.93

АХМЕДОВ ОДИЛЖОН СОХИБЖОНОВИЧ

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА РУНГЕ-КУТТА ДЛЯ *DN*-СЛЕЖЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ТАШКЕНТ – 2011

Работа выполнена в Институте математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Абдулла Азамов**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Югай Лев Павлович**

кандидат физико-математических наук, **Абдували Абдуганиев**

Ведущая организация: **Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека**

Защита диссертации состоится «____» _____________ 2011 года в ____ часов на заседании Специализированного совета Д 015.17.01 при Институте математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан по адресу: 100125, г. Ташкент, ул. Дурмон йули, 29.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и информационных технологий АН РУз.

Автореферат разослан «___» _______________ 2011 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета Д 015.17.01
кандидат физико-математических наук А.А.Заитов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Реальные процессы в окружающей природе более адекватно описываются нелинейными моделями, представляемыми главным образом в виде нелинейных систем дифференциальных уравнений. Как с теоретической, так и прикладной точки зрения важную главу теории нелинейных систем дифференциальных уравнений составляет теория динамических систем. Становление этой теории связано со знаменитой серии статей А.Пуанкаре. Ее развитию были посвящены фундаментальные труды А.М.Ляпунова, Г.Дюлака, Г.Биркгофа, Л.С.Понтрягина, А.А.Андронова и др.

Следует отметить, что особо пристального внимания привлекали полиномиальные системы, в особенности квадратичные системы на плоскости. Это связано, в основном, со знаменитой 16-проблемой Гильберта о максимальном числе и взаимном расположении предельных циклов. Среди работ, связанных с изучением этой проблемы, следует отметить исследования Н.Н.Баутина, Р.И.Богданова, Е.А.Леонтовича, А.А.Гриня, Ю.С.Ильяшенко, Ц.-Ч.Туна, Л.А.Черкаса, R.Bamon'a, L.S.Chen'a, F.Dumortier'a, J.Écalle'a, A.Gasull'a, A.L.Neto, S.L.Shi'a, A.Zegeling'a, H.Zoladek'a и др.

Для динамических систем трех и большего числа измерений задача исследования сильно усложняется. К этому типу относится известная система Лоренца, которая рассматривается как модель хаотической динамики. Качественная теория таких систем до сих пор располагает довольно скудным запасом сведений, хотя вот уже полвека находится в центре внимания многочисленных исследователей.

Одну из основных задач теории динамических систем вообще и полиномиальных систем в частности составляет задача о периодических решениях, геометрически изображаемых замкнутыми траекториями (циклами), которая важна и с точки зрения приложений, в особенности, в теории колебаний. К настоящему времени глубоко разработаны методы, позволяющие исследовать проблемы существования, устойчивости и грубости замкнутых траекторий у систем, которые в том или ином смысле близки к системам с известными свойствами (методы изоклин, малого параметра, бифуркации и др.)[1]. Несмотря на это, задача выяснения того, что имеет ли данная конкретная нелинейная система замкнутую траекторию, остается сложной проблемой. Поэтому большинство исследований в этом направлении, как правило, начинается с предположения о существовании периодической траектории. Из недавних исследований в этом направлении отметим вариационный метод приближенного построения периодических решений, который также опирается на предположение об их существовании[2].

---

[1] J.Guckenheimer, Ph.Holmes. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector fields (5th edition), Springer, 1996, – P 560.

[2] He J.-H. Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations // Inter. J. Of Modern Physics B, 2006. – V. 20, – № 10, – P. 1141-1199.

Основным инструментом изучения устойчивости, грубости и других свойств замкнутых траекторий служит метод отображения Пуанкаре (другое название – метод функций последования), который также исходит из предположения существования цикла. Необходимо отметить, что если даже считать известным существование цикла, построение отображения Пуанкаре останется не простой задачей.

В диссертационной работе рассматривается задача построения отображения Пуанкаре с целью доказательства существования замкнутых траекторий многомерных динамических. С этой целью развивается новый метод, предложенный А.Азамовым и названный им методом DN-слежения.[3]

Согласно этому методу, задача Коши для системы дифференциальных уравнений заменяется одношаговым приближенным методом, т.е. системой разностных уравнений, решение которой изображается в фазовом пространстве дискретной траекторией. На практике не удается точно вычислить и дискретную траекторию. В связи с этим рассматривается численная траектория, получаемая из дискретной при реальных вычислениях и состоящая из конечного числа векторов, компоненты которого представляются десятичными числами с фиксированной точностью.

До настоящего времени как дискретные, так и численные траектории рассматривались как средство приближенного нахождения решения задачи Коши, предполагая его существование на заданном отрезке времени. В методе DN-слежения дискретные и численные траектории служат средством не для приближенного решения, а установления того или иного свойства истинных траекторий рассматриваемой системы.

Было показано, что метод DN-слежения является эффективным средством для установления существования замкнутых траекторий у двумерных систем. В этом случае численная траектория позволяет построить область Бендиксона, опираясь на DN-слежение конечного числа, в некоторых случаях даже лишь одной траектории.[4]

Как известно, в многомерном случае теория Пуанкаре-Бендиксона не имеет аналога. Основная цель настоящей диссертации состоит в демонстрации того, что метод DN-слежения применим к доказательству существования замкнутых траекторий у многомерных полиномиальных динамических систем.

Согласно методу DN-слежения, вывод о свойстве конкретной траектории конкретной системы, т.е. решения задачи Коши делается на основе поведения численной траектории. Для того, чтобы такой вывод стал обоснованным,

---

[3] А.А.Азамов. Метод DN-слежения для доказательства существования предельных циклов // "Дифференциальные уравнения и топология. Тезисы докладов международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Л.С.Понтрягина", – М., 17-22 июня 2008 г., – С. 87-88.

[4] А.А.Азамов, А.М.Тилавов. Простейшая динамическая система с предельным циклом // УзМЖ. 2009. – № 2. – С. 35-41.

необходимо иметь оценку отклонения численной траектории от истинной. Как известно, такое отклонение в общем случае слагается из трех составляющих: неустранимых ошибок, ошибок метода и ошибок вычислений. Поскольку метод DN-слежения применяется к конкретным системам, то нет надобности учитывать первый тип ошибок. Поэтому вопрос об оценке точности численного решения сведется к анализу величины ошибок второго и третьего типов. Следует отметить, что этот вопрос всегда находился в центре внимания специалистов вычислительной математики ввиду важности для приложений. В частности, методы численного решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений получили глубокое развитие и продолжает интенсивно развиваться.[5] Из работ, посвященных численным методам решения дифференциальных уравнений и оценке погрешности приближенных решений необходимо отметить труды, монографии А.А.Самарского, А.В.Гулина, Н.Бахвалова и Н.П.Жидкова, К.Деккера, Я.Верверы, Э.Хайрера, С.Нёрсетта и J.C.Butcher, Л.М.Скворцова, Л.В.Кнауба и Е.А.Новикова, Г.Ю.Куликова и др.

Несмотря на высокую степень развития методов приближенного решения задачи Коши, к вопросу об оценке точности численного решения мало уделялось внимание, ограничиваясь главным образом эвристическими соображениями. Этим объясняется тот факт, что выводы оценок с математической точки зрения зачастую содержат логические пробелы.

Метод DN-слежения, как метод доказательства, в данном случае существования замкнутых траекторий, существенно опирается на оценке точности, с которой численное решение аппроксимирует решение дифференциального уравнения. Это требует предъявление строгого доказательства неравенств, устанавливающих оценку точности. В связи с этим, в диссертационной работе дается выводы требуемых неравенств для явных методов Рунге-Кутта.

Степень изученности проблемы. Качественная фазовая картина линейных систем выяснена полностью, даже входить в программу университетского курса дифференциальных уравнений.[6] Качественная картина нелинейных динамических систем на плоскости (на двумерных многообразиях) также выяснена достаточно полно, а для аналитических систем доведено почти до алгоритма, хотя отдельные вопросы остаются открытыми даже в случае полиномиальных систем (наличие полустойчивого предельного цикла, гомоклинической петли сепаратрисы и полициклов, 16-проблема Гильберта и др.).[7]

В настоящее время в проблеме конечности числа предельных циклов аналитических полиномиальных динамических систем на плоскости

---

[5] Butcher J.C. Numerical methods for ordinary differential equations. Chichester: John Wiley and Sons, 2003. – 440 p.
[6] В.И.Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 240 с.

[7] Динамические системы–1, Итоги науки и техн. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1, ВИНИТИ, М., 1985, – 244 с.

достигнуты значительные результаты[8], хотя задача об оценке их количества в общем случае все еще остается нерешенной. Что касается многомерных систем, то проблема существования замкнутых траекторий в общем случае мало изучена. Одним из основных методов остается обобщение метода бифуркации применительно к системам с устойчивым двумерным инвариантным многообразием в окрестности особой точки.[9] Будучи локальным, этот метод неприспособлен к исследованию вопроса о существовании циклов у конкретных систем. Что касается метода отображения Пуанкаре, который остается основным средством в этом вопросе, то, как было отмечено выше, опирается на предположение о существовании замкнутых траекторий. Диссертация посвящается разработке метода DN-слежения с целью построения отображения Пуанкаре и на этой основе установлению наличия цикла одной квадратичной системы третьего порядка.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тема диссертационной работы Ахмедова Одилжона Сохибжоновича на тему «Обоснование метода Рунге-Кутта для DN-слежения траекторий квадратичных динамических систем» была утверждена на Ученом совете Института математики и информационных технологий АН РУз 24 февраля 2010 года (протокол № 3) и исследование проводилось в рамках гранта М-Р-26 «Управление и оптимизация в динамических системах».

Цель исследования. Применение метода DN-слежения к доказательству существования замкнутой траектории квадратичных динамических систем посредством построения отображения Пуанкаре в трехмерном пространстве и с этой целью обоснование оценки точности приближенного и численного решений задачи Коши методом Рунге-Кутта.

Задачи исследования. В диссертационной работе рассматриваются следующие задачи:

– доказательство неравенств для оценки разности между точными, дискретными, численными решениями задачи Коши со строгостью, принятой в математике;

– разработка метода DN-слежения применительно к построению отображения Пуанкаре для многомерных квадратичных систем;

– демонстрация эффективности метода DN-слежения для установления существования замкнутой траектории на примере конкретной трехмерной квадратичной динамической системы.

Объект и предмет исследования. Качественная теория дифференциальных уравнений, численные методы решения задачи Коши.

---

8 Yu.S.Ilyashenko. Centennial history of Hilbert's 16th problem. Bulletin of the AMS. 2002. – V. 39. – № 3. – P. 301-354.

9 Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. "Методы качественной теории в нелинейной динамике". – М.: Ижевск 2004, – 416 с.

Методы исследований. Численные методы, многомерный анализ, качественная и количественная теория динамических систем, компьютерное моделирование.

Основные положения, выносимые на защиту:

– даны строгие доказательства неравенств, выражающих оценку разности между точными, дискретными и численными решениями задачи Коши;

– предложен алгоритм построения отображения Пуанкаре для трехмерных квадратичных систем;

– установлено существование замкнутой траектории конкретной трехмерной квадратичной динамической системы.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации, на которые опираются основные положения диссертации, перечисленные выше и выносимые на защиту являются новыми.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Результаты диссертации, а также методы, развитые в ней применительно к конкретной трехмерной системе, могут быть использованы в исследованиях динамических систем с полиномиальной правой частью.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит фундаментальный характер.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинаре «Динамические системы» под руководством профессора А.А.Азамова (ИМИТ АН РУз), на научном семинаре при специализированном совете Д 015.17.01 при Институте математики и информационных технологий АН РУз (председатель семинара – академик М.С.Салахиддинов), на международных научных конференциях "Управление и оптимизация динамических систем" CODS-2009 (Ташкент, 2009) и на республиканской научной конференции «Новые теоремы молодых математиков–2009» (Наманган, 2009).

Опубликованность результатов. Список публикаций приведен в конце автореферата, в разделе «Список опубликованных работ». Постановка задач и идея применения метода DN-слежения принадлежат научному руководителю А.Азамову, решение поставленных задач и реализация отмеченной идеи выполнены диссертантом. Постановка и решение задачи об оценке разности между дискретным и численным решениями выполнено диссертантом.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на 8 параграфов, заключения и списка использованной литературы из 84 наименований. Диссертация изложена на 100 страницах машинописного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приведены постановка задачи, актуальность и цель диссертационной работы.

Первая глава диссертации состоит из трех параграфов. В параграфе 1.1 изложены необходимые определения суть методов численного анализа для системы (1), используемых в дальнейшем и обзор основных результатов диссертации.

Пусть рассматривается задача Коши

$$z' = f(t,z), \tag{1}$$

$$z(0) = z_0, \tag{2}$$

и пусть ее решение $z(t)$ существует на отрезке $[t_0, t_0 + T]$.

Поскольку, как правило, $z(t)$ невозможно найти в явном виде, то на практике обращаются к численному решению. Для этого отрезок $[t_0, t_0 + T]$ разбивается точками: $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$, $t_N = t_0 + T$ на N подынтервалов. Если привлекаемый метод численного решения относится к типу явных одношаговых, то получается дискретное уравнение следующего вида:

$$z_n = F(f, h, t_{n-1}, z_{n-1}), \tag{3}$$

где z_n– приближенное значение точного решения $z(t_n)$ в точке t_n, $h_n = t_n - t_{n-1}$ – шаг сетки.

Определение 1.1.10. Приближенное решение z_n, получаемое согласно формуле (3), называется дискретной траекторией задачи (1).

При реальных вычислениях из-за округлений результатов арифметических операций (скажем, до k знаков после запятой), вместо последовательности z_n получается другая последовательность векторов ζ_n.

Определение 1.1.11. Приближенное решение ζ_n, которое получается из уравнения (3) в результате вычислений с округлением, называется численной траекторией задачи (1).

При этом решение $z(t)$ исходной задачи Коши будем называть истинной траекторией.

В параграфе 1.2 для полноты дается изложение сущности метода А.Азамова DN-слежения траекторий динамических систем.

Пусть выбраны: положительные числа ε, T, компактные области K_0 и K, такие что $K_0 \subset K, \operatorname{dist}(K_0, \partial K) > 3\varepsilon$, натуральное число N и положено $h = T / N$. Основой для метода DN-слежения служит следующее утверждение:

Если 1) $\zeta_n \in K_0$; 2) $|z(nh) - z_n| < \varepsilon$; 3) $|z_n - \zeta_n| < \varepsilon$;

4) $|z(nh) - z(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [0,T]$ и $n = [t / h + 0.5] \in \{0,1,\ldots,N\}$,

то $z(t)$ существует и не покидает область K на отрезке $[0,T]$ и имеет место оценка $|z(t)-\zeta_n|<3\varepsilon$, где n и t связаны соотношением $n=[t/h+0.5]$.

Существенно, что численная траектория ζ_n является конечной последовательностью и составлено из чисел, хранимых и обрабатываемых на реальном компьютере, что позволяет сделать определенное заключение об истинной траектории $z(t)$.

Параграф 1.3 посвящен методике оценки разности $|z(nh)-z_n|$, когда дискретная траектория z_n находится методом Рунге-Кутта и содержит краткий обзор основных схем численного решения задачи Коши методом Рунге-Кутта и критический анализ оценок точности.

На практике во многих случаях для оценки погрешности приближенного решения задачи Коши пользуются правилом Рунге-Кутта:

$$z(t_n)-\overline{z}_n \approx \frac{\overline{z}_n-\tilde{z}_n}{2^s-1},$$

где $\tilde{z}_n$, $\overline{z}_n$ – значения решения, вычисленные с шагами h и $\dfrac{h}{2}$, соответственно.

Существуют и другие методы оценки погрешности. Например, для метода Рунге-Кутта 4-го порядка точности

$$z_{n+1}=z_n+\frac{k_1(t_n,z_n)+2k_2(t_n,z_n)+2k_3(t_n,z_n)+k_4(t_n,z_n)}{6}$$

погрешность метода управляется контрольным членом, имеющий следующий вид:

$$E_n(h)=\frac{k_1(t_n,z_n)-4k_2(t_n,z_n)+2k_3(t_n,z_n)+k_4(t_n,z_n)}{6},$$

с порядком $\mathrm{O}(h^3)$, где

$$k_1(t,z)=hf(t,z),\ k_2(t,z)=hf\big(t+0.5h,z+0.5k_1(t,z)\big),$$
$$k_3(t,z)=hf\big(t+0.5h,z+0.5k_2(t,z)\big),\ k_4(t,z)=hf\big(t+h,z+k_3(t,z)\big).$$

Поэтому, во всех схемах вывод оценки точности решения носит эвристический характер или точность численного решения оценивается выбрасыванием остаточного члена, поэтому они не могут быть использованы для метода DN-слежения без обоснования.

Вторая глава диссертации состоит из двух параграфов. Во **второй главе** диссертации рассматривается квадратичные системы вида

$$\dot{z}=f(z),\ z(0)=z_0,\ z\in\mathbb{R}^d, \tag{4}$$

где $f_k(z)=\sum_i a_i^k z_i+\sum_i\sum_{j\ge i} b_{ij}^k z_i z_j$, $a_i^k, b_{ij}^k\in\mathbb{R}$, $i,j,k=\overline{1,d}$.

В параграфе 2.1 получена явная оценка разности между дискретным z_n и точным $z(nh)$ решениями в узловых точках сетки задачи Коши (4). Такая оценка выводится при следующем предположении.

Предположение А. Решение $z(t)$ системы (4) существует на отрезке $[0,T]$ и не покидает заранее выбранную выпуклую компактную область K при $t \in [0,T]$.

Метод DN-слежения может опираться в принципе на любой способ численного решения задачи Коши. Однако, в отличии от численного анализа численное решение в методе DN-слежения используется для установления того, что заданная система обладает тем или иным свойством. Это требует, чтобы оценка точности была не эвристической, а имела строгое доказательство. С этой точки зрения наиболее удобными являются явные схемы Рунге-Кутта.

В случае третьего порядка точности такая схема с фиксированным шагом интегрирования h имеет вид

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}\Big(k_1(z_n,h) + 4k_2(z_n,h) + k_3(z_n,h)\Big), \tag{5}$$

где

$$k_1(z,h) = hf(z),\ k_2(z,h) = hf\big(z + 0.5k_1(z,h)\big),$$
$$k_3(z,h) = hf\big(z + 2k_2(z,h) - k_1(z,h)\big).$$

Пусть

$$m_0 = \max_{z\in K}|f(z)|,\ m_1 = \max_{z\in K}\|f'(z)\|,\ m_2 = \max_{z\in K}\left|\|f''(z)\|\right|, \tag{6}$$

где $|\cdot|$, $\|\cdot\|$, $|\|\cdot\||$ – евклидовы нормы соответственно, вектора $f(z)$, линейного отображения $f'(z)$ и билинейного отображения $f''(z)$.

Теорема 2.1.1. В предположении А для решения задачи Коши (4) имеет место неравенство

$$|z(h) - z_1| < \big(C_3 + 1.(01)C_{3*}h\big)h^4,$$

где $C_3 = \dfrac{m_0 m_1^3 + 3m_0^2 m_1 m_2}{24}$, а C_{3*} обозначает наибольшую из величин

$$\frac{m_0 m_1^4 + 9m_0^3 m_1^2 + 21m_0^2 m_1^2 m_2}{120},\ \frac{5m_0^3 m_1 m_2^2}{24},\ \frac{5m_0^4 m_1^2 m_2}{128}.$$

Теорема 2.1.2. Пусть наряду с предположением А выполняется условие $z_n \in K$ при всех $n = \overline{0,N}$. Тогда

$$|z(nh) - z_n| < \tilde{C}\,\frac{e^{m_1 T} - 1}{m_1}h^3, \tag{7}$$

где $\tilde{C} = C_3 + 1.(01)C_{3*}h$.

Из-за множителя $e^{m_1 T}$ в оценке (7) точность h^3 может оказаться недостаточной. В таких случаях следует обратиться к методу Рунге-Кутта четвертого порядка точности:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}\left[k_1(z_n,h) + 2k_2(z_n,h) + 2k_3(z_n,h) + k_4(z_n,h)\right],$$

где

$$k_1(z,h) = hf(z),\ k_2(z,h) = hf\left(z + 0.5k_1(z,h)\right),$$

$$k_3(z,h) = hf\left(z + 0.5k_2(z,h)\right),\ k_4(z,h) = hf\left(z + k_3(z,h)\right).$$

Теорема 2.1.3. В предположении A для решения задачи Коши (4) имеет место неравенство

$$\left|z(h) - z_1\right| < \left(C_4 + 1.(01)C_{4*}h\right)h^5,$$

где $C_4 = \dfrac{4m_0m_1^4 + 35m_0^2m_1^2m_2 + 6m_0^3m_2^2}{480}$, а C_{4*} обозначает наибольшую из величин

$$\frac{4m_0m_1^5 + 179m_0^2m_1^3m_2 + 271m_0^3m_1m_2^2}{2880},\ \frac{8m_0^2m_1^4m_2 + 44m_0^3m_1^2m_2^2 + 3m_0^4m_2^3}{2^8},$$

$$\frac{7\left(21m_0^4m_1m_2^3 + 32m_0^3m_1^3m_2^2\right)}{2^{10}},\ \frac{7\left(15m_0^4m_1^2m_2^3 + 32m_0^5m_2^4 + 4m_0^3m_1^4m_2^2\right)}{3\cdot 2^7},$$

$$\frac{21\left(10m_0^4m_1^3m_2^3 + 3m_0^5m_1m_2^4\right)}{2^{10}},\ \frac{21\left(14m_0^5m_1^2m_2^4 + m_0^6m_2^5 + 2m_0^4m_1^4m_2^3\right)}{2^{11}},$$

$$\frac{77\left(3m_0^6m_1m_2^5 + 4m_0^5m_1^3m_2^4\right)}{2^{12}},\ \frac{33m_0^6m_1^2m_2^5}{2^{12}},\ \frac{429m_0^7m_1m_2^6}{2^{16}},\frac{1001m_0^8m_2^7}{3\cdot 2^{19}}.$$

Теорема 2.1.4. Пусть наряду с предположением A выполняется условие $z_n \in K$ при всех $n = \overline{0,N}$. Тогда

$$\left|z(nh) - z_n\right| < \tilde{C}\,\frac{e^{m_1T} - 1}{m_1}h^4, \tag{8}$$

где $\tilde{C} = C_4 + 1.(01)C_{4*}h$.

Параграф 2.2 посвящен выводу неравенств, оценивающих разность между дискретным z_n и численным ζ_n решениями задачи Коши (4).

Соответствующее неравенство для метода Рунге-Кутта 3-го порядка точности дается следующим утверждением.

Теорема 2.2.4. Пусть наряду с предположением A выполняются условия $z_n \in K$ и $\zeta_n \in K$ для всех $n = \overline{0,N}$. Тогда имеет место

$$\left|z_n-\zeta_n\right|<\frac{e^{LT}-1}{Lh}\Delta_{rd},\; n=\overline{0,N},$$

где

$$L=\left(L_1+4L_2+L_3\right)/6,\; L_1=m_1,\; L_2=\left(m_1+0.5m_2I_1(h)\right)\left(1+0.5hL_1\right),$$

$$L_3=\left(m_1+0.5m_2\left(2I_2(h)+I_1(h)\right)\right)\left(1+h\left(2L_2+L_1\right)\right),\; I_1(h)=m_0h,$$

$I_2(h)=m_0h+0.5m_0m_1h^2+0.125m_0^2m_2h^3$ и Δ_{rd} – погрешность вычислений с округлением на одном шаге.

В случае метода Рунге-Кутта 4-го порядка доказано следующее утверждение.

Теорема 2.2.5. Пусть наряду с предположением А выполняются условия $z_n\in K$ и $\zeta_n\in K$ для всех $n=\overline{0,N}$. Тогда

$$\left|z_n-\zeta_n\right|<\frac{e^{LT}-1}{Lh}\Delta_{rd},\; n=\overline{0,N},$$

где

$$L=\left(L_1+2L_2+2L_3+L_4\right)/6,\; L_1=m_1,\; L_2=\left(m_1+0.5m_2I_1(h)\right)\left(1+0.5hL_1\right),$$

$$L_3=\left(m_1+0.5m_2I_2(h)\right)\left(1+0.5hL_2\right),\; L_4=\left(m_1+m_2I_3(h)\right)\left(1+hL_3\right),$$

$$I_1(h)=m_0h,\; I_2(h)=m_0h+0.5m_0m_1h^2+0.125m_0^2m_2h^3,$$

$$I_3(h)=m_0h+0.5m_0m_1h^2+0.125\left(2m_0m_1^2+m_0^2m_2\right)h^3+\frac{13}{16}m_0^2m_1m_2h^4+$$

$$+\frac{1}{32}m_0^2m_1^2m_2h^5+\frac{1}{64}m_0^3m_1m_2^2h^6+\frac{1}{512}m_0^4m_2^3h^7.$$

Третья глава диссертации, состоящая из трех параграфов, посвящена изучению конкретной квадратичной системы

$$\begin{aligned} dz_1/dt&=f_1(z)=-z_2-z_3+z_1^2-z_2^2-z_3^2,\\ dz_2/dt&=f_2(z)=z_1-z_3-z_1^2,\\ dz_3/dt&=f_3(z)=z_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Основным результатом как этой главы, так и всей диссертации является следующий результат.

Теорема 3.2.1. Система (9) имеет замкнутую траекторию в области

$$\Pi_4=\left\{z\left|-0.7\le z_1\le 0.4;\,-0.8\le z_2\le 0.8;\,-0.9\le z_3\le 0.3\right.\right\}.$$

Параграф 3.1 является подготовительным к доказательству этой теоремы. В нем приводится алгоритм построения отображения Пуанкаре для трехмерных динамических систем.

Как показывает компьютерное моделирование, период предполагаемой замкнутой траектории приблизительно должна равняться 8.18. Для отрезков времени такой длины оценки типа (8) практически непригодны, если даже привлечь методы численного решения задачи Коши более высоких порядков точности. Поэтому в диссертационной работе для преодоления этого препятствия применяется прием деления рассматриваемого интервала на несколько частей (см.[10]). В нашем случае интервал $[0, 8.64]$ делится на 12 отрезков.

В соответствии с этим приемом в параграфе 3.2 изучается поведение траекторий этой системы на отрезке времени $[0, 0.72]$. Пусть

$$\Pi_0 = \left\{ z \left| -0.696 \le z_1 \le 0.396; -0.796 \le z_2 \le 0.796; -0.896 \le z_3 \le 0.296 \right. \right\},$$

$$\Pi_1 = \left\{ z \left| -0.697 \le z_1 \le 0.397; -0.797 \le z_2 \le 0.797; -0.897 \le z_3 \le 0.297 \right. \right\},$$

$$\Pi_2 = \left\{ z \left| -0.698 \le z_1 \le 0.398; -0.798 \le z_2 \le 0.798; -0.898 \le z_3 \le 0.298 \right. \right\},$$

$$\Pi_3 = \left\{ z \left| -0.699 \le z_1 \le 0.399; -0.799 \le z_2 \le 0.799; -0.899 \le z_3 \le 0.299 \right. \right\}.$$

В качестве начального условия для системы (9) берется конкретная точка $z_0 = (-0.1073, -0.7126, -0.5166)$, затем изучается поведение траекторий, выходящих из точек сетки $\left(i\delta, j\delta\right)$ круга D^1, лежащий на плоскости Σ^1 с нормалью $f\left(z_0\right)$, где $D^1 = \left\{(u,v) \mid u^2 + v^2 \le 64 \cdot 10^{-6}\right\}$, $\delta = 10^{-5}$, $\left(u, v\right)$ – координаты декартовой системы координат, у которой начало расположено в точке z_0, а в качестве осей взяты главная нормаль и бинормаль к траектории $z(t)$ в точке z_0.

Пусть $z_{ij}(t)$ – траектория выходящая из точки $\left(i\delta, j\delta\right)$, $N = 8000$, $h = 9 \cdot 10^{-5}$, $T = N \cdot h = 0.72$. С целью DN-слежения за поведением траектории $z_{ij}(t)$ применена классическая схема Рунге-Кутта 4-го порядка точности.

Лемма 3.2.1. $\zeta_{ij}^{(n)} \in \Pi_0$ при всех $n = \overline{0, N}$.

Лемма 3.2.2.

$$z_{ij}^{(n)} \in \mathrm{Int}\Pi_1 \text{ и } \left| z_{ij}^{(n)} - \zeta_{ij}^{(n)} \right| < 10^{-10}$$

при всех $n = \overline{1, N}$ и $\zeta_{ij}^{(0)} = z_{ij}^{(0)}$.

---

[10] А.А.Азамов, А.М.Тилавов. Простейшая динамическая система с предельным циклом // УзМЖ. 2009. – № 2. – С. 35-41.

Лемма 3.2.3.
$z_{ij}(nh) \in \mathrm{Int}\,\Pi_2$ и $\left|z_{ij}(nh) - z_{ij}^{(n)}\right| < 2.2 \cdot 10^{-14}$ при всех $n = \overline{0, N}$.

Лемма 3.2.4. Пусть $t \in \left[0, T\right]$, $n = [t / h + 0.5] \in \left\{0, 1, \dots, N\right\}$. Тогда $z_{ij}(t) \in \mathrm{Int}\,\Pi_3$ и $\left|z_{ij}(t) - z_{ij}(nh)\right| < 1.125 \cdot 10^{-4}$ при всех $n = \overline{0, N}$.

Лемма 3.2.5. Пусть $t \in [0, T]$, $(u, v) \in D_0$ и $i = [u / \delta + 0.5]$, $j = [v / \delta + 0.5]$. Тогда $z_{uv}(t) \in \Pi_4$ и $\left|z_{uv}(t) - z_{ij}(t)\right| < 1.645 \cdot 10^{-4}$.

Из лемм 3.2.1-3.2.5 следует, что предположение A имеет место, поэтому справедлива

Теорема 3.2.2. Пусть $t \in [0, T]$, $(u, v) \in D^1$. Положим $i = [u / \delta + 0.5]$, $j = [v / \delta + 0.5]$, $n = [t / h + 0.5]$. Тогда

$$\left|z_{uv}(t) - \zeta_{ij}^{(n)}\right| < 2.771 \cdot 10^{-4}. \tag{10}$$

Таким образом, последовательность векторов $\zeta_{ij}^{(n)}$, реально вычислимых и хранимых в памяти вычислительного устройства, позволяют прослеживать за любой из траекторий $z_{uv}(t)$ с точностью до $2.771 \cdot 10^{-4}$.

В параграфе 3.3 изучены поведения других траекторий данной системы на отрезке времени $\left[T_i, T_{i+1}\right]$, где $T_i = 0.72\, i$, $i = \overline{1, 11}$. Отметим, что на каждом отрезке $\left[T_i, T_{i+1}\right]$ оценка (10) сохраняется. Применив методу DN-слежения на каждом отрезке времени, построено отображения Пуанкаре (см. рис. 1) и доказано, что это отображение отображает круг в себя. Поэтому в силу теоремы Брауэра это отображение имеет неподвижную точку, т.е. система (9) в области Π_4 имеет замкнутую траекторию.

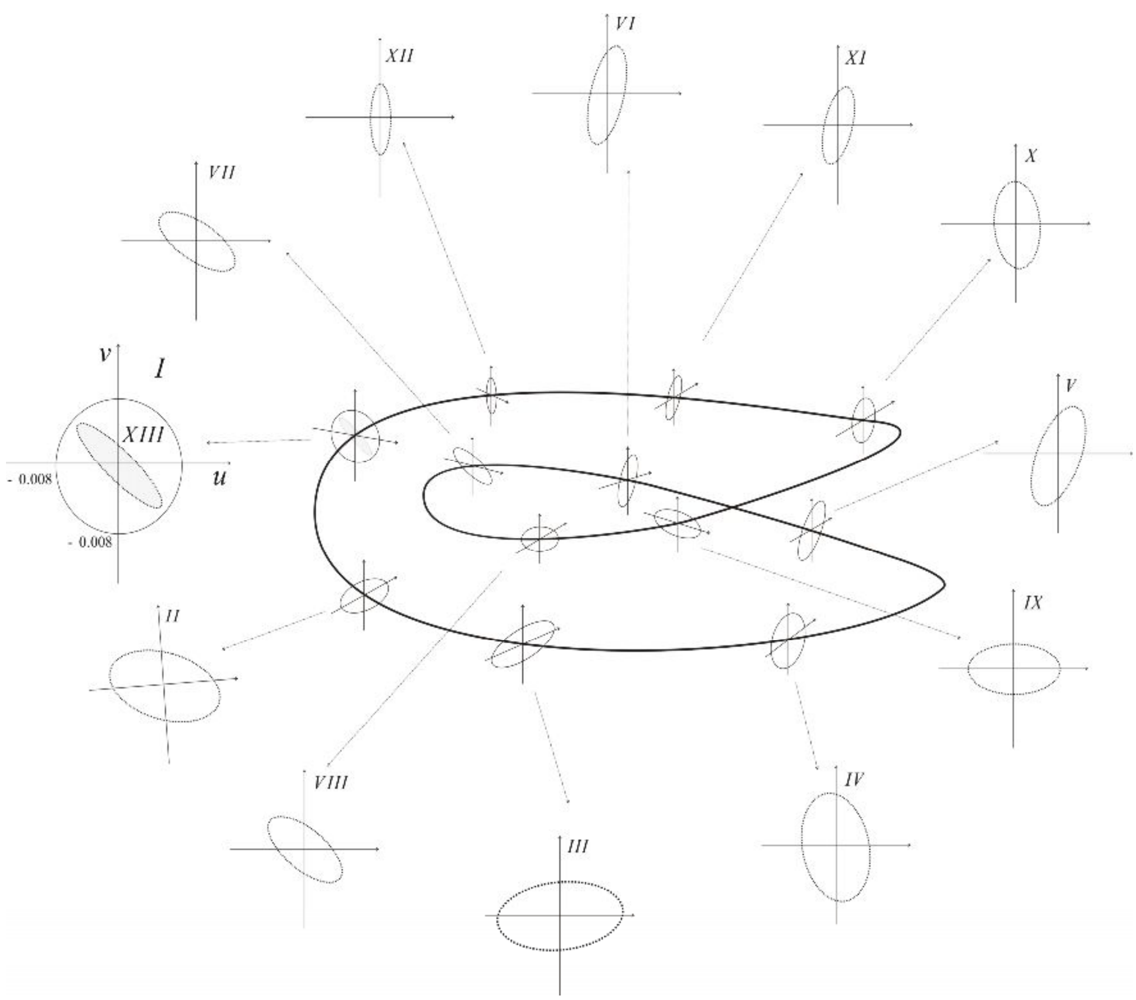

Рис. 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе показана эффективность метода DN-слежения при решении задачи о существовании замкнутой траектории квадратичных динамических систем.

Учитывая, что метод DN-слежения опирается на оценку точности приближенного решения задачи Коши, проведен критический обзор известных оценок для метода Рунге-Кутта и выявлены пробелы в их выводе. В связи с этим дано доказательство неравенств, устанавливающих оценки разности между точным и численным решениями.

Разработан метод оценки точности приближения численного решения к дискретному решению квадратичных динамических систем.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Азамов А.А., Ахмедов О.С. Применение метода Рунге-Кутта к анализу устойчивости замкнутой траектории одной нелинейной системы //Труды международной конференции “Казахстан в новом мире и проблемы Национального образования” посвященной 10-летию университета «Сирдаря», Жетысай, 16-18 мая 2008 г., – Т. III, – С. 19-20.

2. Азамов А.А., Ахмедов О.С., Тилавов А.М. Установление существования замкнутой траектории динамических систем методом DN-слежения //Международная конференция. УрО РАН и УрГУ. “Актуальные проблемы теории устойчивости и управления” APSCT’2009. Екатеринбург, Россия, 21-26 сентября 2009 г., – С. 23-24.

3. Ахмедов О.С. Об оценке приближенного вычисления траекторий динамических систем //«Новые теоремы молодых математиков–2009», – Наманган, 6-7 ноября 2009.

4. Ахмедов О.С. Об оценке точности численных траекторий динамических систем //“Управление и оптимизация динамических систем” (CODS-2009). Международная конференция. – Ташкент, 28-30 сентября 2009г., – С. 25.

5. Ахмедов О.С. Обоснование оценки точности приближенного решения задачи Коши методом Рунге-Кутта 4-го порядка //Узбекский математический журнал. – № 1. –Ташкент. 2010. – С. 24-31.

6. Ахмедов О.С. Обоснование оценки точности численного решения задачи Коши методом Рунге-Кутта 4-го порядка // Узбекский математический журнал. – № 4. –Ташкент. 2010. –С. 31-38.

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор **Аҳмедов Одилжон Соҳибжонович**нинг 01.01.02–дифференциал тенгламалар ихтисослиги бўйича **«Квадратик динамик системалар траекторияларини *DN*-кузатиш учун Рунге-Кутта методини асослаш»** мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: квадратик системалар, Рунге-Кутта методи, DN-кузатув методи, локал ва глобал хатоликлар, Пуанкаре акслантириши, ёпиқ траекториялар.

Тадқиқот объектлари: квадратик динамик системалар, уч ўлчовли фазода Пуанкаре акслантириши, Рунге-Кутта методнинг локал ва глобал хатоликлари.

Ишнинг мақсади: Уч ўлчовли квадратик динамик системанинг ёпиқ траекторияси мавжудлигини исботлаш учун Пуанкаре акслантиришини қуриш орқали DN-кузатув методини қўллаш ва шу мақсадда Коши масаласини Рунге-Кутта методи билан топилган сонли ечими аниқлигини баҳоловчи тенгсизликларни асослаш.

Тадқиқот методлари: Диссертацияда ҳисоблаш математикаси методлари, динамик системаларнинг сонли ва сифат назарияси, кўп ўлчовли анализ ва компьютерда моделлаштириш методларидан фойдаланилган.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: Диссертацияда қуйидаги асосий натижалар олинган:

– Коши масаласининг аниқ, дискрет ва сонли ечимлари орасидаги фарқни баҳоловчи тенгсизликларнинг қатъий исботи келтирилган;

– уч ўлчовли фазода динамик система учун Пуанкаре акслантириши қуриш алгоритми ишлаб чиқилган;

– уч ўлчовли квадратик динамик системанинг ёпиқ траекторияси мавжудлиги исботланган.

Амалий аҳамияти: диссертацияда олинган натижалар фундаментал аҳамиятга эга.

Татбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: олинган натижалардан университетлар магистратурасида махсус курслар ўқишда, математик моделлаштириш, динамик системалар назарияси ва татбиқлари бўйича илмий тадқиқотларда фойдаланиш мумкин.

Қўлланиш соҳаси: диссертацияда келтирилган асосий натижалар ва методларни ўнг томони кўпҳаддан иборат бўлган бошқа кўп ўлчовли квадратик динамик системаларни ўрганишга татбиқ этиш мумкин.

РЕЗЮМЕ

диссертации **Ахмедова Одилжона Сохибжоновича** на тему: **«Обоснование метода Рунге-Кутта для DN-слежения траекторий квадратичных динамических систем»** на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02–дифференциальные уравнения.

Ключевые слова: квадратичная система, метод Рунге-Кутта, метод DN-слежения, локальная и глобальная погрешность, отображение Пуанкаре, замкнутые траектории.

Объекты исследования: квадратичные динамические системы, отображение Пуанкаре в трехмерном пространстве, локальные и глобальные погрешности метода Рунге-Кутта.

Цель работы: Применение метода DN-слежения к доказательству существования замкнутой траектории квадратичных динамических систем посредством построения отображения Пуанкаре в трехмерном пространстве и с этой целью обоснование оценки точности приближенного и численного решений задачи Коши методом Рунге-Кутта.

Методы исследования: В диссертационной работе используется численные методы, многомерный анализ, качественная и количественная теория динамических систем, компьютерное моделирование.

Полученные результаты и их новизна: В качестве основных результатов отмечаются:

– даны строгие доказательства неравенств, выражающих оценку разности между точным, дискретным и численным решениями задачи Коши;

– предложен алгоритм построения отображения Пуанкаре для трехмерных квадратичных систем;

– установлено существование замкнутой траектории конкретной трехмерной квадратичной динамической системы.

Практическая значимость: результаты, полученные в диссертации, имеют фундаментальный характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: полученные результаты могут быть использованы при чтении спецкурсов для магистров и моделировании колебательных процессов.

Область применения: результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы в исследованиях других трехмерных квадратичных динамических систем с полиномиальной правой частью.

RESUME

Thesis of **Ahmedov Odiljon Sohibjonovich** on the scientific degree competition of the doctor of philosophy in physics and mathematics on specialty 01.01.02 – differential equations, theme: **“Substantiation of the Runge-Kutta method for DN-tracking trajectories of quadratic dynamical systems”.**

Key words: Quadratic system, the Runge-Kutta method, the DN-tracking method, local and global errors, map of Poincaré, closed trajectories.

Subjects of research: Quadratic dynamical systems, map of Poincaré on three-dimensional phase, local and global errors of the Runge-Kutta method.

Purpose of work: Application of the DN-tracking method for to prove the existence of a closed trajectory of the quadratic dynamic systems by means of constructing a map Poincaré in the three-dimensional spaces and to this end substantiate the estimation of accuracy of the numerical solution for a Cauchy problem by the Runge-Kutta method.

Methods of research: methods of numerical methods, multi-measure analysis, quantitative and qualitative theories of dynamical systems, computer modeling.

The results obtained and their novelty: The main results of the work are the following:

- strict proof of the inequalities expressed in the estimation of a difference between exact, discrete and numerical solutions of a Cauchy problem is given;
- the algorithm of construction of a Poincaré’s map for three-dimensional quadratic dynamical systems is shown;
- existence of the closed trajectory of concrete three-dimensional quadratic dynamical systems is proved.

Practical value: The results of the dissertation have fundamental importance.

Degree of embed and economic effectiveness: The received results can be used for teaching special courses for masters and for the further development of the given direction.

Field of application: The main scientific results and methods presented in the dissertation can be used in research of other three-dimensional quadratic dynamical systems.

Соискатель: